Wie alt ist der Kapitän wirklich?

Über die Bewährung der Mathematik an der Realität oder Wittgenstein, Regeln und der Mathematikunterricht

von

Esther Ramharter, Wien

Zusammenfassung: Ziel des vorliegenden Aufsatzes ist folgende Positionierung des Anwendungsbezugs in der Mathematik-Didaktik: Die Art der Bewährung von Mathematik an der „Realität", die für Schüler/innen am dringlichsten ist, findet sich nicht in der thematischen Bezugnahme auf die Alltagswelt in Form von Anwendungsbeispielen, sondern ist die sprachliche und handlungsoptionale Zugänglichkeit der mathematischen Inhalte, insbesondere der bewusste, artikulierte und thematisierte Umgang mit Regeln, wie man ihn von Wittgenstein lernen kann.

Summary: In the paper I discuss the way in which mathematics education is supported by „reality". According to Wittgenstein mathematics has to correspond to our acting in a sense that essentially differs from a mere occupation with application-orientated exercises.

1 Die „Kapitänsbeispiele"

Vor mittlerweile längerer Zeit hat mich ein didaktisches Buch die Welt, insbesondere die Fehler und Schwierigkeiten der Schüler/innen, nicht mehr so sehen lassen wie vorher: Stella Baruks „Wie alt ist der Kapitän?". Aus einiger zeitlicher Distanz, im Vergleich mit derzeitigen Paradigmen der Fachdidaktik und von einem externen Blickpunkt aus möchte ich mich nun hier mit dem Buch auseinandersetzen. Den inhaltlichen Ausgangspunkt für Stella Baruks Buch bilden Aufgaben wie die folgende (BARUK 1989, S.32):

> *Beispiel 1:* Auf einem Schiff sind 36 Schafe. Davon fallen 10 ins Wasser. Wie alt ist der Kapitän?[1]

[1] Die Idee zu diesem Beispiel stammt laut Baruk (BARUK 1989, S.136ff) von Gustave Flaubert, der es seiner Schwester zur Unterhaltung geschickt hat. Baruks Ausführungen beziehen sich auf eine Studie am IREM in Grenoble, von der schon in FREUDENTHAL 1982 berichtet wird. Ein ins Deutsche übersetzter kurzer Auszug aus dem französischen Aufsatz ist FREUDENTHAL 1984.

Ähnliche Aufgaben wurden Schüler/innen verschiedener Schulstufen vorgelegt, und von teilweise über 75 Prozent der Schüler/innen mittels einer Rechnung wie Subtraktion der Anzahl der ins Wasser gefallenen Schafe von der Anzahl der ursprünglichen Schafe beantwortet. Baruks Diagnose ortet im Wesentlichen zwei Ursachen[2] für dieses Phänomen:

(1) Die Lehrer/innen treiben den Schüler/innen die Vernunft aus.

(2) Die Schüler/innen messen ihr Tun zu wenig an ihrem Alltagsverstand.

Baruk verwahrt sich (1) gegen den Mythos der unbegabten Kinder, sie sieht einen gewichtigen Grund für das häufige Versagen des Mathematikunterrichts darin, dass Kinder, die etwas falsch machen, zu Idioten erklärt werden. Diesem Versagen sollte abgeholfen werden, indem Lehrende ihre Ansicht über die Fehler, die Schüler/innen machen, revidieren.

> „*Ein lebendiges Wesen reagiert mit Irrtümern darauf, daß ihm Wissen injiziert wird. Denn dieses Wissen wird Störungen hervorrufen – wie immer, wenn ein Fremdkörper in einen lebenden Organismus aufgenommen wird –, bevor es verdaut und aufgelöst worden ist und zur Substanz einer neuen geistigen Einsicht werden kann.*“ (BARUK 1989, S.43)

Baruk kritisiert (2), dass den Schüler/innen zu wenig die Möglichkeit eröffnet wird, Mathematik im alltagsweltlichen Vorverständnis zu verankern. Die Erfahrung mit Schüler/innen lehrt:

> „*In der Mathematik kann etwas auf noch so triviale Weise konkret sein (oder sich dafür ausgeben), es kann auf noch so solide Weise abstrakt sein: es wird immer den Status von etwas Irrealem oder Surrealem haben, in einem Traumland – oder Alptraumland –, wo Schafe 32 Beine haben können, Frauen 4,50 m groß sind, wo 2 gleich 6 sein kann und wo man die 1 daran hindern muß, zu Null zu werden;* […].“ (BARUK 1989, S.24)

> „*‚An der Tankstelle. In einem bestimmten Land kostet der Liter Benzin 2,23 Franc. Aber die Zapfsäulen zeigen nur natürliche Zahlen an.‘*[…] *Beispiele wie diese* […] *bringen es dahin, daß die Rede vom Gefühl des Ausgeschlossenseins der Schüler ein Super-Euphemismus wird. Gegenüber einem Universum, das eine einzige Kunstwelt ist, ist er bereits angeschmiert, was den Sinn anbetrifft.*“ (BARUK 1989, S.268/269)

Die hier zu konstatierende mangelnde Mobilisierung von Alltagserfahrungen wird nicht nur von Baruk festgestellt, sondern bildet die Basis für zahlreiche Appelle

---

[2] Eine nahe liegende Erklärung, die sich aus einem kleinen Sample von Stichproben aus Kindern in meinem Umfeld ergibt, hat Baruk nicht in Betracht gezogen: Die Kinder finden (erlöst von den langweiligen üblichen Textbeispielen) Beispiele wie das Kapitänsbeispiel unterhaltsam grotesk und amüsieren sich über die selbsterdachten Zusammenhänge.

nach Anwendungsbezug des Mathematikunterrichts. Jeder kennt die Klagen von Mathematik-Lehrer/innen über Schüler/innen, die als Schlusssatz eines Beispiels schreiben: „Der Mann ist 10 m groß." und es dreimal hellblau unterstreichen. Ich werde im Folgenden argumentieren, dass der Ruf nach Praxisbezug differenziert zu sehen ist.[3]

Sehen wir uns vor diesem Hintergrund ein auf den ersten Blick dem Kapitänsbeispiel sehr verwandt scheinendes Beispiel an.

Beispiel 2:

A: Das Produkt des Alters meiner drei Schwestern ist 36.
B: Jetzt weiß ich aber nicht, wie alt deine Schwestern sind.
A: Die Summe ihrer Alter ist gleich der Hausnummer des Hauses, vor dem wir gerade stehen.
B: Das genügt mir nicht.
A: Die älteste hat rote Haare.

Darauf sagt B, wie alt die drei Schwestern sind. Kannst Du das auch?[4]

Dieses Beispiel sieht oberflächlich betrachtet dem Kapitänsbeispiel wohl tatsächlich sehr ähnlich. Das Alter von Schwestern hat mit einer Hausnummer und einer Haarfarbe nicht mehr gemeinsam als das Schicksal von Schafen auf einem Schiff mit dem Alter des Kapitäns. Dennoch lässt sich für das zweite Beispiel eine Antwort finden, für das erste nicht. Was bedeutet aber „eine Antwort finden"? Das erste Beispiel wird manchmal als Scherzfrage verwendet, und auf die ratlose Auskunft des Befragten, er wisse das Alter des Kapitäns nicht, wird dann geantwortet: „56 – ich habe ihn gefragt." Diese Antwort sehen wir aber im Kontext von Mathematikunterricht als nicht zulässig an. Wir haben also eine bestimmte Art der Antworten oder des Auffindens von Antworten vor Augen, wenn wir Schüler/innen mit mathematischen Aufgaben konfrontieren. Es gilt somit herauszufinden, wie sich die Art der Lösungsfindung, die für das erste Beispiel unmöglich, für das zweite aber möglich ist, charakterisieren lässt.

