Ein integratives Grundkurskonzept am Beispiel von Bézierkurven

von

Nicole Roth, Darmstadt

Zusammenfassung: Spätestens seit TIMSS/III-Deutschland ist der Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II ins Kreuzfeuer der Kritik geraten. Die Unzufriedenheit mit der Analytischen Geometrie in der Schule geht sehr weit, besonders die Ausrichtung der Grundkurse gilt als problematisch. Am Beispiel von Bézierkurven wird eine Gestaltungsvision für ein integratives Grundkurskonzept vorgestellt, das den allgemeinbildenden Charakter des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe II unter Berücksichtigung metakognitionspsychologischer Einsichten hervorhebt. Schülerarbeiten geben einen Einblick, wie dieses Konzept umgesetzt werden kann.

Summary: Since TIMMS/III-Germany the mathematics education in upper secondary level course has come under criticism. Especially the fundamental level course needs improvement. The discontent with analytic geometry at school is evident. By working out the example of Bézier curves, a visionary view of an integrative fundamental level course concept will be presented, emphasising the mathematical literacy education considering the psychology of metacognition. The workouts out of pupils give an insight into the realization of this concept.

1 Einleitung

Zu Beginn wird die aktuelle didaktische Diskussion um die Themenfelder „Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II" und „Analytische Geometrie in der Schule" kurz dargestellt. Die Notwendigkeit des Einbeziehens lernpsychologischer Einsichten wird aufgezeigt. Es geht insbesondere darum, wie Zielvorstellungen begründet und mit welchen konzeptionellen Ansätzen methodische Gestaltungselemente erklärt werden können.

1.1 Aktuelle didaktische Diskussion bezüglich des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe II

Aus TIMSS/III-Deutschland ist bekannt, dass unser Mathematikunterricht sehr variationsarm ist. „In einem primär rezeptiv angelegten Unterricht verfolgen Schülerinnen und Schüler, wie der Lehrer oder die Lehrerin einen mathematischen Gedankengang entwickelt, übertragen den Tafelanschrieb in ihr Schulheft und memorieren Regeln und Verfahren" (BAUMERT et al. 2000, S. 69). Dies sei das Grundgerüst unseres Mathematikunterrichts, unabhängig von Grund- oder Leistungskurs. Vor allem die Grundkurs-Situation ist unbefriedigend (vgl. HEYMANN 1996, SCHMIDT 1993, WINTER 1986, 1989). In den letzten Jahren ist die didaktische Diskussion von dem Ansatz geprägt, dass Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II allgemeinbildenden Charakter haben solle. Die Frage stellt sich, was eine Abiturientin oder ein Abiturient beim Verlassen der Oberstufe können und wissen soll. Dazu geben die einheitlichen Prüfungsanforderungen für das Abitur als Bildungsauftrag der gymnasialen Oberstufe eine Verbindung zwischen *vertiefter Allgemeinbildung* mit *Wissenschaftspropädeutik* und *Studierfähigkeit* an (vgl. EPA 2002). Nach WINTER habe ein Mathematikunterricht drei Grunderfahrungen zu ermöglichen:

(G1) „Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,

(G2) mathematische Gegenstände und Sachverhalte repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktive geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,

(G3) in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen (heuristische Fähigkeiten), zu erwerben" (WINTER 1995, S. 37).

Sowohl Grund- wie Leistungskurs benötigen gleichermaßen alle drei Grunderfahrungen, nur der Grad der gedanklichen Durchdringung solle im Leistungskurs höher sein (vgl. BORNELEIT, DANCKWERTS, HENN, WEIGAND 2001, S. 77). Auf keinen Fall dürften Grundkurse zu abgespeckten Leistungskursen degenerieren (vgl. STEINER 1984, S. 29).

Dies knüpft an eine Forderung von FISCHER an. Dieser schlägt „Kommunikationsfähigkeit mit Experten und der Allgemeinheit" (FISCHER o.J.) als Ziel vor, das es für eine Abiturientin oder einen Abiturienten zu erreichen gilt: „Es geht nicht darum, selbst Experte zu werden in einem bestimmten Fach, aber man soll sich zum einen mit Experten verständigen können und zum anderen befähigt sein, zwischen Experten und der ‚Allgemeinheit' zu vermitteln" (FISCHER o.J.).

1.2 Die aktuelle didaktische Diskussion um das Themenfeld der Analytischen Geometrie

Der Unterricht in Analytischer Geometrie wird weitest gehend als unbefriedigend bezeichnet (vgl. FILLER 2001, S. 21–22, MAAß 2000, S. 3, SCHUPP 2000, S. 52, WITTMANN (2003), S. 64–66). Die aktuelle didaktische Diskussion bezüglich einer Reformierung der Analytischen Geometrie führt zu neuen Ansätzen: Die Idee der Objektstudie, für die FÜHRER bereits 1979 plädiert, wird zum Beispiel von FILLER und WITTMANN (2003) aufgegriffen. SCHUPP plädiert für „eine geometrisch relevante Materialbasis, an der polydeskriptiv unterstützte Überlegungen ansetzen können. Und wir sollten klare Prioritäten schaffen: Beschreibungen sind zur Objektexploration da und nicht Objekte als Futter für Beschreibungen" (SCHUPP 2000,

S. 56). Die Objekte können Auslöser für viele Schüleraktivitäten sein (vgl. TIETZE/KLIKA/WOLPERS 2000, S. 218ff). Weiterhin schreibt SCHUPP: „Zweifellos werden geometrische Sachverhalte lebendiger, interessanter, einsichtiger und schöner, wenn Entstehungs- und Veränderungsprozesse (Genesen und Metamorphosen) mitgesehen und mitreflektiert werden“ (SCHUPP 2000, S. 60). Der Aspekt der Anwendungsorientierung wird u.a. von MAAß (2000) und FÖRSTER (in TIETZE/KLIKA/WOLPERS 1997, 121ff) thematisiert.

1.3 Metakognitionspsychologie

Unabhängig von Unterrichtsinhalten müssen lern- und entwicklungspsychologische Einsichten über die Wahl der Methoden entscheiden (Abb. 1). Die Lern- und Leistungsdiagnostik liefert instruktionspsychologische Grundlagen: Für einen effektiven Unterricht ist ein adaptiver Unterricht notwendig (vgl. ANDERSON & JONES 1981; BLOCK & BURNS 1976, WANG & LINDVALL 1984). SCHRADER

Lernziel	**Lernformen**	**Lehrmethoden**	**Lehrerqualifikationen**
Intelligentes Wissen	Systematischer, kumulativer Wissenserwerb	Lehrergesteuerte direkte Instruktion	Disziplinäre Sachkompetenz Klassenführungskompetenz Diagnostische und didaktische Kompetenz
Handlungskompetenzen	Praxisnahes, erfahrungsgesättigtes, situiertes Lernen	Projektarbeit	Transdisziplinäre Sachkompetenz Didaktische Kompetenz
Metakompetenzen	Reflexiv verarbeiteter Wissenserwerb über eigenes Lernen und Handeln Automatisierte Routinen der Überwachung, Kontrolle und Korrektur eigenen Handelns	Angeleitetes selbständiges Lernen	Diagnostische Kompetenz Didaktische Kompetenz

Abb. 1: WEINERT 1999, S. 31

schreibt: „Ziel adaptiven Unterrichts ist es, den Unterricht an die Lernvoraussetzungen der Schüler anzupassen. Dies wird durch eine ‚enge Verzahnung von diagnostischen Schritten und darauf aufbauenden didaktischen Eingriffen' (INGENKAMP 1985, S. 18) zu erreichen versucht. Dazu ist ein flexibles Unterrichtsangebot (vgl. GLASER 1977) erforderlich" (SCHRADER 1997).

