Über einige Grundfragen künftiger Geometriedidaktik

von

Lutz Führer, Frankfurt am Main

Zusammenfassung: Folgt man der Auffassung, dass Geometrieunterricht an allgemeinbildenden Schulen vor allem zwei Ziele zu verfolgen hat, nämlich die Wahrnehmung im Anschauungsraum und Heuristiken des Problemlösens zu fördern, dann ergibt sich daraus eine Reihe von noch ungelösten oder zumindest unbefriedigend gelösten Aufgaben: Allgemeiner Geometrieunterricht sollte die Beziehungen zwischen ebener und Raumgeometrie aus didaktischer Sicht klären, geometrische Fachsprache und Umgangssprache im Unterricht verschmelzen statt gegeneinander absetzen, Begriffswissen säkularer begreifen und Elementargeometrie – auch – als Sprache für Bewegungsvorgänge und Prozesse entwickeln.

Summary: Today there are only two main roles of geometry in public education left: fostering reflected visual perception and promoting heuristic problem solving. These two functions rise some problems, which are yet unsolved or at least not satisfactory clarified: The interrelations of plane and spatial geometry should be analysed and redesigned under didactical points of view. After the decline of classical formation on the grounds of Platon and Euclid the traditional formal language of geometry needs no longer be separated from daily colloquial language. The core of conceptual knowledge in geometry can be secularized, and it has to be from sociological and from some fashionable constructivistic viewpoints. On the other side modern „elementary“ spatial geometry should comprise an adequate language for processual movements and timedependend processes in general.

Der heutige Geometrieunterricht an öffentlichen Schulen, gleich welcher Schulstufe, leidet an Begründungsnöten. Im Folgenden wird die Auffassung vertreten, diese Begründungsnöte stammten im Wesentlichen aus der tradierten Überzeugung, auf abstraktes, formalistisches Systemdenken vorbereiten zu sollen. Burscheid hat das 1986 als praxisferne Illusion entlarvt, heute erscheint es auch aus wissenschaftspropädeutischer Sicht als fragwürdig. Konzentriert man sich auf die beiden realistischeren Zielkomplexe „Erkundung des Anschauungsraums“ und „Problemlösen“, dann wird Timerdings Argumentation aus dem Jahre 1912 wieder aktuell, dass pädagogisches Umdenken auch eine „neue Ausgestaltung des ganzen geometrischen Unterrichts“ erfordern kann. Dafür ist die Geometriedidaktik weder inhaltlich noch sprachlich ausreichend gerüstet.

1 Der Stoffplan

Tabelle 1 gibt nur einen groben Überblick. Er soll daran erinnern, welche mathematischen Gegenstände und Ziel-Schlagworte den Geometrieunterricht der Primarstufe und den der beiden Sekundarstufen traditionell beherrschen. (Die in Klammern gesetzten Inhalte und Ziele sind nicht oder nicht mehr überall üblich.)

Auch diese Grobübersicht zeigt eine durchgehende Schwäche (nicht nur) des üblichen Geometrieunterrichts: Richtig ernst „mathematisch" wird der Geometrieunterricht erst, wenn gerechnet wird (vgl. dazu etwa Backe-Neuwald). Und ganz folgerichtig rücken die Rechenkünste im Laufe der Schulzeit immer mehr in den Kernunterricht, wie er auf der Oberstufe insbesondere von Grundkursen repräsentiert wird.

Themen	**verbreitete Schlagworte, materiale und formale Zielsetzungen**
Primarstufe	
• Lagebeziehungen • Eigenschaften von Gegenständen • Figuren und Körper • Muster, Ornamente, Symmetrien • Größen, Größe und Umfang von Figuren • Umgang mit Zeichengeräten	„Entfaltung räumlichen Wahrnehmens und Denkens"; „Entwicklung des Orientierungsvermögens"; „Schulung zeichnerischer Fähigkeiten"; „Präzisierung der Sprache"; Geometrieunterricht „kann durch kreativen Umgang mit Materialien zur Förderung der Phantasie, der Selbständigkeit und des Interesses am Lösen mathematischer Probleme beitragen." (Hess. RPL Grundschule 1995, S. 164); nicht Systematik, sondern konkretes Handeln „problem-, nicht strukturorientiert" (Winter)
Orientierungsstufe	
• Elementare Formenlehre	Nicht Systematik, sondern konkretes Handeln
• Winkelmessung, Inhalte von Rechtecksformen	Größen Messen, Rechnen
• Gebundenes Zeichnen	
• Kongruentes Abbilden; Symmetrie	Vokabel- und Symmetrie-Erkennungsdienst

Klassen 7–8	
• 3-, 4-, *n*-Eck, Kreis	Definitionswissen
• besondere Linien im Dreieck	Lokales Argumentieren/ Beweisen lernen
• Winkelsummen, Flächeninhalte (Umfangswinkelsatz)	Lokales Argumentieren/ Beweisen und Berechnen lernen
• (Verkettung von Kongruenzabbildungen/Vektoren)	(Strukturen, insbesondere Gruppen kennen)
• (Konstruktionsaufgaben)	(Sprachschulung)
• (Baumdiagramme)	(in Diskrete Math. Einführen; mit Stochastik vernetzen)
Klassen 9–10	
• Pythagoras & Co.	Berechnen üben
• Strahlensätze (Ähnl.)	Lokales Argumentieren üben
• Kreisberechnung	Berechnungen üben
• Stereometrie	Ebenso
• Trigonometrie	Ebenso
• (Schrägbilder; Darstellende Geometrie)	(Raumanschauung fördern)
Oberstufe	
• Geraden, Strecken, Ebenen (Kugeln)	Berechnungen üben
• (lineare Abbildungen; Isometrien)	(qualitativ Argumentieren lernen; Gruppenbegriff kennen)

Tabelle 1

2 Begründungsschwierigkeiten

„Das Lernen von Geometrie scheint den Schülern insgesamt nicht schwer zu fallen… Im Lichte dieses doch positiven Urteils über die Praxis des Geometrieunterrichts scheinen die o.a. zurückhaltenden Einstellungen mancher Lehrerinnen und Lehrer ihre Ursache in erster Linie in der Begründungsproblematik zu haben… Anders als große Teile der Arithmetik läßt sich Geometrie in der

Grundschule weitgehend nicht mit einer besonderen inhaltlichen Bedeutung begründen. Die Begründung liegt auf einer weniger ‚handgreiflichen' Ebene." (… nämlich in der Verfolgung umgreifender Ziele und im Spaß an Mathematik)

Radatz/Schipper, S. 139

In Radatz/Rickmeyer, S. 7 f., kommen dann „kognitive Kompetenzen", „alle Bereiche math. Denkens", Handlungserfahrungen, Umwelterschließung, Anwendungsorientierung, Strukturorientierung und „positive Einstellungen zum Fach" hinzu. Bei Franke, S. 7, sind es „intellektuelle Kompetenzen, z.B. das Raumvorstellungsvermögen und grundlegende geistige Fähigkeiten wie Ordnen und Klassifizieren", „Begriffsbildungsprozesse", „Umwelterschließung" und „Freude an der Geometrie und am entdeckenden und problemorientierten Arbeiten".)

Bis zum Ende der Orientierungsstufe wird in Piagetschem Geiste konkret-operational verfahren. Ein gewisser Eklektizismus bei der vorwiegend enaktiv-ikonischen Inhaltswahl lässt sich mit der Förderung von Invarianzen, Dezentration und visuell-motorischer Koordination rechtfertigen. Bei der Anamnese und Therapie von Rechenstörungen hat sich die neuropsychologisch begründete Konzentration auf „basale" Fähigkeiten offenbar bewährt (vgl. etwa Internationale Frostig Gesellschaft, Milz, Nolte). Schon lange vor Piaget hatte Poincaré 1894 jedes Raumvorstellungsvermögen auf die Koordination von taktilen Wahrnehmungen und motorischen Aktivitäten mit Perspektivwechseln zurück geführt („Be-Greifen", „comprendre" und „grasp").

„Wir wollen vorerst eine reine Gesichts-Empfindung betrachten, die durch ein Bild hervorgerufen wird, welches sich auf dem Grund der Netzhaut bildet.

Eine summarische Analyse zeigt uns dieses Bild als ein Kontinuum, welches zwei Dimensionen besitzt… Ferner ist dieses Bild in einen begrenzten Rahmen eingeschlossen… Dieser reine Gesichts-Raum ist nicht homogen. Sehen wir von den Bildern ab, die auf der Netzhaut entstehen können, so spielen nicht alle Punkte der letzteren dieselbe Rolle…

Eine gründlichere Analyse würde uns ohne Zweifel zeigen, daß diese Kontinuität des Gesichts-Raumes und seine zwei Dimensionen nur auf Täuschung beruhen, sie würde diesen Raum also noch mehr vom geometrischen Raume unterscheiden lassen, …

Das Sehen erlaubt uns indessen, die Entfernungen abzuschätzen und folglich eine dritte Dimension wahrzunehmen. Aber jeder weiß, daß diese Wahrnehmung der dritten Dimension sich auf die Empfindung einer Anstrengung bei der zu machenden Accomodation des Auges reduziert und auf die Empfindung der konvergenten Richtung, welche beide Augen annehmen müssen, um einen bestimmten Gegenstand deutlich wahrzunehmen.