Die Forderung, die Beispiele müssten in der Realität fest verankert werden, taugt hier offenkundig nicht so einfach als Kriterium, um zwischen den beiden Beispielen differenzieren zu können. Das zweite Beispiel ist genauso kontra-intuitiv wie das erste. Gerade der Umstand, dass die mathematischen Zusammenhänge hinter

---

[3] Für eine kritische Diskussion des Theorie-Praxis-Verhältnisses in der Mathematik vgl. MAAß/SCHLÖGLMANN 1999.

[4] Zwei der möglichen Zerlegungen von 36 in drei Faktoren haben als Summe 13, nämlich 1, 6, 6 und 2, 2, 9. Die Summen der drei Faktoren der anderen Zerlegungen sind paarweise verschieden. Nur dann, wenn die Hausnummer 13 ist, genügt also der Verweis auf die Hausnummer B nicht, um zu entscheiden, wie alt die Schwestern sind. Die Summe muss daher 13 sein. Da A im nächsten Satz von *der* ältesten spricht, muss diese eindeutig bestimmt sein, 1, 6, 6 scheidet daher aus, und die Lösung lautet somit 2, 2, 9.

einer alltagsweltlich wirren Oberfläche verborgen sind (dass für die Mathematik ganz untypische Phrasen Träger mathematisch relevanter Information sind (man bedenke, dass der ganze Text nur *eine* Gleichung in üblicher Weise beschreibt, aber drei Unbekannte vorhanden sind)), macht ja aus der Sicht des/der Mathematiker/in den Reiz des Beispiels aus.

Das erste Beispiel ließe sich beantworten mit „zwischen 10 und 150". Diese Antwort ist durch die Realität hinreichend abgesichert und mathematisch nicht unkorrekt. Dennoch ist sie nicht so, wie der/die Mathematiker/in sie sich wünscht. Der/die nämlich möchte hören: „Es gibt keine (eindeutig bestimmte) Antwort aufgrund dieser Angaben". Ich kann dieser Antwort nicht mehr alltagsweltliches Verankertsein abgewinnen als „zwischen 10 und 150", dennoch gilt sie als die gesuchte, erwünschte, korrekte, „mathematische".

Ein im geschilderten Sinn naiv verstandener Realitätsbezug, der es für das Gelingen von Mathematiklernen als entscheidend ansieht, dass alltagsweltlich plausible Aufgaben gestellt werden, scheint mir also – auch mittelbar und langfristig – kein Garant für Schülerantworten, wie sie uns für den Mathematikunterricht als zulässig vorschweben.

2 Wahrheit in der Mathematik?

Beispiel 2 wie auch all die üblichen Textaufgaben beschreiben, verbergen, eröffnen einen mathematischen Sachverhalt, der unabhängig von der Alltagswelt besteht oder nicht besteht. Ist es dennoch gerechtfertigt, jenes Sinn- bzw. Wahrheitskriterium für Resultate in der Mathematik, das von Schüler/innen zu sehr vernachlässigt wird, als „Bewährung an der Alltagserfahrung" zu bezeichnen?[5]

Baruk schildert folgende Situation:

(1) „[…] *ein Zweitkläßler* [*gibt*] *auf die Frage ‚In deiner Hosentasche hast du 10 rote Bleistifte. Wie alt bist du?' die Antwort: ‚Zwanzig Jahre'. Ich mache ihn darauf aufmerksam, er wisse doch sehr wohl, daß er nicht zwanzig Jahre alt sei. Seine Antwort darauf: ‚Das stimmt, aber das ist deine Schuld, du hast mir nicht die richtigen Zahlen gegeben.* '" (BARUK 1989, S.123)

Baruks Entsetzen über die Antworten und die Selbstverteidigung des Kindes, das sei eben nur in der Mathematik so, wird gemildert, wenn man sich eine andere Situation ausdenkt:

(2) Ein Kind beantwortet die Aufgabe „Das Alter deiner Mutter ist doppelt so groß wie die Anzahl der Bleistifte in deiner linken Hosentasche. Wie alt ist deine Mutter?" mit „Zwanzig Jahre", obwohl es weiß, dass seine Mutter in Wirklichkeit keineswegs zwanzig Jahre alt ist.

---

[5] Für eine Zusammenstellung und Würdigung verschiedener Positionen zur Sinnfrage im Mathematikunterricht siehe FISCHER/MALLE 1985, S.21ff.

Das Kind tut ziemlich genau das, was man von ihm erwartet. Das Kind interpretiert den Text richtig mit „Nimm an, es ist/wäre so und so …“. Sowohl ist die Replik des Kindes, man habe ihm eben die falsche Zahlen gegeben, in Situation (2) völlig richtig, als auch stimmt die Behauptung, dass etwas in der Mathematik anders als in der lebensweltlichen Umgebung sein könne[6]. Niemand ist jemals einem unendlich langen Strich ohne Ausdehnung begegnet. Der Unterschied zwischen (1) und (2) besteht nicht darin, dass die Antwort in (2) einer Überprüfung an der Realität besser standhielte, sondern darin, dass in (1) kein mathematischer Sachverhalt beschrieben wird, in (2) dagegen schon.

Antworten in der Mathematik, im Mathematikunterricht müssen sich vorerst einmal *nicht* alltagsweltlich, sondern mathematisch rechtfertigen lassen. Eine erste Näherung einer Formulierung dessen, was dem Lösen von Mathematikbeispielen zu Grunde liegt, könnte lauten: Eine sinnvolle mathematische Aufgabe ist eine, die einen mathematischen Sachverhalt beschreibt. Und das Lösen einer sinnvollen mathematischen Aufgabe besteht darin, herauszufinden, ob diesem mathematischen Sachverhalt eine mathematische Tatsache entspricht. Was meine ich mit „mathematischem Sachverhalt“ und „mathematischer Tatsache“?

Die Terminologie „Sachverhalt“ versus „Tatsache“ stammt aus Wittgensteins Tractatus logico-philosophicus[7]. Ich habe mir Wittgensteins Terminologie des Tractatus allerdings in exegetisch unzulässiger[8] Weise ausgeborgt. (Diese Anleihe werde ich später rechtfertigen.) Jedenfalls verstehe ich unter „mathematischen Sachverhalten“ Behauptungen, die in syntaktisch korrekter Weise gebaut sind, also prinzipiell im Rahmen des (üblichen) formalen Gefüges der Mathematik formulierbar sind, aber nicht wahr sein müssen. Z.B.: „$2+5=8$“, „$4+2=6$“, „Ein Dreieck hat fünf Seiten.“ Eine mathematische Tatsache möge ein wahrer (deduzierbarer) Sachver-

---

6 Baruks Erstaunen über die Willigkeit des Kindes, kontrafaktische Aussagen zu treffen, ist auch dadurch zu relativieren, dass kontrafaktisches Überlegen und Argumentieren nicht nur in der Mathematik gang und gäbe ist. Man wundert sich nicht über Sätze wie „Wenn ich früher aufgestanden wäre, wäre ich jetzt nicht so in Eile“.

