Die Vorstellungen der Schüler vom Unendlichen

von

Petr Eisenmann, Ústí nad Labem (Tschechische Republik)

Zusammenfassung: Dieser Beitrag beschreibt die Vorstellungen der Schüler und Studenten vom Begriff Mächtigkeit einer Menge und die Entwicklung dieser Vorstellungen während der schulischen Ausbildung. Er geht von einer Untersuchung aus, die in den Jahren 1999 – 2001 an insgesamt 30 Grundschulen und Gymnasien in der nordböhmischen Region durchgeführt wurde.

Summary: This contribution describes the students' ideas of the term cardinality of a set and the development of these ideas during their school attendance. It is based on the results of the research we carried out in the years 1999 – 2001 at thirty elementary schools and grammar schools in the North Bohemian Region.

Dieser Beitrag beschreibt ausgewählte Ergebnisse einer umfangreichen Untersuchung. Das Ziel dieser Forschung war, die Vorstellungen der Schüler und Studenten von einigen besonderen Phänomenen der Mathematik (Mächtigkeit der Menge, Maximum und Minimum, Zahlendichte, Gerade, Strecke, Punkt, Beschränktheit, Konvergenz) und insbesondere die Entwicklung dieser Vorstellungen im Verlauf der Schulzeit darzustellen.

Die Untersuchung wurde in den Jahren 1999 – 2001 an insgesamt 30 Grundschulen und Gymnasien in der nordböhmischen Region durchgeführt. Im März und April 2000 wurden den Schülern der 1. und 3. Klasse der Grundschulen und der 5., 7., 9., 11., und 13. Klasse der Gymnasien verschiedene, nach dem Alter der Befragten abgestufte Fragebögen vorgelegt. Folgender Fragebogen war z. B. für die Schüler der Oktava (13. Klasse des Gymnasiums) bestimmt.

1) Welche Zahl ist die größte?
2) Wie heißt die kleinste reelle Zahl, die größer ist als 0?
3) Aus wie vielen Punkten besteht eine Gerade?
4) Aus wie vielen Punkten besteht eine 10 cm lange Strecke?
5) Aus wie vielen Punkten besteht ein Kreis mit dem Durchmesser von 10 cm?
6) Wovon gibt es unendlich viel?
7) Wie viele Geraden können höchstens durch einen Punkt gehen?

8) Wie viele Geraden können höchstens zu einer Geraden parallel sein?

9) Ist die Anzahl aller Lebewesen auf der Erde endlich oder unendlich groß?

10) Ist die Anzahl aller Sandkörnchen auf der Erde endlich oder unendlich groß?

11) Ist die Anzahl aller natürlichen Zahlen endlich oder unendlich groß?

12) Was ist unendlich groß?

13) Wie viele natürliche Zahlen gibt es, die durch 3 teilbar sind?

14) Die Zahlen 1/1, 1/2, 1/3, 1/4,… werden immer kleiner. Bestimme die kleinste Zahl, die sich auf diese Weise ergibt.

15) Gibt es zu jeder positiven reellen Zahl x eine natürliche Zahl n mit
$x \cdot n > 1000\,000$?

In jeder Alterskategorie gab es ungefähr 800 Probanden. Die Interpretation der Ergebnisse stützte sich auf Interview-Analysen, die wir mit ausgewählten Probanden nach dem Ausfüllen des Fragebogens führten und dann aus den Videoaufnahmen transkribierten.

Die Ergebnisse der quantitativen Methode wurden so durch Anwendung einer qualitativen Methode ergänzt, auf deren steigende Bedeutung vor allem bei der Darstellung individueller Vorstellungen von Schülern z. B. vom Hofe aufmerksam macht (vom Hofe 1998).

Zum Vergleich wurde eine solche Untersuchung auch mit insgesamt 160 Schülern der 7., 9. und 11. Klasse der Mittelschule „Am Burgteich" in Zittau (Sachsen) durchgeführt.

In diesem Beitrag konzentriere ich mich auf die Fragen, die den Begriff der *Mächtigkeit einer Menge* betreffen.

Als erstes werde ich die Schülerergebnisse zu den Fragen Nr. 3, 4 und 5 kommentieren. Alle drei Fragen erschienen im Fragebogen ab der 5. Klasse.

Die Entwicklung der häufigsten Antworten auf die Frage *Aus wie vielen Punkten besteht eine Gerade?* (*2, 0* und *Aus unendlich vielen*) ist in der Abb. 1 dargestellt. Die Nummern an der y-Achse geben die Häufigkeit der Antworten in Prozent an.

