Die Herleitung der Regel zur Bruchdivision – revisited: gegenstandsbezogene Analysen unter besonderer Berücksichtigung der Perspektive von Lehrkräften sowie von Fähigkeiten und Vorstellungen von Schüler:innen

ANDREAS BÜCHTER, ESSEN & LUKAS DONNER, GÖTTINGEN

***Zusammenfassung**: Der Diskurs zur Frage der Herleitung der Regel zur Bruchdivision sowie die Entwicklung von Unterrichtsvorschlägen dazu wurde bis in die 1980er-Jahre geführt. Es ist erkennbar, dass sich aktuelle Schulbücher überwiegend nicht an diesem Diskursstand orientieren. Gleichzeitig fällt auf, dass sich die Einschätzung von Lehrkräften zur Frage nach der Praktikabilität der angebotenen Wege in der Forschungsliteratur nicht wiederfindet. Die Zielsetzung dieses Beitrags ist eine erneute und vertiefte Betrachtung der Bruchdivision mit Blick auf die Herleitung der Regel („Kehrwertregel“). Dabei werden sowohl die Fähigkeiten und Vorstellungen von Schüler:innen als auch die Perspektiven von Lehrkräften berücksichtigt. Dieser umfassende Blick auf das Thema dient der konstruktiven Wendung im Sinne einer sich empirisch vergewissernden Stoffdidaktik.*

***Abstract:** The discourse on the question of the derivation of the fractional division rule and the development of teaching suggestions for this was conducted until the 1980s. It is recognisable that current textbooks are predominantly not based on this discourse. At the same time, it is noticeable that the teachers' assessment of the practicability of the methods offered is not reflected in the research literature. The aim of this article is to revisit fractional division with a focus on the development of the invert-and-multiply rule for fractional division. In doing so, both the students' abilities and conceptions and the teachers' perspectives are taken into account. This comprehensive consideration of the subject serves a constructive turn in the sense of empirically verifying subject-matter didactics.*

1. Einleitung

Die Bruchrechnung ist ein zentraler Inhaltsbereich des Mathematikunterrichts und seit vielen Jahrzehnten sowohl im deutschsprachigen als auch im internationalen Raum ein wichtiges Forschungsfeld der Mathematikdidaktik, das mittlerweile als weitreichend erforscht betrachtet wird (Reinhold, 2019). Dass es im Rahmen des Bruchrechenunterrichts dennoch zentrale Stellen gibt, an denen eine neuerliche, umfassende Betrachtung lohnenswert erscheint, zeigt die folgende Praxiserfahrung, die den Ausgangspunkt für das hier dargestellte Forschungsprojekt bildet.

Im Rahmen eines Seminars im Masterstudium des Lehramts für Gymnasien und Gesamtschulen bzw. Berufskollegs an der Universität Duisburg-Essen erstellte eine Gruppe von Studierenden ein Erklärvideo „Wiederholung der Division von Brüchen“ für Schüler:innen am Ende der 6. Jahrgangsstufe. Dabei orientierten sich die Studierenden am Standardwerk „Didaktik der Bruchrechnung“ (Padberg & Wartha, 2017)[1]. Dennoch musste eine Lehrkraft das Video beim Einsatz in ihrer Lerngruppe an der Stelle unterbrechen, an der die Regel zur Bruchdivision[2] hergeleitet wurde. Das eingeholte Feedback der Schüler:innen zeigt, dass sie vor dem Hintergrund vorangehender Lernerfahrungen den verwendeten Erkläransatz so noch nicht nachvollziehen konnten. Die Lehrkraft hingegen hat das grundsätzliche Potenzial in diesem Ansatz gesehen. Darum hat sie den Ansatz ad-hoc aufgegriffen und ihn an die Vorerfahrungen der Schüler:innen adaptiert. Daraus resultierte eine rundum gelungene Lernsequenz. Die Lehrkraft zeigte sich ihrerseits so begeistert, dass sie rückmeldete, die im Video verwendete, ihr aber bislang unbekannte Art der Herleitung zukünftig im eigenen Unterricht nutzen zu wollen.

Der (west-)deutsche Diskurs zur spezifischen Frage der Herleitung der Regel zur Bruchdivision sowie die Entwicklung von Unterrichtsvorschlägen dazu wurde bis in die 1980er-Jahre geführt (vgl. Schweizer 1955; Griesel 1981b; Postel 1981). Den bisher letzten umfassenden Beitrag der Erörterung dieses Aspekts der Bruchrechnung leistete die in Padberg (1982) vorgenommene theoretische Analyse und Bewertung aller gängigen Herleitungen der Regel. Es ist aber erkennbar, dass sich aktuelle Schulbücher überwiegend nicht an diesem Diskursstand orientieren. Vielmehr liegt eine Vielzahl verschiedener implementierter Arten der Herleitung der fraglichen Regel vor. Der Großteil davon betont anschauliche Zugänge durch Nutzung der Grundvorstellung der Division als Aufteilen (in Messsituationen), was aus theoretischer Perspektive nicht der präferierte Weg der Herleitung ist (Padberg, 1982). Gleichzeitig fällt auf, dass sich die Einschätzung von Lehrkräften zur Frage nach der

Praktikabilität der angebotenen Wege in der Forschungsliteratur nicht wiederfindet.

Die Zielsetzung dieses Beitrags ist – nicht zuletzt vor dem Hintergrund der Differenz zwischen Forschungsstand und Entwicklungspraxis – eine erneute und vertiefte Betrachtung der Bruchdivision mit einem Fokus auf die Herleitung der Regel. Dabei sollen sowohl die Fähigkeiten und Vorstellungen der Schüler:innen (zur Bruchdivision) als auch die Perspektiven von Lehrkräften (auf die Praktikabilität von Herleitungswegen) berücksichtigt werden. Dieser umfassende Blick auf das Thema dient dem Zwecke der konstruktiven Wendung im Sinne einer sich empirisch vergewissernden Stoffdidaktik.

2. Stand der Forschung und Entwicklung

2.1 Bruchdivision in der Forschungsliteratur

2.1.1 Konzepte und Befunde zur Erarbeitung und Durchführung der Bruchdivision

Die natürlichen Zahlen und Operationen mit ihnen stellen wesentliche Anknüpfungspunkte für die Bruchrechnung dar. Bei der Erarbeitung der Division natürlicher Zahlen werden zwei Grundvorstellungen berücksichtigt: das Verteilen sowie das Aufteilen (vgl. Sidney & Alibali, 2017; Padberg & Benz, 2021).

- Beim *Verteilen* ist die Größe einer Gesamtmenge (d. h. die Anzahl ihrer Elemente) sowie die Anzahl der Teilmengen bekannt, in die die Gesamtmenge so verteilt werden soll, dass alle Teilmengen gleichgroß sind. Gesucht ist die Größe der paarweise disjunkten Teilmengen.
- Beim *Aufteilen* ist die Größe einer Gesamtmenge sowie die Größe der gleichgroßen Teilmengen bekannt. Gesucht ist die Anzahl der (wiederum paarweise disjunkten) Teilmengen.

Das Verständnis der Division natürlicher Zahlen sowohl im Sinne des Verteilens als auch im Sinne des Aufteilens stellt eine notwendige Voraussetzung für die Deutung von Bruchzahlen als Anteil dar (vgl. Kieren, 1993; Marshall, 1993; Wartha & Güse, 2009). Für die Etablierung der Buchdivision (d. h. Division durch einen Bruch) als Operation werden dagegen dem Aufteilen (insbesondere in Form des Messens) deutliche Vorzüge zugeschrieben (Padberg & Benz, 2021). Die Deutung einer Division als Verteilen kann in gewohnter Weise nur bei einem ganzzahligen Divisor (Anzahl an Teilmengen) sinnvoll genutzt werden.[3] Darüber hinaus stößt jedoch auch die Deutung als Aufteilen bei der Bruchdivision (im allgemeinen Fall) an Grenzen:

> Es gibt Divisionen, die sich weder sinnvoll als Teilen [im Sinne der Verteilvorstellung, Anm. AB/LD] noch als Messen deuten lassen, z. B. 4/9 : 3/5. Wir stoßen hier zum ersten Mal auf eine Rechnung, für die keine sinnvolle Grundvorstellung existiert. Diese Division kann daher nur als eine formale Rechnung betrachtet werden, die nach bestimmten Regeln ausgeführt werden kann. Grundvorstellungen haben ihre Grenzen, das Formale trägt weiter als sie. (Malle 2004, S. 8)

Der deutschsprachige Diskurs im Bereich der Bruchdivision widmete sich intensiv typischen Fehlerstrategien beim Operieren (Hasemann, 1981; Klauer, 1984; Padberg, 1986; Herden & Pallack, 2000; Padberg & Bienert, 2000; Wartha, 2009). Im Einklang mit Analysen und Befunden von Klauer (1984) stellt Padberg (1986) fest, dass beim Ausführen von Aufgaben der Bruchdivision im Wesentlichen zwei Schwierigkeitsstufen erkennbar sind: Während Lernende der 7. Jahrgangsstufe der Realschule bei Aufgaben zum Fall „Bruch durch Bruch“ bei ungleichnamigen Brüchen eine Lösungsquote von 64 % und bei gleichnamigen Brüchen (und gleichzeitiger Betrachtung des Spezialfalls der Teilbarkeit des Zählers des Dividenden durch den Zähler des Divisors) von 58 % erzielten, wurden Aufgaben der Fälle „Bruch durch natürliche Zahl“ bzw. „natürliche Zahl durch Bruch“ von nur ca. 39 % bzw. 36 % der Schüler:innen gelöst.

Zudem gelingt weniger als der Hälfte der Schüler:innen eine richtige Formulierung der Regel zur Bruchdivision, selbst „eine (auch nur annähernd richtige) beispielgebundene Begründung der Divisionsregel schafft … kein Schüler“ (Padberg, 1986, S. 72, i. O. mit Unterstreichung von „kein“). Ein etwaiger Zusammenhang zwischen Richtigkeit der Aufgabenbearbeitungen und erfolgreicher Regelformulierung wird nicht dargestellt. Auch internationale Studien wie beispielweise von Siegler und Pyke (2013), in der in einem quasi-längsschnittlichen Design eine Zunahme der Fertigkeiten zur Durchführung der Bruchdivision von der 6. zur 8. Schulstufe festgestellt wird, betrachten diesen etwaigen Zusammenhang nicht, sondern ermitteln als Prädikatoren die Fertigkeiten in der Durchführung der Division in ℕ sowie das Wissen über Größenordnungen von Brüchen (durch akkurate Platzierung ebendieser am Zahlenstrahl).

Die Fähigkeit zur Verbalisierung einer Regel dient – im Sinne des Denkens als internalisiertes Sprechen (Vygotsky, 2017; Giest & Lompscher, 2006) – einer inneren mentalen Repräsentation zur Durchführung ebendieser Regel. In diesem Sinne kann die Fähigkeit zur tragfähigen Regelformulierung als sprachlich gestützte Grundlage der Durchführung der Bruchdivision betrachtet werden.

In jüngerer Vergangenheit wurden im deutschsprachigen Raum bezogen auf die Bruchdivision vielfach Vorstellungserweiterungen beim Übergang von den natürlichen Zahlen in den neuen Zahlbereich der positiven Bruchzahlen betrachtet (Prediger, 2004; Hefendehl-Hebeker & Prediger, 2006). Bezogen auf die Aktivierung von Grundvorstellungen zur Bruchdivision halten Kleine und Fischer (2005) fest, dass zum vorgegebenen Term $\frac{3}{4}l : \frac{1}{4}l$ lediglich ca. 11 % von 1064 Schüler:innen der 6. Jahrgangsstufe eine passende Sachsituation (jeweils im Sinne des Aufteilens/Messens) angeben können. Hingegen versuchen zahlreiche Schüler:innen vergeblich, eine Verteilsituation zu konstruieren. Fischbein et al. (1985) postulieren auf Basis empirischer Erkenntnisse unter Einsatz von Diagnoseaufgaben mit Dezimalbrüchen, dass Schüler:innen die Aufteilvorstellung der Division i. d. R. erst in der 9. Jahrgangsstufe etablieren, und deuten dies damit, dass das intuitive Modell der Division das Verteilen ist. Schüler:innen der 7. Jahrgangsstufe hingegen befinden sich in einer Übergangsphase zwischen beiden Modellen (ebd.).

Nicht zuletzt aufgrund dieser Befunde gelten das fortgeführte Ausbauen der Grundvorstellungen zur Division und das anschauliche Legitimieren der Bruchdivision insbesondere mithilfe des Messens als die zentralen Forderungen für den Bruchrechenunterricht zur Division (vgl. Padberg & Wartha, 2023).

2.1.2 Befunde zu Kompetenzen und Perspektiven von Lehrkräften

International wird im Bereich der Bruchdivision in den letzten drei Jahrzehnten beginnend mit Ball (1990) auch umfassend über das Wissen, die Vorstellungen und die Diagnosefähigkeit von Lehrkräften (Ma, 1999) und angehenden Lehrkräften zur Bruchdivision geforscht (Li & Kulm, 2008; Son & Crespo, 2009; Lo & Luo, 2012; Jansen & Hohensee 2016; Lee 2017; Adu-Gyamfi et al., 2019, Klemer et al., 2019). Im Gegensatz dazu ist die Perspektive von berufserfahrenen Lehrkräften auf die Bruchdivision sowie deren unterrichtspraktische Expertise zur Herleitung der Regel zur Bruchdivision bisher nicht systematisch in den wissenschaftlichen Erkenntnisprozess einbezogen worden (Donner, i. Dr.). Dies ist insofern erstaunlich, als Lehrkräfte mit längerer Berufserfahrung über tieferes Verständnis der Bruchrechnung verfügen (Copur-Gentcurk, 2021) und ein kohärentes Bild bei der Unterrichtsplanung zur Bruchdivision aufweisen – sowohl bezüglich der als bedeutsam empfundenen Inhalte als auch der didaktischen Strukturierung ebendieser (Li et al., 2009).

2.1.3 Wege zur Herleitung der Regel

Neben der (anschaulich motivierbaren) Etablierung der Bruchdivision stellt die Erschließung einer Regel zur Bruchdivision – üblicherweise handelt es sich dabei um die Kehrwertregel – eine zweite Herausforderung für die Unterrichtsreihe zur Bruchdivision dar. Die Kehrwertregel kann selbst von leistungsstarken Lernenden auch unter Bereitstellung von Hilfestellungen höchstens teilweise erschlossen werden (Yim, 2010; vgl. auch Padberg, 1986), sodass es sich um einen Lerngegenstand zu handeln scheint, der einer gewissen Form von Instruktion bedarf.

Sofern die Regel zur Bruchdivision nicht direkt mitgeteilt wird, kann ihre Herleitung, wie auch die Einführung der Bruchdivision selbst, auf zwei unterschiedliche Arten erfolgen: (1) Man führt sie im Sinne des Messens ein oder (2) man betrachtet die Division als Umkehroperation der Multiplikation (vgl. Padberg, 1978; Copur-Gencturk, 2021; Padberg & Wartha, 2023).

Zuletzt hat Padberg (1982) diesen Teil des Bruchrechenunterrichts umfassend erörtert, indem er die verschiedenen Wege der Herleitung theoretisch analysiert und bewertet. Basierend darauf und ergänzend durch den Blick in die aktuelle Schulbuchliteratur im deutschsprachigen Raum, können, abgesehen von rein syntaktischen Verfahren (z. B. „Doppelbruchmethode“), die folgenden Zugänge unterschieden werden (vgl. Büchter & Donner, 2024).

Division als Messen: (1a) Erweitern und Rückführen auf die Division natürlicher Zahlen, (1b) Konstanz des Quotienten bei Multiplikation von Dividend und Divisor mit der gleichen (natürlichen) Zahl, also gleichsinniges Verändern, (1c) Konstanz des Dividenden bei gegensinnigem Verändern von Divisor und Quotient.

Division als Umkehroperation der Multiplikation: (2a) Zerlegen in Teilaufgaben unter expliziter Nutzung der Eins als neutralem Element der Multiplikation, (2b) Schrittweises Vorgehen vom Spezialfall zum allgemeinen Fall, (2c) Anwenden des Gegenoperators unter Betonung des Rückgängigmachens der Wirkung einer Multiplikation.

Unter den etablierten Schulbuchreihen konnten wir in aktuellen Auflagen Werke identifizieren, die typische Umsetzungen der Zugänge 1a, 1c sowie 2c beinhalten. In früheren Auflagen spielte zusätzlich insbesondere der Zugang 2a eine wichtige Rolle. Diese vier Zugänge werden daher nachfolgend kurz beschrieben. Für Details zu 1b und 2b verweisen wir auf Padberg und Wartha (2023, S. 134 ff).

Division als Messen

Als Grundlage der beiden Messzugänge 1a und 1c dienen typische Messsituationen wie das Aufteilen einer bekannten Gesamtmenge an Flüssigkeit auf Gefäße einer bestimmten Größe und der Frage nach der Anzahl der Gefäße, die gefüllt werden können, weshalb der Quotient i. d. R. ganzzahlig bleibt.