7 Der Tractatus ist das erste und einzige Werk Wittgensteins, für dessen Veröffentlichung Wittgenstein selbst sorgte, und hatte großen Einfluss auf den Wiener Kreis. Das logisch-positivistische Wahrheitsverständnis, das den darin enthaltenen Überlegungen zu Grunde liegt, relativiert Wittgenstein in seiner späteren Philosophie.

8 In Stenius’ Interpretation (STENIUS 1969, S. 47–53) von Wittgenstein sind Sachverhalte potentielle, Tatsachen wirkliche Beziehungen zwischen Dingen in der Welt. (Diese Interpretation halte ich nicht für die plausibelste, aber sie ist für meine Zwecke hier am brauchbarsten.) Die Objekte der Mathematik aber sind, in den allermeisten Interpretationen, keine Dinge in der Welt im Sinne Wittgensteins, insofern ist meine Verwendungsweise exegetisch unzulässig.

halt sein[9]. Z.B.: „$4+2=6$“, „2 teilt 2n“, „Die Winkelsumme im Dreieck beträgt 180°.“ Eine Aufgabe zu lösen, bedeutet dann, einen Sachverhalt anzugeben, der aus den Angaben resultiert und eine mathematische Tatsache ist.

Wenn man bei dieser Sichtweise stehen bleibt, ist ein Schüler, der einen Irrtum begeht, schlicht im Irrtum, also in gewisser Hinsicht dumm, eine Schülerin dagegen, die kontrafaktisch behauptet, ihre Mutter wäre laut Beispiel zwanzig Jahre alt, völlig im Recht.[10] Weder die Zuschreibung von „Dummheit“ noch von „im Recht sein“ will uns aber gänzlich behagen. Ich werde daher im nächsten Abschnitt nach einem erweiterten Zugang zum Sinn in der Mathematik suchen.

Im vorigen Abschnitt hatte ich argumentiert, dass eine naive Forderung nach Bewährung an der Alltagserfahrung nicht hinreichend dafür ist, dass man von Schüler/innen die erwünschten Antworten oder auch nur Antworten der erwünschten Art erhält. In diesem Abschnitt ging es mir darum zu zeigen, dass ein rigider formal-mathematischer Korrektheitsanspruch allein auch nicht befriedigend ist. Im Folgenden ist es nun mein Anliegen, beiden Ansprüchen ihre Naivität zu nehmen und so zu ihrem Recht zu verhelfen.

3 Sinn in der Mathematik

Bisher habe ich unproblematisiert gelassen, was es heißt, ein Text „beschreibe“ einen mathematischen Sachverhalt oder ein mathematischer Sachverhalt „resultiere“ aus einem Text. Was mich im Folgenden beschäftigt, ist die Frage: Wie komme ich an den mathematischen Sinn eines Textbeispiels?

Vergegenwärtigen wir uns zur Beantwortung dieser Frage noch einmal die beiden Beispiele, das Kapitänsbeispiel und das Drei-Schwestern-Beispiel. Beispiele wie das erste nennen wir sinnlos, Beispiele wie das zweite erachten wir vielleicht als ungewöhnlich, aber durchaus mit mathematischem Sinn ausgestattet. Durch Einfügen eines einzigen Satzes erhält man (wie schon bei dem Beispiel mit dem Zweitklässler) aus einem Beispiel der ersten Art ein Beispiel der zweiten Art:

> *Beispiel 1':* Auf einem Schiff sind 36 Schafe. Davon fallen 10 ins Wasser. Du erhältst das Alter des Kapitäns, indem Du die Anzahl der ins Wasser gefallenen Schafe von der ursprünglichen Anzahl der Schafe subtrahierst. Wie alt ist der Kapitän?

Beispiel 2 und Beispiel 1′ enthalten im Unterschied zu Beispiel 1 eine *Regel* (nämlich die Anzahlen der Schafe zu subtrahieren), der man zu folgen hat. Die Sinnfrage mutiert mit Blick auf explizite oder implizite Regeln zu einer Frage nach einer glückenden operativen Anweisung. Die Fokussierung auf das Vorhandensein einer

---

9 Ich lasse das Problem des Nicht-Identität von Wahrheit und Deduzierbarkeit hier außer Acht, weil es im Rahmen der Mathematik in der Schule irrelevant ist.

10 Zu Fehleranalysen im Mathematikunterricht siehe RADATZ 1980.

Regel stellt die Sinnhaftigkeit von Mathematik behandelnden Texten in einen größeren Zusammenhang. Neben expliziten oder impliziten Regeln, die zur Lösung einer mathematischen Aufgabe anleiten, bilden Regeln in einem weiteren Sinn, nämlich als Sprachsteuerungsmechanismen, den Ausgangspunkt allgemeiner Betrachtungen, die anschließend allerdings gewinnbringend für die Situation des Mathematikunterrichts wieder konkretisiert werden können.

Mathematik lässt sich, wie Baruk feststellt (BARUK 1989, S.151ff), als eine Sprache auffassen, die wir lernen müssen. Sprache aber lernen wir nicht nur, indem man uns, wie Baruk es schildert, die Bedeutung von Wörtern erklärt, sondern, indem man uns Beispiele zeigt, wie die Regeln, die die Sprache beherrschen, zu verwenden sind.

„Regeln“ und Baruks Hinweis auf „Sprache“ – hier beginnt man wieder Wittgenstein sprechen zu hören.

Die folgenden Ausführungen sind durch ein steigendes Maß an Konkretheit in Bezug auf die Relevanz für den Mathematikunterricht gekennzeichnet.

3.1 Regeln folgen (Wittgenstein)[11]

Wittgenstein hat in seiner Spätphilosophie das bis in unsere Zeit vorherrschende und sehr fest sitzende Augustinische Sprachverständnis revidiert. Wörter kleben nicht, wie man die Sprachauffassung Augustinus’ beschreiben könnte, wie Zettel an Dingen, sondern die Bedeutung von Wörtern erschließt sich uns über ihren Gebrauch. Wir lernen, wie ein Wort *funktioniert*, wir lernen also, einer Regel zu folgen, wie wir das Wort zu verwenden haben. Wittgenstein findet sehr harte Worte: Das Lehren der Sprache ist „kein Erklären, sondern ein Abrichten“ (WITTGENSTEIN PU § 5)[12].

> „*Wer aber diese Begriffe noch nicht besitzt, den werde ich die Worte durch Beispiele und durch Übung gebrauchen lehren. – Und dabei teile ich ihm nicht weniger mit, als ich selber weiß.* […]
>
> *Ich mach’s ihm vor, er macht es mir nach; und ich beeinflusse ihn durch Äußerungen der Zustimmung, der Ablehnung, der Erwartung, der Aufmunterung.* […]“ (WITTGENSTEIN PU § 208)

---

[11] Die Didaktik in der Perspektive der Wittgensteinschen Philosophie zu betrachten, bedeutet zweifellos – wie jede Herangehensweise – eine Engführung. Jedoch scheint mir gerade Wittgensteins Standpunkt für mein Thema von besonderer Bedeutung.