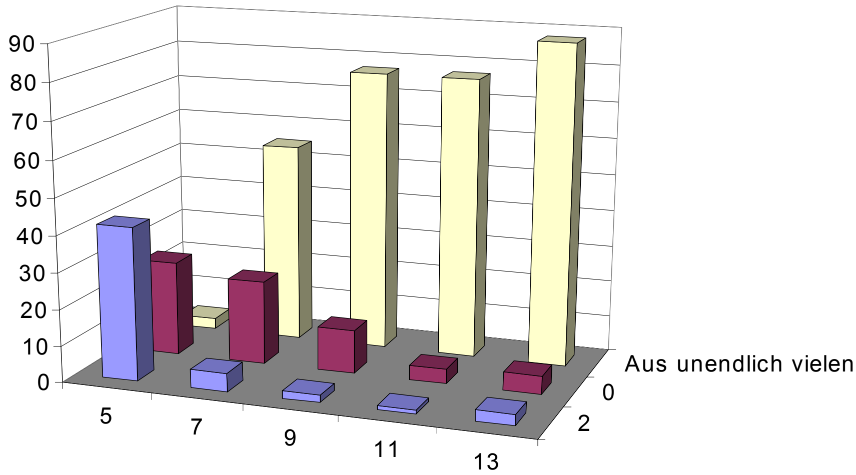

Abb. 1

Die häufigste Antwort in der 5. Klasse – *2* (42 %) – verringert sich in der Sekunda (7. Klasse) schnell und schwankt weiter bis unter 4 %. Aus den Gesprächen mit den Schülern ging hervor, dass es sich bei dieser Antwort um zwei „bestimmende" Punkte der Gerade handelt. In der Schule lernen sie zum Beispiel: *Durch zwei verschiedene Punkte kann man genau eine Gerade ziehen.*

Die zweithäufigste Antwort in der 5. Klasse ist die Antwort *0*. Wie sich aus den Gesprächen mit den Schülern ergab, liegt die Ursache[1] bei diesen Schülern in einer Vertauschung der Geraden mit ihrer Abbildung – mit einem Entwurf, einer Skizze an der Tafel oder im Heft. An der Grundschule werden Punkte als besondere Punkte von Figuren, als Endpunkte von Strecken, als Eckpunkte ebener und räumlicher Figuren oder als isolierte Punkte in der Ebene eingeführt. Dieses Verhalten entspricht den Ergebnissen von Laborde, die in einer Untersuchung festgestellt hat, dass Schüler Punkte bevorzugt als Eckpunkte von Figuren oder als Endpunkte einer Strecke auffassen, aber weniger als innere Punkte (Laborde 1985).

Nach Holland ist es allenfalls auf dem Gymnasium sinnvoll, Figuren als Punktmengen zu behandeln. Er meint, für Verstehensprozesse der Geometrie reiche es aus, Figuren (Geraden, Strecken) ganzheitlich zu betrachten (Holland 1988). Die Begriffe *Gerade* und *Punkt* müssen dann als ganzheitliche Objekte in einem geistigen Prozess durch Idealisierungen entwickelt werden.

---

[1] Möglicherweise aufgrund einer Interpretation nach Hilbert: *Die Mengen aller Punkte, Geraden und Ebenen sind gegenseitig disjunkt. Wir sagen nicht, dass ein Punkt auf einer Geraden liegt, sondern dass ein Punkt mit der Geraden inzidiert.*

Illustrieren wir die Antwort *0* mit einem Ausschnitt aus einem Interview mit einer Schülerin der 7. Klasse. Die Nummern in Klammern bezeichnen die Dauer der Pause in Sekunden.

INTERVIEWER 1: *Also du antwortest, dass eine Gerade aus 0 Punkten besteht.*

PAULINE 1: *Ja.*

I2: *Das bedeutet, dass auf einer Geraden kein Punkt liegt. Ist es so?*

P2: *Ja.*

I3: (Er zeichnet eine gerade Linie und bezeichnet einen Punkt *A* auf ihr – s. Abb. 2) *Liegt dieser Punkt* (er zeigt mit seinem Bleistift auf den Punkt *A*) *auf dieser Geraden ?* (2)

P3: *Ja* (3) *doch.* (Sie nickt zustimmend mit dem Kopf.)

