Zur Auffassung und Rekonstruktion individueller Vorstellungen im Rahmen des Grundvorstellungskonzeptes

TOMMA JETSES, BIELEFELD & ALEXANDER SALLE, BIELEFELD

Zusammenfassung*: Im Grundvorstellungskonzept ist eine Herleitung von Grundvorstellungen als Leitlinien für die Gestaltung von Lehr-Lern-Prozessen (normative Ebene) sowie eine Rekonstruktion individueller Vorstellungen (deskriptive Ebene) angelegt. Wie jedoch individuelle Vorstellungen erstens im Grundvorstellungskonzept aufgefasst und zweitens rekonstruiert werden können, wird in der Fachliteratur unterschiedlich erläutert oder bleibt implizit. Im Beitrag wird eine Auffassung individueller Vorstellungen für das Grundvorstellungskonzept vorgeschlagen und mit einem Vorgehen zur Rekonstruktion verknüpft. Die Auffassung und das Vorgehen werden illustriert an Analysen von Interviewausschnitten einer Studie zu Sinus und Kosinus.*

Abstract: *The concept of basic ideas includes the derivation of basic ideas as guidelines for the design of teaching-learning processes (normative level) and the reconstruction of individual conceptions (descriptive level). However, how exactly individual conceptions can firstly be understood in the concept of basic ideas and secondly reconstructed is described differently in the relevant literature or is frequently left implicit. In this article, we propose a conceptualization of individual mental conceptions for the concept of basic ideas and link it with a possible procedure for reconstructing individual conceptions. This conceptualization and the procedure are illustrated on the basis of analyses of interview excerpts from a study on the concept of sine and cosine.*

1. Einleitung

Grundvorstellungen werden auf der normativen Ebene des Grundvorstellungskonzeptes nach z. B. vom Hofe (1995), Greefrath et al. (2016) sowie Salle und Clüver (2021) als Leitlinien für die Gestaltung von Mathematikunterricht hergeleitet. Sie werden als fachlich korrekte, inhaltliche Deutungen mathematischer Begriffe aufgefasst, die Lernende unter anderem zur Anwendung dieser Begriffe sowie zum mentalen Operieren mit diesen befähigen sollen[1] (Greefrath et al., 2016; Salle & Clüver, 2021; vom Hofe, 1995). Neben ihrer Funktion als Leitlinien dienen Grundvorstellungen im Mathematikunterricht auch als Orientierung für die Einordnung *individueller Vorstellungen* mathematischer Begriffe (z. B. Prediger, 2010; vom Hofe, 1995; Weber, 2013). Eine Analyse individueller Vorstellungen mathematischer Begriffe ist nach vom Hofe (1995) auf der deskriptiven Ebene des Grundvorstellungskonzeptes verortet und wird in zahlreichen empirischen Forschungsarbeiten, die auf das Grundvorstellungskonzept Bezug nehmen, verfolgt (z. B. Gudladt, 2023; Hafner, 2012; Schink, 2013; Wessel, 2015).

In den vorliegenden Arbeiten lassen sich zwei zentrale Unklarheiten identifizieren: Erstens wurde bislang theoretisch weder diskutiert noch ausdifferenziert, welche grundsätzliche Auffassung solcher begriffsbezogenen individuellen Vorstellungen für deskriptives Arbeiten im Rahmen von Forschungsvorhaben zum Grundvorstellungskonzept geeignet erscheint. Dabei wird entweder auf andere theoretische Konzepte ausgewichen, die spezifische Eigenheiten des Grundvorstellungskonzeptes nicht hinreichend berücksichtigen (z. B. concept image), oder eine theoretische Festlegung bleibt aus bzw. implizit. Folglich ist ein In-Beziehung-Setzen von normativ formulierten Grundvorstellungen und empirisch rekonstruierten individuellen Vorstellungen kaum systematisch möglich.

Zweitens finden sich in der Literatur ebenfalls verschiedene methodologische Überlegungen, wie individuelle Vorstellungen – als Bestandteil der deskriptiven Ebene des Grundvorstellungskonzeptes – rekonstruiert werden können (z. B. Greefrath et al., 2021; Kaufmann, 2021). Diese werden jedoch in unterschiedlicher Weise an den zugrunde gelegten theoretischen Rahmen des Grundvorstellungskonzeptes geknüpft – oder bleiben ebenfalls implizit. Ein methodischer Rahmen, der eine intersubjektiv nachvollziehbare Rekonstruktion individueller Vorstellungen auf der deskriptiven Ebene des Grundvorstellungskonzeptes ermöglicht, liegt bislang nicht vor.

Die geschilderten Unklarheiten hängen zusammen: Eine nachvollziehbare Rekonstruktion kann nur auf einer klar definierten begrifflichen Grundlage vorgenommen werden. Zudem erschweren die Unschärfen die Einordnung von Forschungsergebnissen, die Weiterentwicklung des Diskurses über Vorstellungen, die Planung von Anschlussstudien sowie die theoretische Fundierung des Grundvorstellungskonzeptes, weshalb im Folgenden eine theoretische und methodologische Auseinandersetzung mit den genannten Grundlagen vorgenommen wird.