[12] Zur Erläuterung dieser Aussage Wittgensteins (dass es sich dabei nicht um einen zynischen Erziehungsstil handelt) siehe SCHULTE 2001, S.143ff. Das „*Lernen in der Abrichtungssituation* [*ist*] *mit unseren naturgegebenen Anlagen verknüpft. Um es an einem Beispiel zu verdeutlichen: Wir lernen nicht mit den Zehen Geige zu spielen; unsere Finger eignen sich weit besser dazu.*“ (S.144)

Wittgenstein erläutert am Beispiel des Wortes „Spiel“:

> „[…] *Und gerade so erklärt man etwa was ein Spiel ist. Man gibt Beispiele und will, daß sie in einem gewissen Sinn verstanden werden. – Aber mit diesem Ausdruck meine ich nicht: Er solle nun in diesen Beispielen das Gemeinsame sehen, welches ich – aus irgendeinem Grunde – nicht aussprechen konnte. Sondern er solle diese Beispiele nun in bestimmter Weise verwenden. Das Exemplifizieren ist hier nicht ein indirektes Mittel der Erklärung, – in Ermangelung eines Bessern.* […] *So spielen wir eben das Spiel (Ich meine das Sprachspiel mit dem Wort »Spiel«.)*“ (WITTGENSTEIN PU § 71)

Man kann uns Wörter und Regeln in letzter Instanz nicht lediglich erklären, man muss sie uns zu gebrauchen vormachen, indem man uns den Umgang mit ihnen anhand von Beispielen zeigt[13]. In der Mathematik ist das nicht anders als beim Lernen jeder natürlichen Sprache[14].

Man kann sagen, Wittgenstein hat im Übergang vom Tractatus zu seiner späteren Philosophie in den Key-Words Wahrheit gegen Sinn ausgetauscht. Der Anspruch an Aussagen reduziert sich auf Funktionieren. (Die Frage nach metaphysischen Möglichkeitsbedingungen dieses Funktionierens lässt Wittgenstein unangetastet, und somit auch die Frage nach Begriffsrealismus oder Nominalismus.)

Die Verbindung von Wittgensteins Ausführungen über Sprache und das Lernen von Mathematik kann in beide Richtungen fruchtbar gemacht werden: In die eine Richtung gedacht hilft uns Wittgensteins Räsonieren über den Erwerb von Sprache via Befolgen von Regeln den Verstehensprozess von Mathematik in einem anderen Licht zu sehen. In die andere Richtung gedacht liefern die Schülerfehler einen wertvollen Fundus von Material, an dem man lernen kann, wie Sprache laut Wittgenstein funktioniert. Das Verhalten der Schüler/innen etwa, die absurde Rechnungen wie beim Kapitänsbeispiel anstellen, zeigt deutlich, wie sehr unartikulierte Regeln unser Denken und Sprechen lenken. In dieser Arbeit geht es aber nur um die erste der beiden Richtungen.

Man kann zwei verschiedene Grundtypen von Regeln unterscheiden: erstens die in den Abschnitten 1 und 2 von mir behandelten expliziten oder impliziten Regeln, die als Anweisungen gewissermaßen „von außen“ an Mathematiktreibende z.B. in Form von Aufgaben herangetragen werden, und zweitens die in diesem Abschnitt

---

13 Schon Aristoteles hat festgehalten, dass wir Begriffe durch Beispiele lernen: „*Klar denn also: Es ist uns notwendig, die allerersten (Ausgangsbegriffe) mittels Epagoge zu erkennen*.“ (2. Analytik, 2. Buch, Kapitel 19, 100 b 3–4)

14 Für die Mathematik ortet Wittgenstein aber noch ein zusätzliches Problem: „*Man möchte sagen, das Verständnis eines mathematischen Satzes ist nicht durch seine Wortform garantiert, wie im Fall der meisten nicht-mathematischen Sätze. Das heißt – so scheint es – daß der Wortlaut das Sprachspiel nicht bestimmt, in welchem der Satz funktioniert. Die logische Notation verschluckt die Struktur.*“ (WITTGENSTEIN BGM V.25, S.284)

thematisierten jeweils handlungsanleitenden Regeln, die unser Sprechen basal beherrschen. Beim (Mathematik)-Lernen können diese beiden Typen koinzidieren, weil der Erwerb neuen Wissens, folgt man Wittgenstein, den Erwerb neuer Regeln bedeutet und daher die Regeln „von außen“ genau an dieser Stelle zu internalisierten Regeln werden können. Umgekehrt ist aber der Lernprozess auch der Ort, an dem es manchmal angemessen scheint, internalisierte Regeln „nach außen“ zu bringen, also sichtbar zu machen. Vom Lernprozess als Schnittstelle zwischen den beiden Typen von Regeln wird der Rest meiner Arbeit handeln.

3.2 Was bedeutet das Gesagte für den Lernprozess in der Mathematik?

■ Die für das Lernen von Mathematik dringlichste Art der Bewährung an der Realität besteht nicht darin, dass Angaben und Ergebnisse auf die Alltagswelt bezogen werden müssen, sondern darin, dass sich die das Vorgehen beherrschenden Regeln an den (sprachlichen) Vorgegebenheiten zu bewähren haben.

Es ist mir wichtig, die Aufmerksamkeit darauf zu lenken, dass in dieser These von Regeln die Rede ist. Die bloße Feststellung, dass Mathematik an Vorgegebenheiten gebunden, also mit anderen Worten kontextabhängig, ist, wäre nämlich einigermaßen trivial. Wittgenstein entwirft ein breit angelegtes Geflecht aus Gedankenkomplexen und Situationsschilderungen zur Wirkweise von Regeln, zu dem ich hier nur Andeutungen machen kann.

Man erfreue sich an Wittgensteins erfrischender Unverfrorenheit, simple Dinge in Frage zu stellen. Ist $2+2=4$?

> „*37. Lege 2 Äpfel auf die leere Tischplatte, schau daß niemand in ihre Nähe kommt und der Tisch nicht erschüttert wird; nun lege noch 2 Äpfel auf die Tischplatte; nun zähle die Äpfel, die da liegen. Du hast ein Experiment gemacht; das Ergebnis der Zählung ist wahrscheinlich 4. (Wir würden das Ergebnis so darstellen: wenn man unter den und den Umständen erst 2, dann noch 2 Äpfel auf einen Tisch legt, verschwindet zumeist keiner, noch kommt einer dazu.) Und analoge Experimente kann man, mit dem gleichen Ergebnis, mit allerlei festen Körpern ausführen. – So lernen ja die Kinder bei uns rechnen, denn man läßt sie 3 Bohnen hinlegen und noch 3 Bohnen und dann zählen, was da liegt. Käme dabei einmal 5, einmal 7 heraus, (etwa darum weil, wie wir jetzt sagen würden, einmal von selbst eine dazu-, einmal eine wegkäme), so würden wir zunächst Bohnen als für den Rechenunterricht ungeeignet erklären. Geschähe das Gleiche aber Stäben, Fingern, Strichen und den meisten anderen Dingen, so hätte das Rechnen damit ein Ende.*
>
> *»Aber wäre dann nicht doch $2+2=4$?« – Dieses Sätzchen wäre damit unbrauchbar geworden.–*“ (WITTGENSTEIN BGM I.37, S.51/52)