Die entscheidende Idee beim Zugang „Erweitern und Rückführen auf die Division natürlicher Zahlen“ (1a) ist, dass bei einer Division $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}$ mittels Erweiterns dieselbe Bezugseinheit bd für beide Brüche herangezogen werden kann. So kann z. B. der Term 6 l : ¾ l – unter Bezugnahme auf die Sichtweise des Bruchs als Quasikardinalzahl (Malle, 2004; Padberg & Wartha, 2023) – gedeutet werden als „24 Viertel Liter dividiert durch 3 Viertel Liter“ und damit vereinfacht werden zu 24 : 3 = 8. Auf diese Weise kann jede Bruchdivision mit einer passenden Einheit (bd z. B. als „Viertel Liter“, „Achtel“ etc.) als Division in den natürlichen Zahlen gedeutet werden – und durch die Umformung $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}:\frac{cb}{bd}=ad:bc$ und Berechnung von $ad:bc$ bei ganzzahligem Quotienten auch als Division ohne Rest im Bereich der natürlichen Zahlen durchgeführt werden. Ist der Quotient nicht ganzzahlig, bleibt $\frac{ad}{bc}$ als Ergebnis stehen.

Die dabei verwendete Umformung $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}:\frac{cb}{bd}=ad:bc=\frac{ad}{bc}$ wird als *common denominator algorithm* bezeichnet und gilt grundsätzlich als Alternative zur Anwendung der Kehrwertregel (vgl. Harmon, 1971; Cramer et al., 2010). Grundsätzlich kann die Kehrwertregel von diesem Resultat aus noch wie folgt syntaktisch hergeleitet werden:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}:\frac{cb}{bd}=ad:bc=\frac{ad}{bc}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

Der Zugang „Konstanz des Dividenden bei gegensinnigem Verändern von Divisor und Quotient“ (1c) geht auf Schweizer (1955) zurück und folgt dem Grundsatz:

> Der Lehrer sollte wissen, und er sollte es den Schülern nicht verheimlichen, daß es im Bruchrechnen Stellen gibt, wo eine Rechenoperation nicht von vornherein einen Sinn hat, sondern wo ihr erst ein Sinn beigelegt werden muß, und zwar unter Beibehaltung einer Regel oder einer Gesetzmäßigkeit, die im Bereich der natürlichen Zahlen gilt. (ebd., S. 52)

Zum Beilegen des Sinns der Division durch einen Bruch werden ausgehend von einer Messsituation im Bereich der natürlichen Zahlen mit ganzzahligem Quotienten (wie z. B. 6 l werden auf 2 l-Gefäße aufgeteilt) schrittweise Divisor und Quotient gegensinnig verändert. Im Kontext kann auf diese Weise der Übergang von ganzzahligem Divisor (z. B. Aufteilen auf 1 l-Gefäße) hin zu einem Bruch als Divisor (z. B. ½ l-Gefäße) beschritten und die Division somit über die natürlichen Zahlen hinaus motiviert werden. Der Quotient entspricht dabei der Anzahl an Gefäßen der jeweiligen Größe. Um die Kehrwertregel zu erschließen, wird die Ausgangsmenge 6 l schrittweise auf Gefäße mit Fassungsvermögen ¾ l aufgeteilt:

$$6l:2l=3;\ \ 6l:1l=6;$$

$$6l:\frac{1}{2}l=12,;\ 6l:\frac{1}{4}l=24;$$

$$6l:\frac{3}{4}l=(6l:\frac{1}{4}l):3=24:3=8.$$

Die indirekte Proportionalität von Fassungsvermögen der Gefäße zu Anzahl an Gefäßen wird als inhaltliches Argument zur Begründung der Kehrwertregel genutzt: Da das dreifache Fassungsvermögen (3/4 statt 1/4) bedeutet, dass nur 1/3 an Gefäßen benötigt wird, kann die Rechnung 6 l : 3/4 l auch mithilfe des Terms $6\cdot 4\cdot\frac{1}{3}=\ 6\cdot\frac{4}{3}$ berechnet werden, wobei diese Überlegung im Kontext an Grenzen stößt:

> Solche Aufgaben des Enthaltenseins sind nur sinnvoll, wenn ein ganzzahliges Ergebnis entsteht, die Regel: ‚Durch einen Bruch wird dividiert, indem man mit dem Kehrwert multipliziert‘ ergibt sich hiebei also zunächst nur für solche Fälle. Man läßt sie nun aber auch für alle Fälle gelten, auch für die Division zweier Brüche. (Schweizer 1955, S. 63)

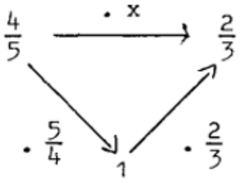
Die Allgemeingültigkeit der Regel zur Bruchdivision wird bei diesem Weg demnach nur mitgeteilt.

Division als Umkehroperation der Multiplikation

Die mathematische Grundlage der Wege 2a und 2c bildet das Operieren in divisiblen Größenbereichen (Kirsch, 1970) und insbesondere das Operatorkonzept mit dem Versuch, die Bruchrechnung insgesamt unterrichtlich einheitlich zu inszenieren (vgl. Griesel, 1981a, b; Postel, 1981).

Ein wesentliches Element dieser Sichtweise liegt dabei in der Vorstellung eines Bruchs $\frac{a}{b}$ als Operator, welcher als multiplikative Handlungsanweisung verstanden werden kann: „Teile einen Repräsentanten für eine Größe in *b* gleich große Teile und nimm *a* Teile davon.“ Durch die Verwendung von Bruchoperatoren wird gegenüber der Vorstellung des Bruchs als Anteil eine Sicht auf Bruchzahlen und Zusammenhänge betont, die die multiplikative Wirkung von Brüchen auf gegebene Zahlen in den Fokus der Betrachtung stellt (Postel 1981, Griesel, 1981b).

Der Weg 2a „Zerlegen in Teilaufgaben unter expliziter Nutzung der Eins als neutralem Element der Multiplikation“ startet mit der Frage: „Mit welcher Zahl muss ich $\frac{c}{d}$ multiplizieren, um $\frac{a}{b}$ zu erhalten?“ Die Fragestellung kann wahlweise in Form eines Operatorendiagramms oder in Gleichungsform bearbeitet werden (siehe Abb. 1). Die Herleitung erfolgt anhand eines generischen Beispiels. Als entscheidende Idee tritt dabei die Zahl Eins als neutrales Element der Multiplikation in Erscheinung.



$$\text{also:}\quad x = \frac{2}{3} : \frac{4}{5} \left(= \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{3} \right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4}$$

Abb. 1: Weg 2a (Quelle: Padberg, 1982, S. 78)

Der Grundgedanke von Weg 2c „Anwenden des Gegenoperators unter Betonung des Rückgängigmachens der Wirkung einer Multiplikation“ ist die Operationseigenschaft, dass die Division die Wirkung der Multiplikation rückgängig macht. Dementsprechend definiert man „$\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$“ als diejenige Zahl, die mit $\frac{c}{d}$ multipliziert die Zahl $\frac{a}{b}$ ergibt. Weil die Multiplikation mit dem Kehrbruch dieselbe Wirkung wie die Division durch den ursprünglichen Bruch erzielt, ist die Kehrwertregel begründet. Mithilfe von Operatorendiagrammen kann diese Idee wiederum an einem generischen Beispiel veranschaulicht werden: x ist einerseits definiert als $\frac{2}{3}:\frac{4}{5}$, andererseits ist das gleichwertig zum Term $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4}$ (Abb. 2, Pfeil unten).

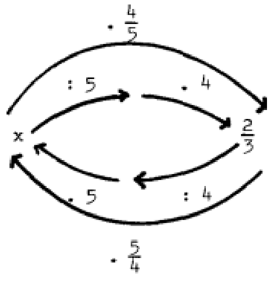


Abb. 2: Weg 2c (Quelle: Padberg, 1982, S. 83)

Durch diesen Herleitungsweg wird die Inverseneigenschaft der Operationen Multiplikation und Division als Rückgängigmachen einer Wirkung durch Anwendung des Gegenoperators besonders gut sichtbar (vgl. Griesel, 1981b; Salle & Clüver, 2021).

2.1.4 Bewertung möglicher Wege zur Herleitung der Regel

Die theoretischen Analysen nach Padberg (1982) favorisieren deutlich Methoden, welche die Division als Umkehrung der Multiplikation betonen:

> Die Rückführung der Division auf die Multiplikation - allgemeiner die Rückführung einer Umkehroperation auf die Ausgangsoperation - ist eine zentrale Idee, die an verschiedenen Stellen des Mathematikunterrichts gebraucht wird und die sich wegen dieser häufigeren Benutzung den Schülern besser einprägt (als nur selten oder gar einmalig benutzte Ideen) und die daher gut rückerinnert werden kann. Gleichzeitig ist diese Idee im Sinne einer Überprüfung des gefundenen Ergebnisses auf seine Richtigkeit - sofern Unsicherheit bezüglich der Divisionsregel besteht - sehr brauchbar. (ebd., S. 79)

Ein fundamentaler Kritikpunkt an den beiden Messzugängen ist, dass die Idee des Messens keine durchgängige Leitidee des Herleitungsweges darstellt und auch keine durchgängige Möglichkeit zur Rückerinnerung der Regel bietet (Padberg 1982), womit die Regel nicht ohne konzeptuelle Verwerfung hergeleitet werden kann. So greift beispielsweise die Messmethode wie in Weg 1a dargestellt auf mehrere Ideen parallel zurück: Division in den natürlichen Zahlen, Bruch als Quasikardinalzahl, Grundvorstellung des Messens, Erweitern von Brüchen in Verbindung mit der Bedeutung der Nenner als gemeinsame Maßeinheit (Bidwell, 1971). Hingegen sind laut Padberg (1982) nur geringe Kenntnisse von Schüler:innen bezüglich der Deutung der Bruchzahlen als Operatoren nötig, um Herleitungswege, die die Idee der Umkehrung inszenieren, beschreiten zu können.

Diese theoretischen Erkenntnisse stehen im Einklang mit empirischen Befunden von Bidwell (1968) und Capps (1962). Bidwell (1968) stellt in einer vergleichenden Untersuchung von Herleitungen der Regel zur Bruchdivision fest, dass die Betonung der Umkehrung empirisch deutlich besser abschneidet als der Zugang über das Messen. Dies zeigt sich in der signifikant besseren Beherrschung der Ausführung der Division von Bruchzahlen, einem besseren Verständnis von Teillernzielen und der Herleitung der Regel sowie in der Rückwirkung auf die Leistung zur Multiplikation von Brüchen. Letzteres ist eine Bestätigung des Befundes von Capps (1962), der vor dem *common denominator algorithm* zur Herleitung der Bruchdivision warnt: Seine Untersuchungen zeigen, dass dies zur Übergeneralisierung des Gleichnamigmachens – neben der Addition, der Subtraktion und Division – auch bei der Multiplikation von Brüchen führt und eine Häufung des bekannten Fehlermusters der Multiplikation (nur) der Zähler zur Folge hat, z. B. $\frac{1}{10} \cdot \frac{4}{45} = \frac{9}{90} \cdot \frac{8}{90} = \frac{72}{90}$.

Zusammenfassend kann man festhalten, dass der weitere Ausbau und die Festigung der Grundvorstellungen, das anschauliche Legitimieren der Bruchdivision insbesondere mithilfe des Aufteilens (Messens) sowie das Thematisieren der erforderlichen Vorstellungsumbrüche zentrale Forderungen der Bruchrechenforschung darstellen (vgl. Padberg & Wartha, 2023). Geht es jedoch konkret um die Herleitung der Regel zur Bruchdivision, so scheint der Zugang über die Umkehroperation aus theoretischer und empirischer Sicht überlegen zu sein, weil sie für Schüler:innen gedanklich nachvollziehbar und ohne Verwerfung in einem kohärenten Unterrichtsgang erreicht werden kann.

In aktuellen Lehrbüchern zur Bruchrechnung wie Padberg und Wartha (2023) findet sich bemerkenswerter Weise im Gegensatz zu früheren Auflagen (Padberg, 1978) keine derartige Bewertung verschiedener Wege der Herleitung, ohne dass die dargestellten Ergebnisse (z. B. Padberg, 1982) seither im wissenschaftlichen Diskurs in Frage gestellt worden wären oder aktuellere Forschungsergebnisse zur Frage der Herleitung der Regel vorliegen würden.

2.2 Bruchdivision in Schulbüchern

Trotz der zuvor geschilderten, einhelligen empirischen Befunde sowie theoretischen Empfehlungen zur Herleitung der Regel zur Bruchdivision finden sich in der historischen Betrachtung Spannungsverhältnisse zwischen diesen Diskursständen und der Entwicklung ausgewählter Schulbuchreihen (Büchter & Donner, 2024). Auch in der aktuellen deutschsprachigen Schulbuchliteratur gibt es eine Vielzahl von Inszenierungen.^{4} Exemplarisch werden drei Werke betrachtet, welche die Wege 1a, 1c bzw. 2c in typischer Form umsetzen:

(1a) *Erweitern und Rückführen auf die Division natürlicher Zahlen*: „Das ist Mathematik“ (öbv Verlag). 6. Schuljahr, Erscheinungsjahr 2017, ISBN: 978-3-209-09160-4 (Anhang A).

(1c) *Konstanz des Dividenden bei gegensinnigem Verändern von Divisor und Quotient*: „Lambacher Schweizer“ (Klett Verlag, Ausgabe Nordrhein-Westfalen). 6. Schuljahr, Erscheinungsjahr 2019, ISBN: 978-3-12-733861-4 (Anhang B).

(2c) *Anwenden des Gegenoperators unter Betonung des Rückgängigmachens der Wirkung einer Multiplikation*: „Mathematik heute“ (Westermann Gruppe, Ausgabe Hessen). 6. Schuljahr, Erscheinungsjahr 2020, ISBN: 978-3-14-150410-1 (Anhang C)

Wie in Donner (2024) analysiert unterscheiden sich die Inszenierungen der Herleitungswege der drei Schulbücher u. a. in den folgenden wesentlichen Merkmalen (in Klammern werden jeweils die betreffenden Herleitungswege der Schulbücher genannt):

- *In der Bezugnahme auf die Grundvorstellungen zur Division*: Wird die Division als Messen gedeutet (1a, 1c) oder vorrangig als Umkehrung der Multiplikation (2c)?
- *Im Grad der Allgemeinheit*: Wird ein allgemeiner Nachweis geführt (1a), wird ein Spezialfall betrachtet (1c) oder wird ein generisches Beispiel zur Begründung herangezogen (2c)?
- *In der Art der benötigten Deutungen der Bruchzahl* (Malle, 2004): Benötigt wird ein flexibler Umgang mit je einer Teilmenge der folgenden Deutungen: Bruch als Resultat einer Division (1a, 2c), Bruch als Quasikardinalzahl (1a), Bruch als Vergleichsoperator (in Pfeildarstellung) (2c), Bruch als relativer Anteil (1a, 1c).
- *In der Vertrautheit mit weiteren, spezifischen Grundlagen der Bruchrechnung und Operationseigenschaften der Division*: „Anteil vom Anteil“-Deutung der Multiplikation (Padberg & Wartha, 2023) (1a, 2c), Erweitern von Brüchen (1a), antiproportionaler Zusammenhang zwischen Divisor und Quotient (1c), Permanenzidee für Operationen im neuen Zahlbereich (1c).
- *Im Umfang*: Der Weg über die Umkehrung (2c) ist sehr kurz und durch eine einzige Pfeildarstellung erfasst, der Weg über das Messen (1a, 1c) hingegen gekennzeichnet durch mehrschrittige Argumente (vgl. Padberg, 1982).

3. Forschungsfragen

Ausgehend von der eingangs beschriebenen Praxissituation und mit dem Ziel, eine konstruktive Wendung von Forschungsresultaten für die Unterrichtspraxis zu ermöglichen, ergeben sich basierend auf der Darstellung des Forschungsstandes und der Schulbuchliteratur die folgenden Desiderata bezüglich der Erarbeitung der Bruchdivision.

Bisherige empirische Befunde zu Schüler:innen beziehen weder den Zusammenhang von Vorstellungen und operativen Fähigkeiten direkt im Anschluss an die Herleitung einer Regel zur Bruchdivision im Unterricht mit ein, noch Änderungen bezüglich der

Vorstellungen sowie der operativen Fähigkeiten zur Bruchdivision im Laufe der Sekundarstufen I und II.

Aufgrund der Widersprüche zwischen Empfehlungen der Forschungsliteratur und Inszenierungen der Herleitung der Regel zur Bruchdivision in Schulbüchern kann die Sichtweise der Lehrkräfte einen wichtigen Baustein zur Klärung darstellen, der in der bisherigen Forschung kaum Beachtung findet.

FF-S1: Welche Vorstellungen zur Division aktivieren Schüler:innen spontan? (vorher in $\mathbb{N}$/nachher in $\mathbb{Q}^+$)

Erläuterung: Im Bereich der empirischen Erforschung von Vorstellungen zur Division bei Schüler:innen gibt es zahlreiche, zum Teil überraschende, Befunde. Für viele der in Schulbüchern beschrittenen Wege zur Herleitung der Regel zur Bruchdivision ist die Vorstellung des Aufteilens zentral. Im Sinne einer spiralcurricularen Betrachtung der Regel interessieren uns deshalb sowohl die Lernausgangslagen betreffend der Vorstellungen zur Division im Bereich der natürlichen Zahlen, welche Schüler:innen vor der Erarbeitung der Bruchdivision im Mathematikunterricht spontan aktivieren, als auch die Frage nach den Vorstellungen zur Bruchdivision nach der Behandlung der Regel im Mathematikunterricht (jeweils bei vorgegebenen Divisionen).

FF-S2: Über welche Fähigkeiten zur Durchführung der Bruchdivision verfügen die Schüler:innen?