Das sind Muskelempfindungen, und diese sind gänzlich von den Gesichtsempfindungen verschieden, welche uns die Vorstellung der beiden ersten Dimensionen gegeben haben. Die dritte Dimension wird uns also nicht so erscheinen, als ob sie dieselbe Rolle wie die beiden anderen spiele. Was man den vollständigen Gesichts-Raum nennen kann, wird also kein isotroper Raum sein.“

Poincaré 1894 (zit. n. 1906, S. 54 f.)

Das Koordinationsargument ist im Vergleich zu Zielpostulaten wie Umwelt- bzw. Anwendungserschließung, Denkschulung oder Freude an produktiver Mathematik „härter“, nämlich inhalts- und stufenspezifisch(er). Das zeigt sich auch daran, dass hier Widersprüche zwischen Zielproklamationen und Unterrichtsinhalten weniger zutage treten (vgl. etwa Backe-Neuwald, Baireuther, Burscheid). Geometrieunterricht auf der Primarstufe zeigt, benennt, vermisst, zeichnet, erzeugt und argumentiert über sinnlich wahrnehmbare Phänomene – mehr nicht.

Erst in der Sekundarstufe I wird von der Winkelsumme bis zum Pythagoras mehrfach an begriffliches Denken und formales Argumentieren herangeführt. Bevor es zu expliziten, sei es auch nur lokalen Ordnungen kommt, gewinnt das Berechnen die Vormacht. Systematik, Zusammenhänge oder Vernetzungen finden nach Schwierigkeitsgrad im Lehrerkopf statt. Die implizite mathematische Hintergrundtheorie bestimmt bzw. begrenzt die Reihenfolge von Begriffen und Sätzen (Holland). Diese Hintergrund„theorie“ ist weniger Theorie als Tradition. Sie folgt – Abbildungsgeometrie hin, Vektorrechnung her – den euklidischen „Elementen“ und hält das axiomatisch Fundamentale in sehr fragwürdiger Biogenetik auch für das psychologisch Grundlegende (vgl. etwa Struve). Burscheid hat das 1986 aus anderer Perspektive scharf kritisiert: Ein Geometrieunterricht, der nicht mehr zum Aufbau einer Theorie kommen kann oder will, der braucht keine theoriebezogene Methodenverbesserung, sondern eine zeitgemäßere, möglicherweise nicht mehr mathematische, sondern bezugswissenschaftliche Theorie.

Burscheids Vorschlag, van Hieles Abstraktionsstufentheorie als normativen Bezugsrahmen zu verwenden, ist freilich etwas halbherzig: Im „Präskriptiven“, d.h. in der 5-Phasen-Lehre zu jedem „Denkniveau“, konkretisiert und verbessert die van-Hiele-Theorie zweifellos die von den Herbartianern überkommene Unterrichts- und Fachmethodik. Für Stoffaufbau, -auswahl und -begründung bringt die van-Hiele-Theorie aber nichts Neues: die drei oder vier schulisch relevanten „Denkniveaus“ (ganzheitliche Wahrnehmung; individuelle Objektcharakterisierung durch Eigenschaften; Wechselbezug von Eigenschaften; deduktive Anordnung; Systemmodellbildung) kommen nicht über die traditionellen Abstraktionsstufen seit Comenius hinaus (Mutterschul, Muttersprachschul, Fremdsprachschul, Hochschul im 6-Jahres-Rhythmus; vgl. auch Stückraths gewissermaßen „heimatkundliche“ Stufung nach konzentrischen Erkundungsfeldern: Leibraum-Ichraum-Handlungsraum-Laufraum).

Sie finden sich auch in den traditionellen Ziel- und Begründungskatalogen für Geometrieunterricht, z.B. (nach Holland):

Geometrie als …

1. Lehre vom Anschauungsraum (incl. Umwelterschließung und „materiale“ Anwendungen)
2. Übungsfeld für Problemlösen (incl. Argumentieren, Sprachschulung, informelles Beweisen)
3. mathematischer Strukturvorrat
4. Musterbeispiel einer deduktiven Theorie (incl. Definieren und formales Beweisen)

Burscheids Vorschlag, den Geometrieunterricht stärker auf den Schüler hin zu orientieren als zum $n+1$. Mal fachlich anzuregen, beschreibt eine immer noch unbefriedigend gelöste Aufgabe der Geometriedidaktik, nämlich lernpsychologisch notwendige Rahmenbedingungen zu formulieren. Diese Rahmenbedingungen können aber nicht hinreichen, sonst kämen wir zu einem Prinzip der Belanglosigkeit des Inhaltlichen („Primat der Methodik“): „Insbesondere müssen neben den Randbedingungen, …, auch normative Entscheidungen berücksichtigt werden, die in jede Unterrichtskonzeption eingehen.“ (Burscheid, S. 20) Normative Entscheidungen gibt es immer, wo gehandelt oder gar rechtlich verordnet wird, aber die traditionellen fachinhaltlichen Begründungen werden durch Reduktion auf die beiden Felder „Anschauungsraum“ und „Problemlösen“ zunehmend vager, unspezifischer und entsprechend schwerer im Unterricht erkennbar.

Auf einen Ausweg hat schon Timerding hingewiesen:

> *„Was der Fortentwicklung der durch die Pestalozzische Anschauungslehre gegebenen Anregungen vornehmlich hindauernd im Wege gestanden hat, war eben der irrige Glaube, dass auf diesem Wege nur eine geometrische Propädeutik gewonnen werden könne. Dass hier der Ansatz zu einer neuen Ausgestaltung des ganzen geometrischen Unterrichts vorlag, erkannte man nicht.“*
>
> Timerding 1912, S. 31

Nicht die Begründung, Sequenzierung und/oder Methodik der Schulgeometrie ist zu modernisieren, sondern die Schulgeometrie selbst!

3 Unterrichtsmethodische Schwierigkeiten

Unabhängig davon, ob zu viel oder zu wenig Geometrieunterricht stattfindet, leidet er unter sehr charakteristischen Problemen:

- Viele Lehrer „stehen nicht über dem Stoff“. Dies erzeugt allerlei Ängste und Verdrängungsmechanismen, begünstigt Unterricht entlang der künstlichen Linearität des jeweils eingeführten Schulbuchs und torpediert dessen vorgebliche

Hauptfunktionen „Raumerschließung“ und „Denkschulung durch Problemlösen“. Im Studium von Gymnasiallehrern kommt Geometrie allenfalls unter den schulisch irrelevanten Aspekten 3 und 4 nach Holland vor, d.h. als mathematischer Strukturvorrat und als Muster axiomatisch-deduktiver Theoriebildung.

- Als Universalmedizin gegen die erheblichen inneren Disziplin-, Differenzierungs- und Sprach(niveau)probleme wird von theoriepädagogischer und administrativer Seite essentielle Schülerzentrierung verordnet. Dies gewichtet methodisch-motivationale Aspekte tendenziell stärker als didaktisch-intentionale und eröffnet zugleich den Lehrern eine Entlastung vom eben beschriebenen Kompetenzdruck. Diese Entlastung verschärft aber Organisations-, Disziplin-, Differenzierungs- und Logistikprobleme.
- Eine Operationalisierung formaler Ziele wie „Förderung der Raumanschauung“, „Förderung der Problemlösekompetenz“, „Entdeckenlernen“, „Denkerziehung“ usw. wäre zwar – in gewissen Grenzen – denkbar (s. z.B. Maier), ist aber theoretisch sehr unterentwickelt und prüfungstechnisch illusorisch. Formale Ziele werden als proklamatorische Versatzstücke in Texten über Unterricht gebraucht, aber kaum bzgl. praktischer Inhalte konkretisiert und reflektiert.
- In Ermangelung vor Ort gebrauchsfähiger, hinreichend konkreter, gegenstandsspezifischer und operationalisierter Rechtfertigungen gewinnen „extrinsische Motivationen“ an Boden: EIS-Aktivismus, „Kann-man-auch-machen“-Didaktik, Primat der Spaßmethodik unter zurechtgebogenen Schlagwörtern wie „produktives Lernen“, „Handlungsorientierung“, „kompensatorische Erziehung“, „experimentelle Mathematik“ oder fachbezogene „Einstellungsverbesserung“.
- Wie Backe-Neuwald belegt, ist die Gefahr in Grundschulen sogar aus Schülersicht groß, Geometrisches nicht als Mathematisches zu betreiben, sondern als kompensatorischen Aktionismus zur Erholung vom Rechnen. In den höheren Jahrgängen verliert sich das zunehmend, indem der material- und formenbezogene Aktionismus durch Rechenaktionismus ersetzt und damit „mathematisiert“ wird: synthetische Geometrie und Raumanschauung gehen in den „höheren“ analytischen Auffassungen der „Ober“stufe auf, nicht ohne die ersteren durch gezielt einseitiges oder gar eindimensionales Aufgabenmaterial suggestiv zu entwerten.
- Franke, S. 11 f., nennt eine Reihe denkbarer Ursachen dafür, dass es „auch heute noch Grundschulen“ gebe, „in denen es nicht zur Selbstverständlichkeit geworden ist, dass Geometrie kontinuierlich unterrichtet wird.“ (Unklare Lernziele, unverbindliche Stoffauswahl und -anordnung, Vorbereitungsaufwand, Materialbeschaffung, heikle Zensurengebung, Entspannungs-Aktionismus, Unkenntnis des „genetischen Zusammenhangs“ zwischen arithmetischen Begriffen und geometrischen Grundvorstellungen, Ausbildungslücken)