Genau in der hier beschriebenen Weise hat sich Mathematik vorrangig zu bewähren. Es geht nicht darum, sich daran zu stoßen, wenn das Ergebnis einer Rechnung ein 10 m großer Mann ist, sondern es ist entscheidend, dass Körpergrößen von Männern dazu geeignet sind, mit ihnen prinzipiell in gewissen Weisen zu operieren. Man kann Anzahlen von beliebigen Dingen oder Körpergrößen addieren, man kann dagegen nicht einen Vektor und einen Skalar addieren. Die Bewährung an der sogenannten „Realität" bedeutet, dass das *Tun* von Mathematik sich strukturell in unsere Möglichkeiten zu agieren und zu sprechen einpasst, dass wir beim Betreiben von Mathematik Regeln folgen, nicht dass *Ergebnisse* von Rechnungen unserer Alltagserfahrung entsprechen müssen. Schüler/innen, die für Beispiele wie das Kapitänsbeispiel die Rechnungsart (in Frage kommen Addition, Multiplikation, Subtraktion und Division) zu erraten versuchen, indem sie die jeweiligen Ergebnisse der Rechnungen auf Plausibilität hin ansehen, geben der Bewährung an der Realität in einer Hinsicht ja sogar zu viel Gewicht. Man könnte den Unterschied zwischen den beiden Arten der Bewährung – jener, die in einer erst nachträglichen Bezugnahme, und jener, die in einer unmittelbaren Bewährung beim Erwerben besteht – auch so formulieren: Alltagsbezug muss an der Quelle der Mathematik eine andere Bedeutung und einen anderen Stellenwert haben als an der Mündung. Ein Beispiel an der Schnittstelle von retrospektiver und unmittelbarer Bewährung einer Regel wäre: Man kann nicht früher ankommen als man weggefahren ist.

Mathematik kann man als eine mit anderen Sprachen verwobene Sprache ansehen. Als solche *ist* sie schon Welt und braucht sich nicht in der Gegenüberstellung mit einer „anderen Welt" rechtfertigen, sondern muss sich in ihrem Werden an die Welt angleichen. *Wie* wir rechnen können, geben uns bis zu einem gewissen Grad die Äpfel, Bohnen, Stäbe, Finger vor; und diese Vorgaben schlagen sich in Regeln nieder, denen wir bewusst oder „blind", wie Wittgenstein es nennt, folgen. Unser Betreiben von Mathematik muss sich stets in Verbindung bringen lassen mit der Mathematik, die andere vor uns betrieben haben und die sich bewährt hat. Insofern muss sich die Mathematik immer aus ihr selbst, aus ihrer Genese verstehen lassen. Die Konfrontation mit anderen Teilen der Welt, die als der Mathematik in jeweiliger Hinsicht extern einzustufen sind, ist eine spätere Draufgabe, die wichtig ist, aber sie in den Lernprozess zu infiltrieren, hieße die Welt der Schüler/innen unnötig zu verdoppeln.

- Fehler sind nicht nur tolerabel, sondern unvermeidbar, da wir Regeln[15] per Trial and Error folgen lernen können.

[15] Ich meine hier mit Regeln hier immer ursprüngliche Handlungsanleitungen, insofern sie sich nicht auf der Basis des schon Beherrschten formal präzise beschreiben lassen. Natürlich ist es möglich, einen Algorithmus etwa so festzulegen und zu vermitteln, dass die Befolgung ohne Error möglich ist.

Wenn wir, wie Wittgenstein sagt, Sprache auch durch Nachmachen lernen müssen, verändert das in der Folge die adäquate Sicht von Fehlern. Fehler sind dann Verstöße nur insofern, als wir nicht der Intention dessen, der uns etwas vormacht, entsprechend handeln, aber sie bedeuten nicht, dass wir etwas nicht wissen, was wir wissen *müssten*.

Fehler entstehen dadurch, dass Schüler/innen *anderen* Regeln folgen, als wir von ihnen erwarten. Diese Feststellung wird durch die Erfahrung bestätigt:

> „*Typically children's errors are based on systematic rules. They make errors because they add sideways or always subtract the smaller number from the larger (forgetting to borrow). Errors are seldom capricious or random.*" (GINSBURG 1977, S.128)

Unkritisches Befolgen von Regeln ist sicher eine zu überwindende Entwicklungsstufe von Mathematik lernenden Schüler/innen (siehe RADATZ 1980, S.55ff, ERLWANGER 1973), aber die Konfrontation von den Lehrer-Regeln mit den Schüler-Regeln ist ein geeignetes didaktisches Mittel, um dem Kind die Überlegenheit der Lehrer-Regeln zu verdeutlichen.

Ich habe mich oben der Terminologie des Tractatus bedient, weil die Auffassung von Sprache, die Wittgenstein im Tractatus vertritt, und jene, die er in seiner späteren Philosophie elaboriert, ein Analogon zu zwei Sichtweisen der Mathematik darstellen, die wiederum die zwei Sichtweisen von Fehlern implizieren. Im Tractatus gibt es einen rigiden Anspruch an Wahrheit. Die Welt legt fest, was wahr und was falsch ist. Dementsprechend sind Fehler Verstöße. In der späteren Philosophie ist der Anspruch an „Wahrheit" – die man dann besser Sinn nennen sollte – lediglich das Funktionieren von Sprache. Fehler sind dann notwendige Lernschritte, die die Sprache funktionieren machen.[16] Man könnte also sagen, Schüler/innen brauchen den Übergang vom Tractatus zu Wittgensteins Spätwerk. (Diese Feststellungen sollen die im Sinne Wittgensteins unzulässige Übernahme seiner Notation oben rechtfertigen.)

3.3 Was bedeutet das Gesagte für den Mathematikunterricht?

■ Will eine Lehrperson die Überprüfung an der Alltagswelt, muss sie es *sagen*.

Kaum ein Kind wird Probleme haben, die Frage zu beantworten, ob es einen 10 m großen Mann gibt. Was also Entsetzen auslöst, ist nicht mangelnder Realitätsbezug der Kinder, sondern die Nicht-Erfüllung einer konkreten Aufgabe. Diese Aufgabe wird aber zumeist nicht explizit gemacht. Zumindest findet man in Lehrbüchern zu selten die Aufforderung, die Plausibilität von einem Ergebnis zu überprüfen. Es ist nicht a priori klar, dass Ergebnisse von Rechnungen realitätskonform sein müssen.

---

[16] Zu einem konstruktiven Umgang mit Fehlern vergleiche etwa FISCHER/MALLE 1985, S.76ff, oder FÜHRER 1984.