2 Gestaltungsvision für ein integratives Grundkurskonzept

Im Folgenden wird eine Gestaltungsvision für ein Mathematik-Grundkurskonzept vorgestellt. Dabei steht die Realisierung der WINTERschen Grunderfahrungen im Vordergrund. Zwecks ihrer Verwirklichung müssen lern- und entwicklungspsychologische Einsichten in die Wahl der Methoden eingehen. Letztlich sollen unsere Schülerinnen und Schüler befähigt werden, zur Kommunikation in der Gesellschaft beizutragen. Das heißt, sie sollen verständnisvoll mit der Mathematik umgehen. Sie sollen die Fähigkeit haben, mathematische Begriffe als Werkzeuge in einer Vielfalt von Kontexten einzusetzen. Dazu gehört auch das Verständnis der Rolle, welche die Mathematik in der heutigen Welt spielt, die Fähigkeit, Situationen in mathematische Modelle zu übersetzen, mathematisch zu argumentieren und begründete mathematische Urteile abzugeben (vgl. DEUTSCHES PISA-KONSORTIUM 2001). Ein Mathematik-Grundkurskonzept, das die o.a. didaktischen Überlegungen, Methoden und Zielvorstellungen integriert, soll *integratives Grundkurskonzept (IG)* genannt werden.

(IG1) Die Lehrkraft überlegt sich gemäß der ersten WINTERschen Grunderfahrung, welche mathematikhaltigen Realsituationen für ihre Schülerinnen und Schüler motivierend sein könnten. Exemplarisch können diese Themen aus den Bereichen Wirtschaft, Technik oder Design stammen. Will man den Lernenden mehrere Themen zur Auswahl stellen, so muss bedacht werden, dass sie zur Vermittlung des gleichen mathematischen Wissens führen sollen. Wird nur ein Thema vorgestellt, so sollte dieses sehr vielseitig sein, damit die Lernenden sich mit diesem identifizieren können und entsprechend ihren Interessen und Neigungen innerhalb des Themas differenzierte Angebote finden. Aber alle Themen sollten so gewählt sein, dass die Lernenden bezogen auf die WEINERTschen Lernzielkategorien einen adaptiven Unterricht erfahren.

(IG2) Die Schülerinnen und Schüler entscheiden sich für ein Thema und setzen sich mit dem Sachverhalt auseinander. Dabei werden sie mathematische Fragestellungen herausarbeiten, die sie mit ihren bereits bekannten mathematischen Instrumenten zu lösen versuchen, erkennen aber dabei deren Begrenztheit. Die Lehrkraft nimmt die Rolle des Beraters ein.

Hier sind vor allem die Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler gefordert. Zum einen benötigen sie einen sicheren, flexiblen und vernetzen Umgang mit dem bisherigen mathematischen Wissen, zum anderen Metakompetenzen in Form von Problemlösestrategien wie „Was weiß ich?“, „Was kann ich?“, „Was kann ich nicht?“, „Was will ich wissen?“ Die Schülerinnen und Schüler erleben hier Mathematik im Sinne der dritten WINTERschen Grunderfahrung.

(IG3) Das Ziel ist herausgearbeitet, neue mathematische Instrumente und Werkzeuge kennen lernen zu wollen. Es geht um die Integration von intelligentem Wissen in die vorhandene Wissensbasis. Die Vermittlung neuer Lerninhalte erfolgt durch lehrergesteuerte direkte Instruktion, ein Verfahren, dass sich bei der Vermittlung intelligenten Wissens als besonders effektiv erwiesen hat (vgl. WEINERT 1999). Bei diesem Unterrichtsabschnitt kommt die zweite WINTERsche Grunderfahrung besonders zum Tragen.

(IG4) Jetzt kann die Arbeit in den Projekten weitergeführt werden. In dieser Phase haben die Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit, Handlungskompetenzen zu erwerben. Dazu gehören unter anderem, Situationen mathematisch zu modellieren, daraus gewonnene Ergebnisse zu reflektieren und zu beurteilen. Die Lehrkraft nimmt wieder die Rolle des Beraters ein.

(IG5) Zum Schluss müssen die Projektarbeiten präsentiert und kommuniziert werden.

Ein Unterricht nach dem integrativen Grundkurskonzept fordert sehr differenzierte

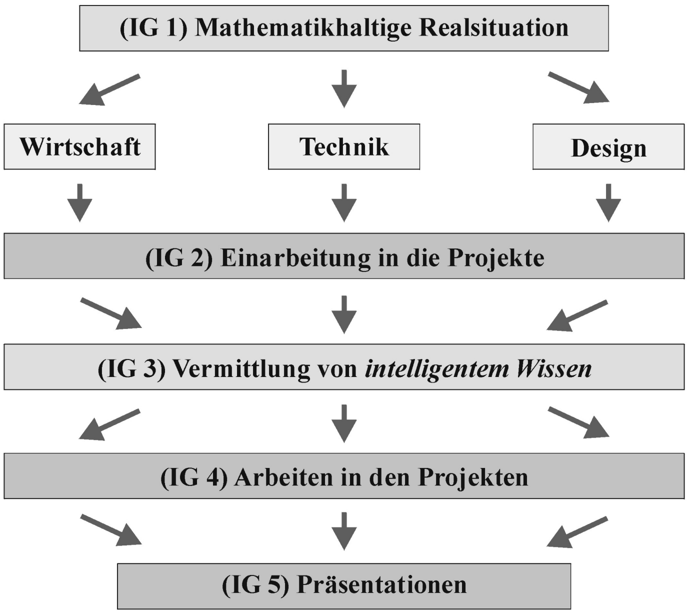


Abb. 2: Gestaltungsvision für ein integratives Grundkurskonzept

Lehrerqualifikationen wie disziplinäre und transdisziplinäre Sachkompetenz, Klassenführungskompetenz sowie diagnostische und didaktische Kompetenzen. Diese können in Aus- und Weiterbildung erreicht werden. Die genannten Qualifikationen sind Grundlage für Unterrichtsqualität.