Erläuterung: Empirische Erhebungen (wie Padberg, 1986) zeigen, dass bestimmte Spezialfälle der Bruchdivision (wie „natürliche Zahl durch Bruch“ oder „Bruch durch natürliche Zahl“) im Vergleich zum Fall „Bruch durch Bruch“ der Bruchdivision (ungleichnamig bzw. gleichnamig und spezielle Zähler) geringere Lösungsquoten aufweisen. Auch zeigte sich, dass nur die Hälfte der Schüler:innen der Realschule die Regel zur Bruchdivision richtig formulieren kann. In Padberg (1986) wurde nicht erhoben, inwieweit ein Zusammenhang zwischen der Angemessenheit der Verbalisierung der Regel (als mentale Stütze) und der Lösungshäufigkeit bei den Berechnungsaufgaben besteht. Wir interessieren uns umfassend, über welche operativen Fähigkeiten die Schüler:innen nach der Herleitung der Regel im Mathematikunterricht verfügen. Insbesondere stellt sich die Frage, wie erfolgreich die Schüler:innen die Operationen ausführen, welche Strategien sie dabei nutzen (Kehrwertregel oder *common denominator algorithm*) und auch, welche Verbalisierungen einer Regel zur Bruchdivision Schüler:innen angeben.

FF-S3: Inwieweit hängen Vorstellungen und operative Fähigkeiten zusammen?

Erläuterung: Spezialfälle der Bruchdivision wie „Bruch durch Bruch“ (gleichnamig) oder „Bruch durch natürliche Zahl“ lassen sich neben der Anwendung eines Lösungsalgorithmus auch sinnvoll mit anschaulichen Überlegungen im Sinne der Aufteilvorstellung bzw. der Verteilvorstellung lösen. Ungeklärt ist jedoch, wie in diesen Fällen, aber auch im allgemeinen Fall der Bruchdivision, die Fähigkeiten zur Durchführung der Bruchdivision und die Aktivierung der Vorstellungen zusammenhängen. Hierzu sind uns keine Befunde bekannt.

FF-S4: Inwieweit ändern sich Vorstellungen und Fähigkeiten im Laufe der Sekundarstufe I und II.

Erläuterung: Nach Fischbein et al. (1985) konsolidiert sich das Modell der Division als Aufteilen, zumindest für Dezimalbrüche, erst zu einem späteren Zeitpunkt, ab Jahrgangsstufe 9, also weit nach dem Bruchrechenunterricht. Das scheint insofern überraschend, als viele Zugänge zur Erschließung der Bruchdivision diese Grundvorstellung adressieren, hingegen die Anwendung der Bruchdivision in höheren Jahrgangsstufen als Werkzeug in innermathematischen Themenfeldern auftritt (algebraische Termumformung, bedingte Wahrscheinlichkeit). Eine Fundierung der Aufteilvorstellung bei der Bruchdivision erfolgt in höheren Jahrgangsstufen daher allenfalls implizit. Deshalb interessiert uns, inwiefern sich die Vorstellungen und Fähigkeiten im Laufe der Sekundarstufe I und II ändern.

FF-L1: Welche subjektiven Konzepte legen Lehrkräfte bei der Erarbeitung der Regel zur Bruchdivision zugrunde?

Erläuterung: Von besonderem Interesse sind subjektive Konzepte erfahrener Lehrkräfte, da empirische Ergebnisse vorliegen, dass diese eine kohärente Unterrichtsplanung zur Bruchdivision aufweisen (Li et al., 2009). Hingegen ist über Konzepte von Lehrkräften spezifisch zur Erarbeitung einer Regel zur Bruchdivision im Unterricht nichts bekannt. Deren Konzepte beruhen auf praxisorientieren Erfahrungen, Reflexionen zum eigenen Unterricht und dem Unterrichtsgegenstand sowie der Berücksichtigung der Rahmenbedingungen des alltäglichen Unterrichts. Für diese Perspektiven auf den Gegenstand sind Lehrkräfte die Expert:innen (Donner, i. Dr.).

FF-L2: Wie schätzen Lehrkräfte unterschiedliche in Schulbüchern realisierte Lehrgänge ein?

Erläuterung: In der Einleitung wurde eine Praxissituation geschildert, in der eine ad-hoc Einschätzung durch eine Lehrkraft zu einem ihr unbekannten Zugang zur Herleitung einer Regel zur Bruchdivision in einer produktiven Lernsequenz mündet. Empirische Erhebungen legen zudem nahe, dass von erfahrenen Lehrkräften ein vertieftes Verständnis zur Bruchrechnung erwartet werden kann (Copur-Gentcurk, 2021). Deshalb erscheint deren Perspektive zu Lehrgängen in Schulbüchern, welche sich von der eignen aktuellen Vorgehensweise unterscheiden könnten, lohnend, um die genannten Widersprüchen zwischen Forschungsliteratur und Inszenierungen in Schulbüchern mit dieser zusätzlichen, spezifischen Expertise zu verstehen.

4. Design der empirischen Untersuchung

Von den Forschungsfragen ausgehend werden im Folgenden für die Schüler:innen- und die Lehrkräfte-Erhebung jeweils die Instrumente, die Stichproben sowie die Datenauswertung beschrieben.

4.1 Schüler:innen-Erhebungen

Die Forschungsfragen FF-S1 bis S4 fokussieren auf Vorstellungen zur Division (von natürlichen Zahlen und von Brüchen), auf Fähigkeiten zur Durchführung der Bruchdivision, auf deren möglichen Zusammenhang sowie auf etwaige Änderungen in diesen Bereichen über die Sekundarstufe hinweg. Diese Fokussierung schlägt sich entsprechend im Erhebungsinstrument, der Stichprobe mit verschiedenen Populationen und der Art der Datenauswertung nieder.

4.1.1 Instrument

Jeder Erhebungsbogen umfasste eine Auswahl aus dem folgenden Aufgabenpool.

1) Erfinde zwei Sachsituationen (Textaufgaben) zur Rechnung $28{:}\,4 = 7$

   Erläuterung: Mit der Anforderung, die ausgeführte Division in zwei Sachsituationen zu realisieren, sollte erfasst werden, welche Grundvorstellungen zur Division natürlicher Zahlen die Schüler:innen spontan (ohne direkt vorangehende unterrichtliche Vorbereitung) aktivieren. Das Einfordern von zwei Sachsituationen ermöglicht grundsätzlich, dass z. B. eine im Sinne des Verteilens und eine im Sinne des Aufteilens angegeben wird.

2) Wie lautet das Ergebnis?

   a) $\frac{3}{4}{:}\,5 =$, b) $\frac{6}{7}{:}\,\frac{2}{7} =$, c) $\frac{7}{12}{:}\,\frac{5}{6} =$, d) $\frac{2}{5}{:}\,\frac{3}{7} =$

   Erläuterung: Die Anforderungen der Teilaufgaben orientieren sich von bestimmten Spezialfällen der Bruchdivision hin zum allgemeinen Fall. Zu den berücksichtigten Spezialfällen liegen in der Forschungsliteratur sowohl Befunde zu Lösungshäufigkeiten als auch Erklärungen für die spezifischen Herausforderungen vor.

3) Erkläre, wie man einen Bruch durch einen Bruch dividiert (teilt).

   Erläuterung: Hier sollte eine individuelle verbale Repräsentation der Regel zur Bruchdivision (als mentale Stütze für deren Ausführung) sichtbar gemacht werden. Statt einer reinen Benennung der Regel wurde „Erkläre, wie …“ eingefordert, wohlwissend, dass die Schüler:innen darauf nicht mit z. B. einer Herleitung antworten. Es war aber intendiert, dass über die kürzeste Form der Formulierung hinaus auch Aspekte, die den Schüler:innen wichtig sind (z. B. wie ein Kehrwert gebildet wird, ob das Vorgehen von den konkreten Zahlen abhängt, …), genannt werden.

4) Erfinde jeweils eine Sachsituation (Textaufgabe) zu den folgenden Aufgaben:

   a) $\frac{5}{8}{:}\,3 =$, b) $\frac{8}{9}{:}\,\frac{2}{9} =$, c) $\frac{1}{4}{:}\,\frac{2}{3} =$

   Erläuterung: Während bei Realisierungen zu a) gut im Sinne der Verteilvorstellung geantwortet werden kann, liegt bei b) aufgrund der gleichen Nenner eine Messsituation mit quasikardinaler Betrachtung nahe. Beim allgemeinen Fall in c) kann von vornherein von einer Überforderung der Schüler:innen ausgegangen werden, da verallgemeinerte Vorstellungen aktiviert werden müssten (vgl. Jansen & Hohensee, 2016; Adu-Gyamfi et al., 2019). Es kann aber beobachtbar bleiben, ob auch hier Bearbeitungsversuche vorrangig im Sinne des Verteilens unternommen werden. Anders als bei Aufgabe 1 wird der Quotient nicht angegeben, weil hier aus dem angegebenen Quotienten ggf. zentrale Rückschlüsse für die Realisierung geschlossen werden können. Den Schüler:innen wurden jeweils nur zwei der drei Teilaufgaben vorgelegt, da von einer hohen Quote überforderter Schüler:innen ausgegangen werden muss, sodass bei drei Teilaufgaben bei vielen Schüler:innen ein Abbruch der Bearbeitung spätestens nach der zweiten Aufgabe zu erwarten wäre.

Die Konfektionierung der unterschiedlichen Erhebungsbögen mit einer Auswahl von Aufgaben aus diesem Pool wird im folgenden Abschnitt zusammen mit der realisierten Teilstichprobe pro Aufgabe beschrieben. Jeder Erhebungsbogen konnte in weniger als 15 Minuten bearbeitet werden.

4.1.2 Stichprobe

In den Forschungsfragen werden unterschiedliche Zeitpunkte der Lernbiografie adressiert. Daher wurden den folgenden Populationen jeweils passend konfektionierte Erhebungsbögen vorgelegt:

A) 5./6. Schulstufe (vor Einführung der Bruchdivision): Aufgabe 1

B) 6./7. Schulstufe (nach der Einführung der Bruchdivision): Aufgabe 2, Aufgabe 3 und zwei von drei Teilaufgaben von Aufgabe 4

C) Oberstufe: Aufgabe 2, Aufgabe 3 und entweder Aufgabe 1 vorangestellt oder zwei von drei Teilaufgaben von Aufgabe 4 nachfolgend

An der Studie nahmen insgesamt 1006 Schüler:innen aus 47 Klassen aus fünf Gymnasien in NRW teil. Die Schulform wurde hierbei konstant gehalten, um nicht zusätzlich eine institutionell bedingte Variation der Daten zu erzeugen. Es handelt sich um eine Gelegenheitsstichprobe, wobei die teilnehmenden Schulen keine für die Studie relevanten Besonderheiten (wie „Eliteschule“, „Brennpunktschule“, besondere didaktische Konzepte o. ä.) aufweisen. 300 Schüler:innen befanden sich vor der Einführung der Bruchdivision, 342 Schüler:innen nach Einführung der Bruchdivision, sowie 364 Schüler:innen in der Oberstufe (220 Grundkurs, 144 Leistungskurs).

Teilpopulation A bearbeitete ausschließlich die erste Aufgabe, Teilpopulation B Aufgaben 2, 3 und 4, und Teilpopulation C entweder die Aufgaben 1, 2 und 3 oder 2, 3 und 4. Von Aufgabe 4 wurde jede:r Schüler:in genau zwei der drei Teilaufgaben gestellt. Bezogen auf die einzelnen (Teil)aufgaben umfasst die Stichprobe 505 Bearbeitungen von Aufgabe 1, je 599 Bearbeitungen von den Aufgaben 2 und 3 sowie 328, 326 bzw. 348 Bearbeitungen der Teilaufgaben 4a, 4b bzw. 4c.

4.1.3 Datenauswertung

Die Variablen des Kodiermanuals werden im Folgenden benannt und kurz erläutert, sofern sie nicht weitestgehend selbsterklärend sind.

Aufgabe 1 (Sachsituation in $\mathbb{N}$): Lösungsanzahl, Angemessenheit, Grundvorstellung

Bei der Kodierung geht es für jeden Lösungsvorschlag (max. zwei wurden berücksichtigt) um die *Angemessenheit* der Sachsituation im Sinne der Aktivierung von *Grundvorstellungen* (Verteilen oder Aufteilen/Messen). Für angemessene Situationen muss eine tragfähige Divisionsvorstellung erkennbar sein, bei der die Rollen von Dividend, Divisor und Quotient stimmig berücksichtigt werden. Etwaig auftretende „Fehler“ anderer Art, z. B. hinsichtlich der involvierten Anzahlen, beeinträchtigen die Tragfähigkeit nicht (zwangsläufig).

Aufgabe 2 (Berechnungsaufgaben in $\mathbb{Q}^+$): Richtigkeit, Strategie

Bei *Richtigkeit* wird durchgehend dreistufig unterschieden, ob eine vollständige richtige Rechnung, ein unvollständiger tragfähiger Ansatz oder eine falsche Lösung (bzw. keine Bearbeitung) vorliegt. Als *Strategie* wurde ein tragfähiges Lösungsschema für den jeweiligen Aufgabentyp unabhängig von konkreten Zahlen verstanden. Dabei liegt das Hauptaugenmerk auf dem Erkennen und Unterscheiden der beiden allgemein anwendbaren Lösungsstrategien Kehrwertregel und *common denominator algorithm*. Deshalb wird bei den Teilaufgaben b bis d trichotom kodiert (die dritte Kategorie umfasst sonstige systematische Herangehensweisen, falsche Imitationen einer Regel sowie keine (auswertbare) Bearbeitung). Bei Teilaufgabe a kommt als zusätzliche mögliche Strategie die direkte Division durch 5 hinzu.

Aufgabe 3 (Regelformulierung): Angemessenheit, Bearbeitungsstrategie

Bei der *Angemessenheit* der Regelformulierung geht es um den Bezug der Erklärung auf die Division eines Bruchs durch einen anderen Bruch und deren Tauglichkeit als Handlungsanweisung (und damit insbesondere nicht primär um sprachliche Qualität). Dabei wird stärker auf die kognitive als auf die kommunikative Funktion der Sprache geachtet. In Grenzfällen wird also überlegt, ob es starke Indizien dafür gibt, dass tragfähig gedacht wurde. Das Kodiermanual inklusive Ankerbeispielen ist exemplarisch für diese Kategorie in Tabelle 1 dargestellt.

Die Bearbeitungsstrategie wird wiederum trichotom kodiert: Kehrwertregel, *common denominator algorithm* und übrige Bearbeitungen (z. B. keine Strategie erkennbar, keine (auswertbare) Bearbeitung).

Aufgabe 4 (Sachsituation in $\mathbb{Q}^+$): Angemessenheit

Bei dieser Teilaufgabe besteht das primäre Interesse darin, wie gut die Realisierung (und die damit einhergehende Notwendigkeit zur Aktivierung von Grundvorstellungen zur Division) gelingt, auch im Vergleich zu den entsprechenden Teilaufgaben von Aufgabe 2. Angemessenheit wird dabei im selben Sinne wie bei Aufgabe 1 verstanden und kodiert.

	Beschreibung	***Beispiele***
0	Folgt man dieser „Regel“, führt das zu einem Fehler ODER es wird gar keine handlungsanweisende Regel formuliert	*„Mit dem Kehrwert“* *„Indem man den Nenner durch den anderen Nenner teilt“* *„In Dezimalzahl umwandeln und dividieren“ (Anm: Dies funktioniert nur bei Brüchen mit endlichen Dezimalzahldarstellungen.)*
1	Es fehlt bspw. ein Hinweis auf den Divisor oder die Operation bzw. wird der allgemeine Fall nicht behandelt, aber die Anweisung ist potenziell tragfähig	*„Mit dem Kehrwert multiplizieren“* *„Zähler:Zähler und Nenner:Nenner“ (Anm: Was ist in Fällen, wo diese Divisionen nicht direkt in ℕ durchführbar sind?)*[5]
2	(weitestgehend) als Handlungsanweisung nutzbar, trotz etwaiger sprachlicher Ungenauigkeiten, z. B. auch unter Verwendung eines generischen Beispiels	*„Man muss den zweiten Bruch umdrehen, z. B. 7/3 : 14/3 = 7/3 * 3/14 =1/2“. (Anm: Generisches Beispiel verdeutlicht das verbal beschriebene Vorgehen hinreichend.)* *„Man muss beim zweiten Bruch Zähler und Nenner vertauschen und rechnet dann die beiden Brüche mal.“* *„Man muss beim zweiten Bruch die zwei Zahlen vertauschen und rechnet dann die beiden Brüche mal.“* *„Man kann den Kehrwert einsetzen und so wird aus z. B. 7/3:3/7 nämlich 7/3 * 7/3. Man muss also beim zweiten Bruch vertauschen oder umkehren.“*

Tab. 1: Auszug aus Kodiermanual zu „Angemessenheit der Regelformulierung“

Zuverlässigkeit der Kodierung

Das Kodiermanual wurde von beiden Autoren dieses Beitrags und einer wissenschaftlichen Hilfskraft im Diskurs entwickelt und ausgeschärft. Mit diesem Manual wurde zunächst das Gros der Fälle (693 von 1006 Bearbeitungen) durch die wissenschaftliche Hilfskraft und eine studentische Hilfskraft (nach Einarbeitung in das Manual) unabhängig voneinander kodiert. Die Interkoderreliabilität wurde mit Cohens Kappa bestimmt (Cohen, 1960) und lag bei den 18 hier betrachteten Variablen zwischen 0,56 und 0,97. Nach Altman (1991) ist die Übereinstimmung bei Werten ab 0,4 mindestens moderat, bei Werten ab 0,6 mindestens gut und ab 0,8 sehr gut. Für elf Variablen war die Überstimmung sehr gut, für sechs Variablen gut und für eine Variable (mit 0,56 im höheren Bereich) moderat. Insgesamt handelt es sich also um eine hinreichend zuverlässige Kodierung.