4 Das unentschlossene Verhältnis zwischen räumlicher und ebener Elementargeometrie

Geometrieunterricht als „Lehre vom Anschauungsraum" ist eine relativ späte didaktische Entwicklung (vgl. etwa Treutlein). Ihr voran ging eine sehr lange Tradition, die für den „gemeinen Mann" – höchstens – eine elementare Messkunde als „pragmatischen Kern" (Becker) vorsah, für künftige Gelehrte dagegen eine platonische Einweisung in Euklids „Elemente". Mit der nach Rousseau einsetzenden „ersten Reformpädagogik" kamen diverse Programme zur „Lehre der Anschauung" auf, wobei sich „Anschauung" rasch zunehmend als philosophisch, religiös, psychologisch und physiologisch heikles Begriffsfeld erwies. (Näheres und Literaturhinweise auch zum Folgenden in Wagemann und in Führer 2000.) Wo „natürliche Anschauung" im Sinne rechter Weltanschauung explizit durch Geometrie gefördert werden sollte, wie etwa bei Rousseau, Pestalozzi, Herbart oder Diesterweg, da war zunächst nur an Ordnungsgefüge durch ebene Formen und Koordinationsbeziehungen gedacht. Dies ließ sich immerhin physiologisch durch Verweis auf das sensorische Urbild auf der Retina rechtfertigen. Zugleich bot es sich als didaktisch elastische Position zwischen handwerklicher Inhaltslehre und handwerklicher Denk(formen)lehre an (vgl. etwa die kritische Einleitung von Harnisch). In beiden Fällen spielte der Raum als konstituierendes Ganzes ebenso wenig eine ernsthaft „materiale" Rolle wie er es in der euklidischen Tradition getan hatte (vgl. etwa Harnisch; Struve). Geraden, Ebenen und Raum galten wohl als unbegrenzt, aber sie konnten nicht an die Himmelssphäre anstoßen, weil es sich um gedankliche Formen, Formprinzipe oder -potenzen handelte und jedenfalls nicht um „wirkliche Gegenstände". Möglicherweise wären – zumindest im schulischen Rahmen – aktual umfassende Raumbegriffe auch nicht „politisch korrekt" gewesen (vgl. die viel spätere Grundlagenkrise um Cantors Mengenlehre).

Ein wesentlicher Schritt zu einer Lehre vom „Anschauungsraum" wurde von drei gelernten Kristallographen getan: K. von Raumer, im direkten Anschluß daran W. Harnisch und unabhängig von beiden F. W. Fröbels Spieltheorie, die er ab 1836 aus seinem pantheistisch begründeten „Sphärengesetz" (von 1826) genetisch entwickelte. (Einführendes und Literaturhinweise auch zum Folgenden in Treutlein, S. 35 f., und in Boldt/Eichler, S. 40 f.)

> *„Eine grundsätzliche Besserung trat erst ein, als dieser Elementarunterricht aus der ‚Rückkehr zur Natur' frischeres Leben und neue Kraft gewann. Und diese neue Anregung, die Hinlenkung dazu, den Ausgang von der Betrachtung und Vergleichung von Körpern aus zu nehmen, anstatt der abstrahierten Gebilde Punkt und Gerade den sinnlich faßbaren Körper als Grundlage zu wählen, diese Anregung scheint man dem Geologen und Pädagogen Karl von Raumer zu verdanken. Durch Hauy und Weiß* (bei dem Fröbel einige Zeit gearbeitet hatte; L. F.) *war die Steinkunde, im besonderen die Kristallkunde erst zu einer Wissenschaft geworden, und durch sie angeregt hatte Raumer 1820 ein ‚ABC-*

Buch der Kristallkunde‘ veröffentlicht, dessen liebevolle Vertiefung in die Welt der Formen vielfach zu deren Studium aneiferte und zugleich ‚ein neues Feld für die Raumlehre als Unterrichtsgegenstand eröffnete‘.“

Treutlein 1911/1985, S. 35

Die zugrunde liegenden Vorstellungen von gestaltlichen Elementarbausteinen, Metamorphosen, Erosionen, Läuterungs- und Harmonie-Evolutionen haben sich zwar damals nicht durchgesetzt und sind – jedenfalls in ihrer ursprünglichen Form – durch Paradigmen wie Darwinismus, Atomismus, Quanten- und Realitivitätstheorie überholt worden, aber das Argument, jede „Geo-Metrie“ oder „Raumformen- und -messkunde“ müsse vom Raum ausgehen, ließ sich fortan nicht mehr mit der Floskel abschieben, es gebe nur einen wissenschaftlich substanziellen methodischen Weg, nämlich den Weg Euklids von der Ebene in den Raum. Kristallografische Formenkunde, synthetisch-darstellende Geometrie und die projektive Geometrie im Stile Jacob Steiners waren im 19. Jahrhundert lokal und zeitweilig favorisierte Alternativen (vgl. etwa Klein, Timerding, Wußing).

Die Geometrie der Volksschule konnte sich vergleichsweise leicht und bis zur Arbeitsschulbewegung und 2. Reformpädagogik zunehmend zur „Raumlehre“ entwickeln, indem sie ihren messkundlichen Kern auf materielle und „materiale“ Gegenstände bezog. Die gymnasiale Formalbildung bzw. Wissenschaftspropädeutik an Euklid war dagegen mit einem fortwährenden Bezug auf das Räumliche schlechter zu verbinden: Es fehlt bis heute eine vergleichsweise elegante und reichhaltige, aber bequem niveaudifferenzierbare und algorithmisierbare Theorie der Formen und Formbeziehungen. (Beispiele in Hildebrandt/Tromba; Theorieansätze in Hoffman.) Mehr als „Propädeutik“ im Sinne Treutleins für die Orientierungsstufe, Stereometrie in Klasse 10 und Lineargeometrie auf der Oberstufe sprangen nicht heraus.

Der „Fusionsgedanke“, der die 3- oder gar *n*-dimensionale Raumlehre durch Anleihen in Algebra und Analysis theoretisch griffiger und rechnerisch universeller machen sollte, wurde im 20. Jahrhundert mindestens viereinhalbmal neu entdeckt: bei den Meraner Reformern (Analysis, Analytische Geometrie, projektive Metamorphosen), im misslungenen Spagat der schulischen Abbildungsgeometrie zwischen Funktionsdenken und Erlanger Programm, im Strukturalismus Dieudonnéscher Prägung (Vektorräume) und neuerdings in der Softwareentwicklung für ressourcenfressende „Virtual Reality“, wo sich wieder eine Chance für die analytisch reflektierte Darstellende Geometrie auftut, die als Ausgeburt der Ingenieurbewegung vor und nach 1900 ein wechselhaftes Dasein am curricularen Rand gefristet hatte (Hauck, Rohrberg, Rothe, Timerding; einen Überblick mit Quellen gibt Krüger).

Dass die Beziehung zwischen ebener und Raumgeometrie alles andere als fachdidaktisch geklärt ist, zeigt sich schon an der Sorglosigkeit, mit der auch in didaktischen Handbüchern Raumerfahrungstraining, Lehren vom Anschauen, Raumanschauungslehren, Kognitionstheorien und Lehre vom Anschauungsraum in einen Topf geworfen werden. Mathematikdidaktisch reflektierte Ansätze zu entsprechenden „Lehren“ auf Schulniveau gibt es m.Ws. nur für die Raumanschauung (z.B. Maier) und für strukturelle Aspekte des Anschauungsraumes (Vektorgeometrie, Darstellende Geometrie, Projektive Geometrie). „Lehren vom Anschauungsraum“ scheinen nur auf den höheren Abstraktionsniveaus möglich zu sein, die van Hiele und Burscheid für schulisch illusionär halten: Die ikonische Ebene – sei es an der Tafel, auf der Retina oder auf dem PC-Monitor – ist nicht nur zweidimensional, sie ist auch begrenzt, begrenzt sogar in ihren haptischen Spiel-Räumen.

> *„Wenn der geometrische Raum ein Rahmen wäre, in den jede unserer Vorstellungen für sich allein betrachtet heineingepaßt werden kann, so wäre es unmöglich, sich ein Bild ohne diesen Rahmen vorzustellen, und wir könnten an unserer Geometrie nichts ändern.*
>
> *Aber dem ist nicht so; die Geometrie ist nur die Zusammenfassung der Gesetze, nach welcher diese Bilder aufeinanderfolgen.“*
>
> Poincaré 1894 (zit. n. 1906, S. 66)

Raumerfahrung ist immer ein Konstrukt, nicht nur beim Erwerb „basaler“ Fertigkeiten und Fähigkeiten (vgl. bes. eindrucksvoll: Hoffman). Der Anschauungsraum ist psychologisch nicht als ein Aktual-Unendliches a priori da und argumentativ verfügbar (Struve), er wird im Geiste erfahrener Nichtbegrenzung ideativ konstruiert und durch Erfahrung mit geometrischen Entwürfen begrifflich angereichert. Gelingt es im Unterricht, geometrisches Wissen als etwas zu vermitteln, das über PC-Bildschirm und Schulraum hinaus gültig ist, dann ist schon viel erreicht.