3 Eine Unterrichtsreihe nach dem integrativen Grundkurskonzept: Mathematik & Design

Zunächst wird ein Einblick in das notwendige Hintergrundwissen über Bézierkurven und ein kurzer historischer Abriss gegeben. Anschließend wird die Wahl des Themas „Mathematik & Design" begründet. Es folgt die Vorstellung einer Unterrichtsreihe, die zum einen auf dem integrativen Grundkurskonzept basiert und zum anderen Analysis und Analytische Geometrie miteinander verbindet. Den Schluss bilden die Präsentationen der Schülerarbeiten.

3.1 Bézierkurven: Von der geometrischen Anschauung zur algebraischen Beschreibung

3.1.1 Geometrische Anschauung – der de-Casteljau-Algorithmus

Gegeben sind die sog. Kontrollpunkte $A_0, A_1, \ldots, A_n$ und ein Streckenteilungsverhältnis t $(0 \le t \le 1)$. Das Streckenteilungsverhältnis t wird zunächst auf die Strecken $\overline{A_k A_{k+1}}$ $(k = 0,1,2,\ldots,n-1)$ übertragen, es entstehen die Punkte $B_0, B_1 \ldots, B_{n-1}$. Jetzt wird t auf die Strecken $\overline{B_k B_{k+1}}$ $(k = 0,1,2,\ldots,n-2)$ übertragen. Es entstehen wieder neue Punkte $C_0,\ldots,C_{n-2}$. Dieser Algorithmus wird so lange wiederholt, bis nur noch ein Punkt (in Abb. 3 ist das Punkt *Y*) übrig bleibt, also $(n-1)$-mal. Eine Bézierkurve ist die Ortskurve, die der Punkt *Y* beschreibt, wenn das Teilungsverhältnis *t* die Werte $0 \le t \le 1$ durchläuft.

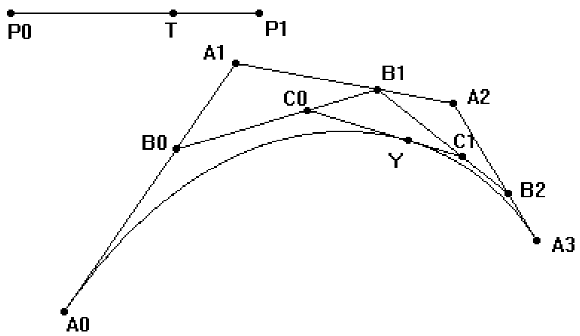


Abb. 3: Der de-Casteljau-Algorithmus

3.1.2 Algebraische Beschreibung der Bézierkurven

Der Punkt Y (Abb. 3) lässt sich vektoriell beschreiben durch $Y = (1-t) \cdot C_0 + t \cdot C_1$. Ersetzt man rekursiv die Punkte C_0 und C_1, anschließend B_0, B_1 und B_2 durch die entsprechende vektorielle Darstellung, so erhält man schließlich die kubische Bézierkurve, die nur noch von den vier Kontrollpunkten A_0, A_1, A_2, A_3 abhängig ist:

$$Y(t) := \left(1-t\right)^3 \cdot A_0 + 3 \cdot \left(1-t\right)^2 \cdot t \cdot A_1 + 3 \cdot \left(1-t\right) \cdot t^2 \cdot A_2 + t^3 \cdot A_3$$

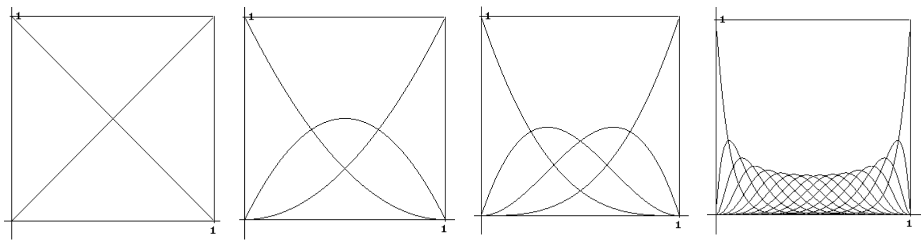
Die allgemeine Definition einer Bézierkurve mit n Kontrollpunkten lautet:

$$Y(t) := \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t) \cdot A_i$$

Die Funktionen $B_{i,n}(t)$ heißen Bernstein-Polynome. Sie sind definiert als

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} \cdot t^i \cdot \left(1-t\right)^{n-i}, \ 0 \leq t \leq 1 \text{ und } 0 \leq i \leq n,$$

dabei repräsentiert der Index n den Grad der Polynome. S. N. Bernstein führte sie im Jahr 1911 für einen konstruktiven Beweis des Weierstraßschen Approximationssatzes ein.



Grad 1 Grad 2 Grad 3 Grad 4

Abb. 4: Visualisierung der Bernsteinpolynome

Die Bézierkurven besitzen folgende Eigenschaften:

- Der erste und letzte Kontrollpunkt ist Anfangs- und Endpunkt einer Bézierkurve, was daran liegt, dass nur die erste und letzte Kurve der Bernsteinpolynome am Rand den Wert 1 annehmen, die anderen Kurven jedoch gegen 0 gehen.
- Die Bézierkurve liegt immer innerhalb der konvexen Hülle, die das Kontrollpolygon aufspannt. Die konvexe Hülle kann man sich durch ein gespanntes Seil um das Kontrollpolygon erzeugt denken.
- Die Geraden durch den ersten und zweiten Kontrollpunkt sowie durch den vorletzten und letzten Kontrollpunkt bilden die Tangenten einer Bézierkurve im

Anfangs- bzw. im Endpunkt. Den Tangentenvektor in Abhängigkeit von t erhält man durch Differentiation von $Y(t)$ nach t:

$$\frac{dY(t)}{dt} = \dot{Y}(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot \left(i \cdot t^{i-1} (1-t)^{n-i} - (n-1) \cdot t^{i} (1-t)^{n-i-1} \right) \cdot A_i$$

Daraus ergeben sich die Tangentenvektoren im Anfangspunkt

$$\left. \frac{dY(t)}{dt} \right|_{t=0} = n(A_1 - A_0)$$

und im Endpunkt

$$\left. \frac{dY(t)}{dt} \right|_{t=1} = n(A_n - A_{n-1})$$

der Kurve.

- In der Praxis werden im Regelfall quadratische oder kubische Bézierkurven benutzt. Kurven mit mehr Kontrollpunkten haben keine praktische Relevanz. Will man komplizierte Kurven erzeugen, werden mehrere quadratische oder kubische Bézierkurven aneinandergehängt. Dabei wünscht man im Regelfall glatte Übergänge, was durch Kollinearität des gemeinsamen Kontrollpunktes an der Fügestelle mit den beiden benachbarten Punkten erreicht wird (Abb. 6).