Natürlich ist es möglich, einem Kind „nicht die richtigen Zahlen zu geben“, wie das oben zitierte Kind es formuliert hat! Es wäre ja ein höchst irritierendes Mysterium, wenn dies unmöglich wäre. Anders formuliert: Wir glauben heute nicht mehr an Leibniz’ prästabilierte Harmonie. Noch anders, in der Sprache der Modallogik: In unserem Diskursuniversum degenerieren nicht alle möglichen Welten zu einer, sodass die mögliche(n) Welt(en) gleich der notwendigen gleich der wirklichen wäre. Tatsächlich müssen Kinder in der Mathematik lernen, Regeln zu folgen, und zwar unabhängig von der empirischen Korrektheit der Angaben. Wie häufig würde ein Kind seine Mathematikhausübungen nicht bewältigen können, wenn es immer zuerst die zugrundeliegende Empirie zu untersuchen hätte?

Möchte man aber, dass Kinder den Vorgang der Kontrolle der Realitätskonformität routinemäßig durchführen, dann muss man dies als Regel einführen, und zwar als Regel, die angibt, unter welchen Umständen dieser Vorgang verlangt ist. Damit bin ich schon beim nächsten Punkt.

- Regeln zu thematisieren kann für Schüler/innen hilfreich sein[17].

Mit „thematisieren“ meine ich weder, eine möglichst präzise formale Fassung einer Regel (etwa, wann man kürzen darf) anzugeben, noch das unreflektierte Wiederholen oder wiederholte Anwenden einer Regel. „Thematisieren“ soll vielmehr z.B. heißen, einen gemeinsamen Sprachgebrauch für das entwickeln, was man üblicherweise „aus einer Summe kürzen“ nennt, oder das Nullsetzen der ersten Ableitung in einem Extremwertbeispiel als einen bewussten und interpretierbaren Schritt in einem von den Schüler/innen *formulierbaren* Ablaufplan der Bearbeitung von Extremwertbeispielen zu identifizieren. Mehr Nennen von Regeln, mehr Explizitheit bedeutet nicht mehr Schema, Kalkül, Routine, sondern man kann Schüler/innen klar machen, *dass* es überhaupt eine *Regel* gibt, der es zu folgen gilt und dass man lernen muss, sich darüber zu verständigen, wie diese Regel funktioniert.[18] Wenn Schüler/innen sich zu beobachten und ihr Tun zu artikulieren lernen, fördert das zweifellos ihr Verständnis von Mathematik. Regeln dürfen und sollen dabei – das übernimmt man von Wittgenstein – so praktisch sein wie „mach es wie bei Äpfeln“.

Beim Kapitänsbeispiel passiert es offensichtlich, dass die Kinder eine Regel *dazudenken*, eine Regel wie etwa die in Beispiel 1′. Ist das aber wirklich so unzulässig oder dumm? Lehrer/innen erwarten von Schüler/innen, allerdings meist ohne es zu artikulieren, dass sie von allein die Regel „Überprüfe dein Ergebnis an deiner Alltagserfahrung!“ dazudenken. Oder: In einem Beispiel, das auf die Berechnung ei-

[17] Ausgeklammert lasse ich hier die Frage, ab wann Regeln überhaupt eine Rolle im Mathematikunterricht spielen sollen. Meine Überlegungen gehen immer von der Prämisse aus, dass Regeln im Unterricht in irgendeiner Form schon vorgekommen sind.

[18] Dass das Explizieren von Regeln die Regeln selbst und den Umgang mit ihnen verändern kann, schiene mir eine eigene Untersuchung wert.

nes Wertes x hinzielt, wird von Lehrer/innen und Büchern häufig der Satz „Berechne x“ am Ende weggelassen, wenn es sich „von selbst“ versteht, dass man x berechnen soll. Von den Kindern wird auch hier verlangt, dass sie sich diese Regel hinzudenken. Wie sollen Schüler/innen, mit denen Regeln nie zum Thema gemacht worden sind, also einschätzen können, wann „Kreativität“ im Dazufügen gefordert ist und wann dies Empörung hervorruft?

Baruk erklärt die Kinder, die ihre Ergebnisse nicht unaufgefordert an der Alltagserfahrung messen, eigentlich für dumm, obwohl sie genau diese Attitude den Schüler/innen gegenüber bei Lehrer/innen in ihrem Buch so heftig kritisiert hat und obwohl diese Kinder etwas von den Spielregeln vielleicht sogar besser begriffen haben als andere. Was von Baruk kritisiert wird, kann man auch als eine Tugend ansehen. Die Regel, die mathematischen Aufgaben nämlich implizit vorangeht, lautet „Nimm als gegeben an, was in der Angabe steht.“. Wird diese implizite Voraussetzung wie auch die Regeln in den verschiedenen anderen Zusammenhängen zum ausgesprochenen Gegenstand des Unterrichts gemacht, kann das nicht zuletzt das kritische Denken der Schüler/innen fördern. Während die übliche Aufforderung an Schüler/innen, doch „den Alltagsverstand einzuschalten“, wenn sie auf ein unplausibles Ergebnis nicht adäquat reagieren, den vielen latenten Regeln nur noch eine weitere Regel – „Sei kritisch!“ – hinzufügt, erleben Schüler/innen, wenn ein/e Lehrer/in diese Regeln mit ihnen diskutiert, eine gleichberechtigte Auseinandersetzung mit einer Autoritätsperson, was m.E. zur Autonomie wesentlich mehr beiträgt.

Bei manchen Gelegenheiten ist es sinnvoll, die unsichtbaren Regeln, denen Schüler/innen beim Mathematikbetreiben folgen, sichtbar zu machen. Von Wittgenstein kann man lernen, dass Regeln zum Thema gemacht werden können. Genau das ist es ja, was er an zahlreichen Stellen seines Spätwerks tut. Andererseits hat die Reflexion über Regeln auch Grenzen:

- Die Aufforderung zu denken kann sinnlos sein, wo es etwas zu dressieren statt zu verstehen gibt.

Angesichts der zu Recht geäußerten Kritik an der Tendenz im heutigen Mathematikunterricht, mit Kindern „bis zur Verblödung“ zu üben, ist diese Aussage gewagt. Die Gewagtheit versuche ich außer durch den Rückverweis auf Wittgenstein durch ein Beispiel zu mildern. Kinder, die multiplizieren lernen, sollen natürlich in der ihrer Schulstufe gemäßen Tiefe verstehen, was sie tun, aber abgesehen davon müssen sie lernen, Regeln zu folgen, deren Richtigkeit sie nicht bei jedem Anwenden überprüfen. Möglicherweise könnten sie die Regeln überprüfen und sollten sie auch dazu in der Lage sein, aber sie müssen auch lernen, die Regel anzuwenden, ohne das zu *tun* (die Regeln zu überprüfen). Dass ich damit natürlich wirklich nicht einem stupiden Einhämmern von eigentlich nachvollziehbaren Gedankengängen das Wort reden will, ergibt sich aus dem oben Gesagten.

- Versteht man Bewährung von Mathematik an der „Realität“ im Wittgensteinschen Sinn (vgl. den obigen Text zu $2+2=4$), so trifft man damit ein wesentliches Sinnkriterium für die Mathematik und den Mathematikunterricht.