I4: *Sie enthält ihn also.*

P4: *Nein, das wäre eine Halbgerade, eine auf jede Seite, es wäre keine Gerade mehr.*

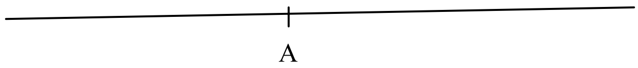

Abb. 2

Die Entwicklung der häufigsten Antworten auf die Frage *Aus wie vielen Punkten besteht eine 10 cm lange Strecke?* (*2* und *Aus unendlich vielen*) ist in der Abb. 3 dargestellt.

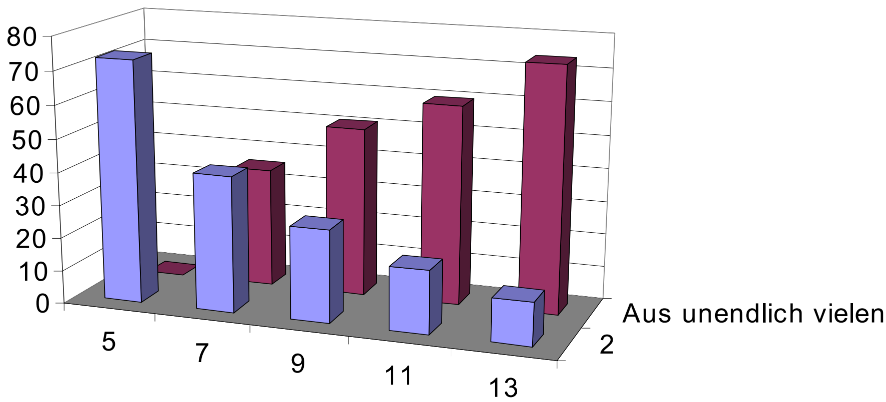

Abb. 3

Die Häufigkeit der bevorzugten Antwort *2* in der 5. Klasse (die Schüler haben die Randpunkte der Strecke im Sinn) sinkt stufenweise und wird durch ein Wachstum der Antwort *Aus unendlich vielen* bis zu den 74 % in der Oktava (13. Klasse) ausgeglichen.

Die Gespräche mit Schülern zeigten, dass die Ursache für die Antwort *2* wieder in einer Vertauschung der Strecke mit ihrer Abbildung in ihrem Bewusstsein liegt – mit einem Entwurf, einer Skizze an der Tafel oder im Heft.

Noch eine Erscheinung kann man bei dieser Frage betrachten – die Interferenz der Begriffe das *Unendliche* und die *Abgrenzung*.

Illustrieren wir dieses Phänomen mit einem Ausschnitt aus einem Interview mit Hans, einem Schüler der 9. Klasse.

INTERVIEWER 1: *Hans, du hast auf die Frage „Aus wie vielen Punkten besteht eine Gerade?" „Aus unendlich vielen" geantwortet.*

HANS 1: *Ja ja.*

I2: *Und warum?*

H2: *Hm.* (2) *Weil eine Gerade nirgends endet und durch eine unendliche Menge von Punkten gebildet wird.*

I3: *Gut. Und aus wie vielen Punkten besteht eine 10 cm lange Strecke?*

H3: (Im Fragebogen antwortete er auf diese Frage nicht.) (7) *Na ja, ich* (2) *weiß nicht. Weil* (2) *ich das nicht weiß.* (5) *Meiner Meinung nach* (2) *beginnt und endet sie auch irgendwo.* (Er zeichnet dabei eine 5 cm lange Strecke ins Heft und bezeichnet durch senkrechte Striche ihre Randpunkte) *Alles hier sind Punkte.* (Er zeigt mit einem Bleistift zwischen die Randpunkte.)

I4: *Ja.*

H4: *Aber meiner Meinung nach* (2) *gibt es hier eine endliche Menge von ihnen*.

I5: *Aber warum?*

H5: *Weil die Strecke hier* (er zeigt auf das Papier) *beginnt und hier endet*.

Diese Zeilen machen die schon aus den Fragebögen resultierende Erkenntnis deutlich, dass für manche Schüler der Sekundarstufe I die Vorstellung der unendlich vielen Punkte in einem abgegrenzten Objekt der Dimension 1 unzulässig ist.

Ähnliche Ergebnisse erschienen auch bei älteren Studenten in einer Untersuchung, die im Jahre 1997 Eisenmann durchführte. Hier bezeichneten nur 26 % der neuen Absolventen von Gymnasien die Strecke als eine Menge, die unendlich viele Elemente hat (Eisenmann 2000).