Eine ausführliche Darstellung über die Theorie der Bézierkurven lässt sich bei FARIN (1990) nachlesen.

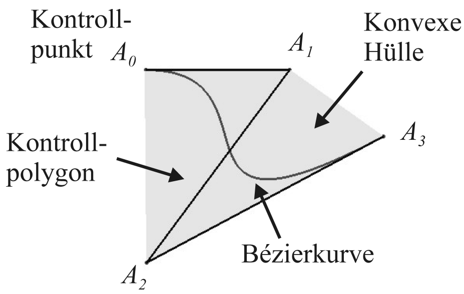


Abb. 5: Bezeichnungen bei Bézierkurven

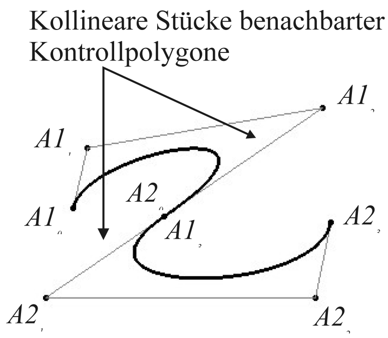


Abb. 6: Übergänge bei Bézierkurven

3.2 Wie kam es zur Entwicklung der Bézierkurven?

Bis 1960 entwarf ein Designer sein Produkt zunächst auf Papier, um anschließend ein Modell anzufertigen, das „master model". Das Problem war, dass sich das Modell abnutzte, schlecht zu transportieren und die Reproduktion ungenau war. Weiterhin war damals durch die Fortschritte im CNC-Bereich (**C**omputerized **N**umerical **C**ontrol) der Wunsch entstanden, diese Modelle mathematisch zu beschreiben, damit Maschinen durch den Computer angesteuert werden konnten. Aus diesen Wünschen entstanden CAGD bzw. CAD (**C**omputer **A**ided **G**eometric **D**esign). Gerade in der Auto- und Flugzeugindustrie war das Problem gegeben, Kurven am Computer zu erzeugen und diese dann durch wenige Daten algebraisch (und somit auch numerisch) zu beschreiben. Paul de Casteljau und Paul de Bézier entwickelten völlig unabhängig voneinander die entsprechende Mathematik. 1959 entwickelte Paul de Casteljau bei Citroën den „de-Casteljau-Algorithmus", der diesen Namen erst später bekommen hat, Bézier tat das Gleiche 1961 für Renault. Da Bézier im Gegensatz zu de Casteljau seine Arbeit veröffentlicht hatte, tragen die Kurven heute seinen Namen.

3.3 Warum gerade Mathematik & Design?

Design hat in unserer Gesellschaft einen hohen Stellenwert. Es ist ein Thema, das an die Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler anknüpft. Sie erfahren, welche Rolle Mathematik beim Designen von Produkten spielt, also auch bei den Produkten, mit denen sie täglich in Kontakt kommen. Die Bézierkurven sind ein Beispiel dafür, wie Mathematik, hier wegen auftretender Probleme in der Fahrzeugindustrie, weiterentwickelt wurde, um diese anschließend lösen zu können. Die Schülerinnen und Schüler lernen Mathematik kennen, die erst vor weniger als 50 Jahren entwickelt worden ist. Des Weiteren wird bei diesem Thema deutlich, wie eng die Analytische Geometrie mit der Analysis in Verbindung steht. Die Bézierkurven können zuerst geometrisch konstruiert und anschließend mit Hilfe der Analytischen Geometrie zu einem konsistenten mathematischen Modell weiterentwickelt werden. Das Themengebiet, für das auch GRABINGER (1999) und MEYER (2001) plädieren, eignet sich zum Übergang von der Analysis zur Analytischen Geometrie. Dabei wird der Ansatz der Objektstudie unter dem Aspekt der Anwendungsorientierung aufgegriffen.

3.4 Mathematik & Design im Unterricht

Die Unterrichtseinheit wurde innerhalb von 14 Stunden in einem Grundkurs der Jahrgangsstufe 12 in Hessen durchgeführt (Abb. 7). Die Schülerinnen und Schüler waren bereits im Umgang mit einer Dynamischen Geometriesoftware (DGS) und einem Computer-Algebra-System (CAS) vertraut, so dass hier keine Einarbeitungszeit nötig war.

3.4.1 Einstieg in das Thema „Mathematik & Design"

Bei der Vorstellung des Themas wurden der Lerngruppe verschiedene Produkte präsentiert und dabei eigene Gegenstände der Schülerinnen und Schüler mit einbezogen. Es stellte sich die Frage, wie diese produziert werden. Die Schülerinnen und Schüler sollten sich einerseits in die Lage des Designers und andererseits in die

Stunde	Thema
1–3	Einstieg in das Thema „Mathematik & Design“
	Erarbeitung des de-Casteljau-Algorithmus und Beginn des Designen eines eigenen Produktes
4–9	Übergang von Analysis zur Analytischen Geometrie: Warum reichen die bisherigen mathematischen Kenntnisse nicht aus?
	Einführung in die Vektorrechnung: • Das Pfeilklassenmodell von Vektoren • Eigenschaften von Vektoren (Addition, Multiplikation mit einem Skalar) • Darstellung von Geraden mit Hilfe von Vektoren → Parameterdarstellung • Streckenteilung
10–12	Weiteres Arbeiten an den eigenen Produkten. Hausaufgabe: Erstellung der Präsentationen
13/14	Präsentation der Schülerarbeiten

Abb. 7: Verlauf der Unterrichtsreihe

Lage der produzierenden Industrie versetzen. Es musste zum einen überlegen werden, welche Anforderungen an ein Werkzeug gestellt werden müssen, wenn dieses Schnittstelle zwischen Designer und produzierender Industrie sein soll, und zum anderen, welche Konsequenzen sich aus diesen Anforderungen für die Entwicklung des Werkzeuges ergeben. Die Schülerinnen und Schüler haben folgende Eigenschaften, die ein Werkzeug haben soll, herausgearbeitet:

1. Kurven sollen möglichst einfach erzeugt werden können, ohne dass die zugehörige Mathematik vom Anwender verstanden werden muss.
2. Es muss die Möglichkeit der Interaktion des Designers mit dem Modell gegeben sein, d.h. die Datenstrukturen müssen so angelegt sein, dass diese mit einer entsprechenden Eingabe des Designers schnell auf den neuen Stand gebracht werden können.
3. Durch das System sollen Maschinen zur Produktion angesteuert werden können, d.h. das Designte muss algebraisch beschrieben werden können.