Der allgemeinbildenden, nicht-wissenschaftspropädeutischen Schule fehlt eine entsprechende Geometrie, die den Raum von Objekten und Operationen, Koordinations- und Bewegungserfahrungen her konstruktiv aufbaut. „Den“ Anschauungsraum als (wohl subjektiv, aber intersubjektiv parallel) konstruierten, gemeinsamen, homogenen, unparteischen Ort aller Phänomene und Geschehnisse zu begreifen, dürfte der Lehre wert sein. Dass das ohne Substanz- und Modernitätsverlust möglich ist, hat der protogeometrische Ansatz der Dingler-Lorenzen-Schule gezeigt (vgl. Bender/Schreiber). Leider ist er für die Schule bisher nur bzgl. der unteren van-Hiele-Niveaus praxisgerecht konkretisiert worden. Die rasante Entwicklung ganzheitlich oder „top down“ ansetzender 3D-Modellierungs-, Bodyscan- und Animationsprogramme wird uns vermutlich über kurz oder lang ikonische Schulungsmittel für die Raumanschauung zur Verfügung stellen, die uns auch zu einer anderen Auffassung von Theoriebildung führen könnten. Ein denkbarer Weg ist in Hoffmans computerorientierter Fortführung der Gestalttheorie skizziert.

5 Fachsprache versus Umgangssprache

Es ist in Ausführungen zur Unterrichtsmethodik weithin üblich, der sog. „Alltagssprache“ „die mathematische Fachsprache“ gegenüber zu stellen und letztere – wenigstens in erster Näherung – durch die Genauigkeit ihrer Begriffe zu charakterisieren. Diese Begriffspräzision wird ihrerseits explizit oder implizit auf den aristotelischen Begriffsbegriff zurück geführt:

> *„Die Begriffsbestimmung (Definition) besteht aus dem Geschlecht und den Unterschieden.*
>
> *Denn das Geschlecht muß den Begriff von den übrigen Geschlechtern scheiden, der Unterschied aber von dem, was unter demselben Geschlecht steht.*
>
> *Wer treffend einen Begriff bestimmen will, muß ihn durch das Geschlecht und die Unterschiede bestimmen. Dies gehört zu dem, was schlechthin erkennbarer und früher ist, als die Art.“*

Aristoteles (zit. n. Beer, S. 61)

Das passt so schön: „Begriffsinhalt“ ist die Menge der charakterisierenden Eigenschaften; „Begriffsumfang“ ist die Menge der inbegriffenen Objekte; Logik, Axiomatik und deduktive Methode beruhen auf analytischen Schlüssen; letztere sind nichts als Boolesche Teilmengenalgebra; und das Ganze ist immer dichotom beurteilbar. Begriff und Definition sind im Wesentlichen dasselbe; beim Begriff wird nur mehr herum geredet; Definitionen sind klarer, aber knapper – Definitionen sind Begriffskonzentrate für Fachleute!

So etwa lautet auch die Hintergrundphilosophie der Begriffseinführungsstunden, die Referendare so lieben und die auf Schülerseite selten mehr bringen als Nominaldefinitionen (Bezeichnungen). Aber die ganze Sache ist schief, wie nicht erst an maschinellen Beweisern bemerkt wurde. Es ist nur die halbe Wahrheit, und ausgerechnet die Hälfte, die für divergentes mathematisches Denken und folglich auch für Unterricht oberhalb von Unterweisung kontraproduktiv ist. Im Rahmen der Logik, die Aristoteles im Auge hatte, ging es um Formalismen für Eigenschaften, Urteile und Folgerungen, nicht um Bedeutungen, nicht um Begriffsgenesen, nicht um schöpferisches Denken. Aristoteles war sich dessen natürlich bewusst, wie z.B. die folgende Anmerkung kurz nach obigem Zitat belegt:

> *„Es darf aber dabei nicht verborgen bleiben, daß sich vielleicht einiges nicht anders bestimmen läßt, z.B. das Doppelte nicht ohne die Hälfte und was an und für sich ‚bezogen‘ (relativ) heißt; denn alle solche Begriffe haben darin ihr Wesen, daß sie sich irgendwie aufeinander beziehen, so daß es unmöglich ist, den einen Begriff ohne den andern zu erkennen.“*

Aristoteles (ebenda)

Uns geht es hier weder um Aristoteles noch um Logikgeschichte, sondern um Unterricht. Aristoteles gibt hier aber selbst das Stichwort: alles, „was an und für sich

‚bezogen‘ (relativ) heißt“. Mathematisch *bedeutsame* Begriffe sind aber gerade durch das geprägt, was Freudenthal „Beziehungshaltigkeit“ nannte, andere vielleicht „operative Vernetzung“ o.ä. Zumindest aus pädagogischer Sicht gilt: Die wesentlichen Begriffe der Mathematik sind Beziehungsbegriffe, relativistische „Undinge“ oder relationale „Fiktionen“. Es sind Begriffe, die das, was sie sind, gerade ihren Wechselwirkungen verdanken. Für Grundbegriffe wie „Rechenzahl“, „Punkt“ (s.u.), „Ebene“, „Vektor“, „Raum“ ist das offensichtlich, ich möchte aber im Folgenden begründen, warum es sich für den allgemeinen Mathematikunterricht empfiehlt, alle wesentlichen Begriffe und sonstigen fachsprachlichen Wendungen operativ-pragmatisch aufzufassen.

> *„Der Punkt als ein null-dimensionales Gebilde ist eine in sich gänzlich widerspruchsvolle Idee, aber ebenso notwendig als absurd. Ein Gebilde ohne jegliche Dimension ist ein Nichts in sich selbst… Wir rechnen hier mit Undingen statt mit Dingen, aber es sind nützliche und unentbehrliche Undinge. Wir aber halten diese Undinge für Dinge, weil wir gewöhnt sind, alles, dem wir einen Namen geben, für real zu halten, ohne zu bedenken, daß wir nicht bloß Reales, sondern auch Irreales durch Namen fixieren können.“*
>
> H. Vaihinger 1911, S. 508

Charpa zitiert eine Aufstellung von Paul Thagard 1992, die – in der etwas freien Wiedergabe von Tabelle 2 – sieben Begriffsaspekte hervorhebt.

Begriffe helfen …
1. Tatbestände zu identifizieren und zu ordnen (Gattungsbegriffe, die von Fall zu Fall einander über- oder untergeordnet werden können)
2. der Erinnerung (indem sie Vorstellungskomplexe benennen)
3. der Verständigung
4. logische Schlüsse zu formulieren,
5. Situationen zu erklären und Probleme zu lösen (vgl. hierzu Vollrath 2001, S. 219 ff.),
6. Informationen systematisch zu sammeln (unvollständige Induktion),
7. Analogien zu bilden.

Tabelle 2

Offensichtlich kommt man zu ganz unterschiedlichen Begriffsdefinitionen, indem man die eine oder andere dieser Funktionen der Begriffsnutzung bevorzugt.

Aristotelische Definitionen sollen genau oder wenigstens genauer festlegen, wovon die Rede ist. Sie dienen der Ausschaltung von Missverständnissen, und sie ermöglichen überhaupt erst zwingende Beweisführungen. Der aristotelische Realdefinitions-Begriff dient 1, 2, 4 und 6 ausgezeichnet, in Grenzen auch 3. Er tut das aber auf Kosten der heuristischen Begriffs-Funktionen. Erinnerungsvermögen, informelle Verständigung, kreative Problemlösungen und assoziative Analogiebildungen, also die Begriffs-Funktionen 2, 3, 5 und 7, leiden unter terminologischen Zwängen. Tabelle 3 stellt die unterschiedlichen Funktionen scharfer und unscharfer Begriffe einander gegenüber. (Die Nummern beziehen sich dabei auf die o.g. Aspektliste nach Thagard.)

Begriffsfunktionen	
Scharfe Begriffe, z.B. definierte Fachbegriffe, helfen …	**Unscharfe Begriffe**, z.B. sog. Alltagsbegriffe, helfen …
1. Tatbestände zu identifizieren und zu ordnen (Gattungsbegriffe, die einander z.T. über- oder untergeordnet werden können), 2. der präzisen Erinnerung (indem sie Vorstellungskomplexe benennen), 3. der unmissverständlichen Verständigung, 4. logische Schlüsse zu formulieren, 6. Informationen systematisch zu sammeln	2. der vagen Erinnerung (indem sie Vorstellungskomplexe benennen), 3. der anregenden Verständigung, 5. Situationen zu erklären und Probleme zu lösen, 6. einschlägige Informationen zu sammeln und Hypothesen durch spekulative Verallgemeinerung zu bilden (unvollständige Induktion), 7. Analogien zu bilden und Ähnlichkeiten zu entdecken.
analytisch-systematische Funktionen ↔ konstruktiv-heuristische Funktionen	

Tabelle 3

Es empfiehlt sich für die didaktische Praxis sehr, die Wechselwirkung zwischen Alltags- und Fachbegriffen nicht durch demonstrative Abgrenzung totzuschlagen. Eine solche Abgrenzung ist auch künstlich, denn jede gedankliche Arbeit mit Fachbegriffen bemüht unvermeidlich außerfachliches Wissen, Können, Vorstellen und Denken – und dies auf jedem Niveau. Mathematische Forschung z.B. bleibt unfruchtbar, solange der Forscher und seine Gesprächspartner nicht wenigstens die zentralen Begriffe ihres Gebietes in reich vernetzte, dafür aber nicht mehr vollständig definierbare „Alltagsbegriffe“, d.h. hier: in z.T. unscharf bedeutungsgeladene Begriffe ihres Berufsalltags, überführt haben.