Aufgetretene Abweichungen wurden anschließend durch die beiden Autoren dieses Beitrags einzeln betrachtet und konsensuell entschieden. Die verbliebenen 313 Fälle wurden aufgrund der zufriedenstellenden Interkoderreliabilität in der ersten Runde nur von der wissenschaftlichen Hilfskraft kodiert.

4.2 Lehrkräfte-Erhebung

Aufgrund der Zielsetzung der Erhebung wurden die Lehrkräfte als Expert:innen für Unterricht betrachtet und befragt. Die Anlage der Erhebung unterscheidet sich also z. B. von der Erfassung der professionellen Kompetenz von Lehrkräften vor dem Hintergrund vorformulierter Kompetenzmodelle und ggf. entsprechender normativer Rahmungen.

4.2.1 Instrument

Lehrkräfte, die aktuell oder in der Vergangenheit eine 6. Jahrgangsstufe in Mathematik unterrichten bzw. unterrichtet haben, nahmen an einem ca. 45-minütigen strukturierten, leitfadengestützten Interview (Anhang D), das aufgezeichnet wurde, teil. Dabei wurden die Lehrkräfte neben dem allgemeinen Hintergrund (wie z. B. der Unterrichtserfahrung) sowohl zu ihrem eigenen Vorgehen bei der Erarbeitung einer Regel zur Bruchdivision befragt als auch nach Ihrer Einschätzung von Schulbuchauszügen, die jeweils einen der Wege 1a, 1c bzw. 2c in typischer Form umsetzen (Anhang A bis C). Durch die Wahl der Auszüge ist eine Vielfalt aktueller Inszenierungen dargestellt. Es wird sichergestellt, dass auch bei Übereinstimmung des subjektiven Konzepts mit einer dieser Reinformen, bei erkennbaren Abweichungen oder bei präferierten „Mischformen“ Zugänge eingeschätzt werden sollen, die nicht dem eigenen Vorgehen entsprechen.

4.2.2 Stichprobe

An den Expert:innen-Interviews nahmen 10 aktive Lehrkräfte aus 6 Gymnasien teil. Auch hier handelt es sich um eine Gelegenheitsstichprobe ohne Verpflichtung zur Teilnahme oder materielle Entschädigung für die Teilnahme. Die Lehrkräfte zeichnen sich also durch ihre Offenheit für die Anliegen solcher

Studien aus. Andere insbesondere fachunterrichtliche Besonderheiten, die relevant wären, waren nicht beobachtbar. Sieben Lehrkräfte verfügten über mehr als zehn Jahre Unterrichtserfahrung, zwei Lehrkräfte zwischen fünf und zehn Jahre und eine Lehrkraft über weniger als fünf Jahre. Alle teilnehmenden Lehrkräfte haben die Bruchrechnung (und damit die Bruchdivision) mindestens zweimal unterrichtet, die Hälfte der Lehrkräfte öfter als viermal.

4.2.3 Datenauswertung

Die Interviews wurden nach dem einfachen Regelsystem für inhaltlich-semantische Transkription nach Dresing und Pehl (2018) transkribiert und die Transkripte durch die Autoren dieses Beitrags konsensuell mithilfe einer deduktiv-induktiven qualitativen Datenanalyse nach Mayring (2015) kodiert. Dabei werden die Kategorien (i. w. F. *kursiv*) entlang der übergeordneten Forschungsfragen sowie basierend auf dem vorliegenden Material gebildet (vgl. ebd).

Bei den subjektiven Konzepten der Lehrkräfte wurde zunächst vor allem auf *Herleitungsidee(n)* bei der Erarbeitung einer Regel zur Bruchdivision im Unterricht, *wiederholte Grundlagen* vor der Herleitung, *gedankliche Herausforderungen* für Schüler:innen während der Herleitung sowie *bewährte Elemente* der Herleitungen geachtet. Nach dieser eher analytischen Auswertung haben die Autoren zusätzlich holistisch (und stärker interpretierend) *Merkmale der Erarbeitung einer Regel zur Bruchdivision* kodiert.

Deduktive Kategorien zur Frage nach Herleitungsideen bei der Erarbeitung einer Regel zur Bruchdivision im Unterricht waren *Division als Messen*, *Division als Umkehroperation der Multiplikation*, *syntaktisches Herleiten*, *Permanenzreihe ohne anschauliche Stütze* (vgl. „Gleichungsketten“ in Padberg, 1986) sowie *Mitteilen der Regel*.

Deduktive Kategorien für wiederholte Grundlagen waren das *Erweitern*, die *Division als Aufteilen*, *Division als Umkehroperation der Multiplikation* und *Bruchmultiplikation*. Induktiv wurde die Kategorie *keine besonderen Grundlagen werden benötigt* ergänzt.

In Interviews potenziell genannte gedankliche Herausforderungen für Schüler:innen während der Erarbeitung der Regel zur Bruchdivision wurden in den deduktiven Kategorien *fehlende Anschaulichkeit* und der in der Literatur benannten Herausforderung *Quotient größer als Dividend* (Prediger, 2004) erfasst. Induktiv wurde die Kategorie *insgesamt herausfordernd* ergänzt, sowie die Kategorien *Schritt zum Divisor als (Stamm)bruch* und *Schritt zum allgemeinen Divisor*, welche zwei Schritte in Richtung Regel darstellen können (Padberg & Wartha, 2023).

Bewährte Elemente der Erarbeitung einer Regel zur Bruchdivision im Unterricht wurden induktiv erfasst (siehe Abschnitt. 5.2.1).

Die Merkmale des Unterrichts zur Regel besteht aus der übergeordneten Kategorie, ob eine Herleitung stattfindet (ja/nein) sowie aus Unterkategorien für alle Interviews, bei denen eine Herleitung beschrieben wird. Diese Unterkategorien sind *Art der Anschauung/Vorstellung*, *Grad der Allgemeinheit*, *Konsistenz der Herleitung*, *Schrittigkeit* und *Erreichung der Regel durch Herleitung*.

Die Einschätzung der unterschiedlichen in Schulbüchern realisierten Lehrgänge wurde passend zum offenen Impuls im Interview induktiv erfasst, da vorab kaum antizipierbar war, auf welche Aspekte die Lehrkräfte eingehen und wo eher Beschreibungen und wo eher Wertungen geäußert wurden.

5. Ergebnisse

Die Ergebnisse werden für beide Erhebungen jeweils entlang der Forschungsfragen getrennt dargestellt. Eine Verdichtung und Verknüpfung der Ergebnisse erfolgt im Rahmen der Diskussion.

5.1 Schüler:innen-Erhebung (FF-S1 bis S4)

5.1.1 FF-S1: Welche Vorstellungen zur Division aktivieren Schüler:innen spontan? (vorher in $\mathbb{N}$/nachher in $\mathbb{Q}^+$)

Der Beantwortung dieser Frage liegen Aufgabe 1 sowie Aufgabe 4 des Erhebungsbogen zugrunde. Rund 99 % der 505 Schüler:innen geben mindestens eine Sachsituation bei Aufgabe 1 an, 87 % zwei (oder sogar mehr) Sachsituationen. Bezüglich der *Angemessenheit* der Bearbeitungen lässt sich sagen, dass 77,5 % derer, die mindestens eine Sachsituation angeben, bei der ersten Bearbeitung eine angemessene Situation angeben. 71 % der Schüler:innen, die mindestens zwei Sachsituationen angeben, geben bei der zweiten Bearbeitung eine angemessene Situation an. Insgesamt geben 280 der 505 Schüler:innen (ca. 55 %) zwei angemessene Sachsituationen an. Unter allen angemessenen Sachsituationen (700) sind bezüglich der *aktivierten Grundvorstellung* ca. 11 % Aufteil- und 89 % Verteilsituationen. Von den 280 Schüler:innen, die zwei Sachsituationen angeben können, geben 85 % zwei Verteilsituationen an, 5 % zwei Aufteilsituationen, die restlichen 10 % aktivieren beide Grundvorstellungen jeweils einmal. Bei Teilaufgabe 4a (Bruch durch natürliche Zahl) können ca. 31 % der Schüler:innen eine angemessene Sachsituation angeben, unter diesen findet sich als *aktivierte Grundvorstellung* ausschließlich Verteilsituationen. Bei den Teilaufgaben 4b („Bruch durch Bruch (spezielle Zähler)“) und Teilaufgabe c (allgemeiner Fall) gibt es insgesamt nur 7 bzw. 2 angemessene Lösungen, was Lösungsquoten von 2 % bzw. 0,6 % entspricht.

5.1.2 FF-S2: Über welche Fähigkeiten zur Durchführung der Bruchdivision verfügen die Schüler:innen?

Zur Beantwortung dieser Forschungsfrage werden sowohl Aufgabe 2 als auch Aufgabe 3 herangezogen, da die Fähigkeit zur tragfähigen Regelformulierung als sprachlich gestützte Grundlage der Durchführung der Bruchdivision betrachtet werden kann. Von den 599 Schüler:innen, die Aufgabe 2 bearbeitet haben, lösen ca. 19 % keine der vier Teilaufgaben richtig, ca. 60 % lösen drei oder mehr Aufgaben richtig. Insbesondere lösen 43 % alle Aufgaben richtig. Die Lösungsquoten der vier Teilaufgaben von Aufgabe 2 sowie die Charakterisierung der angewandten Strategie sind in Tabelle 2 dargestellt.

Von den Formulierungen einer Regel zur Bruchdivision sind 28,2 % angemessen im Sinne einer Tauglichkeit als Handlungsanweisung, weitere 35,4 % aller Formulierungen sind potenziell tragfähig, aber unvollständig, die übrigen 36,4 % sind nicht angemessen. Bei 71,5 % aller Formulierungen wird auf die Kehrwertregel zurückgegriffen, bei ca. 8 % auf den *common denominator algorithm*, die übrigen Formulierungen lassen sich keiner der beiden Strategien zuordnen (wie z. B. die Umformung in eine Dezimalzahl, welche keine allgemein anwendbare Strategie darstellt). Unter den potenziell angemessenen Formulierungen wird in 84 % auf die Kehrwertregel zurückgegriffen, in ca. 15 % der Fälle auf den *common denominator algorithm*. Von den angemessenen Formulierungen lassen sich 97,6 % der Kehrwertregel zuordnen und ca. 1 % dem *common denominator algorithm*.

Die Lösungsquoten der Schüler:innen, die die Regel angemessen formulieren können, liegt bei den Berechnungsaufgaben zwischen 83 % („Bruch durch natürliche Zahl“) und 94 % („allgemeiner Fall“). Die Lösungsquoten derer, die eine potenziell tragfähige, aber unvollständige Regel formulieren, liegt zwischen 68 % („Bruch durch natürliche Zahl“) und 75 % („Bruch durch Bruch (gleichnamig)“). Die Lösungsquote der Schüler:innen, die keine angemessene Regel formulieren, liegt zwischen 27,5 % („allgemeiner Fall“) und 38,5 % („Bruch durch Bruch (gleichnamig)“). Diese Unterschiede sind statistisch signifikant[6] (χ^2-Tests für Teilaufgaben 2a bis d mit n=599 und df=2: χ^2=81,481, p<0,001, V=0,369; χ^2=141,224, p<0,001, V=0,486; χ^2=127,759, p<0,001, V=0,462; χ^2=197,435, p<0,001, V=0,574).

5.1.3 FF-S3: Inwieweit hängen Vorstellungen und operative Fähigkeiten zusammen?

82 % der Schüler:innen, die eine angemessene Sachsituation für „Bruch durch natürliche Zahl“ (Teilaufgabe 4a) angeben können, berechnen die entsprechende Teilaufgabe 2a richtig. Von denen, die keine angemessene Sachsituation angeben können, sind es 55 %. Umgekehrt bedeutet es, dass es sowohl einige Schüler:innen gibt, die eine falsche Berechnung durchführen und trotzdem eine angemessene Sachsituation angeben können, als auch zahlreiche Schüler:innen, die keine angemessene Sachsituation angeben, aber die entsprechende Aufgabe richtig berechnen können. Die Unterschiede sind gleichwohl

	„Bruch durch natürliche Zahl“	**„Bruch durch Bruch“ (gleichnamig, spez. Zähler)**	**„Bruch durch Bruch“ (ungleichnamig, spez. Nenner)**	**„Bruch durch Bruch“ (allgemeiner Fall)**
Richtigkeit (n=599)				
Richtig	60,1 %	67,1 %	61,4 %	62,3 %
unv., tragfähig	2,3 %	0,3 %	3,2 %	2 %
Sonstige	37,6 %	32,6 %	35,4 %	35,7 %
Strategie (n=599)				
Kehrwertregel	56,8 %	58,4 %	63,4 %	63,4 %
com. den. alg.	1,3 %	11,5 %	2,5 %	1,2 %
Sonstiges	39,6 % (darunter: 2,3 % Div. durch 5)	30,1 %	33,9 %	35,4 %

Tab. 2: Richtigkeit und Strategie der Teilaufgaben von Aufgabe 2

statistisch signifikant (χ^2-Test mit *n*=328 und *df*=1: χ^2=27,453, *p*<0,001, φ=0,289).

Bei den übrigen beiden Teilaufgaben zur Sachsituation in $\mathbb{Q}^+$ kann wegen der geringen Anzahl an angemessenen Bearbeitungen kein sinnvoller Bezug zwischen der Aktivierung von Vorstellungen und den (entsprechenden) Fähigkeiten hergestellt werden.

5.1.4 FF-S4: Inwieweit ändern sich Vorstellungen und Fähigkeiten im Laufe der Sekundarstufe I und II?

Der Vergleich der beiden Populationen A und C bei Aufgabe 1 zeigt, dass 79 % der Schüler:innen der 5./6. Jahrgangsstufe mindestens eine angemessene Sachsituation angeben können, in der Oberstufe hingegen 94 %. Diese Unterschiede sind statistisch signifikant (χ^2-Test mit *n*=505 und *df*=1: χ^2=11,651, *p*=0,001, φ=0,152). Die beiden Populationen unterscheiden sich dabei nicht signifikant bzgl. der Verteilung der aktivierten Grundvorstellungen (χ^2-Test für die erste Lösung mit *n*=419 und *df*=1: χ^2=0,031, *p*=0,86, *φ*=–0,009; χ^2-Test für die zweite Lösung mit *n*=346 und *df*=1: χ^2=1,666, *p*=0,197, φ=0,069).

Der Vergleich von Population B und Population C bei Aufgabe 4 zeigt, dass 21 % der Schüler:innen der 6./7. Jahrgangsstufe eine angemessene Sachsituation bei der Teilaufgabe „Bruch durch natürliche Zahl“ angeben können, hingegen 39 % der Oberstufe. Dieser Unterschied ist statistisch signifikant (χ^2-Test mit *n*=328 und *df*=1: χ^2=11,618, *p*=0,001, φ=0,188). Die wenigen angemessenen Bearbeitungen zu den übrigen beiden Teilaufgaben (4b und 4c) stammen von Schüler:innen der Oberstufe. Mehr als die Hälfte (53 %) der Schüler:innen der 6./7. Jahrgangsstufe lösen drei oder mehr Teilaufgaben von Aufgabe 2 richtig, in der Oberstufe sind es über 65 %. Ca. 26 % der Schüler:innen der 6./7. Jahrgangsstufe lösen keine der Aufgaben richtig, in der Oberstufe hingegen nur ca. 15 %. Die Unterschiede sind statistisch signifikant (χ^2-Tests mit *n*=599 und *df*=1: χ^2=8,892, *p*=0,003, φ=0,122; χ^2=12,867, *p*<0,001, φ=0,147).

Der Anteil der richtigen (sowie tragfähigen, aber unvollständigen) Bearbeitungen der Teilaufgaben von Aufgabe 2 unter Berücksichtigung der beiden Populationen B und C sind in Tabelle 3 dargestellt. Die Unterschiede für „Bruch durch natürliche Zahl“ und „Bruch durch Bruch (allgemeiner Fall)“ sind statistisch signifikant (χ^2-Tests mit *n*=599 und *df*=1: χ^2=31,981, *p*<0,001, φ=0,231; χ^2=17,629, *p*<0,001, φ=0,172). Die Unterschiede für die beiden übrigen Teilaufgaben „Bruch durch Bruch (gleichnamig, spez. Zähler)“ und „Bruch durch Bruch (ungleichnamig, spez. Nenner)“ sind bei einem Niveau von p=0,05 gerade noch bzw. gerade nicht mehr signifikant (χ^2-Tests mit *n*=599 und *df*=1: χ^2=4,216, p=0,04, φ=0,084; χ^2=3,591, p=0,058, φ=0,077).

Bei Aufgabe 3 gelingt rund einem Drittel (35,3 %) der Schüler:innen der 6./7. Jahrgangsstufe eine angemessene Formulierung einer Regel zur Bruchdivision, in der Oberstufe gelingt dies nur rund einem Viertel (23,6 %). Weiter gelingt eine potenziell tragfähige Formulierung rund einem Fünftel (20,9 %) der Schüler:innen der 6./7. Jahrgangsstufe und etwas weniger als der Hälfte (44,8 %) der Schüler:innen der Oberstufe. Die übrigen 43,8 % bzw. 31,6 % geben eine nicht-angemessene Formulierung an.