Die Schülerinnen und Schülern kannten einfache Programme (z.B. das Windows-Zubehör PAINT), welche bereits die erste Forderung erfüllen. Der zweiten Forderung kommen höher entwickelte Programme wie z.B. COREL DRAW nach, aber sie können keine Maschinen ansteuern. Einzelne Schülerinnen und Schüler wussten, dass CAD-Programme solche Forderungen erfüllen, hatten aber noch nie damit gearbeitet. Die Idee war geboren, eine Art CAD-Programm zu erstellen, also eine Schnittstelle zwischen Designer und produzierender Industrie. Als interaktives Zeichenprogramm wurde die Dynamische Geometrie Software EUKLID-DYNAGEO gewählt.

3.4.2 Auf dem Weg zum de-Casteljau-Algorithmus

Die Schülerinnen und Schüler benutzten zunächst das Programm PAINT (Abb. 8), um sich einen Überblick zu verschaffen, wie „gekrümmte Linien“ gezeichnet werden. Ihnen fiel auf, dass nur Anfangs- und Endpunkt auf der Kurve lagen. Die außerhalb liegenden Punkte hatten Einfluss auf die Ausrichtung der Kurve; sie mussten also mit ihr in Verbindung stehen. Jetzt war der Zeitpunkt gegeben, die Schülerinnen und Schüler über die Idee des de-Casteljau-Algorithmus zu informieren. Dazu benötigten sie ihr Wissen aus der Mittelstufe über Streckenteilung, was den meisten nicht mehr geläufig war. Aber sie wussten sich zu helfen, indem sie im entsprechenden Schulbuch nachlasen. Jetzt konnte der de-Casteljau-Algorithmus mit Hilfe des Arbeitsblattes (Abb. 9) erarbeitet werden.

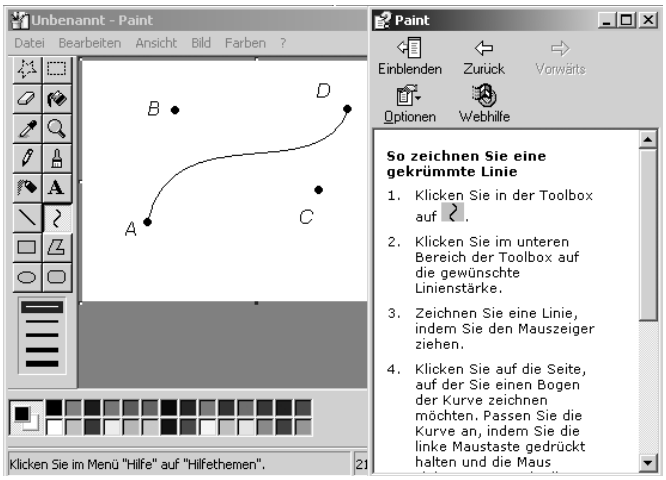


Abb. 8: Das Programm PAINT

3.4.3 Von der geometrischen Anschauung zur Algebraisierung der Kurven

Den Lernenden war aus der Analysis bekannt, dass zwar vorgegebene Kurvenprofile durch ganzrationale Funktionen beschrieben werden können, aber für komplizierte Kurvenprofile Polynome von sehr hohem Grad benötigt werden, um diese zu reproduzieren. Dies schien den Schülerinnen und Schüler keine sehr sinnvolle Methode zu sein, denn sie hatten ein interaktives Werkzeug erstellt, bei dem die Kurve nur von wenigen Punkten abhängig war, die nicht alle auf der Kurve lagen. Abgesehen davon war diese Methode weder interaktiv noch „könne man von einem Designer unmöglich erwarten, soviel Mathematik zu beherrschen“ (Zitat eines Schülers). Damit ergab sich das klare Ziel, dass neue mathematische Instrumente notwendig seien. Die Vektorrechnung wurde eingeführt: Man benötigte das Pfeilklassenmodell eines Vektors, die Eigenschaften von Vektoren, die Darstellung von Geraden mit Hilfe von Vektoren und damit auch die Streckenteilung. Abb. 10 zeigt ein Arbeitsergebnis von Schülerinnen und Schüler zur vektoriellen Darstellung von Punkt Y der gesuchten Ortskurve. Das rekursive Einsetzen der entsprechenden Punkte zur Darstellung von Punkt Y durch die Kontrollpunkte A_0, A_1, A_2, A_3 erfolgte durch den Einsatz von CAS. Durch die vektorielle Darstellung der Strecken-

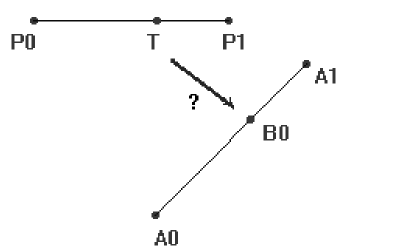
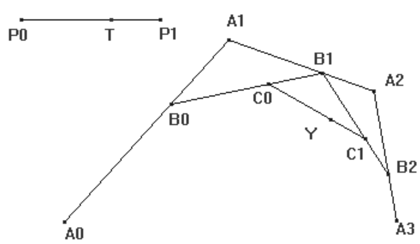
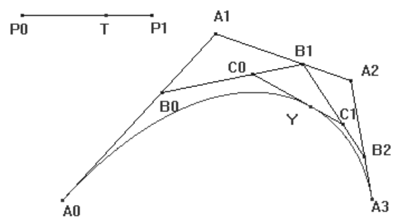
<table>
<tr>
<td>Die eigentliche Idee des de-Casteljau-Algorithmus ist, ein Teilungsverhältnis einer Strecke auf eine andere zu übertragen.
Aber wie funktioniert das?
Wichtig: Im Zugmodus kann T verschoben werden, B_0 bewegt sich entsprechend mit.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>De-Casteljau hatte nun die Idee, mit Hilfe des Übertragens eines Streckenteilungsverhältnisses, die Anzahl der Ausgangspunkte sukzessive zu reduzieren, bis nur noch ein Punkt übrig bleibt.
Welche Ortskurve beschreibt in der nebenstehenden Abbildung Punkt Y, wenn T entlang der Referenzstrecke $\overline{P_0P_1}$ bewegt wird.
Von welchen Punkten ist die Ortskurve abhängig?</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Erstelle ein Makro, das bei gegebenen Startobjekten Punkt Y konstruiert. Leider muss die zugehörige Bézierkurve anschließend erzeugt werden.
Abspeichern des Makros nicht vergessen.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Abb. 9: Arbeitsblatt zur Erarbeitung des de-Casteljau-Algorithmus

teilung waren die Schülerinnen und Schüler in der Lage, die Ortskurve berechnen zu lassen. Der Einsatz von CAS nahm hier eine enorme Rechen- und Zeichenarbeit ab, ohne aber als „Black Box“ zu fungieren (Abb. 11).