Der vorliegende Artikel leistet in diesem Sinne einen Beitrag zu zwei zentralen Forschungsanliegen, die aus den aufgezeigten Forschungslücken resultieren und – wie geschildert – unmittelbar zusammenhängen: Zunächst soll basierend auf zentralen Eigenschaften des Grundvorstellungskonzeptes (Abschnitt 2) und basierend auf bisherigen Auffassungen individueller Vorstellungen (Abschnitte 3.1 & 3.2) ein Vorschlag zur Definition individueller Vorstellungen erarbeitet werden. Auf diese Weise sollen individuelle Vorstellungen präzise gefasst werden, um sie auf der deskriptiven Ebene des Grundvorstellungskonzeptes nutzen und auf systematische Weise normativ hergeleiteten Grundvorstellungen gegenüberstellen zu können (Abschnitt 3.3). Aufbauend auf einem Literaturüberblick zu bisherigen Analyseverfahren (Abschnitt 4.1) soll dann dargelegt werden, wie individuelle Vorstellungen im Sinne der vorgeschlagenen Definition systematisch rekonstruiert werden können (Abschnitt 4.2). Das vorgeschlagene Vorgehen zur Rekonstruktion individueller Vorstellungen wie auch die Begriffsdefinition individueller Vorstellungen werden im vorliegenden Beitrag an einem Beispiel illustriert (Abschnitt 5). Abschließend werden die formulierten Vorschläge kritisch reflektiert und es werden entsprechende Perspektiven aufgezeigt (Abschnitt 6).

Die aufgeführten Forschungsanliegen sind in der Grundlagenforschung zu verorten. Zusammen mit Arbeiten zur normativen Ebene (Salle & Clüver, 2021) sollen die Ergebnisse des Beitrags einen weiteren Grundbaustein für konstruktive Überlegungen legen, in denen Grundvorstellungen und individuelle Vorstellungen gleichermaßen bei der Entwicklung von Forschungsarbeiten und der Gestaltung von Lerngelegenheiten berücksichtigt werden.

2. Grundvorstellungen mathematischer Begriffe

2.1 Fachlich korrekte, inhaltliche Deutungen mathematischer Begriffe

Grundvorstellungen werden in zahlreichen, aktuellen mathematikdidaktischen Arbeiten (z. B. Etzold, 2021; Katter, 2023; Salle & Clüver, 2021) anknüpfend an die Arbeit von vom Hofe (1995) oder Greefrath et al. (2016) als fachlich korrekte, inhaltliche Deutungen mathematischer Begriffe[2] aufgefasst. Für vom Hofe (1995) „charakterisiert" eine Grundvorstellung „mathematische Begriffe oder Verfahren und deren Deutungsmöglichkeiten in realen[3] Situationen" (S. 98). Greefrath et al. (2016) konkretisieren diese Auffassung von Grundvorstellungen durch folgende Definition:

> Eine Grundvorstellung zu einem mathematischen Begriff ist eine inhaltliche Deutung des Begriffs, die diesem Sinn[4] gibt (Greefrath et al., 2016, S. 17).

Diese Definition einer Grundvorstellung als *inhaltliche Deutung* eines mathematischen Begriffs wird wie folgt erläutert:

> Durch Grundvorstellungen können fachliche Aspekte[5] eines mathematischen Begriffs erfasst und in Bezug zu sinnhaltigen Kontexten mit Bedeutung versehen werden (Greefrath et al., 2016, S. 17).

Die in den Definitionen und ihren Erläuterungen zum Tragen kommenden Termini „Deutung" und „Bedeutung" werden in mathematikdidaktischen Arbeiten und darüber hinaus häufig synonym verwendet (z. B. Häsel-Weide, 2016; Steinbring, 2000). In diesem Sinne wird der Terminus der „Deutung" im Etymologischen Wörterbuch entsprechend als „Auslegung", „Erklärung" und „Bedeutung" erläutert (Pfeifer, 1993, S. 218). Um zu konkretisieren, was eine inhaltliche Deutung und damit auch eine Grundvorstellung charakterisiert, greifen wir daher zunächst auf vorliegende mathematikdidaktische Erläuterungen der *Bedeutung* mathematischer Begriffe zurück. Steinbring (2000) charakterisiert unter Bezugnahme auf das epistemologische Dreieck „Bedeutungen eines mathematischen Begriffs" (S. 34) als aktiv zu konstruierende „Wechselbeziehungen zwischen Zeichen-/Symbolsystemen und Referenzkontexten/Gegenstandsbereichen" (S. 34). Eine systematische Unterscheidung zwischen den Termini „Bedeutung" und „Deutung" nimmt Steinbring (2000) in seinem Beitrag zu mathematikbezogenen Interaktionsprozessen nicht vor, was z. B. durch die folgende, im Beitrag aufgeworfene, Frage deutlich wird: „Wie erhalten die neuen mathematischen Zeichen und Symbole Bedeutung, und von welcher Art ist diese (Be-)Deutung?" (Steinbring, 2000, S. 31).