5.2 Lehrkräfte-Erhebung (FF-L1 u. L2)

5.2.1 FF-L1: Welche subjektiven Konzepte legen Lehrkräfte bei der Erarbeitung der Regel zur Bruchdivision zugrunde?

Bei der Frage nach Herleitungsideen bei der Erarbeitung einer Regel zur Bruchdivision im Unterricht bezogen sich die Lehrkräfte sowohl auf die Herleitung der Regel im engeren Sinn als auch auf die Etablierung der Division als anschaulich sinnvolle Operation. Nicht zuletzt dadurch fielen einige Ausführungen in mehrere Auswertungskategorien. Dabei wurde die Bezugnahme auf die *Division als Messen* am häufigsten genannt (5 Lehrkräfte). Darauf folgten das Mitteilen der Regel (4), *die Division als Umkehroperation der Multiplikation* (3), das *syntaktische Herleiten* (3) und die Verwendung einer *Permanenzreihe ohne anschauliche Stütze* (1).

	Bruch durch natürliche Zahl	**Bruch durch Bruch (gleichnamig, spez. Zähler)**	**Bruch durch Bruch (ungleichnamig, spez. Nenner)**	**Bruch durch Bruch (allgemeiner Fall)**
6./7. Jgst.	48,5 %	62,6 %	60 %	54 %
Oberstufe	71,4 %	70,6 %	67,6 %	70,9 %

Tab. 3: Anteil an richtigen Bearbeitungen der Teilaufgaben von Aufgabe 2 unter Berücksichtigung der Populationen

Die fehlende Anschaulichkeit der Bruchdivision wurde von 3 Lehrkräften als Verständnisproblem während der Herleitung genannt. Exemplarisch dafür steht das folgende Zitat aus einem der Interviews (L4 steht für „Lehrkraft 4“):

> Ja, also ich meine, so bis dahin, sage ich mal, ist eigentlich alles immer relativ anschaulich. Und dann kommt die Division. […] Aber sobald es um die Division von zwei Brüchen geht, hört es dann meistens mit dem Anschaulichen auf. Also da habe ich jetzt zumindest noch keinen Weg gefunden, dass man sich das so supergut vorstellen kann. (L4)

Die Herausforderung des Schritts zu einem allgemeinen Divisor wurde von 2 Lehrkräften erwähnt. Andere Herausforderungen (und insb. auch die in der Literatur beschriebene Herausforderung, dass der Quotient größer sein kann als der Dividend) wurden jeweils nur von 1 Lehrkraft genannt.

Als bewährte Elemente der Herleitung der Regel erwähnte jeweils eine Lehrkraft den Weg über die Umkehrung, die Analogie der Umkehroperation und von Pfeilbildern, Schüler:innen die Regel vermuten zu lassen, Schüler:innen die Regel mitzuteilen bzw. als primäres Ziel darauf Wert zu legen, den Schüler:innen zu vermitteln, dass es nur darum geht, sich die Regel zu merken.

Betrachtet man über alle Interviews hinweg die Merkmale der Erarbeitung einer Regel zur Bruchdivision, so lässt sich zunächst festhalten, dass 9 der 10 Lehrkräfte eine Herleitung der Regel im Unterricht durchführen, lediglich eine interviewte Lehrkraft (L7) beschränkt sich darauf, die Regel mitzuteilen. Die Unterkategorien der Merkmale der Erarbeitung einer Regel zur Bruchdivision im Unterricht können durch die Interviews der 9 Lehrkräfte wie folgt weiter differenziert werden (jeweils mit eindeutiger Zuordnung, jede Zahl in den Klammern entspricht einer der Lehrkräfte):

- Anschauung/Vorstellung: Innermathematisch-strukturelle Klärung (1,2,4), Versuch einer anschaulichen Fundierung (5,6,8,9,10), Anschauliche Fundierung nicht möglich (3)
- Grad der Allgemeinheit: Beispielgebunden (2,4,5,8), Allgemein (1), Nicht anwendbar (3,6,9,10)
- Konsistenz der Herleitung: Einheitliche Idee der Herleitung (1,2), Schulbuch mit Ergänzung (5,8,9), Ideenmix (3,4,6,10)
- Schrittigkeit der Herleitung: Holistisch (1,2), Schrittweise (5,6,8,9,10), Nicht entscheidbar (3,4)
- Regel (durch Herleitung) erreicht: Ohne Verwerfung erreicht (1,2,4), Mit Verwerfung erreicht[7] (5,8,9), Gar nicht erreicht (3,6,10)

Dabei zeigt sich, dass genau jene drei Lehrkräfte, die die Regel ohne Verwerfung erreichen, eine innermathematisch-strukturelle Klärung durchführen. Dies erfolgt wahlweise beispielgebunden oder allgemein. Zwei dieser Lehrkräfte verfolgen eine einheitliche Idee der Herleitung, nämlich eine holistische Herleitung unter Bezugnahme auf die Division als Umkehrung der Multiplikation. Keine der Lehrkräfte, die den Versuch einer anschaulichen Fundierung der Kehrwertregel anstreben, folgen einer einheitlichen Idee der Herleitung, auch erreichen diese die Kehrwertregel nicht ohne Verwerfung[7].

5.2.2 FF-L2: Wie schätzen Lehrkräfte unterschiedliche in Schulbüchern realisierte Lehrgänge ein?

Die Darstellung der Ergebnisse zur Einschätzung der Schulbuchauszüge erfolgt getrennt nach den einzelnen Schulbüchern, wobei jeweils positive als auch negative Aspekte angeführt sind.

Das ist Mathematik (Anhang A)

Positiv hervorgehoben wird von 3 Lehrkräften der *Kontext der Aufgabenstellung* (Saft aufteilen) sowie die *Veranschaulichung* des Zugangs (Division als Enthaltensein). Der Kontext des Aneinanderreihens möglichst vieler Dominosteine auf einem Tisch wird von manchen positiv gesehen, von anderen als gekünstelt bezeichnet. Alle Lehrkräfte nennen andere grundlegende Kritikpunkte an diesem Zugang. Der Zugang mithilfe des *Gleichnamigmachens* der Brüche wird von der Mehrheit kritisch gesehen, weil es für die Division nicht notwendig ist, dadurch große Zahlen auftreten, es einen ungünstigen Anker sowie eine syntaktische Fehlleitung darstellt. Darin wird eine *unnötige Kumulation von Schwierigkeiten* gesehen. Die *Herleitungsidee* wird von nahezu allen Lehrkräften aus vielerlei Gründen kritisch betrachtet. Sie wird als schwierig und wenig verständlich beschrieben, insbesondere wird das Thematisieren von Teilregeln und die Analogiebildung zum Rechnen mit Größen genannt. Weiter werden Zweifel bezüglich der Rekonstruierbarkeit der Regel angeführt. Der *syntaktische Nachweis* der Gültigkeit der Rechenregel für allgemeine Bruchdivisionen wird von der Mehrheit als *zu komplex* beschrieben.

Lambacher Schweizer (Anhang B)

Alle Lehrkräfte benennen positive Aspekte dieses Schulbuchauszugs. Mehrheitlich wird die Herleitungsidee des Zugangs mithilfe der *anschaulichen Passt-in-Vorstellung* genannt, auch das *Aufgreifen der Permanenzidee* wird von fast der Hälfte positiv hervorgehoben. Zwei der Lehrkräfte bezeichnen ausschließlich die *verwendeten Pfeilbilder* neben dem Merksatz zur Bruchdivision als positive Aspekte des Auszugs. Kritisch betrachtet wird die *Darstellung der Herleitungsidee*, welche von einigen Lehrkräften als unübersichtlich oder gar inkonsistent beschrieben wird. Fast die Hälfte der Lehrkräfte beschreibt die *Herleitung als Ganzes inkonsistent*, weil dieser Auszug nur für den Spezialfall des ganzzahligen Quotienten eine Erklärung bietet und insbesondere der Fall „Bruch durch Bruch (allgemein)“ auf diese Weise nicht erschlossen wird. Außerdem äußert eine Lehrkraft *Zweifel an der Möglichkeit der Rekonstruierbarkeit der Rechenregel* für Schüler:innen auf Basis dieser Inszenierung. Zwei der Lehrkräfte bezeichnen diesen Herleitungsweg als „inakzeptabel“.

Mathematik heute (Anhang C)

Überwiegend positiv eingeschätzt wird *die Art der Herleitung* unter Nutzung der Idee des Rückgängigmachens eines Pfeilbildes und der Nutzung der Operatordarstellung sowie die Herleitungsidee als Ganzes. In der Kombination aus *Sichtbarmachung des Kehrwerts* unter *Verwendung von Pfeilbildern* wird sowohl die fachliche Fundierung des Ansatzes als Stärke gesehen als auch die Unterstützung des Lernprozesses von Schüler:innen, indem eine *Nachvollziehbarkeit und Rekonstruierbarkeit* der Rechenregel gewährleistet erscheint. Drei Lehrkräfte nennen zudem explizit, dass diese Herleitungsidee *ihrem eigenen Vorgehen* im Unterricht entspricht. Kritik wird von der Hälfte der Befragten hinsichtlich einer potenziellen *Überforderung* von Schüler:innen geübt. Dabei wird der Aspekt der Frage nach der Zusammensetzung des Gegenoperators und der Verwendung der Umkehraufgabe (sowie die Kumulation dieser beiden Aspekte) genannt sowie die Verwendung einer als *gekünstelt empfundenen Sachsituation*.

5.3 Limitationen der Studie

Durch die Rahmenbedingungen der Stichprobe sind in naheliegender Weise einige Restriktionen gegeben. Es handelt sich bei den Populationen der empirischen Studie um Gelegenheitsstichproben aus Gymnasien, wodurch keine Verallgemeinerung auf alle Schulformen möglich ist. Auch könnten die Lösungsquoten in anderen (Bundes-)Ländern als Nordrhein-Westfalen anders ausfallen. Es ist jedoch nicht davon auszugehen, dass aufgrund dessen grundsätzlich andere Befunde beispielsweise bezüglich der Zusammenhänge von Regelformulierung und Performanz oder von operativen Fähigkeiten und Aktivierung von Vorstellungen feststellbar sind.

Bei der Lehrkräfte-Erhebung handelt es sich lediglich um eine Selbstauskunft. Damit werden weder eine umfassende Analyse der Unterrichtsmaterialien der Lehrkräfte (wie z. B. bei Li et al., 2009) noch Beobachtungen der tatsächlich stattfindenden Inszenierung durchgeführt. Durch die kleine Stichprobengröße sind Aussagen über Häufigkeiten allenfalls als Tendenzen interpretierbar. Die ausgewählten Schulbücher, welche jeweils einem unterschiedlichen Weg in Reinform entsprechen, stellen eine weitere Beschränkung dar, weil es insbesondere auch viele Mischtypen von Inszenierungen der Herleitung der Regel zur Bruchdivision in Schulbüchern gibt. Letztere sind jedoch für das vorliegende Erkenntnisinteresse weniger relevant. Die erhaltenen Einschätzungen der Lehrkräfte zu den vorgelegten Inszenierungen könnten darüber hinaus einen tendenziell oberflächlichen Charakter haben, da deren Analyse bewusst direkt in den Interviewprozess eingebaut war und die Auszüge nicht z. B. vorab mit der Bitte um eingängige Analyse bereitgestellt wurden. Dieses Vorgehen wurde gewählt, weil eine vorangehende Analyse des Materials potenziell die Angaben zum eigenen Unterricht beeinflusst hätten. Außerdem zeigen die Ergebnisse, dass die Lehrkräfte (als Expert:innen für Unterricht) auch in der ad-hoc-Situation des Interviews zu tiefergehenden Analysen der Auszüge gelangt sind.

6. Diskussion

6.1 Verdichtung und Einordnung der Ergebnisse

Die Ergebnisse zu FF-S1 und S4 zeigen bei Divisionsaufgaben in ℕ eine große Dominanz des Aktivierens der Grundvorstellung des Verteilens gegenüber der des Aufteilens. Bemerkenswert ist, dass das Modell des Verteilens bei der Realisierung einer gegebenen Division einer Sachsituation auch in der Oberstufe in dieser ausgeprägten Mehrheit bevorzugt aktiviert wird, obwohl sich das Modell der Division als Aufteilen nach Fischbein et al. (1985) i. d. R. gegen Ende der Sekundarstufe I konsolidiert hat. Betrachtet man die Lösungsquoten zur Realisierung einer Sachsituation bei einer gegebenen Bruchdivision, so zeigen die Ergebnisse, dass die Grundvorstellung des Aufteilens selbst im typischen Fall für eine Messsituation „Bruch durch Bruch (gleichnamig, spezieller Zähler)“ (Teilaufgabe 4b) von keiner Person direkt nach der Behandlung der Bruchdivision im Mathematikunterricht und nur vereinzelt von Schüler:innen der Oberstufe aktiviert werden kann. Die im Vergleich zu unseren Ergebnissen höhere Lösungsquote in Kleine und Fischer (2005) kann wohl auf die dort verwendeten geläufigen Größen zurückzuführen sein. Der allgemeine Fall (Teilaufgabe 4c) stellte wie erwartet eine Überforderung nahezu aller Schüler:innen dar, lediglich zwei Schüler:innen der Oberstufe konnten die Aufgabe lösen, indem sie eine verallgemeinerte Vorstellung aktivierten.

Die Lösungsquoten der Teilaufgaben von Aufgabe 2 (siehe Tab. 2) sind für alle betrachteten Teilaufgaben in etwa gleich hoch und liegen jeweils über 60 %. Vergleicht man die Ergebnisse aus Padberg (1986) mit jenen der Population B, so zeigt sich, dass letztere insbesondere den Spezialfall „Bruch durch natürliche Zahl“ etwas häufiger, den allgemeinen Fall etwas seltener lösen konnte (siehe Tab. 3). Im Wesentlichen ordnen sich die Ergebnisse demnach gut in die bestehende Literatur ein und bestätigen die dort berichteten Ergebnisse weitgehend. Die Lösungsquote von Population C liegt bei allen Teilaufgaben in etwa bei 70 % und somit zum Teil erheblich höher als bei Population B, wobei die Zunahme der Lösungshäufigkeiten im Einklang mit den Ergebnissen von Siegler und Pyke (2013) steht. Zudem kann durch unsere Erhebungen ein vorsichtiger Rückschluss aus dem Schriftprodukt auf die verwendete Strategie getätigt werden: Die überwältigende Mehrheit erfolgreicher Bearbeitungen verwendet die Strategie der Kehrwertregel, ausschließlich beim Fall „Bruch durch Bruch (gleichnamig, spezielle Zähler)“ (Teilaufgabe 2b) findet sich ein nennenswerter Anteil mit der Wahl des *common denominator algorithm* als (erfolgreiche oder nicht erfolgreiche) Lösungsstrategie[8]. Selbst der ähnlich gelagerte Fall der Teilaufgabe 2c („Bruch durch Bruch (ungleichnamig, spezielle Nenner)“ lässt keinerlei bevorzugte Verwendung dieser Strategie durch Schüler:innen erkennen. Bei allen Teilaufgaben ist ein enger Zusammenhang zwischen Anwendung der Kehrwertregel und richtiger Bearbeitung der Aufgabe feststellbar.

Bei Schüler:innen der Population B sind sowohl die Anteile an tragfähigen als auch an einer nicht-angemessenen Formulierung der Regel deutlich höher als bei der Population C. Dies kann damit erklärt werden, dass die Regel kurz nach der Herleitung bei einem größeren Teil der Schüler:innen explizit verfügbar ist, und zwar auch bei einigen, bei denen davon auszugehen ist, dass sie bis zur Oberstufe nur mehr eine potenziell tragfähige Regelformulierung angeben können, weil diese üblicherweise bis dahin im Unterricht nicht wiederkehrend expliziert wird. Weiter zeigen die Ergebnisse, dass die erfolgreiche Bearbeitung aller Teilaufgaben in engem Zusammenhang mit der Fähigkeit zur (zumindest potenziell) tragfähigen Regelformulierung stehen und dass dabei von der überwältigenden Mehrheit auf die Strategie der Kehrwertregel zurückgegriffen wird.

Im Gegensatz dazu kann in Bezug auf FF-S3 nur eine lose Kopplung von Vorstellungen und operativen Fähigkeiten in der Bruchdivision festgestellt werden. Denn die beiden Teilaufgaben „Bruch durch Bruch (gleichnamig, spezieller Zähler)“ (2b) und „Bruch durch Bruch (allgemeiner Fall)“ (2d) können von der Mehrheit beider Populationen (B und C) erfolgreich ausgeführt werden, obwohl die entsprechenden Rechnungen von fast keinen Lernenden realisiert werden können (Teilaufgaben 4b und c). Selbst bei der Aufgabe „Bruch durch natürliche Zahl“, bei denen einigen Schüler:innen eine Realisierung gelingt, gibt es sowohl Schüler:innen, die die Aufgabe realisieren, aber nicht berechnen können als auch umgekehrt welche, die die Aufgabe rechnen, aber nicht realisieren können.