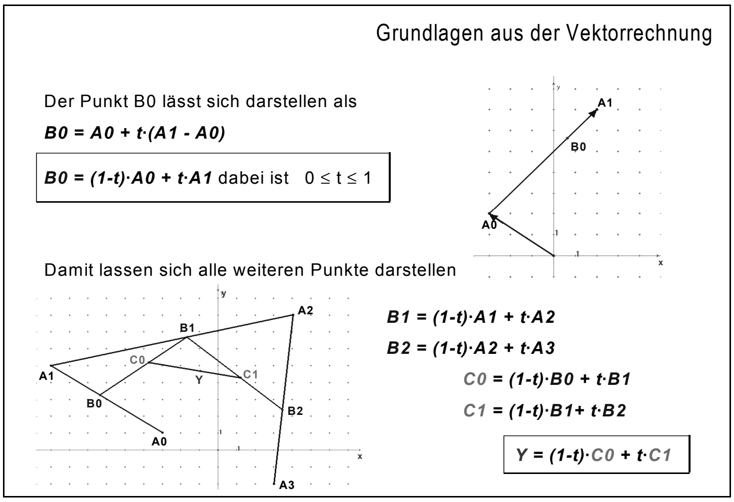


Abb. 10: Text einer Schülergruppe zur vektoriellen Darstellung von *Y*

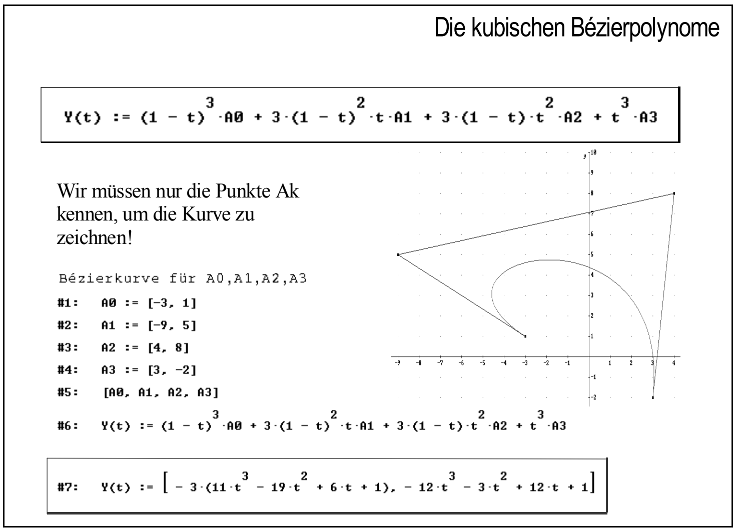
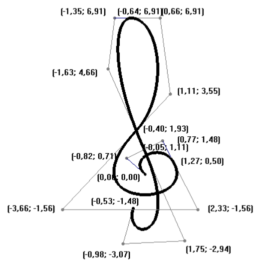


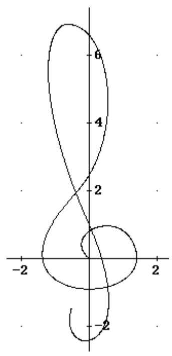
Abb. 11: Schülerergebnis zur Darstellung kubischer Bézierkurven

Jetzt konnten die Schülerinnen und Schüler ihre Produkte weiter bearbeiten und versuchen, ihr neu erworbenes Wissen anzuwenden. Sie produzierten komplizierte Kurven durch mehrfaches Aneinanderhängen von Bézierkurven. Eine Schülergruppe warf das Problem auf, wie Bézierkurven so aneinandergehängt werden können, dass bei Veränderung der Lage der Kontrollpunkte die Kurven glatt ineinander übergehen. Hier war die Verbindung zur Analysis gegeben. Die Aufgabe der Schülergruppe war, diesen mathematischen Exkurs exemplarisch für kubische Bézierkurven zu beschreiten und in ihre Präsentation zu integrieren. Hierbei war die Herausforderung, die Begriffe und Bilder aus der Analysis auf Kurven in Parameterdarstellung zu übertragen.

Der Violinschlüssel



Wir haben uns dafür entschieden, einen Violinschlüssel zu designen. Welche Probleme tauchten dabei auf? Wir wussten erst mal nicht, wie viele Bézierkurven wir benötigen würden, also haben wir einfach mal angefangen. Beim Aneinanderhängen der Kurven kamen wir dann zu dem Problem, dass wir glatte Übergänge haben wollten, die auch bei Veränderung der Lage der Punkte erhalten bleiben. Denn sonst muss man im nachhinein immer nachkorrigieren und das ist sehr mühsam. Bei der Beschäftigung mit diesem Problem ist uns bewusst geworden, dass wir die uns bekannten Ideen und Begriffe aus der Analysis wieder verwenden konnten. Zwar hatten wir nicht mehr alle Ideen und Begriffe parat, aber wir konnten ja alles nachlesen. Und dann haben wir uns dieses Thema mit der Unterstützung unserer Lehrerin erarbeitet. Die Kurven letztendlich zu algebraisieren, war nicht schwierig, denn die Idee, die dahinter steckt, ist einfach zu verstehen. Wir waren froh, dass wir ein Programm wie DERIVE hatten, was uns die Kurven berechnet hat, denn ansonsten wäre das sehr mühsam geworden.



Was hat uns das Ganze gebracht? Es hat uns sehr viel Spaß gemacht, Mathematik wirklich anwenden zu können und mit den Kurven „herumzuspielen“. Eine besondere Erfahrung war auch, dass wir bei der Präsentation unseren Mitschülern erklären konnten, wie und vor allem warum Kurven so zu konstruieren sind, dass sie glatt ineinander übergehen. Da wir die einzige Gruppe waren, die sich mit diesem Problem intensiv beschäftigt hat, waren wir jetzt auf diesem Gebiet „Experte“ und wir mussten uns überlegen, wie wir es den anderen beibringen. Das war eine große, aber schöne Herausforderung. Und eines müssen wir noch zum Abschluss sagen: Wir schauen die Gegenstände, die uns im Alltag begegnen, nun mit anderen Augen an.

Abb. 12: Schülerarbeit – Der Violinschlüssel

3.5 Präsentation der Schülerarbeiten

Abschließend sollen drei Projekte vorgestellt werden, deren Themen die Schülerinnen und Schüler selbst gewählt hatten (Abb. 12–14). Der vollständige DERIVE-Quellcode zum Erzeugen der Bezierkurven in den einzelnen Schülerarbeiten ist unter www.roth-sonnen.de erhältlich.