Bikner-Ahsbahs formulierte in ihrer Untersuchung über die Vorstellungen der 10-jährigen Kinder von geometrischen Objekten (Bikner-Ahsbahs 2000) eine ähnliche Frage: *Wie viele Punkte liegen auf dieser Strecke?* Diese Formulierung ist freier, sie nimmt die Auffassung der Punkte und der Strecke als disjunkte Elemente an. Bikner-Ahsbahs führt an, dass die meisten Schüler einen Schätzwert zwischen 3 und 30 angaben. In der Regel zeichnen die Schüler die Punkte ein und zählen anschließend ab. Auf die Nachfrage hin, *ob man denn auch noch mehr Punkte da drauf bekommt*, versuchten sie die Punkte nun so klein und so dicht wie möglich zu zeichnen. Nach diesem letzten Schritt waren einige Kinder der Meinung, dass es keine Zwischenräume mehr zwischen den Punkten gibt, weil sie ja ganz dicht gezeichnet sind.

Die Entwicklung der häufigsten Antworten auf die Frage Aus wie vielen Punkten besteht ein Kreis mit dem Durchmesser von 10 cm? (1, 0 und Aus unendlich vielen) ist in Abb. 4 dargestellt.

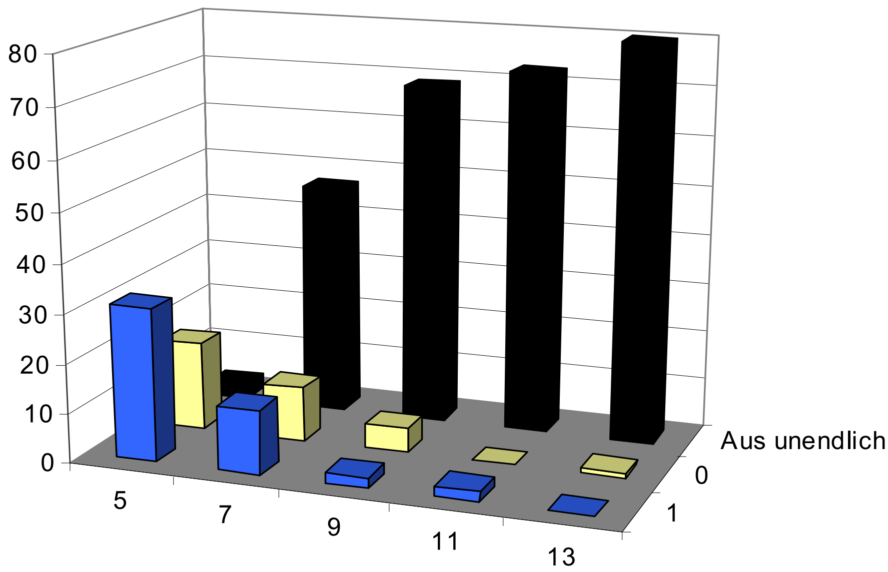

Abb. 4

Die bevorzugte Antwort in der 5. Klasse ist die Antwort *1*. Aufgrund der Gespräche mit Schülern wurde bestätigt, dass sie damit den Kreismittelpunkt meinen. Es handelt sich wieder um eine Fixierung auf die Konstruktion und die resultierende Kreisabbildung. Die Schüler führen die Punktzahl an, die sie auf der Skizze sehen (d. h. die Zahl der bezeichneten Punkte). Auf die Frage des Interviewers *In wie vie-*

len Punkten schneidet die Gerade p den Kreis k? (s. Abb. 5, die vor ihnen auf dem Papier gezeichnet wurde) antwortete ein Junge aus der 5. Klasse *In einem* (und zeigte auf den Mittelpunkt S), und sein Nachbar *Nein, in drei* (und zeigte noch zusätzlich auf die Schnittpunkte der Geraden mit dem Kreis).

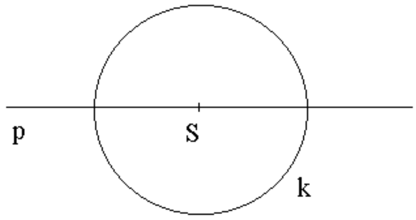

Abb. 5

Von der Sekunda (7. Klasse) an lautet die häufigste Antwort *Aus unendlich vielen*. In der Abb. 6 sehen wir das Verhältnis der Antworten *Aus unendlich vielen* bei der Geraden, Strecke und dem Kreis in der jeweiligen Alterskategorie. Es ist von der Sekunda an relativ gleich.