Bedeutung haben mathematische Begriffe für Lernende genau in dem Maße, in dem sie „erkennbar etwas leisten“. Kurz: Begriffe, die Schülern nichts bedeuten, sind für sie keine. Deshalb empfiehlt sich für den Mathematikunterricht statt der aristotelischen Begriffsauffassung eine eher pragmatische, etwa im Sinne der Peirceschen Grundmaxime des Pragmatismus:

> *„Überlege, welche Wirkungen, die denkbarerweise praktische Bezüge haben könnten, wir dem Gegenstand unseres Begriffs in Gedanken zukommen lassen. Dann ist unser Begriff dieser Wirkungen das Ganze unseres Begriffs des Gegenstandes."*
>
> C. S. Peirce, How to Make Our Ideas Clear (1878; zit. n. Oehler, S. 14

Insofern unscharfe Begriffe Heuristik fördern sollen, erinnert M. Wertheimer an J. St. Mill, dessen Überlegungen zur Induktion lehrreich sind, auch wenn man seine positivistischen und utilitaristischen Auffassungen nicht teilen mag:

> *„Es wird vielfach angenommen, daß die induktive Logik außer auf die Regeln und Operationen der klassischen zusätzlich Wert legt auf:*
>
> - *empirische Beobachtung*
> - *sorgfältiges Sammeln von Tatsachen*
> - *empirisches Studium der Probleme*
> - *die Einführung experimenteller Methoden*
> - *die Feststellung der Korrelationen zwischen Tatsachen*
> - *die Entwicklung von Entscheidungsversuchen."*
>
> Wertheimer, S. 9

Nicht zufällig werden hier einige zentrale Begriffe der aktuellen Diskussion um die Modernisierung des Mathematikunterrichts vorweg genommen. Um nur eines von vielen möglichen Beispielen zu nennen:

> *„Die Betonung heuristischer Denk- und Arbeitsweisen relativiert die Bedeutung der formalen Fachsprache als Träger mathematischer Kommunikation. Zur Stärkung der natürlichen Sprache im Mathematikunterricht gehört die Philosophie von der ‚Wiederentdeckung des Inhaltlichen in einer neuen Unterrichtskultur'."*
>
> Borneleit u. a. 2001, S. 28

Im engeren Bezug auf den Geometrieunterricht verlangt das Konzentration auf heuristische Erschließung des Anschauungsraums und intelligentes Problemlösen, kurz: Primat der Mathematisierungsheuristik vor dem Systemdenken. Abstraktere Ziele wie Raumbegriff, Strukturvorrat oder wissenschaftliches Mustersystem, d.h. die eigentlichen erkenntnis- und wissenschaftstheoretischen Qualitäten der Geometrie, treten dafür weit zurück. Man mag das im Hinblick auf das akademisch einstudierte Mathematikbild bedauern, es scheint mir aber eine unausweichliche Konsequenz aus den Bestandsaufnahmen in den obigen Abschnitten 1–3 zu sein, und der real-existierende Geometrieunterricht kann dabei mehr an Substanz gewinnen als verlieren.

Beispiel:

„Der Begriff ‚ähnlich' ist in der Umgangssprache fest verankert: Vater und Sohn sehen sich ähnlich, Gegenstand und Foto sind sich ähnlich. Der Begriff ist in der Umgangssprache jedoch relativ offen. Er beschreibt in etwa das Übereinstimmen in bestimmten Merkmalen (Vollrath 1978). Mathematisch ist eine ebene Figur einer anderen ähnlich, wenn es eine Ähnlichkeitsabbildung gibt, die die eine Figur in die andere abbildet. Mit dem Begriff der Ähnlichkeitsabbildung ist der Begriff ‚ähnlich' eindeutig festgelegt."

Vollrath 2001, S. 115

Es ist klar, warum diese Begriffsverengung vorgenommen wird: Man möchte Ähnlichkeitsaussagen und -beziehungen zwingend beweisen können, und dazu wird ein scharfes Entscheidungskriterium gebraucht, das Paare von ebenen oder räumlichen „Figuren" eindeutig in „ähnliche" und „nicht-ähnliche" unterscheidet. „Ähnlichkeit" wird künstlich zu einer mengentheoretischen Äquivalenzrelation gemacht. Der Preis für diese Präzisierung ist freilich sehr hoch:

- Quadrate und andere Rechtecke sind einander nicht mehr ähnlich; Würfel und (andere) Quader ebenso.
- Der alltägliche Nutzen des Ähnlichkeitsbegriffs, nämlich aus „gewissen" Ähnlichkeiten spekulativ auf ähnliche Eigenschaften oder Folgen zu schließen, d.h. rasch Vermutungen oder Hypothesen zu bilden, wird aufgegeben. Begriffe wie „so ähnlich" oder „ziemlich ähnlich" verlieren ihre heuristische Bedeutung. Ob ein gegebener Quader, der fast wie ein Würfel aussieht, auch alle Würfeleigenschaften „fast" hat, muss erst wieder mühsam durch allerlei Hilfsdefinitionen und Approximationssätze rekonstruiert werden.
- Wie ähnlich ein real gegebener Würfel einem mathematischen ist, kann nicht sicher entschieden werden, und so sagt die mathematische Ähnlichkeitstheorie über diesen Fall nichts aus. Das widerspricht dem Alltagsverständnis: Wir wissen zwar nicht, ob es unter allen Spielwürfeln der Welt einen echten Laplace-Würfel gibt. Trotzdem trauen wir den meisten Spielwürfeln zu, dass sie sich „so ähnlich" wie ein Laplace-Würfel verhalten. (Gesetze der großen Zahl, Signifikanztests und Konfidenzintervalle können dieses Vertrauen nicht vollständig ersetzen.)
- Dass ein abgebildetes, nicht-entartetes Trapez einem Quadrat unähnlich ist, setzt (in der Regel stillschweigend) eine bestimmte Interpretation des Gesehenen voraus, dass es sich nämlich um eine Teilmenge der Tafelebene oder wenigstens um ein sinnvoll projiziertes räumliches Objekt handelt. Wird diese Interpretationsannahme einmal zweifelhaft, dann behindert die Fixierung auf mathematische Ähnlichkeit jeden intuitiven Umgang mit dem Ob-

jekt erheblich – man denke beispielsweise an typische Schwierigkeiten beim perspektivischen Skizzieren oder Ausmessen.

- Die Möglichkeit des Menschen, undefinierbare Ähnlichkeiten zwischen Dingen, Ereignissen und/oder Vorgängen überhaupt erkennen zu können, gehört immer noch zu den unerklärten Wundern und verdankt sich vielleicht in erheblichem Maße der angeborenen „Hardware" unseres Erkenntnisvermögens. Nur um streng beweisbarer Aussagen willen auf diese natürliche Intuitionsquelle zu verzichten, muss Nichtmathematikern mit gesundem Menschenverstand als rechte Zumutung erscheinen.

Warum hat man in der Mathematik unscharfe Alltagsbegriffe wie „Ähnlichkeit", „Bewegung", „Funktion", „Abbildung", „Punkt" oder „Körper" nicht in ihrer intuitiven Bedeutung gelassen und für die fachsprachliche Realdefinition besondere Fachwörter „kollineare Transformation", „Isometrie", „numerische Transformation", …, „Rechenzahlbereich" eingebürgert? Vermutlich neigte eine Mehrheit in der mathematischen Scientific Community dazu, vor allem bei besonders fundamentalen Begriffen trotz fachsprachlicher Realdefinitionen einiges an Vertrautheit und Intuitionen zu retten.