Die Forderung, die Mathematik müsse sich durch Anwendung rechtfertigen, ist für die Mathematik als Wissenschaft ein vertretbarer Standpunkt; für den Mathematikunterricht gibt es eine viel dringlichere Art, in der sich die Mathematik zu bewähren hat: Beispiele müssen zugänglich sein, sie müssen sich mit etwas befassen, mit dem die Schüler/innen umgehen können, mit etwas, das man „in der Hand hat“, im wörtlichen und übertragenen Sinn. Beispiele aus der „Alltagswelt“ der Kinder, die die Kinder als ohnehin nicht die ihre entlarven und als Scheinwelt, viel mehr als die reine Mathematik, abtun, verfehlen allzu oft ihr Ziel. Einen sehr schönen Vorschlag findet man dagegen in WITTENBERG 1963, S.72:

„ERSCHLIESSUNG

Worum handelt es sich in der Geometrie? Um die Untersuchung der Figuren, die wir mit Zirkel und Lineal in unser Heft oder auf die Tafel zeichnen können und die wir an der Welt um uns, an unseren Feldern und Häusern und Gebrauchsgegenständen entdecken.

Man beachte: Es ist weder von Axiomen und Beweisen die Rede, noch von *idealen* Figuren, von Punkten ohne Dicke und Linien ohne Ausdehnung. Beides wäre hier unmotiviert, ohne innere Notwendigkeit dem Schüler aufgezwungen, und daher fehl am Platze. Insbesondere braucht auch nicht vorweggenommen zu werden, auf welche Weise jene Untersuchung vor sich gehen soll. Sie wird zunächst einfach unternommen – die passenden Methoden werden sich im Zuge derselben ergeben. Das ist schon die echte wissenschaftliche Einstellung, welche methodische Vorurteile verabscheut!

Wie ein guter Handwerker beschäftigen wir uns zuerst mit unserem Werkzeug:

Was ist ein Zirkel, was ein Lineal? Wie prüfe ich, ob ein Lineal wirklich gerade ist? Wie fabriziere ich ein vollkommen gerades Lineal?

[...] *Warum gerade Zirkel und Lineal?*“

Der Vorschlag wird in mehren Stufen an Exaktheit über mehrere Schulstufen ausgebaut und hat mittlerweile Eingang in die didaktische Literatur und sogar Schulbücher gefunden[19]. Ich habe ihn ausgewählt, weil Wittenberg in verschiedenster Hinsicht am anderen Ende der Skala steht als Baruk, und sein Beispiel daher sehr gut dokumentiert, dass sich das, was ich meine, durch alle Schulstufen und erkenntnistheoretischen und weltanschaulichen Positionen zieht.

[19] Für einen Ansatz, der mich daran erinnert, siehe STRUVE 1990, S.10ff.

3.4 Kontur durch Vergleich mit verwandten Ansätzen

Ich versuche im Folgenden meinen Ausführungen über Wittgensteins Ansichten durch Vergleichen mit ähnlichen Gedanken deutlichere Konturen zu geben. Als ähnlich würde ich in diesem Zusammenhang das breite Feld der sozio-kulturellen, konstruktivistischen, operativen und differenziert-anwendungsbezogenen Ansätze einstufen. Diese Breite lässt nur eine exemplarische Behandlung einiger spezieller Überlegungen zu, die sehr eng mit Wittgensteins Herangehensweisen verbunden sind.

Bauersfeld beschreibt Mathematiklernen als eine sozio-kulturelle Tätigkeit:

> „[*T*]*he understanding of learning and teaching mathematics* […] *support*[*s*] *a model of participating in a culture rather than a modell of transmitting knowledge. Participating in the process of a mathematics classroom is participating in* […] *a culture of mathematizing as a practice*." (BAUERSFELD 1993, S.4)

Auch die Idee der „heimlichen Lehrpläne", die in den meisten Fällen auf das Aufdecken sozialer Regeln und Bestimmungsstücke von Mathematikunterricht abzielt, begreift Unterricht zwar wie Wittgenstein als soziales Phänomen, studiert aber nicht die *Prinzipien* des sozialen Vorgangs der Wissensübertragung. Wittgenstein dagegen weist darauf hin, dass Regeln den Wissenstransfer überhaupt bestimmen. Gut sieht man den Unterschied zwischen einer sozio-kulturellen Auffassung und den Schwerpunkten, die Wittgenstein setzt, z.B. anhand folgender Passage aus COBB/YACKEL 1996 (S.467):

> „*A preliminary step in children's developing understanding of what constitutes an acceptable mathematical explanation is that they understand that the basis for their actions should be mathematical rather than status-based*."

Es geht Cobb und Yackel hier darum, soziale Faktoren beim Lernen von Mathematik *in konkreten Situationen* auszumachen. Wittgenstein dagegen will Prinzipielleres darüber aussagen, wie man mathematische Begriffe erwirbt. Es geht ihm um folgende einfache Problemstellung: Da ist jemand, der/die weiß einen mathematischen Begriff zu gebrauchen, und jemand, der/die weiß es nicht. Wie kommt nun der Begriff von der einen Person zu der anderen (wenn man von der erst fortgeschritteneren Möglichkeit der Definition absieht, die ja immer schon erworbene Begriffe voraussetzt)? Seine Antwort lautet, wie wir oben schon gesehen haben: „*Ich mach's ihm vor, er macht es mir nach; und ich beeinflusse ihn durch Äußerungen der Zustimmung, der Ablehnung, der Erwartung, der Aufmunterung.*" Das ist eine gänzlich unspektakuläre Aussage; bemerkenswert aber ist die Feststellung, die Wittgenstein folgen lässt: Dieses Abrichten ist überhaupt alles, was uns an grundlegenden Möglichkeiten zur Verfügung steht.

Irgendwie müssen die Begriffe aber doch auch in die Welt kommen. Wie verhält es sich also mit der Begriffskonstitution?

In DÖRFLER 1988 (S.66) findet man eine „*These über mathematische Objekte*[20]*: Mathematische Objekte können durch Handlungen konstituiert werden*". Wittgenstein spezifiziert diese Konstitution, indem er darauf hinweist, dass es *wiederholte* Handlungen sind, die (mathematische) Begriffe festlegen. Man könnte auch sagen, Wittgenstein betont das induktive Moment der Konstitution. Wesentlich scheint mir außerdem, dass es zwischen Begriffskonstitution und Begriffsvermittlung methodisch also in Wittgensteins Verständnis keinen Unterschied gibt.

Weiters wird in DÖRFLER 1988 (S.89) zu Recht darauf hingewiesen, dass es nicht wichtig ist, dass jemand Handlungen im Zusammenhang mit der Bildung eines mathematischen Objekts selbst setzt, er/sie könne auch bei solchen Handlungen zuschauen. Wittgenstein geht in diesem Punkt noch weiter: Er/sie *kann* nicht nur zuschauen, er/sie *muss* zuschauen; die Objekt-konstituierenden Handlungen sind immer wesentlich auch Fremdhandlungen. Es muss immer jemand vor-, und jemand nachmachen, damit Wissenserwerb möglich ist. Der Begrifferwerb ist in genau dieser Weise wesentlich sozial[21].