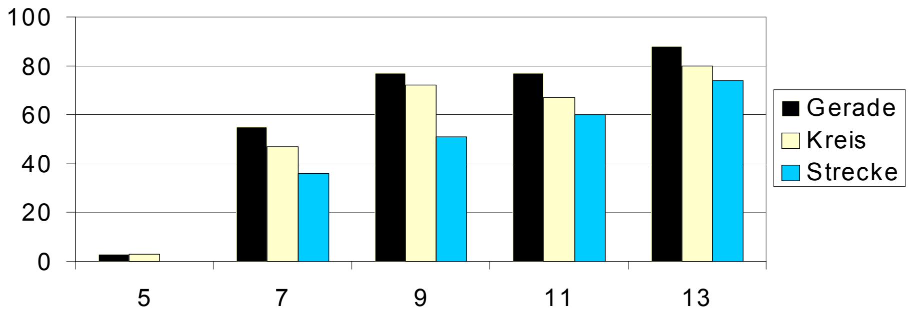

Abb. 6

Es ist verständlich, dass die Schüler eine unendliche Zahl von Punkten am häufigsten bei der Geraden – einer unbegrenzten Menge – anführen. Die höhere Häufigkeit der Antwort *Aus unendlich vielen* bei dem Kreis als bei der Strecke rechne ich dem Fakt zu, dass ein Kreis im Unterschied zu einer Strecke eine geschlossene Kurve ist (sie hat weder Anfang noch Ende).

Wie oben bereits erwähnt, konzentriere ich mich in diesem Beitrag auf die Fragen, die den Begriff der *Mächtigkeit einer Menge* betreffen. Im zweiten Teil des Beitrags werde ich noch die Fragen Nr. 6 und 10 kommentieren.

Die Frage *Wovon gibt es unendlich viel?* enthielt der Fragebogen für jede Alterskategorie außer der 1. Klasse. Die häufigste Antwort ist bei allen Kategorien die Antwort *Zahlen*. Die zweithäufigste Antwort ist die Antwort *Sterne* (interessehalber bemerken wir hier (wenngleich es von unserem Gesichtspunkt aus nicht wichtig ist), dass es sich um eine falsche Antwort handelt: Nach gegenwärtigen Erkenntnissen schätzen Physiker ihre Zahl auf 10^{18} bis 10^{21}). Die Häufigkeit der Antworten *Leute, Bäume, Wörter, Wasser* sinkt fortschreitend, und von der 7. Klasse beginnend bewegt sie sich unter 10 %. Sporadisch erscheinen auch Antworten, die durch die früheren Fragen inspiriert wurden (*Punkte auf einer Geraden* oder *Punkte auf einem Kreis*).

Über die Antworten der Schüler können wir vom Gesichtspunkt der potentiellen und der aktuellen Auffassung vom Unendlichen aus nachdenken. Das Phänomen vom Unendlichen wird den Schülern überwiegend in einer aktualisierten Gestalt vorgelegt – die Gerade, die Ebene, Zahlenbereiche ... Den Schülern ist ein potentieller Zugang näher, der aber gewöhnlich im Unterricht wenig entwickelt ist (Wigand 1959). Man diskutiert über das Problem des Unendlichen sehr wenig (u. a. Blum/Törner 1983). Und das verursacht möglicherweise auch die Schwierigkeiten, die die Schüler später z. B. mit dem Prinzip der mathematischen Induktion haben. Die Argumentation dieses Beweises ist nämlich potentiell, aber das Ergebnis gilt in einer aktuell unendlichen Menge.

Im Fragebogen befinden sich zu dieser Frage Antworten, die eher auf eine potentielle Auffassung vom Unendlichen (z. B. *Wörter*) oder eine aktuelle Auffassung vom Unendlichen (z. B. *Punkte auf einem Kreis*) hinweisen. Die meisten Antworten sind selbstverständlich diejenigen, die ohne ausführlichere Untersuchung der Vorstellungen von einzelnen Schülern unklassifizierbar sind – *Leute, Bäume, Wasser* oder *Atome* (ihre Zahl im Weltraum schätzt man auf 10^{85} (Maor 1991)). Illustrieren wir diese Erwägungen wieder mit einem Ausschnitt aus einem Interview mit zwei Mädchen, Schülerinnen der 5. Klasse.