4 Rückblick …

Die vorgestellten Schülerarbeiten sind ein Plädoyer für einen Unterricht nach dem integrativen Grundkurskonzept. Die Schülerinnen und Schüler lernten nicht angewandte Mathematik, sondern lernten Mathematik in Anwendungen zu erkennen, zu erarbeiten und anzuwenden (vgl. FREUDENTHAL 1973). Die Unterrichtseinheit stieß auf reges Interesse. Sie erkannten Zusammenhänge, erfuhren exemplarisch, wie Mathematik weiterentwickelt worden ist, und zwar in diesem Fall durch äußere Zwänge. Die Möglichkeit, durch den Einsatz neuer Medien mit Mathematik kreativ umgehen zu können, war nicht nur motivierend, sondern trug auch zum mathematischen Verständnis bei. So konnten die Schülerinnen ihre analytischen Untersuchungen immer sofort grafisch darstellen, erhielten also sofort eine Rückmeldung über die Richtigkeit ihrer analytischen Beschreibungen. In diesem Zusammenhang erfuhren sie Mathematik nicht nur als formale, anwendbare Wissenschaft und als Mittel zur Ausbildung heuristischer Fähigkeiten, sondern sie lernten auch, durch Mathematik gewonnene Ergebnisse zu kommunizieren. Gerade das Kommunizieren von Mathematik in Form von Schreiben und Vorstellen der Präsentationen fiel einigen Schülerinnen und Schülern schwer. Sie sagten, man sei es nicht gewohnt, über Mathematik zu schreiben oder zu reden. Um die Vorstellung der Arbeiten vor der Lerngruppe so effektiv wie möglich zu gestalten, wurden sie vorher mit der Lehrerin besprochen. Das war zwar zeitintensiv, da die Besprechungen außerhalb des Unterrichts stattfanden, aber sehr lohnend.

… und Ausblick

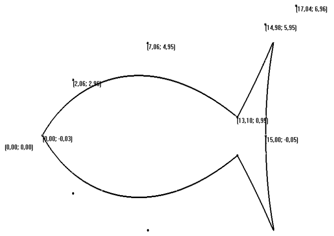
Abschließend bleiben noch einige Fragen offen.

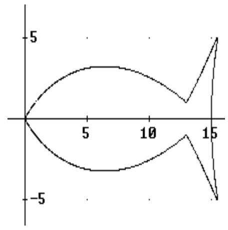
- Wie könnte eine Weiterführung eines Kurses, der auf dem integrativen Grundkurskonzept basiert, inhaltlich aussehen?
- Wie würden dann Übungs- und Festigungsphasen im Speziellen aussehen?
- Welche Auswirkungen hätte das Konzept für das Abitur?
- Welche Auswirkungen hätte es auf die Lehreraus- und weiterbildung?
- Ist es möglich, ein Integratives Grundkurskonzept für Analytische Geometrie & Lineare Algebra zu entwickeln? Welche Alternativen gibt es?

Diese Fragen sollen ein Leitfaden für weitere Forschungsvorhaben sein.

Der Fisch

Wir wollten einen Fisch designen. Hierzu benötigten wir im wesentlichen zwei Bézierkurven, die dann gespiegelt wurden.





Was uns dann am meisten interessiert hat, war, wie man den Fisch dreidimensional darstellen kann. Aus der Analysis erinnerten wir uns dunkel an das Rotieren von Körpern. […] Man lässt den Fisch, na ja, eigentlich langt der halbe Fisch oberhalb der *x*-Achse, um die *x*-Achse rotieren. Zerschneidet man jetzt den Fisch senkrecht zur *x*-Achse, so erhält man als Querschnittsfläche Kreise mit unterschiedlichem Radius. Jetzt dachten wir uns, dass wir so einen Punkt auf dem Kreis durch einen Vektor beschreiben könnten. […] Wenn man das Ganze dreidimensional betrachtet, braucht man jetzt noch die y-Koordinate, also den Mittelpunkt des Kreises. Die y-Koordinate ist somit die x-Koordinate unserer Bézierkurve. Damit erhalten wir für Darstellung im dreidimensionalen Raum:

$$\#17{:}\quad YA(t) := \left[-t\cdot(5\cdot t^2+3\cdot t-9)\cdot SIN(s),\ -t\cdot(2\cdot t^2-9\cdot t-6),\ -t\cdot(5\cdot t^2+3\cdot t-9)\cdot COS(s)\right]$$

$$\#18{:}\quad YB(t) := \left[(t-1)\cdot(2\cdot t^2-19\cdot t-1)\cdot SIN(s),\ 8\cdot t^3-18\cdot t^2+12\cdot t+13,\ (t-1)\cdot(2\cdot t^2-19\cdot t-1)\cdot COS(s)\right]$$

Damit uns der Fisch auch als Fisch angezeigt wurde, mussten wir noch die Parameter (also t läuft von 0 bis 1 und der Winkel s von 0 bis 2π) und den Zeichenbereich einstellen. Jetzt hatten wir diesen wunderschönen Fisch.

Und was hat uns das Ganze gebracht? Zu einen die Erfahrung, mit Mathematik herumzuspielen und schöne Dinge zu produzieren und zum anderen zu erfahren, wo Mathematik HEUTE eingesetzt wird.

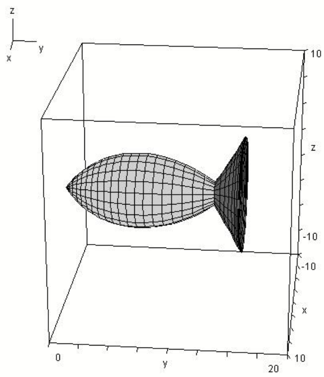
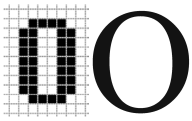


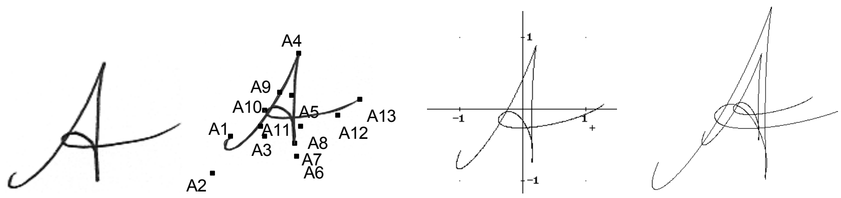
Abb. 13: Schülerarbeit – Der Fisch

Font-Design

[…] Im wesentlichen gibt es zwei Arten von digitalen Schriften: Raster und Umrissschriften. Bei Rasterschriften wird jeder Buchstabe und jedes Zeichen (allgemein: Glyphe) als Bitmap abgelegt. […] Umrissschriftarten werden durch quadratische (True-Type-Schriften) oder kubische Bézierpolynome (Postscript-Schriften) dargestellt. Es wird also nur ein Polygonzug (P_0, P_1, P_2, …) abgespeichert. Mit Hilfe eines Polygonzuges kann der Glyphe in allen Größen dargestellt werden […]



Wir wollen das Prinzip exemplarisch an einem Buchstaben zeigen. Wir schreiben den Buchstaben A auf ein Blatt und scannen ihn ein. Dieses gescannte Bild fügen wir als Hintergrundbild in Euklid-DynaGeo ein, damit wir es mit Bézierkurven, insgesamt vier Stück, nachstellen können. Die Koordinaten der Punkte A1 bis A13 erhalten wir, indem wir die Datei als *.script-Datei abspeichern, damit haben wir die Koordinaten in txt-Form, so dass wir sie in Derive einfügen können.