Der informellere Umgang mit Fachbegriffen wurde hier aus dem Wunsch begründet, die heuristischen Komponenten des Mathematikunterrichts zu stärken. Dieser Wunsch lässt sich bekanntlich sowohl psychologisch als auch erziehungspolitisch begründen, und er steht regelmäßig ganz oben auf den diversen Rezeptblöcken der TIMSS- und PISA-Experten. Im Ergebnis, wenn auch mit unterschiedlichen Begründungen, kommen genauere didaktische und psychologische Analysen „der" mathematischen Fachsprache auch ganz allgemein zu dem Schluss, Verständnis und Funktionalität mathematischen Wissens sei nur über *gezielte Integration des Fachsprachlichen ins Alltagssprachliche* zu erreichen, sei es durch geeignete Formen des „intermodalen Transfers" (Maier/Schweiger) oder durch literarische Eroberung des „Regulären" vom subjektiv „Singulären" her (Gallin/Ruf). Nur unterrichtsmethodische Maßnahmen, wie sie z.B. Lietzmann in den frühen eigenen Auflagen seiner Methodik ab 1916 (dort S. 89 f.) immer wieder forderte, um die wichtigsten fachsprachlichen Begriffe und Redewendungen „vom passiven in den aktiven Wortschatz" zu überführen, reichen (heute) nicht mehr. Informellerer Umgang mit fachsprachlichen Wendungen zwecks Integration mathematischer Ausdrucksweisen in die Alltagssprache kann nur ohne Substanzverlust gelingen, wenn sich diese Wendungen auf robuste mathematische Inhalte, Formen und Methoden beziehen, d.h. auf eine Mathematik, in der Stabilititätsaspekte gegenüber Exaktheitsforderungen bevorzugt werden. Welche Rolle z.B. informellere Begriffsbildungen wie „Fast-Symmetrie", „So-Ähnlichkeit", „lokale Linearität" oder „lokale Teilverhältnistreue" in einem der Praxis angemessenen und zeitgemäßeren Neuaufbau der Schulgeometrie spielen könnten, müsste auch stoffdidaktisch erst noch erforscht werden.

6 Zur tendenziellen Statik der Fachsprache

> *„Es ist uns ebenso unmöglich, uns die äußere Körperwelt im geometrischen Raume vorzustellen, wie es einem Maler unmöglich ist, die Objekte mit ihren drei Dimensionen auf eine ebene Leinwand zu malen. Der Vorstellungsraum ist nur ein Bild des geometrischen Raumes, und zwar ein durch eine Art Perspektive deformiertes Bild, und wir können uns die Objekte nur vorstellen, indem wir sie den Gesetzen der Perspektive anpassen.*
>
> *Wir stellen uns also die äußere Körperwelt nicht im geometrischen Raume vor, sondern wir machen unsere Erwägungen über diese Körper, als wenn sie sich im geometrischen Raume befänden.*
>
> *Was soll es aber bedeuten, wenn man nun sagt, daß wir ein bestimmtes Objekt an einem bestimmten Punkte des Raumes ‚lokalisieren'?*
>
> *Das bedeutet einfach, daß wir uns die Bewegungen vorstellen, welche man ausführen muß, um zu diesem Objekte zu gelangen…*
>
> *Keine unserer Empfindungen würde für sch allein uns zur Idee des Raumes führen können; wir sind zu derselben nur durch das Studium der Gesetze gekommen, nach welchen die Empfindungen aufeinander folgen."*
>
> Poincaré 1894 (zit. n. 1906, S. 58 f.)

Auf die statisch-archaisierende Eigenart der mathematischen Fachsprache(n), die besonders Maier/Schweiger klar herausgearbeitet haben, möchte ich etwas näher eingehen, weil ich sie für ein Symptom einer tiefer liegenden Schwäche unser maßgeblichen Fachwissenschaft halte:

Fachsprachen sind darauf angelegt, Tatsachen festzustellen und zu belegen. Die mathematische Hochsprache dient dem in besonders extremer Form, weil sie stark auf die Feststellung von überzeitlichen und objektiven Tatsachen ausgerichtet ist und subjektive und/oder dynamische Aspekte nur schlecht ausdrücken kann. Vielfältige Belege finden sich dazu in dem Buch von Maier/Schweiger, aus dem wir hier nur ein paar Gesichtspunkte herausgreifen:

- Um den intersubjektiv und überzeitlich gültigen Charakter mathematischen Wissens zu betonen, ist es in fachsprachlichen Darstellungen üblich, Sachverhalte als etwas statisch Gegebenes zu formulieren.
- *„In der Linguistik werden Verben semantisch nach Handlung, Vorgang und Zustand klassifiziert. Handlungsverben, bei denen das Subjekt ‚handelt', regieren meist ein Objekt. Sie werden in mathematischen Texten vor allem metasprachlich verwendet: ‚wir konstruieren', ‚schneiden', ‚berechnen', ‚differenzieren', … Der fachsprachlichen Verwendung liegt nämlich die Vorstellung zugrunde, daß mathematische Gegenstände selbst wie Subjekte handeln: ‚die Gerade schneidet den Kreis', ‚2 teilt 12', … […] Fachsprachlich gibt es eigentlich nur Zustände, denn der Satz ‚2 teilt 12' beschreibt kein Geschehen, son-*

dern einen Zustand (eine Eigenschaft der natürlichen Zahlen), ebenso ‚Jede Gerade schneidet eine kubische Parabel in höchstens drei Punkten‘, ‚die Tangensfunktion steigt monoton‘, ‚die Folge konvergiert nach Null‘, …“

Maier/Schweiger, S. 32

- Neben der Substantivierung (Nominalisierung) pflegen Mathematiker auch die Gewohnheit, Sachverhalte im Präsens über- bzw. unzeitlich darzustellen und durch allerlei Floskeln oder Passivkonstruktionen zu entsubjektivieren: „das lässt sich beweisen“, „solche Vierecke werden Trapeze genannt“, „die Parabel wird von der Geraden geschnitten“, „die Ableitung wird Geschwindigkeit genannt“, „die Zahl *e* existiert“ usw. (Maier/Schweiger, Abschnitt 1.4).

Präzision, Vollständigkeit und Prägnanz werden in der Scientific Community als Qualitätsmerkmale mathematischer Darstellungen bewundert. Erreicht werden solche Qualitäten durch starke begriffliche Verdichtung, durch Ausblenden von Kontextuierungen und Konnotationen sowie durch möglichst redundanzarme Formulierungen. Wer von einem „Kreisdurchmesser durch den Mittelpunkt“ spricht, gibt sich als blutiger Anfänger zu erkennen, obwohl er vielleicht nur aus guten Gründen den Mittelpunkt auf dem Kreisdurchmesser hervorheben möchte. Ein elaborierter Sprachgebrauch setzt sich vom alltäglichen Sprachgebrauch ab, indem er Wortwahl, Präzisionsgrad und Vollständigkeit von Informationen nicht mehr höflich auf den/die Gesprächspartner abstimmt, gemeinsam unterstellte Kontextwahrnehmungen ignoriert und Redundanzen vermeidet. Jedes Wort, jedes Zeichen, jede Information soll sitzen und nur einmal gegeben werden. Wer nicht genau zuhört und sich vielleicht eigene Gedanken macht, ist selber schuld. Mit „sinnerfassendem“ Lesen, wie es von Kindesbeinen täglich geübt wird, sind Fachbücher und insbesondere fachmathematische Texte kaum zu verstehen („Überfliegen“ von ganzen Sätzen, „vorgreifendes Lesen“, Interpolation von Sinnzusammenhängen aus nur teilweise registrierten Textteilen usw.).

Das ist nicht nur tendenziell autoritär, es ist auch hinderlich: Im fachsprachlichen Verlautbarungsstil manifestiert sich auch eine traditionelle Geringschätzung genetischer Begriffsauffassungen in Mathematikerkreisen. Induktive oder genetische Darstellungen werden in der Regel als „didaktische Konzession“ angesehen, nicht als notwendiges Ausdrucksmittel innerhalb der elaborierten Fachsprache. Wie irgendjemand auf ein bedeutendes Ergebnis kam, wird nur selten berichtet. Wo es ausnahmsweise schriftlich geschah, wie etwa in Archimedes’ Methodenschrift oder in Keplers Doliometrie, wird der persönliche Berichtsteil gewöhnlich nicht zum mathematischen Wissensbestand gerechnet. Der Entstehung von Begriffen und Ergebnissen widmete die mathematische Forschung nur selten Aufmerksamkeit. In der Regel geschah es nur widerwillig, bei Festreden oder sobald und solange die Beweisbarkeit von Absurditäten drohte (Beispiele: Grundlagen der Infinitesimalrechnung; Mengenlehre; „Grundlagenkrise“). Möglicherweise steckt hinter dieser Scheu wie auch hinter der erwähnten Geringschätzung so etwas wie „das laute

Singen im Wald“. Geht man nämlich den Objekten, von denen die Mathematik handelt, auf den Grund, dann haben sie die fatale Neigung, sich in Eigenschaften, Relationen oder auch metaphorische Sprechweisen aufzulösen. Zöge man daraus eine ernsthafte Konsequenz, etwa indem man *Mathematik als Sprache* für gewisse Aspekte der Realität (vgl. Mehrtens) auffasste, oder *als praxisgeleitete Ideation* (Dingler-Lorenzen; vgl. Bender/Schreiber) oder *als viable Eigenkonstruktion interagierender Subjekte* (Vaihinger, Piaget, von Glasersfeld, Bauersfeld), dann müsste man sich von einigen lieb gewonnenen Geltungsansprüchen verabschieden und vieles neu formulieren: relativer, prozesshafter, subjektiver…

Dass die begriffliche und fachsprachliche Ausgrenzung von Wissensgenesen inzwischen auch in Mathematikerkreisen zunehmend als Fehler erkannt wird, braucht uns hier nur insoweit zu interessieren, als sich auf Forschungsniveau dieselben Darstellungsprobleme zu zeigen scheinen, die möglicherweise als „ungute Gefühle“ hinter den Ausweichmanövern stecken, die Maier/Schweiger zu den Charakteristika von Schülersprache rechnen:

- Variablen, sprachliche ebenso wie grafische, scheinen zu verunsichern. Die Verständigung anhand typischer Beispiele, die durchaus wie in vielen mathematischen Texten bis zur Renaissance „pars pro toto“, also variabel, gemeint sein können, wird offenbar vorgezogen und als konkreter angesehen. Prototypische „Definitionen“ werden auch dann noch (längere Zeit) vorgezogen, wenn schon eine Realdefinition ausdrücklich verabredet wurde.
- Mathematische Aussagen scheinen eher „*genetisch*“, d.h. hier: als Entwicklungsprodukte mit momentanen Wechselwirkungen, begriffen zu werden denn „statisch“ als überzeitliche Tatsachenfeststellungen. Eine verkettete Abbildung ist schwerer zu durchschauen als das Verketten von Abbildungen, und die Verkettungsstruktur von $2x \cdot \sin\left(\frac{x}{\pi} - 1\right)$ wird manchem Schüler erst klar, wenn er ein paar Werte auf dem Taschenrechner bestimmt.