INTERVIEWER 1: *Wovon gibt es unendlich viel?*

HANNA 1: *Zahlen.*

I2: (zu Pauline) *Hat sie Recht?*

PAULINE 2: *Ja.*

I3: *Und warum?*

H3*: Na, weil ich immer noch weiterrechnen kann.*

I4: *Ja?* (zu Pauline) *Nach* (2) *zum Beispiel einer Million kann ich auch noch fortsetzen, weiterrechnen?*

P4: *Ja, Einemillionundeins, Einemillionundzwei ...*

I5: *Und wann endet es?*

P5: *Einemillionneunhundertneunundneunzig.*

H5: *Nein, nein, es ist Einemillioneintausend danach.*

I6: *Und dann?*

H6: *Einemillioneintausendundeins, Einemillioneintausendundzwei* (2) *und so. Und so kann ich es immer machen.*

I7: *Hm. Und kennt ihr noch etwas, wovon es unendlich viel gibt?* (8) *Was* (3) *zum Beispiel* (2) *Bücher?* (Er nickt mit dem Kopf zu den Büchern, die auf dem Boden liegen.) *Alle Bücher in der ganzen Welt.*

H7*: Nein, sie sind endlich.*

I8: *Warum?*

H8: *Man kann sie zusammenrechnen.* (2) *Aber die Buchstaben in ihnen gibt es unendlich.* (3) *Nein, es ist nicht so.* (2) *Na, aber die Wörter gibt es unendlich*.

I9: *Die Wörter in den Büchern?*

P9: (mit Bestreben, sich ins Gespräch einzubringen) *Na, die Wörter in allen Büchern.*

H9: *Nein, alle Wörter,* (2) *auch die indischen, alle,* (2) *die die Leute sagen* (2) *und schreiben.*

I10: *Aber warum?* (5) *Kann man sie denn nicht zusammenrechnen?*

P10: *Na, wohl* (3) *ich weiß nicht.*

H10: *Na, man kann, aber immer kann ich mir ein neues Wort ausdenken.*

P11: *Na, aber das könnte schon in den Büchern sein.*

I11: *Meinst du Enzyklopädien?* (3) *Oder Wörterbücher, wo es alle,* (2) (er wird unsicher) *fast alle Wörter gibt?*

P12: *Ja.*

H12: *Na, ich kann aber doch immer ein neues Wort ausdenken.*

I13: *Aber das hätte vielleicht keinen Sinn mehr, nicht wahr?* (5) *Na gut, so nehmen wir nur solche Wörter, die aus drei Buchstaben bestehen, ja? Alle möglichen, aus drei Buchstaben zusammengesetzten Wörter, zum Beispiel* (2) *Uwe, gut ... und so weiter, ja?* (2) *Wie viele gibt es von ihnen?* (4) *Unendlich viele ?*

H14: *Nein, gibt es nicht.*

I15: *Und wenn ich jetzt alle Wörter nehme, die aus vier, fünf, na* (3) *sagen wir zum Beispiel höchstens zwanzig Buchstaben bestehen, wie viele gibt es von denen dann?* (5)

H15: *Ich denke unendlich viele. Ich kann doch immer noch ein neues Wort ausdenken, das noch nirgendwo aufgeschrieben ist. Und vielleicht werden es dann die Leute benutzen.* (3) *Und in jedem Land spricht man doch anders, nicht wahr? So haben wir noch mehr Wörter.*

Im Verlauf dieses Teiles des Interviews wurden drei Mengen erwähnt – Zahlen (wie aus dem vorhergehenden, hier nicht angeführten Teil des Interviews hervorgeht, verstehen die Mädchen darunter die Menge aller natürlichen Zahlen), die Menge aller Bücher in der Welt und die Menge aller Wörter in allen Sprachen. Man kann bei den Zahlen konstatieren, dass Hanna eine richtige Vorstellung hat. Sie nimmt die Unendlichkeit der Menge aller natürlichen Zahlen potentiell auf, wie eine Möglichkeit, immer noch eine weitere, größere natürliche Zahl, ein Element dieser Menge, zu nennen.

Auf die Untersuchung der Vorstellungen des zweiten Mädchens – Pauline – verzichten wir hier. Der Forscher zog im Verlauf des Interviews die Untersuchung der Vorstellungen des aktiveren Mädchens Hanna vor.

Die Menge von Büchern war hinsichtlich eines schnellen Gedankensprunges auf der Position H8 schnell erledigt. Dennoch zeugt Hannas wertvolle Äußerung *Man kann sie zusammenrechnen* (die Bücher) von ihrer richtigen Vorstellung von der Endlichkeit dieser Menge.

Bei der letzten erwähnten Menge – der Menge aller Wörter – erkannte Hanna, dass es von allen, aus drei Buchstaben zusammengesetzten tschechischen Wörtern nicht unendlich viele gibt (H14). Die Vorstellung der Möglichkeit, weitere neue Wörter zu bilden, dominiert aber immer bei ihr im Fall, dass wir mehr Buchstaben haben (zwanzig). Das ist ein Grund zu ihrer falschen Überzeugung von der Unendlichkeit der betreffenden Menge.