Die Selbstauskunft der Lehrkräfte zum Unterrichtsgang zur Herleitung der Divisionsregel (FF-L1) zeigt, dass den Lehrkräften daran liegt, anschaulichen Zugängen Raum zu geben. Im Einklang damit steht die positive Erwähnung der Veranschaulichung der Division durch einen Bruch mithilfe einer Messsituation (Schweizer, 1955). Sie thematisieren aber auch spontan und explizit - im Einklang mit der Literatur (Schweizer, 1955; Malle, 2004) - die Grenzen der Anschauung bei der Bruchdivision. Die Regel zur Bruchdivision wird im berichteten Unterrichtsgang von jenen Lehrkräften ohne Verwerfung erreicht, die eine innermathematisch-strukturelle Inszenierung verfolgen. Die faktische Unmöglichkeit, mithilfe des Messzugangs ohne Verwerfung bis zur Kehrwertregel zu gelangen, steht ebenfalls im Einklang mit der Literatur (Schweizer, 1955; Bidwell 1971; Padberg, 1982). Dabei erscheint die Reflexion dieser Lehrkräfte zur Grenze der Anschauung aus stoffdidaktischer Perspektive oftmals stimmiger zu sein als Erkenntnisse, die in aktueller internationaler Forschungsliteratur zu finden sind (z. B. Klemer et al., 2019; Adu-Gyamfi et al, 2019).[9]

Auch bei der Bewertung der Inszenierungen der Schulbücher (FF-L2) spielt die Grenze der Anschauung eine zentrale Rolle. Sie zeigt sich in der Betonung der Inkonsistenz der Herleitung der Divisionsregel mithilfe einer Messsituation, weil die Herleitung entweder nicht allgemeingültig ist (wie bei „Lambacher Schweizer“) oder weiterer syntaktischer Umformungen bedarf (wie bei „Das ist Mathematik“). Darüber hinaus wird bei den beiden Inszenierungen mittels Messsituationen die unübersichtliche und inkonsistente Darstellung („Lambacher Schweizer“) bzw. eine potenzielle syntaktische Fehlleitung („Das ist Mathematik“) moniert. Bei „Mathematik heute“ wird durch die Lehrkräfte im Gegensatz zum Schulbuch „Das ist Mathematik“ die Rekonstruierbarkeit der Regel durch Schüler:innen hervorgehoben, was auch hier im Einklang mit der Literatur steht (Bidwell 1971; Padberg, 1982). Die direkte und kurze innermathematisch-strukturelle Inszenierung anhand eines generischen Beispiels mithilfe von Pfeilbildern (vgl. „Mathematik heute“) überzeugt auch Lehrkräfte, die bisher andere Inszenierungen unterrichteten. Zweifel an diesem Weg der Herleitung wird von einem Teil der Lehrkräfte aufgrund einer möglichen Überforderung der Schüler:innen durch die Bezugnahme auf die Idee der Umkehrung und der Verwendung von Gegenoperatoren geäußert.

Insgesamt lässt sich vorsichtig schließen, dass viele ad-hoc-Einschätzungen von Lehrkräften zu Schulbuchauszügen besser zum Stand der mathematikdidaktischen Forschung passen als einige Schulbücher selbst. Diese Einschätzungen dürften dabei weitestgehend ohne explizite Kenntnis der in diesem Beitrag herangezogenen Forschungsliteratur erfolgt sein. Dies deutet an, dass Lehrkräfte als Expert:innen für Unterricht (und Lernmaterialien) belastbare Perspektiven und Einschätzungen in die mathematikdidaktische Forschung einbringen können, die insbesondere Eingang in konstruktive Vorschläge finden sollten.

6.2 Konstruktive Wendung mit Blick auf die Unterrichtspraxis

Für eine konstruktive Wendung der Ergebnisse mit Gestaltungsvorschlägen für den Unterricht zur Bruchdivision muss zuvor ein normativer Rahmen festgelegt werden: Welche Ziele sollen mit dem Unterricht zur Bruchdivision erreicht werden?[10]

Wir gehen bei unserer konstruktiven Wendung zunächst von den folgenden Zielen aus:

(i) Die Schüler:innen sollen eine Einsicht in die Sinnhaftigkeit der Bruchdivision als Operation mit eigenständiger Berechtigung gewinnen.

(ii) Eine zuverlässige der Ausführung Bruchdivision soll erreicht werden.

(iii) Es soll eine nachvollziehbare und tragfähige Herleitung der Regel geben.

Dabei berücksichtigt (iii), dass die Kehrwertregel auf dem Niveau des Mathematikunterrichts der Jahrgangsstufe 6 hergeleitet werden kann und nicht als Erfahrungstatsache oder Rezept, das sich in der Anwendung bewährt, mitgeteilt werden muss.

Für die Etablierung der Operation (i), also den Einstieg in die Bruchdivision, gibt es bewährte Sachsituationen, die – wie die Gefäß- oder Flüssigkeitsaufgaben in den Schulbuchauszügen in Anhang A und B – jeweils das Messen als Kerngedanken haben. Für eine gute Performanz (ii) ist es von Bedeutung, dass die Kehrwertregel klar formuliert wird, um auch als verbale mentale Stütze verfügbar zu sein. Außerdem spricht vieles dafür, dass syntaktische Fehlleitungen (Gleichnamigmachen) im Unterricht vermieden werden. Eine Herleitung der Regel (iii) kann unter Rückgriff auf die Idee des Gegenoperators (zur Bruchmultiplikation) ohne Umwege in einem Schritt fachlich tragfähig erfolgen. Dabei kann wie beim Weg 2a (siehe 2.1.3) die Inverseneigenschaft des Kehrwerts und die Eins als neutrales Element der Multiplikation (auf dem fachsprachlichen Niveau der Jahrgangsstufe 6) mit Schüler:innen thematisiert werden. So wird auch erkennbar, dass man bei den Bruchzahlen eigentlich ohne Division auskommt.

Dies spricht insgesamt dafür, die Bruchdivision anschaulich als eigenständige Operation zu etablieren und die Regel zur Bruchdivision mit der Idee des Gegenoperators herzuleiten. Dabei müssen die vorangegangenen Lerngelegenheiten berücksichtigt werden. Die Division wird bereits in den natürlichen Zahlen als Umkehroperation der Multiplikation betrachtet. Diese Betrachtung muss ggf. ebenso aufgefrischt werden, wie die Deutung der Bruchmultiplikation im Sinne des Operatorkonzepts. Dann können potenzielle Schwierigkeiten im Unterrichtsgang bzw. mit der anschließenden Performanz (vgl. Padberg, 1986) vermieden werden.

Es gibt zwar immer wieder Versuche, mit anschaulichen Messsituationen bis hin zur Regel zur Bruchdivision im Sinne einer Herleitung zu gelangen, bisher liegt aber kein entsprechender Vorschlag vor, der die Regel für Schüler:innen gedanklich nachvollziehbar und ohne Verwerfung in einem kohärenten Unterrichtsgang erreicht (vgl. z. B. entsprechende praxisorientiert geschriebene Beiträge Blum & Stephan, 2020; Wabnik & Dannwerth, 2021)

Wenn das Ziel einer nachvollziehbaren und tragfähigen Herleitung der Regel (iii) – anders als von uns – nicht als wichtiges Ziel betrachtet werden sollte, kann eine Motivation des Quotienten einer Bruchdivision im allgemeinen Fall auch innermathematisch mit Permanenzreihen („Gleichungsketten", Padberg, 1986) erfolgen. Nach einer prägnanten Regelformulierung lassen sich ggf. gute Ergebnisse hinsichtlich der Performanz erzielen (vgl. ebd.).

6.3 Ausblick

Die im vorangehenden Abschnitt angeregte konstruktive Wendung sollte in einem folgenden Schritt als Lehrgang konzipiert und im Hinblick auf Praktikabilität untersucht werden. Das empirische Bewährungskriterium solch eines Unterrichts wäre, dass sich die Leistungen der Schüler:innen dadurch zumindest nicht verschlechtern sollten. Nach Erkenntnissen aus Padberg (1986) kann dies nicht ausgeschlossen werden. Bei gleicher (oder steigender) Leistung der Schüler:innen wäre diese Inszenierung jedenfalls vorzuziehen, weil der Unterricht zur Herleitung der Regel zur Bruchdivision dadurch an Kohärenz gewinnt und so dazu beitragen kann, dass Schüler:innen ein stimmiges Bild von Mathematikunterricht entwickeln können.

Ein strukturell gleichartiger Inhaltsbereich des Arithmetikunterrichts ist die Multiplikation negativer Zahlen. Auch hier findet sich ein Variantenreichtum an Vorschlägen bzw. Inszenierungen, der von Realkontexten (Winter, 2016) über Permanenzreihen (Walcher & Wittmann, 2012) bis hin zur Begründung mithilfe des Distributivgesetztes unter Verwendung des Prinzips der Permanenz formaler Gesetze (Freudenthal, 1973; Hefendehl-Hebeker, 1989) reicht. Zugleich ist auch bei den negativen Zahlen klar, dass es Grenzen für anschauliche Zugänge gibt. Eine entsprechende Untersuchung könnte zu übergreifenden Ergebnissen zunächst im Bereich der fortgeschrittenen Arithmetik beitragen.

Anmerkungen

[1] Die aktuelle Ausgabe des Werks (Padberg & Wartha, 2023) lag zum Zeitpunkt der Lehrveranstaltung noch nicht vor.

[2] „Man dividiert einen Bruch durch einen Bruch, indem man den ersten Bruch mit dem Kehrbruch des zweiten Bruchs multipliziert." (Diese Regel bezeichnen wir im Folgenden als Kehrwertregel.)

[3] Ausnahmen in Form spezifischer Kontexte der Bruchdivision, bei der eine verallgemeinerte Verteilvorstellung aktiviert werden muss, werden u. a. in Jansen und Hohensee (2016) und Adu-Gyamfi et al. (2019) diskutiert.

[4] Es wurden u. a. alle aktuellen Ausgaben der in NRW sowie in Österreich zugelassenen gymnasiale Schulbuchreihen analysiert. Dabei traten Inszenierungen der Wege 1a, 1c sowie 2c in Reinform sowie „Mischformen" auf.

[5] Diese Strategie entspricht Weg 2b bzw. Weg 1 in Padberg und Wartha (2023), S. 138 f. Theoretisch basiert der Weg auf der Idee der Umkehroperation, die Herleitungsidee selbst entspricht jedoch weitestgehend einer rein syntaktischen Betrachtung auf Basis von Teilbarkeitsargumenten. Als mögliche Bearbeitungsstrategie muss diese in den Blick genommen werden, sie tritt jedoch empirisch bei dieser Stichprobe fast nicht auf.

[6] Statistische Signifikanz von Unterschieden und Zusammenhänge zwischen zwei Variablen wurden für diese Arbeit einheitlich mit Chi-Quadrat-Tests ermittelt. Dazu berechnen wir jeweils Chi-Quadrat nach Pearson mit Anzahl der Freiheitsgrade, der p-Wert sowie bei zwei dichotomen Variablen der Phi-Koeffizient und ansonsten Cramérs V. Hinsichtlich der Sprechweise „signifikant" gehen wir vom Niveau 0,05 aus.

[7] Der Herleitungsweg der Regel folgt keiner durchgängigen Idee oder die Allgemeingültigkeit der Regel wird nur mitgeteilt.

[8] Diese höhere Quote an der Bearbeitungsstrategie *common denominator algorithm* sowie der nennenswerte Anteil an erfolgreichen Bearbeitungen durch diesen Algorithmus bei dieser Teilaufgabe liegt vermutlich (auch) daran, dass bei der Kodierung bei einer direkten Angabe der Zahl 3 davon ausgegangen wurde, dass der naheliegende Gedankengang, um direkt auf diese Ergebnisse zu kommen, die Bezugnahme auf die gemeinsamen Nenner ist und nicht das Anwenden der Kehrwertregel ausschließlich „im Kopf", ohne dass eine irgendwie geartete unterstützende Verschriftlichung getätigt wird.

[9] Diese Einschätzung soll exemplarisch anhand zentraler Aussagen der beiden Artikel Klemer et al. (2019) und Adu-Gyamfi et al. (2019) fundiert werden. Uns erscheint die stoffdidaktische Reflexion dieser Artikel auf einem ähnlichen Stand wie vor Padberg (1982) zu sein. In Klemer et al. (2019) wird Lehramtsstudierenden ein „missing link" zwischen pädagogischem Handeln und stoffdidaktischem Wissen attestiert, weil diese ausgehend von Spezialfällen von Bruchdivisionen, bei denen Dividend und Divisor denselben Nenner haben, keine geeignete allgemeingültige Begründung der Kehrwertregel angeben können. Dabei verweisen die Autoren selbst nicht auf die faktische Unmöglichkeit mittels Messzugangs ohne Verwerfung zur Kehrwertregel zu gelangen. In Adu-Gyamfi et al. (2019) erklären die Autoren die Kehrwertregel anhand eines Beispiels im Sachkontext mit ganzzahligem Quotienten, das einer verallgemeinerten Verteilvorstellung (determination of unit rate) – welche im Kern auf der Umkehrung der Multiplikation beruht – bedarf, um anschließend zu schreiben: „With similar examples, it becomes possible to generalize the invert-and-multiply algorithm" (ebd., S. 511). Auf dieses Zitat folgt durch die Autoren unmittelbar eine rein syntaktische Herleitung der Kehrwertregel mittels Doppelbruchmethode. Wird diese syntaktische Herleitung im Unterricht ausgespart, so lässt man die Regel aufgrund von Beispielen allgemein gelten (vgl. Diskussionsstand in Schweizer, 1955), andernfalls dient auch diese Vorstellung in Analogie zu den Messzugängen nicht als durchgängige Leitidee bei der Herleitung der Regel (vgl. Kritik an den Messzugängen in Padberg, 1982).

[10] Der dem normativen Rahmen folgende Vorschlag ist nicht alternativlos, aber sehr verträglich mit der Theorie und den empirischen Befunden. Andere empirische Befunde hätten demnach zu anderen Schlüssen geführt.

Literatur

Adu-Gyamfi, K., Schwartz, C. S., Sinicrope, R. & Bossé, M. J. (2019). Making sense of fraction division: Domain and representation knowledge of preservice elementary teachers on a fraction division task. *Mathematics Education Research Journal, 31*(4), 507–528.

Altman, D.G. (1991). *Practical Statistics for Medical Research*. Chapman and Hall.

Ball, D. L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(2), 132–144.

Bidwell, J. K. (1968). *A comparative study of the learning structures of three algorithms for the division of fractional numbers* [PhD dissertation]. University of Michigan.

Bidwell, J. K. (1971). Some consequences of learning theory applied to division of fractions. *School Science and Mathematics, 71*(5), 426–434.

Blum, W. & Stephan, L. (2020). Das Rechteckmodell bei der Division von Bruchzahlen. *mathematik lehren, Heft 221*, 46-47.

Büchter, A. & Donner, L. (2024). Die Herleitung der Regel zur Bruchdivision im didaktischen Diskurs und in ausgewählten Schulbuchreihen - eine Geschichte mit Spannungsverhältnissen und Verwerfungen. In G. Ambrus, J. Sjuts & E. Vásárhelyi (Hrsg.), *Mathematikdidaktische Impulse aus Vergangenheit und Gegenwart* (S. 141–158). WTM.

Capps, L. R. (1962). Division of fractions: A study of the common-denominator method and the effect on skill in multiplication of fractions. *The Arithmetic Teacher, 9*(1), 10-16.

Cramer K, Monson D, Whitney S, Leavitt, S. & Wyberg, T. (2010). Dividing fractions and problem solving. *Math Teach Middle Sch., 15*(6), 338–346.

Cohen, J. (1960). A coefficient of agreement for nominal scales. *Educational and Psychological Measurement, 20*, 37–47.

Copur-Gencturk, Y. (2021). Teachers' conceptual understanding of fraction operations: Results from a national sample of elementary school teachers. *Educational Studies in Mathematics, 107*(3), 525–545.

Donner, L. (i. Dr.). Some teachers' thoughts on the derivation of the rule for the division of fractions. *Proceedings of the 15th International congress on mathematical education* (invited full paper).

Donner, L. (2024). Bedingungsanalysen für unterrichtliche Zugänge zur Erarbeitung der Bruchdivisionsregel. *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG), Heft 56*, 43–58.

Dresing & Pehl (2018). *Praxisbuch Interview, Transkription & Analyse. Anleitungen und Regelsysteme für qualitativ Forschende* (8. Aufl.). Marburg: Eigenverlag.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S. & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*(1), 3–17.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe, Band I*. Klett.

Giest, H. & Lompscher, J. (2006). *Lerntätigkeit – Lernen aus kultur-historischer Perspektive. Ein Beitrag zur Entwicklung einer neuen Lernkultur im Unterricht*. Lehmanns Media.

Griesel, H. (1981a). 20 Jahre moderne Didaktik der Bruchrechnung. *Der Mathematikunterricht, 27*(4), 5–15.

Griesel, H. (1981b). Einige Anmerkungen zur Verwendung von Operatoren in der Bruchrechnung. *Der Mathematikunterricht, 27*(4), 80–86.

Harmon, H. (1971). All about division with rational numbers – Variation on a theme. *School Science and Mathematics, 71*(6), 501–507.

Hasemann, K. (1981). On difficulties with fractions. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 71–87.

Hefendehl-Hebeker, L. (1989). Die negativen Zahle zwischen anschaulicher Deutung und gedanklicher Konstruktion – geistige Hindernisse in ihrer Geschichte. *mathematik lehren, Heft 35*, 6–12.

Hefendehl-Hebeker, L. & Prediger, S. (2006). Unzählig viele Zahlen: Zahlbereiche erweitern – Zahlvorstellungen wandeln. *Praxis der Mathematik in der Schule, 48*(11), 1–7.

Herden, G. & Pallack, A. (2000). Zusammenhänge zwischen verschiedenen Fehlerstrategien in der Bruchrechnung: Empirische Erhebung über 244 Schülerinnen der Klassen sieben von Gymnasien. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *21*(3/4), 259–279.

Jansen, A. & Hohensee, C. (2016). Examining and elaborating upon the nature of elementary prospective teachers' conceptions of partitive division with fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 19*(6), 503–522.

Kieren, T.E. (1993). Rational and fractional numbers: from quotient fields to recursive understanding. In T.P. Carpenter,E. Fennema and T. Romberg (Hrsg.), *Rational numbers: an integration of research* (S. 49–84). Lawrence Erlbaum Associates.