Zum Verhältnis zwischen den mathematischen Objekten heißt es in DÖRFLER 1988 (S.103):

> „*Mathematische Operationen treten durch einen kognitiven Konstruktionsprozeß zu materiellen oder vorgestellten Handlungen hinzu.* […] *Insgesamt liegt eine mehrfach vermittelte kognitive Distanz zwischen den Handlungen mit Gegenständen und den mathematischen Operationen* […] *mit mathematischen Objekten vor*." [22]

Ein Teil der angesprochenen kognitiven Distanz ist aber nach Wittgenstein einfach ein kognitives Loch, nicht eine Vermittlung. Der kognitive Konstruktionsprozess hat seine Grenze dort, wo nur noch unverbalisierbares Vor- und Nachmachen bleibt. Diese Überlegung kann vielleicht auch helfen, die oftmalige Sprachlosigkeit von Schüler/innen zu verstehen, die etwas können, aber nicht ausdrücken können.

Zuletzt sei noch auf ein versuchtes Trendsetting der gegenwärtigen Mathematik-Didaktik eingegangen. Der „formalen Anwendungsorientierung"[23] geht es nicht um naive Wirklichkeitsbezüge, wie ich sie im ersten Abschnitt thematisiert habe, son-

---

[20] Statt von Objekten spreche ich in der Folge meist von Begriffen.

[21] Eine Privatsprache, die nur eine Person allein spricht, ist prinzipiell unmöglich. Das zeigt Wittgenstein in seinem sogenannten Privatsprachenargument in WITTGENSTEIN PU, §202 (an welcher Stelle genau das Argument beginnt, ist umstritten).

[22] Ein Detail am Rande: Wittgenstein verortet zwischen dem Lernen von Begriffen und dem Lernen von Operationen genauso wenig einen methodischen Unterschied wie zwischen dem Konstituieren und dem Lernen von Begriffen.

[23] Vortrag von Lutz Führer mit dem Titel „Mathematikunterricht in ‚formaler Anwendungsorientierung' (Praxis und didaktisch-wissenschaftliche Grundlagen)", gehalten am 3. Mai 2002 am Institut für Mathematik in Wien.

dern um die Einübung von Mathematisierungsakten, um den Erwerb von Fähigkeiten wie Reflexion, Interpretation oder Modellbildung. Diese Art des Anwendungsbezugs muss sich zwar nicht dem Vorwurf aussetzen, die Alltagswelt der Schüler/innen zu verfehlen, bringt aber den Bezug zur Wirklichkeit erst an „späterer" Stelle als Wittgenstein ein, kann also die Art der Verankerung in der Realität, wie sie Wittgenstein thematisiert, nicht in den Blick bekommen. Mathematik muss für formalen Anwendungsbezug zumindest teilweise schon vorhanden sein, Wittgenstein dagegen studiert die Mathematik „von allem Anfang an".

4 Resümee

> „*Mathematik* [...] *betrifft abstrakte Probleme in abstrakten Begriffen und sucht nach allgemeingültigen Lösungen – ein scheinbar folgenloses, weltabgewandtes Glasperlenspiel. Der Forschungsprozeß der ‚reinen' Mathematik, der auch in der anwendungsorientierten Arbeit seine Rolle spielt, erfordert eine solche Haltung: Der Mathematiker hat in seiner Arbeit ganz entschieden von nichtmathematischen Bedeutungen und möglichen konkreten Folgen abzusehen, um die Allgemeingültigkeit seiner Gedankengänge und Folgerungen zu sichern.*" (MEHRTENS 1997, S.145)

Mehrtens kritisiert die so verstandene Mathematik als amoralische Wissenschaft. Baruks Kritik geht in eine ähnliche Richtung: Schüler/innen sind im Mathematikunterricht Ausgestoßene aus dem erhabenen Reich des Sinns, sie leben in ihrer „normalen" Welt, die mit der Welt der Mathematik wenig gemeinsam hat.

Baruks Diagnose, dass die Mathematik für Schüler/innen sehr häufig sinnentleert ist, halte ich für richtig; auch der Feststellung, dass dies an mangelndem Erlernen der Sprache Mathematik liegt, schließe ich mich an. Aber ich halte die Kapitänsbeispiele für keinen verlässlichen Indikator dafür. Und meine Vorschläge zur Abhilfe differieren von jenen Baruks. Der bewusstere Umgang mit, die Thematisierung und Artikulation von Regeln scheint mir ein Angelpunkt zu sein, wenn man Schüler/innen Zugang zum Sinn der Mathematik ermöglichen möchte.

Literatur

BARUK 1989: Wie alt ist der Kapitän? Über den Irrtum in der Mathematik, Birkhäuser, Basel, 1989

BAUERSFELD 1993: Teachers pre and in-service education for mathematics teaching, Seminaire sur la Representation, No. 78, CIRADE, Université du Quebéc à Montréal, Canada

COBB/YACKEL 1996: Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics, in: Journal for Research in Mathematics Education **27** (1996), Heft 4, S.458–477

DÖRFLER 1988: Die Genese mathematischer Objekte und Operationen aus Handlungen als kognitive Konstruktion, in: Dörfler (Hg.), Kognitive Aspekte mathematischer Begriffsbildung, S.55–126

ERLWANGER 1973: Benny's Conception of Rules and Answers in IPI Mathematics, in: Journal of Children's Mathematical Behaviour **1** (1973), Heft 2, S.7–18

FISCHER/MALLE 1985: Mensch und Mathematik, B.I. Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1985

FREUDENTHAL 1982: Fiabilité, validité et pertinence – critères de la recherche sur l'enseignement de la mathématique, in: Educational Studies in Mathematics **13** (1982), S.395–408

FREUDENTHAL 1984: Wie alt ist der Kapitän?, in: mathematik lehren (1984), Heft 5, S.38–39

FÜHRER 1984: Ich denke, also irre ich, in: mathematik lehren (1984), Heft 5, S.2–9

GINSBURG 1977: Children's Arithmetic: The Learning Process, V. Nostrand Co., New York, 1977

MAAß/SCHLÖGLMANN 1999: Theorie und Praxis in Kursen zur mathematischen Weiterbildung für Erwachsene, in: JMD **20** (1999), Heft 4, S.260–273

MEHRTENS 1997: Verantwortungslose Reinheit, in: metis **6** (1997), Heft 11, S.144–148

RADATZ 1980: Fehleranalysen im Mathematikunterricht, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1980

SCHULTE 2001: Wittgenstein. Eine Einführung, Philipp Reclam jun., Stuttgart, 2001

STENIUS 1969: Wittgensteins Traktat, Suhrkamp, Frankfurt am Main, 1969

STRUVE 1990: Grundlagen einer Geometriedidaktik, B.I. Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1990

WITTENBERG 1963: Bildung und Mathematik, Klett Schulbuchverlag, Stuttgart, 1990 (2. Auflage)

WITTGENSTEIN TLP: Tractatus Logico Philosophicus, in: Tractatus Logico Philosophicus, Werkausgabe Band 1, Suhrkamp, Frankfurt am Main, 1984; Erstveröffentlichung: Annalen der Naturphilosophie **14** (1921), Heft 3–4

WITTGENSTEIN PU: Philosophische Untersuchungen, in: Tractatus Logico Philosophicus, Werkausgabe Band 1, Suhrkamp, Frankfurt am Main, 1984

WITTGENSTEIN BGM: Bemerkungen zu den Grundlagen der Mathematik, Werkausgabe Band 6, Suhrkamp, Frankfurt am Main, 1984

Anschrift der Verfasserin

Dr. Esther Ramharter
Institut für Mathematik der Universität Wien
Strudlhofgasse 4
1090 Wien