Diese Problematik behandelt auch die Frage Nr. 10 *Ist die Anzahl aller Sandkörnchen auf der Erde endlich oder unendlich groß?* Die Entwicklung der Antworten ist in Abb. 7 dargestellt.

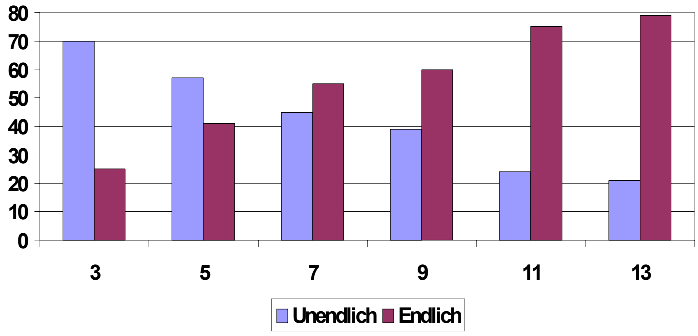

Abb. 7

Die Entwicklung der beiden Antworten ist zu erwarten. Beachtenswert ist es aber, dass 21 % von den Schülern der Oktava, der 13., also letzten Klasse des Gymnasiums, meinen, dass die Anzahl aller Sandkörnchen auf der Erde unendlich groß sei.

Diese Schüler haben eine falsche Vorstellung von den Begriffen *endlich, unendlich, endlich viel* und *unendlich viel*. *Unendlich viel* bedeutet für manche von ihnen *sehr viel, unvorstellbar viel*.

Pietzsch beschreibt aufgrund seiner Untersuchungen, wie hemmend sich falsche oder unklare Vorstellungen, die die Schüler mit dem Wort *unendlich* verbinden, auf eine – wenn auch nur propädeutische – Behandlung von Grenzprozessen auswirken (Pietzsch 1967).

Was für Erfahrungen und Kontakte mit dem Unendlichen gewinnen eigentlich die Schüler im Verlaufe der Kindheit und des Heranreifens?

Man kann sagen, dass das Wort *das Unendliche* zu einem selbstverständlichen Bestandteil des Kinderwörterbuches schon ab dem jüngeren Schulalter gehört und ohne Bedenken angewendet wird. In den Sinneserfahrungen der Kinder fehlt aber selbstverständlich die unmittelbare Erfahrung mit dem Unendlichen aus der realen Welt. Auch in der Schule definiert man die Begriffe e*ndlich*, *unendlich*, *endlich viel*, *unendlich viel* nicht. Wann begegnet der Schüler diesen Begriffen während seines Mathematikunterrichtes?

Schon auf der Grund- und Mittelschule begegnet der Schüler den unendlichen Zahlenmengen – der *Menge der natürlichen, ganzen, rationalen* und *reellen Zahlen*. Hier arbeiten die Schüler auch mit den unabgegrenzten geometrischen Figuren – mit *Geraden, Halbgeraden, Ebenen* und *Winkeln*. Sie stoßen auch auf unendliche Mengen der Lösungen der *Gleichungen, Ungleichungen, Gleichungssysteme* und in diesem Zusammenhang auch auf die *Intervalle*. Bei der Behandlung der *rationalen Zahlen* spricht man von abbrechenden und nicht abbrechenden Dezimalbrüchen, von dem Begriff *Periode der Dezimalzahl*. Indirekt spricht man (oder eher kann man sprechen) vom Verhalten der Funktionen im Unendlichen bei der Behandlung der *linearen, quadratischen, logarithmischen, linear gebrochenen Funktionen* und *Exponentialfunktionen* in den ersten Schuljahren des Gymnasiums. Hier behandelt man auch die *Zahlenfolgen* und *Reihen*, man führt die Beweise durch die *mathematische Induktion* durch. In den letzten Schuljahren werden die Schüler auch mit den Elementen der *Differential- und Integralrechnung* bekannt gemacht.

Es könnte auf den ersten Blick so aussehen, dass die Schüler mit dem Unendlichen relativ genug Erfahrungen gewinnen. Tatsächlich ist es aber umgekehrt. Die Begegnungen mit verschiedenen unendlichen Prozessen und auch mit dem Phänomen „Annäherung" sind vereinzelt und sind vor allem im Rahmen der Möglichkeiten nicht ausreichend stark hervorgehoben.