Kirsch, A. (1970). *Elementare Zahlen- und Größenbereiche*. Vandenhoeck & Ruprecht.

Klauer, K. J. (1984). Kognitive Prozesse bei der Multiplikation und Division von Brüchen. Eine Lehrzielanalyse. *Zeitschrift für Empirische Pädagogik und Pädagogische Psychologie, 8*, 77–90.

Kleine, M & Fischer, E. (2005). Welche Aufgaben passen zu dem Term? Möglichkeiten für den Einsatz von Rechengeschichten am Beispiel der Subtraktion und Division von Brüchen. *mathematica didactica, 28*(2), 88–103.

Klemer, A., Rapoport, S. & Lev-Zamir, H. (2019). The missing link in teachers' knowledge about common fractions division. *International Journal of mathematical education in science and technology, 50*(8), 1256-1272.

Lee, M. Y. (2017). Pre-service teachers' flexibility with referent units in solving a fraction division problem. *Educational Studies in Mathematics, 96*(3), 327-348.

Li, Y. & Kulm, G. (2008). Knowledge and confidence of pre-service mathematics teachers: The case of fraction division. *ZDM-Mathematics Education, 40*(5), 833–843.

Li, Y., Chen, X. & Kulm, G. (2009). Mathematics teachers' practices and thinking in lesson plan development: A case of teaching fraction division. *ZDM – Mathematics Education, 41*(6), 717–731.

Lo, J.-J. & Luo, F. (2012). Prospective elementary teachers' knowledge of fraction division. *Journal of Mathematics Teacher Education, 15*(6), 481–500.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics.* Lawrence Erlbaum and Associates.

Malle, G. (2004). Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. *mathematik lehren, Heft 123*, 4–8.

Marshall, S. P. (1993). Assessment of rational number understanding: A schema-based approach, In T. P. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (Hrsg.), *Rational Numbers: An Integration of Research* (S. 261–288). Lawrence Erlbaum Associates.

Mayring, P. (2015). *Qualitative Inhaltsanalyse* (12. Aufl.). Beltz Verlag.

Padberg, F. & Benz, C. (2021). *Didaktik der Arithmetik: fundiert, vielseitig, praxisnah*. Springer Spektrum.

Padberg, F. & Bienert, T. (2000). Zur Entwicklung des Bruchzahlverständnisses und der Rechenoperationen mit gemeinen Brüchen innerhalb eines Schuljahres. *Der Mathematikunterricht, 46*(2), 24–37.

Padberg, F. & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Bruchrechnung* (5. Aufl.). Springer.

Padberg, F. & Wartha, S. (2023). *Didaktik der Bruchrechnung: Brüche – Dezimalbrüche – Prozente* (6. erw. Aufl.). Springer.

Padberg, F. (1978). *Didaktik der Bruchrechnung*. Herder.

Padberg, F. (1982). Wege zur Ableitung der Divisionsregel der Bruchrechnung. Bestandsaufnahme – Beurteilung – Folgerungen. *Journal für Mathematik-Didaktik, 3*(1), 67–88.

Padberg, F. (1986). Über typische Schülerschwierigkeiten in der Bruchrechnung – Bestandsaufnahme und Konsequenzen. *Der Mathematikunterricht*, *32*(3), 58–77.

Postel, H. (1981). Größen- oder Operatorkonzept in der Bruchrechnung? *Der Mathematikunterricht, 27*(4), 16–46.

Prediger, S. (2004). Brüche bei den Brüchen – angreifen oder umschiffen? *mathematik lehren, Heft 123*, 10–13.

Reinhold, F. (2019). *Wirksamkeit von Tablet-PCs bei der Entwicklung des Bruchzahlbegriffs aus mathematikdidaktischer und psychologischer Perspektive. Eine empirische Studie in Jahrgangsstufe 6*. Springer Spektrum.

Salle, A. & Clüver, T. (2021). Herleitung von Grundvorstellungen als normative Leitlinien–Beschreibung eines theoriebasierten Verfahrensrahmens. *Journal für Mathematik-Didaktik, 42*(2), 553-580.

Schweizer, W. (1955). Zur Methodik und Didaktik des Bruchrechens. *Der Mathematikunterricht, 1*(2), 51–66.

Sidney, P. G. & Alibali, M. W. (2017). Creating a context for learning: Activating children's whole number knowledge prepares them to understand fraction division. *Journal of Numerical Cognition, 3*(1), 31-57.

Siegler, R. S. & Pyke, A. A. (2013). Developmental and individual differences in understanding of fractions. *Developmental psychology, 49*(10), 1994-2004.

Son, J. & Crespo, S. (2009). Prospective teachers' reasoning and response to a student's non-traditional strategy when dividing fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 12*(4), 235–261.

Vygotskij, L. S. (2017). *Denken und Sprechen. Psychologische Untersuchungen* (3. Aufl.). Beltz.

Wabnik, M. & Dannwerth, A.-K. (2021). Die Kehrwertregel verstehen. *mathematik lehren, Heft 226*, 50–51.

Walcher, S. & Wittmann, E. C. (2012). „Minus mal minus ". Zum Fundament der COACTIV-Studie. *Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht*, *65*(6), 371–377.

Wartha, S. (2009). Zur Entwicklung des Bruchzahlbegriffs: Didaktische Analysen und empirische Befunde. *Journal für Mathematik-Didaktik, 30*(1), 55–79.

Wartha, S. & Güse, M. (2009). Zum Zusammenhang zwischen Grundvorstellungen zu Bruchzahlen und arithmetischem Grundwissen. *Journal für Mathematik-Didaktik, 30*(3/4), 256–280.

Winter, H. (2016). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht* (3. Aufl.). Springer.

Yim, J. (2010). Children's strategies for division by fractions in the context of the area of a rectangle. *Educational Studies in Mathematics, 73*, 105–120.

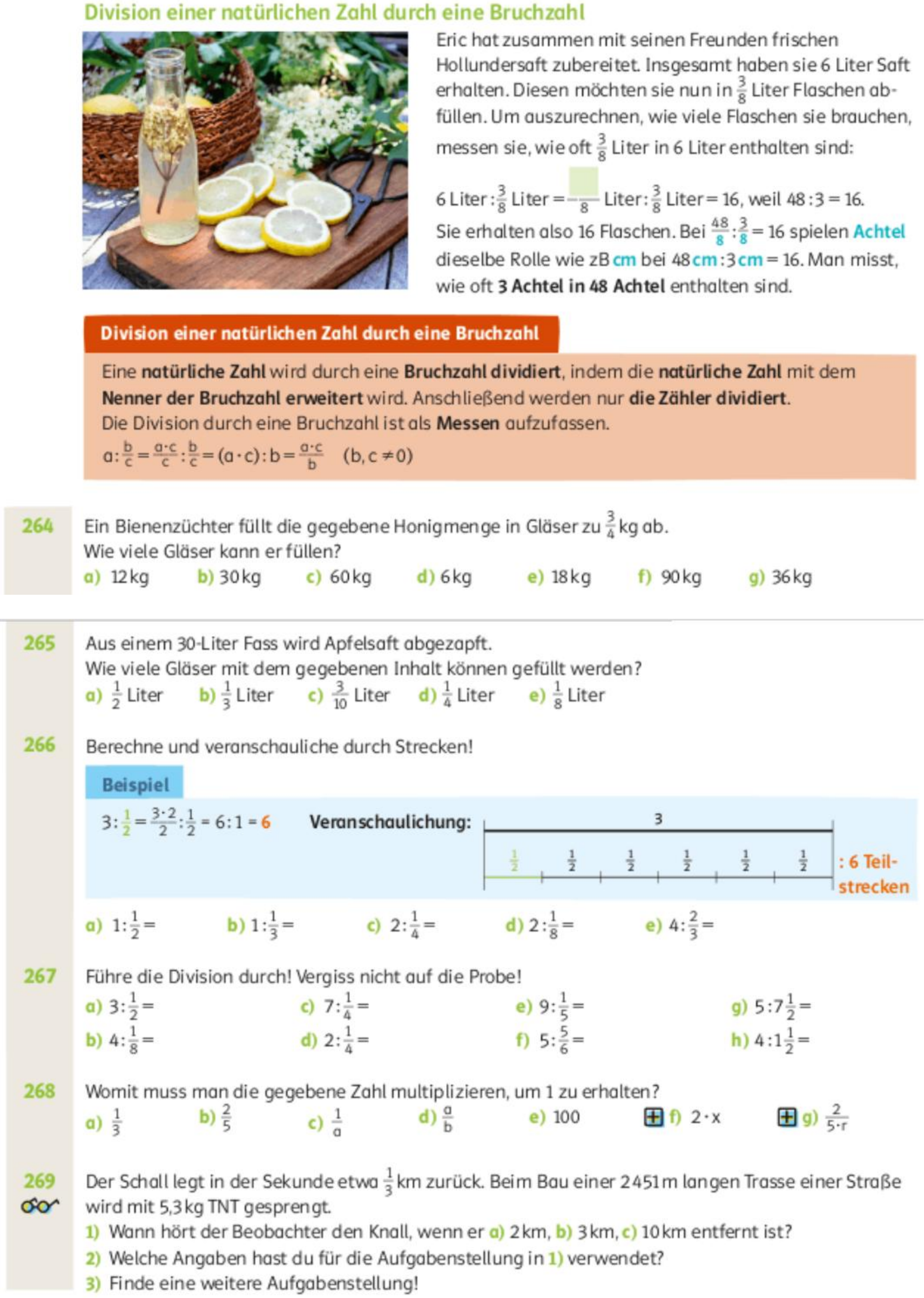
Anschrift der Verfasser

Andreas Büchter
Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Thea-Leymann-Straße 9
45127 Essen
andreas.buechter@uni-due.de

Lukas Donner
Georg-August-Universität Göttingen
Fakultät für Mathematik und Informatik
Bunsenstr. 3-5
37073 Göttingen
lukas.donner@mathematik.uni-goettingen.de

7. Anhang

Anhang A („Das ist Mathematik“ (2017), öbv Verlag)



Division einer natürlichen Zahl durch eine Bruchzahl

Eric hat zusammen mit seinen Freunden frischen Hollundersaft zubereitet. Insgesamt haben sie 6 Liter Saft erhalten. Diesen möchten sie nun in $\frac{3}{8}$ Liter Flaschen abfüllen. Um auszurechnen, wie viele Flaschen sie brauchen, messen sie, wie oft $\frac{3}{8}$ Liter in 6 Liter enthalten sind:

6 Liter : $\frac{3}{8}$ Liter = $\frac{\square}{8}$ Liter : $\frac{3}{8}$ Liter = 16, weil 48 : 3 = 16.

Sie erhalten also 16 Flaschen. Bei $\frac{48}{8}:\frac{3}{8} = 16$ spielen Achtel dieselbe Rolle wie zB cm bei 48 cm : 3 cm = 16. Man misst, wie oft **3 Achtel in 48 Achtel** enthalten sind.

Division einer natürlichen Zahl durch eine Bruchzahl

Eine **natürliche Zahl** wird durch eine **Bruchzahl dividiert**, indem die **natürliche Zahl** mit dem **Nenner der Bruchzahl erweitert** wird. Anschließend werden nur **die Zähler dividiert**.
Die Division durch eine Bruchzahl ist als **Messen** aufzufassen.

$a:\frac{b}{c} = \frac{a \cdot c}{c}:\frac{b}{c} = (a \cdot c):b = \frac{a \cdot c}{b} \quad (b, c \neq 0)$

264 Ein Bienenzüchter füllt die gegebene Honigmenge in Gläser zu $\frac{3}{4}$ kg ab.
Wie viele Gläser kann er füllen?
a) 12 kg b) 30 kg c) 60 kg d) 6 kg e) 18 kg f) 90 kg g) 36 kg

---

265 Aus einem 30-Liter Fass wird Apfelsaft abgezapft.
Wie viele Gläser mit dem gegebenen Inhalt können gefüllt werden?
a) $\frac{1}{2}$ Liter b) $\frac{1}{3}$ Liter c) $\frac{3}{10}$ Liter d) $\frac{1}{4}$ Liter e) $\frac{1}{8}$ Liter

266 Berechne und veranschauliche durch Strecken!

Beispiel

$3:\frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2}:\frac{1}{2} = 6:1 = 6$ **Veranschaulichung:**

3

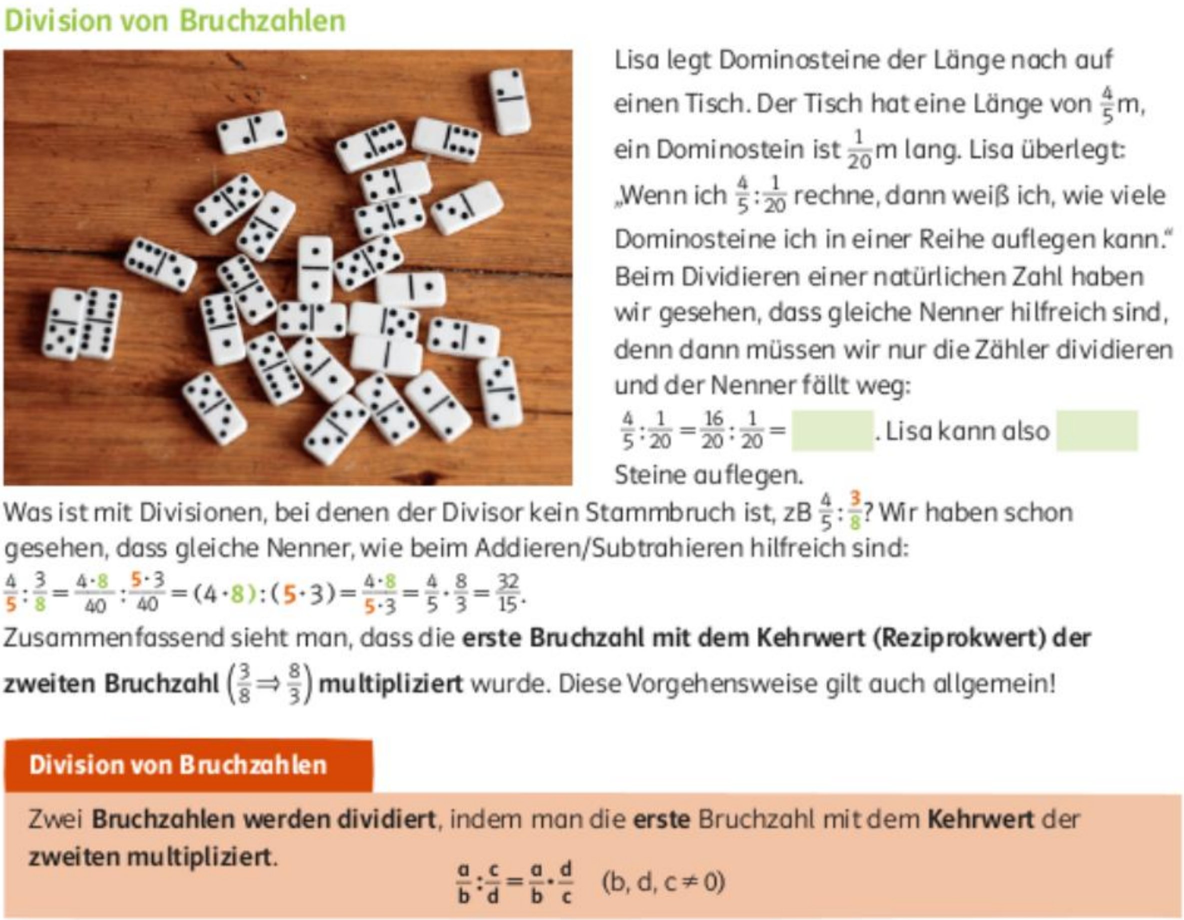
$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$: 6 Teilstrecken

a) $1:\frac{1}{2} =$ b) $1:\frac{1}{3} =$ c) $2:\frac{1}{4} =$ d) $2:\frac{1}{8} =$ e) $4:\frac{2}{3} =$

267 Führe die Division durch! Vergiss nicht auf die Probe!
a) $3:\frac{1}{2} =$ c) $7:\frac{1}{4} =$ e) $9:\frac{1}{5} =$ g) $5:7\frac{1}{2} =$
b) $4:\frac{1}{8} =$ d) $2:\frac{1}{4} =$ f) $5:\frac{5}{6} =$ h) $4:1\frac{1}{2} =$

268 Womit muss man die gegebene Zahl multiplizieren, um 1 zu erhalten?
a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{1}{a}$ d) $\frac{a}{b}$ e) 100 ⊞ f) $2 \cdot x$ ⊞ g) $\frac{2}{5 \cdot r}$

269 Der Schall legt in der Sekunde etwa $\frac{1}{3}$ km zurück. Beim Bau einer 2451 m langen Trasse einer Straße wird mit 5,3 kg TNT gesprengt.
1) Wann hört der Beobachter den Knall, wenn er a) 2 km, b) 3 km, c) 10 km entfernt ist?
2) Welche Angaben hast du für die Aufgabenstellung in 1) verwendet?
3) Finde eine weitere Aufgabenstellung!



Division von Bruchzahlen

Lisa legt Dominosteine der Länge nach auf einen Tisch. Der Tisch hat eine Länge von $\frac{4}{5}$ m, ein Dominostein ist $\frac{1}{20}$ m lang. Lisa überlegt: „Wenn ich $\frac{4}{5}:\frac{1}{20}$ rechne, dann weiß ich, wie viele Dominosteine ich in einer Reihe auflegen kann.“ Beim Dividieren einer natürlichen Zahl haben wir gesehen, dass gleiche Nenner hilfreich sind, denn dann müssen wir nur die Zähler dividieren und der Nenner fällt weg:

$\frac{4}{5}:\frac{1}{20}=\frac{16}{20}:\frac{1}{20}=$ ☐. Lisa kann also ☐ Steine auflegen.