Die mathematische Fachsprache tut sich schwer, Prozesshaftes zu beschreiben, und sie tut sich schwer, die Bedeutung ihrer Begriffe und Aussagen als etwas vorläufig Gewordenes, weitläufig Kontextuiertes und in seinen aussermathematischen Bezügen Annäherndes zu charakterisieren. Auch dem großen Poincaré fiel nichts Besseres ein, als die „Aufeinanderfolge der Vorstellungen“, die er der Geometrie zugrunde legte, durch Bewegungs- oder Operatorgruppen zu fassen. Wagenschein hat nicht umsonst immer wieder betont, dass Genetisches nur über angemessenen Sprachgebrauch erschließbar ist. Aber er hat daraus nicht den Schluß zu ziehen gewagt, dass eine andere Sprache andere Akzente setzt und andere Denkformen begünstigt, dass folglich genetische Mathematik auch inhaltlich etwas Anderes sein muss als ein ehrwürdiges Museum platonischer Wahrheiten.

Zugmodus, Animation und Morphing verweisen auf eine andere Sprache, auf eine informelle Mathematik-Sprache, die die ganzheitlich-intuitiven Gedanken-, Gestalt- und Bewegungsformen hinter Metamorphosen und kinematisch-variablen Wechselbezügen gedanklich „in den Griff“ bekommt. Das Problem war schon einmal im Laufe des 19. Jhs. aufgetaucht, als sich das Maschinen-Paradigma vom Enaktiven der Dampfmaschine über die bewegten Bilder hinter Eisenbahnfenstern zum Ikonischen des Kinematographen wandelte. Von Herbart und Goethe über Jakob Steiner bis zu den Meraner Reformern gab es ernsthafte Bemühungen, „organisches“ oder „funktionalen Denken“ in der Mathematik zu etablieren. Über Rudolf Steiner haben sich diese Bemühungen in der Waldorf-Mathematik bis heute gehalten, ohne über die Rhythmisierungen und Metamorphosen der projektiven Geometrie im Geiste Jakob Steiners und über kinematische Ansätzen der Meraner Reformer substanziell hinaus zu kommen. (Für Einzelheiten zu diesem Absatz s. Krüger und Schuberth.)

Im wissenschaftlichen Mainstream und in der Schulmathematik des 20. Jhs. ist das „unscharfe“, divergente Denken in variierenden Größen sehr erfolgreich durch mengentheoretisch fixierte Realdefinitionen verdrängt worden (vgl. Führer 1995). Erst der aktuelle, finanzpolitisch motivierte Vormarsch der Angewandten Mathematik verweist – insbesondere im Zusammenhang mit dynamischen und stochastischen Prozessen – auf diese nur scheinbar überholten Denk- und Ausdrucksweisen zurück. Eine Renaissance funktionalen Korrelationsdenkens dürfte aber nicht einmal reichen, falls sich die dynamischen oder kinematischen Grundgestalten, die das visuelle (und auditive) Bewusstsein heutiger Jugendlicher prägen, als im Wesentlichen unstetig, diskretisiert oder digitalisiert erweisen sollten. Video-Clips, Werbeszenen und Remakes mit Rap-Einlagen deuten in diese Richtung, vielleicht auch gesellschaftliche Dissoziation als Kehrseite humanwissenschaftlicher Trends zum Subjektivismus im ersten und letzten Drittel des abgelaufenen Jahrhunderts (Single-Familien, „Postmoderne“, Entsolidarisierung). An der mathematischen wie informatischen Forschungs- und Anwendungsfront ist ein Vormarsch diskreter Methoden jedenfalls unverkennbar.

Wie eine Schulgeometrie aussehen könnte, die Graphen, Bäume, Bewegungscollagen u.Ä. nicht nur gelegentlich antippt, sondern als fortwährende Grundobjekte in den Mittelpunkt stellt, ist noch gar nicht abzusehen. Weil aber diskrete Objekte einerseits, Bewegungsvorgänge und kontinuierliche Begriffsfelder andererseits nach Aristoteles getrennte Welten sind, wird es vermutlich nicht ohne potentiell-approximative Vorstellungen gehen (neuere Beispiele bei Kenney/Hirsch, Baumann, Neuhäusler, Weigand, Weigand/Weth). Solche Vorstellungen sind zwar konkreter, genetischer, wirklichkeitsnäher und an-greifbarer als „globalisierende“, aktual-unendliche Beziehungsbegriffe, aber sie sind viel eher umgangssprachlich als fachsprachlich darstellbar. Auch das empfiehlt die Ausarbeitung einer begrifflich informellen, heuristisch orientierten Schulgeometrie, die den Anschauungsraum nicht als global gegebenes, sondern als schöpferisch-ausschöpfend konstruiertes Objekt nimmt.

7 Fazit

Im Grunde geht es um die Entwicklung einer Schulmathematik, die sinnvolles und sozial kompromissfähiges Denken deutlich über korrektes Abarbeiten und elitäre Rechthaberei stellt. Das für allgemeine Schulen Lehrreiche an Geometrie können nicht mehr ihre ewigen, universellen, wissenschaftlich vorbildlichen und möglicherweise apriorischen Wahrheiten sein, eher ihre sinnvollen und zuverlässig funktionierenden Gedankenkonstruktionen. Der Sinn eines Wortes, sagt Wittgenstein, sei der Gebrauch in der Sprache. Die Bedeutung eines Begriffs, sagen Peirce, Cassirer und Freudenthal, liege in seinem Beziehungsreichtum. Der grundlagentheoretische Standpunkt stellt den Beziehungsreichtum ans Ende eines axiomatisch rekonstruierten Aufbaus. Dieses Ende bleibt den meisten Schülern für immer unsichtbar. Für sie brauchen wir eine informelle, fortwährend beziehungsreiche und – nach einem treffenden Ausdruck von Jens Høyrup: – „subwissenschaftliche“ Schulgeometrie.

Literatur

Backe-Neuwald, D.: Bedeutsame Geometrie in der Grundschule. (Diss.) Paderborn: GHS 2000.
Baireuther, P.: Konkreter Mathematikunterricht. Bad Salzdetfurth: Franzbecker 1990.
Bauersfeld, H.: Theorien im Mathematikunterricht. In: Mathematica didactica 18.2 (1995), S. 3–19.
Bauersfeld, H.: Neurowissenschaft und Fachdidaktik – diskutiert am Beispiel Mathematik. In: Mathematica didactica 21.2 (1998), S. 3–25.
Baumann, R.: Analysis I – Ein Arbeitsbuch mit Derive. Stuttgart: Klett 1998.
Baumann, R.: Analysis II – Ein Arbeitsbuch mit Derive. Stuttgart: Klett 2002.
Baumann, R.: Didaktik der Informatik. Stuttgart: Klett 1990.
Becker, G.: Geometrieunterricht. Bad Heilbrunn: Kinkhardt 1980.
Beer, R. (Hrsg.): Elemente der aristotelischen Logik – Zusammengestellt, übersetzt und kommentiert von A. Trendelenburg. Reinbeck: Rowohlt1967.
Bender, P./Schreiber, A.: Operative Genese der Geometrie. Wien/Stuttgart: hpt/Teubner 1985.
Boldt, R./Eichler, W.: Friedrich Wilhelm August Fröbel. Leipzig u.a.: Urania 1982.
Borneleit, P./Danckwerts, R./Henn, H.-W./Weigand, H.-G.: Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe. In: Tenorth, H.-E. (Hrsg.): Kerncurriculum Oberstufe – Expertisen im Auftrag der KMK. Weinheim/Basel: Beltz 2001, S. 26–53.
Burscheid, H. J.: Braucht der Geometrieunterricht Anregungen? In: MU 1986.4, S. 5–21.
Cassirer, E.: Substanzbegriff und Funktionsbegriff. Berlin 1910.
Cassirer, E.: Philosophie der symbolischen Formen, 3 Bände. Darmstadt: Wiss. Buchges. 1973–75 (Orig. 1923, 25, 29).
Charpa, U.: Grundprobleme der Wissenschaftsphilosophie. Paderborn: Schöningh 1996.
Franke, M.: Didaktik der Geometrie. Heidelberg: Spektrum 2000.
Freudenthal, H.: Mathematik als pädagogische Aufgabe, 2 Bände. Stuttgart: Klett 1973.