Jetzt brauchen wir nur noch die Bézierkurven vektoriell darstellen und die Kurven mit Hilfe von CAS zeichnen zu lassen. Wie man sieht, braucht man nur die Stützpunkte einzugeben, um den Buchstaben zu erzeugen. Will man ihn in einer größeren Schrift, so muss man nur die Funktionen mit dem entsprechenden Faktor multiplizieren […].

Ausblick: Wir denken, dass es noch einiges gibt, worüber man sich Gedanken machen könnte bzw. müsste:

a) Von der technischen Seite aus, könnte man sich überlegen, wie man die Schnittstelle zwischen Euklid-DynaGeo und Derive optimiert.

b) In Derive wäre zu überlegen, wie man mit möglichst wenig Aufwand die Kurven erzeugt. Irgendwie müsste man da so etwas wie eine Schleife basteln. […]

c) Auch ist klar, dass wir eigentlich noch keine Umrissschrift erzeugt haben, da die Buchstaben ja sonst eine bestimmte Schriftdicke haben. […]

d) Sehr wichtig wäre zu überlegen, wie man die Buchstaben einer Handschrift so produziert, dass bei Aneinandersetzen einzelner Buchstaben auch wirklich ein zusammenhängender Schriftzug entsteht. […]

Fazit: Wir haben durch unser Projekt einen Einblick in die Erzeugung von Schriftarten erhalten. […] Einer von uns wollte mal aus dem Internet eine bestimmte Schriftart herunterladen und war erstaunt darüber, dass Schriftarten sehr teuer sein können. Das ist uns jetzt klar geworden, warum das so ist. Es steckt eine wahnsinnige Arbeit dahinter.

Abb. 14: Schülerarbeit – Font-Design

Literatur

ANDERSON, L. W., JONES, B. F. (1981): Designing instructional strategies which facilitate learning for mastery. In: Educational Psychologist, 16(3), 121–138

BAUMERT, J. et al. (2000): TIMSS/III-Deutschland – Der Abschlussbericht, Max-Planck-Institut für Bildungsforschung: Berlin

BORNELEIT, P., DANCKWERTS, R., HENN, H.-W., WEIGAND, H.-G. (2001): Expertise zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe. Verkürzte Fassung. In: JMD 22(1), 73–90

BLOCK, J. H., BURNS, R.B. (1976): Mastery learning. In: Review of Research in Education, 4, 3–49

DEUTSCHES PISA-KONSORTIUM (Hrsg.) (2001): PISA 2000 – Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schüler im internationalen Vergleich, Leske + Budrich, Opladen

EPA (2002): Einheitliche Prüfungsanforderungen im Fach Mathematik. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 01.12.1989 i.d.F. vom 24.05.2002

FARIN, G. (1990): Curves and surfaces for computer aided geometric design, Academic Press: San Diego

FILLER, A. (2001): Dreidimensionale Computergrafik und Analytische Geometrie – Vorschläge für den Mathematikunterricht in der S II. In: math. did. 24(2), 21–56

FILLER, A., WITTMANN, G. (2003): Raumgeometrie vom ersten Tag an! Einstiege in die Analytische Geometrie. Erscheint in: Der Mathematikunterricht

FISCHER, R. (o.J.): Höhere Allgemeinbildung, unveröffentlichtes Manuskript, IFF: Wien/ Klagenfurt

FREUDENTHAL, H. (1973): Mathematik als pädagogische Aufgabe. 2 Bände. Klett: Stuttgart

FÜHRER, L. (1979): Objektstudien in der Vektorgeometrie. Didaktik der Mathematik 7(1), 32-61

GLASER, R. (1977): Adaptive education: Individual diversity and learning, Holt. Rinehart and Winston: New York

GRABINGER, B. (1999): Projekte und Aufgaben zur Analytischen Geometrie, Schroedel: Hannover, 51-59

HEYMANN, H.W. (1996): Mathematik in der gymnasialen Oberstufe. In: MU 42 (4/5), 107–120

INGENKAMP, K. (1985): Lehrbuch der pädagogischen Diagnostik, Beltz: Weinheim

MAAß, K. (2000): Anwendungen in der Analytischen Geometrie. In: MU 46(1), 3–5

MEYER, J. (2001): Kurven und Flächen in der Vektorgeometrie. In: math. did. 24(1), 51–70

SCHMIDT, G. (1993): Curriculare Gedanken und Reflexionen zur Analytischen Geometrie (und Linearen Algebra) im Unterricht der gymnasialen Oberstufe. In: MU 39(4), 15–30

SCHRADER, F.-W. (1997): Lern- und Leistungsdiagnostik im Unterricht. In WEINERT, F.E. (Hrsg.): Enzyklopädie der Psychologie – Pädagogische Psychologie. Band III: Psychologie des Unterrichts und der Schule (S. 659–699). Hogrefe: Göttingen

SCHUPP, H. (2000): Geometrie in der Sekundarstufe II. In: JMD 21(1), 50–66

STEINER, H.-G. (1984): Mathematisch-naturwissenschaftliche Bildung. Kritisch-konstruktive Fragen und Bemerkungen zum Aufruf einiger Fachverbände, In: REISS, M./ STEINER, H.-G. (Hrsg.): Mathematikkenntnisse – Leistungsmessung – Studierfähigkeit, Aulis: Köln, 5-56

TIETZE, U.-P., KLIKA, M., WOLPERS, H. (Hrsg.) (1997): Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II, Band 1: Fachdidaktische Grundfragen – Didaktik der Analysis, Vieweg: Braunschweig

TIETZE, U.-P., KLIKA, M., WOLPERS, H. (Hrsg.) (2000): Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II, Band 2: Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra, Vieweg: Braunschweig

WANG, M. C., LINDVALL, C. M. (1984): Individual differences and school learning environments. In: GORDON, E.W. (Ed.): Review or research in education, 11, 161–225, American Educational Research Association: Washington, DC

WEINERT, F. E. (1999): Die fünf Irrtümer der Schulreformer. In: Psychologie heute, Juli 1999, 28–34

WINTER, H. (1995): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik 61, 37–46

WINTER, M. (1986): „Allgemeinbildung" durch Mathematikunterricht? – Dann aber ein anderes Curriculum, vor allem in den Grundkursen der SII! In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1986, 330–333

WINTER, M. (1989): Lässt sich allgemeinbildender Mathematikunterricht im Grundkurs realisieren? In: mathematik lehren 33, 43–49

WITTMANN, G. (2003): Schülerkonzepte zur Analytischen Geometrie. Mathematikhistorische, epistemologische und empirische Untersuchung, Franzbecker: Hildesheim

Anschrift der Verfasserin

Nicole Roth
Technische Universität Darmstadt
Schloßgartenstr. 7
64289 Darmstadt
roth@mathematik.tu-darmstadt.de
www.roth-sonnen.de