Zusammenfassung

Die Vorstellung der meisten Schüler der Grundschule über *Punkt*, *Strecke*, *Gerade* und *Kreis* ist fest mit jeweiligen Abbildungen verbunden – mit einem Entwurf, einer Skizze an der Tafel oder im Heft. Diese Fixierung auf die Abbildung verschwindet bei den meisten Gymnasialschülern schon in der siebten und achten Klasse, bei einem kleinen Teil hält sie aber bis in die letzten Schuljahre an.

Für manche Schüler der Sekundarstufe I ist die Vorstellung von unendlich vielen Punkten in einem abgegrenzten Objekt der Dimension 1 unzulässig.

Unendlich viel bedeutet für manche Schüler sehr viel, unvorstellbar viel.

Allgemein kann man sagen, dass das Verständnis der Begriffe *endlich, unendlich, endlich viel* und *unendlich viel* bei den Schülern weniger von Lehrplänen und Lehrbüchern als von den Mathematiklehrern abhängt, die auf die Schüler im Verlauf ihres Schulbesuchs einwirken, und davon, wie oft und treffend diese Lehrer propädeutische „Ausflüge" ins Unendliche durchführen.

Interessant ist der Vergleich der Ergebnisse zwischen Jungen und Mädchen. Die Tschechische Republik gehört nach den Ergebnissen der internationalen Forschung TIMSS 1999 zu den Ländern mit den größten statistisch bedeutenden Unterschieden zwischen Jungen und Mädchen in der Mathematik, und zwar zu Gunsten der Jungen. Auch hier kann man feststellen, dass bei den Fragen, bei denen man die Antworten entweder als richtig oder falsch bewerten kann, die Jungen immer erfolgreicher waren als die Mädchen. Markant war dieser Unterschied besonders bei den Fragen nach der Mächtigkeit der Mengen aller Leute auf der Erde, der Sandkörnchen und der natürlichen und der rationalen Zahlen. Der Unterschied zwischen Jungen und Mädchen war dagegen bei Fragen aus der Geometrie weniger deutlich.

Was die kleine Untersuchung in der 7., 9. und 11. Klasse der Mittelschule in Zittau betrifft, kann man sagen, dass bei den Fragen, bei denen man die Antworten entweder als richtig oder falsch bewerten kann, die tschechischen Kinder erfolgreicher waren als die deutschen. Während dieser Unterschied in der siebten Klasse sehr stark ins Gewicht fiel, war er in der neunten Klasse schon kleiner und in der elften Klasse schon unbedeutend. Der Grund liegt m. E. auch darin, dass die Schüler in beiden Ländern in höheren Schulklassen öfter im Unterricht mit den unendlichen Mengen und Prozessen zusammenkommen.

Die meisten der vorgestellten Fragen kann man mit Erfolg im Mathematikunterricht als passende Anregung zur Diskussion nutzen, die hinsichtlich einer Propädeutik der Infinitesimalrechnung sehr wertvoll sein kann.

Literatur

Bikner-Ahsbahs, A.: Erfahrungen des infinitesimal Kleinen, mathematica didactica 23 (2000), 24 - 39

Blum, W., Törner, G.: Didaktik der Analysis, Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen, 1983

Eisenmann, P.: Test des infinitesimalen Denkens, mathematica didactica, 2000, Band 1, Hildesheim, 63 – 71

Holland, G.: Geometrie in der Sekundarstufe, BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich, 1998

Laborde, C: Punkt, Gerade, Strecke – alte Gegenstände der Geometrie, In: Steiner, H. G., Winter, H.: Mathematikdidaktik, Bildungsgeschichte, Wissenschaftsgeschichte. Untersuchungen zum Mathematikunterricht, IDM 12, Aulis, Köln, 1985, 108 – 113

Maor, E.: To Infinity and Beyond – A Cultural History of the Infinite, Princeton University Press, Princeton, 1991

Pietzsch, G.: Zum Grenzwertbegriff, Volk und Wissen, Berlin, 1967

vom Hofe, R.: Probleme mit dem Grenzwert – Genetische Begriffsbildung und geistige Hindernisse, Journal für Mathematik-Didaktik 19 (1998), 257 – 291

Wigand, K.: Grenzprozesse in der Unterstufe, Der Mathematikunterricht 5 (1959), 7 – 16

Anschrift des Verfassers:

Dr. Petr Eisenmann, Pädagogische Fakultät der Universität Ústí nad Labem, Institut für Mathematik, České mládeže 8, Ústí nad Labem, 40001

E-mail: eisenmannp@pf.ujep.cz