Freudenthal, H.: Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: Reidel 1983.

Fröbel, F. W. A.: Die Menschenerziehung, die Erziehungs-, Unterrichts- und Lehrkunst, angestrebt in der allgemeinen deutschen Erziehungsanstalt zu Keilhau, 1. Band. Keilhau/Leipzig: allg. Dt. Erz'anstalt/A. Wienbrack 1826 (zit. n. E. Hoffmann (Hrsg.): Friedrich Fröbel – Ausgewählte Schriften, Bd. 2. Stuttgart: Klett-Cotta (4°) 1982.)

Fröbel, F. W. A.: Die Kunde der Formen und Gestalten und diese in ihrer höhern Bedeutung und Beziehung. In: Die erziehenden Familien. 1826 (Wochenschrift; zit. n. E. Hoffmann (Hrsg.): Friedrich Fröbel – Ausgewählte Schriften, Bd. 1. Stuttgart: Klett-Cotta (4°) 1984, S. 43–79.

Führer, L.: Der Funktionsbegriff im Mathematikunterricht – Rezension des gleichnamigen Buches von S. Müller-Philipp. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 1995, Heft 4, S. 127–129.

Führer, L.: Dreihundert Jahre Theorie des öffentlichen Mathematikunterrichts in Deutschland. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker 2000, S. 19-26.

Gallin, P./Ruf, U.: Sprache und Mathematik in der Schule. In: Journal für Mathematik-Didaktik 14 (1993), S. 3–33.

Gallin, P./Ruf, U.: Sprache und Mathematik – Ich mache das so! Wie machst du es? Das machen wir ab. (Schülerbuch für das 1.–3. Schuljahr) Zürich: Lehrmittelverlag des Kantons 1995.

Gallin, P./Ruf, U.: Sprache und Mathematik in der Schule – Auf eigenen Wegen zur Fachkompetenz. Seelze: Kallmeyer 1998.

Gallin, P./Ruf, U.: Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik, 2 Bände. Seelze: Kallmeyer 1998.

Glasersfeld, E. von: Radical constructivism in mathematics education. Dordrecht: Kluwer 1991.

Harnisch, W.: Die Raumlehre oder die Meßkunst, gewöhnlich Geometrie genannt. Breslau: Jos. Max & Komp. (2°) 1837 (1. Aufl. 1821).

Hiele-Geldorf, D. van/van Hiele, P. M.: La signification des niveaux de pensée dans l'enseignement par la méthode déductive. Mathematica et Paedagogica 16 (1958/59), S. 25–34 (dt. Übers. in: H.-G. Steiner: Didaktik der Mathematik. Darmstadt: Wiss. Buchges. 1978, S. 127–139. Statt der dortigen und in Deutschland gebräuchlichen Übersetzung „Denkebenen" hieße es vermutlich treffender „Verständnisebenen".)

Hiele, P. M. van: Structure and Insight – A theory of Mathematics Education. Orlando u.a.: Academic Press 1986.

Hildebrandt, S./Tromba, A.: Kugel, Kreis und Seifenblasen – Optimale Formen in Geometrie und Natur. Basel u.a.: Birkhäuser 1996.

Hoffman, D. D.: Visuelle Intelligenz. Stuttgart: Klett-Cotta (2. Aufl.:) 2001.

Holland, G.: Geometrie in der Sekundarstufe. Heidelberg: Spektrum (2. Aufl.:) 1996.

Høyrup, J.: „Algebraische" Prozeduren in der vorgriechischen Mathematik. In: E. Scholz (Hrsg.): Geschichte der Algebra. Mannheim: BI 1990, S. 13–44.

Internationale Frostig-Gesellschaft (Hrsg.): Graphomotorische Störungen und Rechenschwäche. Broadstairs (UK): Borgmann 1989.

Kenney, M. J./Hirsch, C. R. (Eds.): Discrete Mathematics across the Curriculum, K-12. Reston, Virg.: NCTM Yearbook 1991.

Klein, F.: Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. 2 Bde. Berlin: Springer 1926/27 (Nachdruck ebenda 1979).

Kroll, W.: Geometrie in der Sekundarstufe I, 2 Teile. In: Praxis der Math. 22.6 (1980), S. 161–167, und 22.7 (1980), S. 193–209.
Krüger, K.: Erziehung zum funktionalen Denken. (Diss.) Berlin: Logos 2000.
Lietzmann, W.: Methodik des mathematischen Unterrichts, Band II. Leipzig: Quelle & Meyer 1916.
Maier, H./Schweiger, F.: Mathematik und Sprache. Wien: öbv & hpt 1999.
Maier, P. H.: Räumliches Vorstellungsvermögen. Donauwörth: Auer 1999.
Milz, I.: Montessori-Pädagogik – neuropsychologisch verstanden und heilpädagogisch praktiziert. Dortmund: Borgmann 1999.
Neuhäusler, S.: Ausgewählte Verfolgungsprobleme mit Java. (Bayreuther Zulassungsarbeit für das gymn. Lehramt 1997 unter http://did.mat.uni-bayreuth.de/geonet/beispiele/verfolgung_za/)
Nolte, M.: Rechenschwäche bei Kindern und Erwachsenen – Mathematikdidaktische und neuropsychologische Ansätze. In: Beiträge zum MU 2001, S. 35–42.
Oehler, K.: Einfürung in den semiotischen Pragmatismus. In: Wirth, U. (Hrsg.): Die Welt als Zeichen und Hypothese. FfM.: Suhrkamp 2000, S. 13–30.
Poincaré, H.: L'espace et la géométrie. In: Revue de métaphysique et de morale 1894.3, S. 631–646. (Zit. n. der dt. Übers. in Poincaré: Wissenschaft und Hypothese. Leipzig: Teubner (2. Aufl.:) 1906, S. 52–73.)
Profke, L.: Brauchen wir einen Mathematikunterricht? In: Math. i.d. Schule 33.3 (1995), S. 129–136.
Profke, L.: Reichen sieben Schuljahre Mathematik? – Einige vernachlässigte Gesichtspunkte. In: Praxis der Math. 38.5 (1996), S. 227–230.
Radatz, H./Rickmeyer, K.: Handb. f. d. Geometrieunterricht an Grundschulen. Hannover: Schroedel 1991.
Radatz, H./Schipper, W.: Handb. f. d. Mathematikunterricht an Grundschulen. Hannover: Schroedel 1983.
Raumer, K. von: Versuch eines ABC-Buches der Kristallkunde. Berlin: Reimer 1820.
Raumer, K. von: Geschichte der Pädagogik, 3. Teil. Gütersloh: (5°) 1880 (1. Aufl. 1843).
Schuberth, E.: Der Geometrieunterricht an Waldorfschulen, Bde. 1–3. Stuttgart: Freies Geistesleben 1999 bzw. 1998 bzw. 2001.
Struve, H.: Grundlagen einer Geometriedidaktik. Mannheim: BI 1990.
Stückrath, F.: Kind und Raum – Psychologische Voraussetzungen der Raumlehre. München (3. Aufl.:) 1968.
Tietze, U.-P. u.a.: Mathematikunterricht in der Sek. II, Band 2. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg 2000.
Timerding, H. E.: Die Erziehung der Anschauung. Leipzig/Berlin: Teubner 1912.
Treutlein, P.: Der geometrische Anschauungsunterricht. Leipzig/Berlin: Teubner 1911 (Nachdruck mit Einführung von J. Schönbeck: Paderborn: Schöningh 1985).
Vaihinger, H.: Die Philosophie des Als Ob. Berlin: Reuther & Reichard 1911.
Vollrath, H.-J.: Klassifikation nach Ähnlichkeit. In: Der Mathematikunterricht 24.2 (1978), S. 105–115.
Vollrath, H.-J. (Hrsg.): Geometrie – Didaktische Materialien für die Hauptschule. Stuttgart: Klett 1982.
Vollrath, H.-J.: Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe. Heidelberg: Spektrum 2001.

Wagemann, E. B.: Quadrat – Dreieck – Kugel. Die Elementarmathematik und ihre Bedeutung für die Pädagogik bei Pestalozzi, Herbart und Fröbel. Weinheim: Beltz 1959.
Weigand, H.-G.: Zur Didaktik des Folgenbegriffs. Mannheim: BI 1993.
Weigand, H.-G./Weth, T.: Computer im Mathematikunterricht. Heidelberg: Spektrum 2002.
Wertheimer, M.: Produktives Denken. Frankfurt a. M.: Kramer (2. Aufl.:) 1966 (amer. Orig. 1945).
Winter, H.: Geometrisches Vorspiel in der Grundschule. In: MU 17.5 (1971), S. 40–66.
Wußing, H.: Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffs. Berlin: VEB DVW 1969.

Anschrift des Verfassers

Prof. Dr. Lutz Führer
Institut für Didaktik der Mathematik der J.-W.-Goethe-Universität
Senckenberganlage 9
60054 Frankfurt am Main
e-Mail: fuehrer@math.uni-frankfurt.de