Was ist mit Divisionen, bei denen der Divisor kein Stammbruch ist, zB $\frac{4}{5}:\frac{3}{8}$? Wir haben schon gesehen, dass gleiche Nenner, wie beim Addieren/Subtrahieren hilfreich sind:

$\frac{4}{5}:\frac{3}{8}=\frac{4\cdot8}{40}:\frac{5\cdot3}{40}=(4\cdot8):(5\cdot3)=\frac{4\cdot8}{5\cdot3}=\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{3}=\frac{32}{15}.$

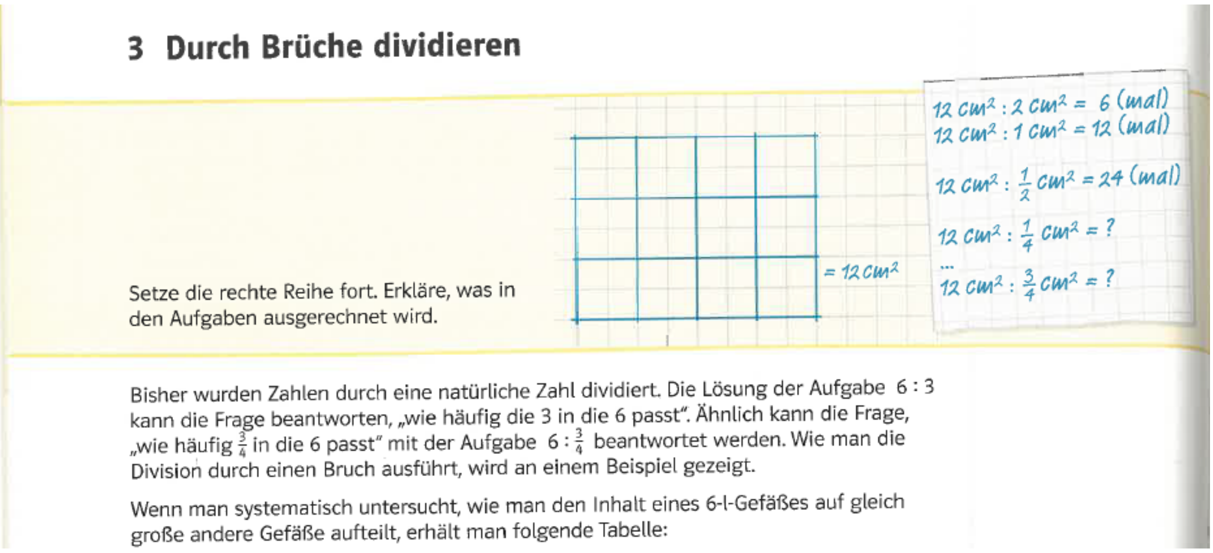
Zusammenfassend sieht man, dass die **erste Bruchzahl mit dem Kehrwert (Reziprokwert) der zweiten Bruchzahl** $\left(\frac{3}{8}\Rightarrow\frac{8}{3}\right)$ **multipliziert** wurde. Diese Vorgehensweise gilt auch allgemein!

Division von Bruchzahlen

Zwei **Bruchzahlen werden dividiert**, indem man die **erste** Bruchzahl mit dem **Kehrwert** der **zweiten multipliziert**.

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c} \quad (b, d, c \neq 0)$$

Anhang B („Lambacher Schweizer“ (2019), Klett Verlag)



3 Durch Brüche dividieren

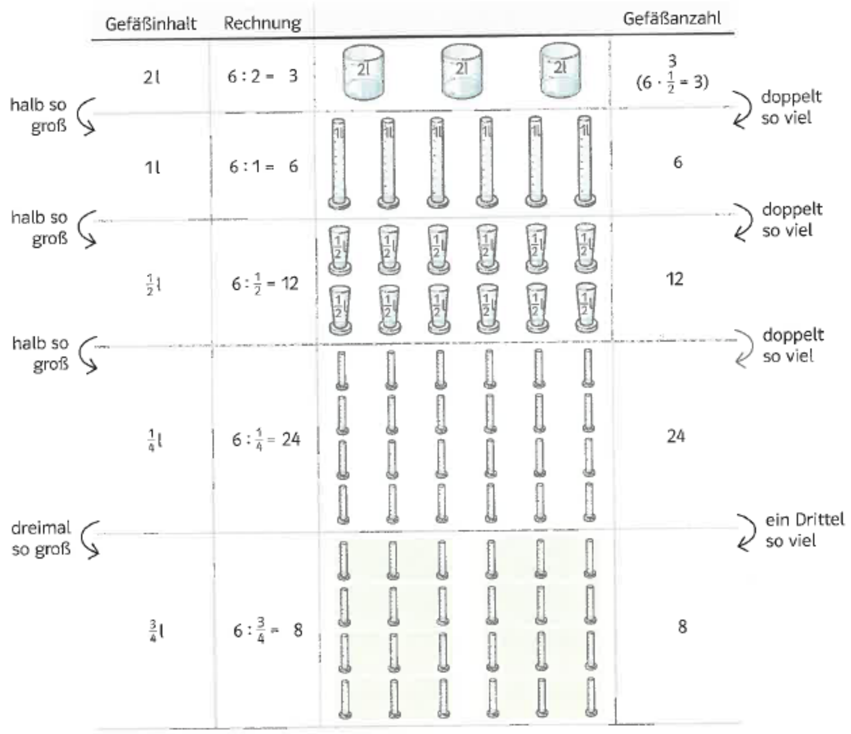
Setze die rechte Reihe fort. Erkläre, was in den Aufgaben ausgerechnet wird.

= 12 cm²

12 cm² : 2 cm² = 6 (mal)
12 cm² : 1 cm² = 12 (mal)
12 cm² : $\frac{1}{2}$ cm² = 24 (mal)
12 cm² : $\frac{1}{4}$ cm² = ?
…
12 cm² : $\frac{3}{4}$ cm² = ?

Bisher wurden Zahlen durch eine natürliche Zahl dividiert. Die Lösung der Aufgabe 6 : 3 kann die Frage beantworten, „wie häufig die 3 in die 6 passt“. Ähnlich kann die Frage, „wie häufig $\frac{3}{4}$ in die 6 passt“ mit der Aufgabe 6 : $\frac{3}{4}$ beantwortet werden. Wie man die Division durch einen Bruch ausführt, wird an einem Beispiel gezeigt.

Wenn man systematisch untersucht, wie man den Inhalt eines 6-l-Gefäßes auf gleich große andere Gefäße aufteilt, erhält man folgende Tabelle:



Gefäßinhalt	Rechnung	Gefäßanzahl
2 l	$6 : 2 = 3$	3 $(6 \cdot \frac{1}{2} = 3)$
1 l	$6 : 1 = 6$	6
$\frac{1}{2}$ l	$6 : \frac{1}{2} = 12$	12
$\frac{1}{4}$ l	$6 : \frac{1}{4} = 24$	24
$\frac{3}{4}$ l	$6 : \frac{3}{4} = 8$	8

Beim Umfüllen der 1-l-Gefäße in $\frac{1}{4}$-l-Gefäße vervierfacht sich die Gefäßanzahl: $6 \cdot 4 = 24$.

Beim Umfüllen der $\frac{1}{4}$-l-Gefäße in $\frac{3}{4}$-l-Gefäße benötigt man $\frac{1}{3}$ der Gefäße. $24 \cdot \frac{1}{3} = 8$ Gefäße.

Ergebnis: $\frac{3}{4}$ l passt 8-mal in 6 l, also $6 : \frac{3}{4} = 8$. Kontrolle: $8 \cdot \frac{3}{4} = \frac{8 \cdot 3}{4} = \frac{24}{4} = 6$.

Insgesamt erhält man als Rechnung: $6 : \frac{3}{4} = 6 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} = 6 \cdot \frac{4}{3} = 8$ Gefäße.

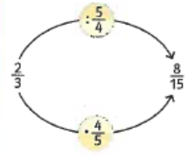
Anstatt durch $\frac{3}{4}$ zu dividieren, kann man also auch mit $\frac{4}{3}$ multiplizieren. $\frac{4}{3}$ nennt man auch den **Kehrwert** von $\frac{3}{4}$, weil hier Zähler und Nenner vertauscht (umgekehrt) wurden.

Division durch einen Bruch
Man dividiert durch einen Bruch, indem man mit dem **Kehrwert** multipliziert.
Der Kehrwert ist dabei der Bruch, bei dem Zähler und Nenner vertauscht sind.

$\frac{5}{6} : \frac{2}{7} = \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{2} = \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 2} = \frac{35}{12}$

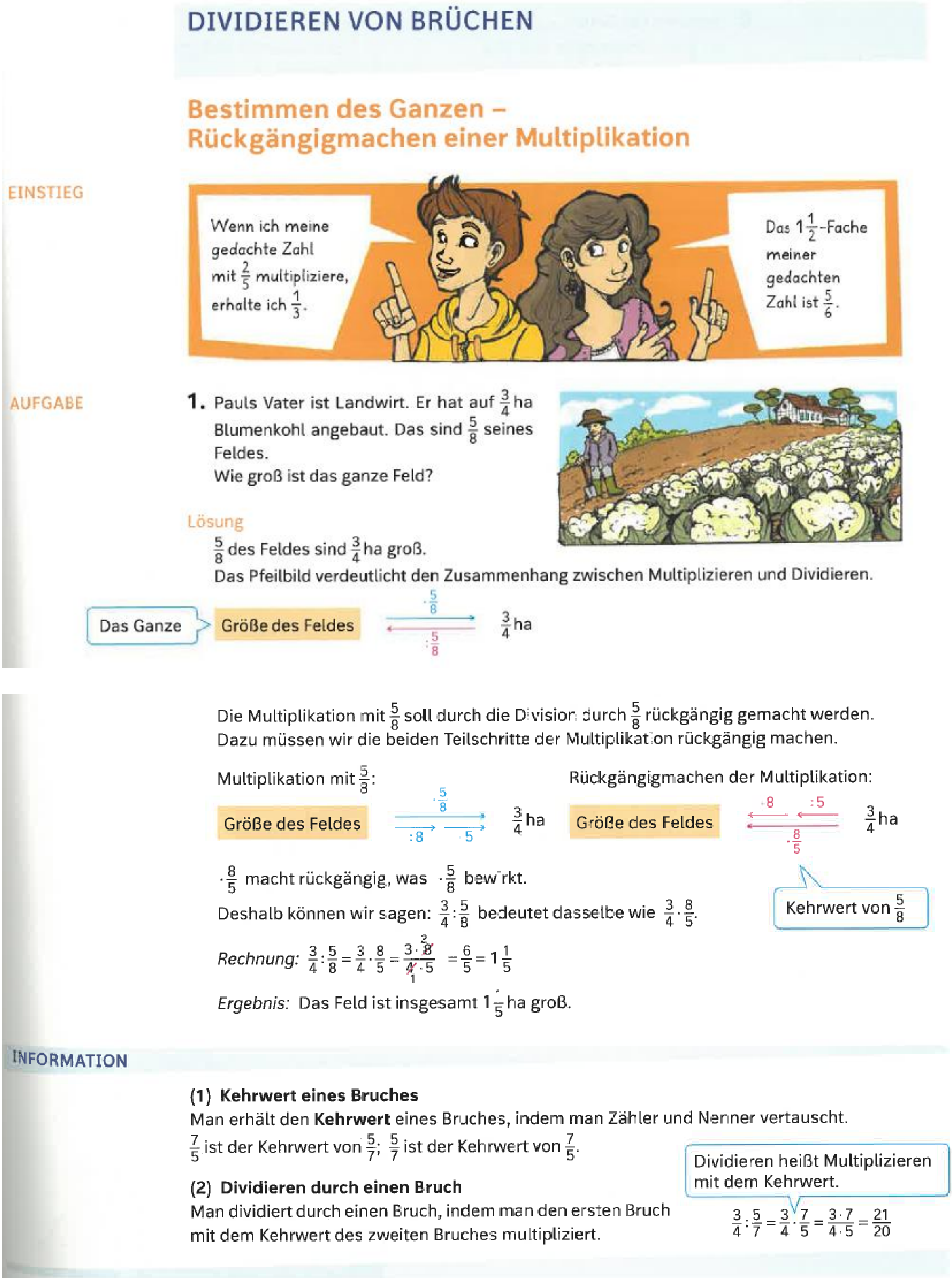
Die Regel gilt auch für die Division durch eine natürliche Zahl.

$\frac{3}{7} : 2 = \frac{3}{7} : \frac{2}{1} = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 1}{7 \cdot 2} = \frac{3}{14}$



$: \frac{5}{4}$ und $\cdot \frac{4}{5}$ führen zum selben Ergebnis.

Anhang C („Mathematik heute“ (2020), Westermann Gruppe)



DIVIDIEREN VON BRÜCHEN

Bestimmen des Ganzen – Rückgängigmachen einer Multiplikation

EINSTIEG

Wenn ich meine gedachte Zahl mit $\frac{2}{5}$ multipliziere, erhalte ich $\frac{1}{3}$.

Das $1\frac{1}{2}$-Fache meiner gedachten Zahl ist $\frac{5}{6}$.

AUFGABE

1. Pauls Vater ist Landwirt. Er hat auf $\frac{3}{4}$ ha Blumenkohl angebaut. Das sind $\frac{5}{8}$ seines Feldes.
Wie groß ist das ganze Feld?

Lösung

$\frac{5}{8}$ des Feldes sind $\frac{3}{4}$ ha groß.
Das Pfeilbild verdeutlicht den Zusammenhang zwischen Multiplizieren und Dividieren.

Das Ganze

$$\begin{tikzcd}\text{Größe des Feldes} \arrow[r, shift left, "\cdot\frac{5}{8}"] & \frac{3}{4}\text{ ha} \arrow[l, shift left, ":\frac{5}{8}"]\end{tikzcd}$$

Die Multiplikation mit $\frac{5}{8}$ soll durch die Division durch $\frac{5}{8}$ rückgängig gemacht werden.
Dazu müssen wir die beiden Teilschritte der Multiplikation rückgängig machen.

Multiplikation mit $\frac{5}{8}$:

$$\begin{tikzcd}\text{Größe des Feldes} \arrow[rr, "\cdot\frac{5}{8}"] \arrow[r, ":8"'] & {} \arrow[r, "\cdot 5"'] & \frac{3}{4}\text{ ha}\end{tikzcd}$$

Rückgängigmachen der Multiplikation:

$$\begin{tikzcd}\text{Größe des Feldes} & {} \arrow[l, "\cdot 8"] & \frac{3}{4}\text{ ha} \arrow[l, ":5"] \arrow[ll, bend left, "\cdot\frac{8}{5}"]\end{tikzcd}$$

Kehrwert von $\frac{5}{8}$

$\cdot\frac{8}{5}$ macht rückgängig, was $\cdot\frac{5}{8}$ bewirkt.
Deshalb können wir sagen: $\frac{3}{4}:\frac{5}{8}$ bedeutet dasselbe wie $\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{5}$.

Rechnung: $\frac{3}{4}:\frac{5}{8}=\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{5}=\frac{3\cdot\overset{2}{\cancel{8}}}{\underset{1}{\cancel{4}}\cdot 5}=\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}$

Ergebnis: Das Feld ist insgesamt $1\frac{1}{5}$ ha groß.

INFORMATION

(1) Kehrwert eines Bruches
Man erhält den **Kehrwert** eines Bruches, indem man Zähler und Nenner vertauscht.
$\frac{7}{5}$ ist der Kehrwert von $\frac{5}{7}$; $\frac{5}{7}$ ist der Kehrwert von $\frac{7}{5}$.

(2) Dividieren durch einen Bruch
Man dividiert durch einen Bruch, indem man den ersten Bruch mit dem Kehrwert des zweiten Bruches multipliziert.

Dividieren heißt Multiplizieren mit dem Kehrwert.

$\frac{3}{4}:\frac{5}{7}=\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{5}=\frac{3\cdot 7}{4\cdot 5}=\frac{21}{20}$

Anhang D (Auszug aus Leitfaden des Expert:innen-Interviews zur Bruchdivision)

- Geschlossene Fragen
  - Wie lange unterrichten Sie bereits?
  - In wie vielen Kursen haben Sie das Thema Bruchrechnung/Bruchdivision eingeführt?
- Offene Fragen
  - Wie erarbeiten Sie typischerweise die Divisionsregel für Brüche? (*Herleitungsidee*)
    - Gibt es Darstellungen oder Darstellungsformen, die Sie dabei regelmäßig verwenden?
    - Gibt es Inhalte, die Sie vor der Erarbeitung der Bruchdivision wiederholen? (*wiederholte Grundlagen*)
    - Gibt es Aspekte Ihrer Erarbeitung der Divisionsregel, mit denen Sie besonders gute Erfahrungen gemacht haben? (*bewährte Elemente*)
    - Gibt es (weitere) Verständnisprobleme der SuS, die Sie beim Einstieg in die Bruchdivision regelmäßig beobachten können? (*gedankliche Herausforderungen*)
  - Haben Sie sonst noch einen Aspekt, der Ihnen in Bezug auf die Bruchdivision wichtig ist?
- Auseinandersetzung mit den drei Schulbuchauszügen (*Anhänge A-C*)
  - Wie würden Sie die Schulbuchauszüge charakterisieren? (*jeweils einzeln*)
    - Was halten Sie für relevant?
    - Finden Sie etwas besonders positiv bzw. kritisch?