Auch Häsel-Weide (2016) bezieht sich in ihrer Arbeit zum Ablösen vom zählenden Rechnen auf die soeben zitierte Definition von Bedeutung nach Steinbring, um sogenannte „struktur-fokussierende *Deutungen*" (S. 59, Hervorh. d. Verf.) von Kindern der zweiten Klasse zu analysieren. Spezifisch in Interaktionsprozessen werden Deutungen z. B. bei Hüser (2023) und Tiedemann et al. (2023) betrachtet. Diese Arbeiten fokussieren Deutungsprozesse, die aus einer Interaktion zwischen Schüler:innen, Interviewer:innen oder Lehrkräften hervorgehen. Damit bezieht sich eine Deutung in diesen Arbeiten auf *Äußerungen in der Interaktion*, während im vorliegenden Beitrag Deutungen *fachlicher, mathematischer Begriffe* im Erkenntnisinteresse stehen. In beiden Fällen werden Deutungen allerdings unter Bezugnahme auf das epistemologische Dreieck und die Arbeiten Steinbrings analysiert.

Anknüpfend an diese häufig synonyme Verwendung der Termini „Bedeutung" und „Deutung", anknüpfend an die Erläuterung von „Bedeutung" nach Steinbring (2000, S. 34) und anknüpfend an die Arbeiten von vom Hofe (1995) sowie die von Greefrath et al. (2016) spezifizieren wir den Terminus der inhaltlichen Deutung eines mathematischen Begriffs für den vorliegenden Beitrag wie folgt: Eine *inhaltliche Deutung eines mathematischen Begriffs* fassen wir auf als eine Auslegung des mathematischen Begriffs, die als Ergebnis eines Deutungsprozesses entsteht (s. a. Jetses et al., 2024). Dieser Deutungsprozess besteht in einem Aufeinanderbeziehen von Zeichen- oder Symbolsystemen und realitätsnahen oder mathematischen Referenzkontexten (s. a. Steinbring, 2000).

Diese Definition einer inhaltlichen Deutung mathematischer Begriffe hat Überschneidungen mit der internationalen Diskussion um „giving meaning to signs and configurations" (Goldin, 2003, S. 277). Für Goldin (2003) entsteht eine semantische Bedeutungszuschreibung der besagten Zeichen und Konfigurationen, indem diese Zeichen und Konfigurationen wiederum andere Konfigurationen aus anderen Repräsentationssystemen bezeichnen oder darstellen. Als Beispiel führt Goldin (2003) den Vektor an, der eine Geschwindigkeit oder eine Kraft bezeichnet.

Die Art der jeweiligen Referenzkontexte, auf die sich inhaltliche Deutungen mathematischer Begriffe beziehen, begründet auch die in verschiedenen Arbeiten vorgenommene Einteilung in primäre oder sekundäre Grundvorstellungen (z. B. Fetzer & Paravicini, 2024; vom Hofe & Blum, 2016). Solche Grundvorstellungen, bzgl. derer sich die entsprechende Deutung auf einen *realitätsnahen* Referenzkontext bezieht, können eher als primäre Grundvorstellungen bezeichnet werden, während diejenigen Grundvorstellungen, die sich auf einen Referenzkontext mit vorrangig mathematischen Darstellungen beziehen, eher der Definition einer sekundären Grundvorstellung entsprechen (Stölting, 2008; vom Hofe & Blum, 2016).[6] Z. B. basiert die Deutung und Grundvorstellung der Subtraktion als Wegnehmen unter anderem auf dem Aufeinanderbeziehen des Subtrahenden und der Menge an bspw. weggenommenen Murmeln, die einem *realitätsnahen* Referenzkontext entspringen (Schulz & Wartha, 2021). Dahingegen resultiert beispielsweise die inhaltliche Deutung des Sinusbegriffs (bzgl. eines Winkels) als Seitenverhältnis von Gegenkathete und Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck (Seitenverhältnisgrundvorstellung) aus einem Aufeinanderbeziehen von Zähler und Nenner des Bruches in der Gleichung $sin(\alpha) = \frac{a}{c}$ und dem *mathematischen* Referenzkontext eines gegebenen rechtwinkligen Dreiecks mit den entsprechenden Dreiecksseiten (Salle & Clüver, 2021).

Dass im Zuge einer Grundvorstellung von einer *inhaltlichen* Deutung gesprochen wird, unterstreicht, dass durch diese Deutung keine Bewertung der Begriffe im Sinne von wichtig oder unwichtig vorgenommen wird, sondern, wie aufgeführt, die Begriffe mit realitätsnahen oder mathematischen Referenzkontexten in Bezug gesetzt werden. Diese Referenzkontexte können in mathematikdidaktischen Zusammenhängen und insbesondere im Zusammenhang mit Grundvorstellungen durch „Phänomene" nach Freudenthal (1983, S. ix) näher spezifiziert werden (Salle & Clüver, 2021): Phänomene stellen nach Freudenthal (1983, S. 28 & S. ix) realitätsnahe oder mathematische Zusammenhänge dar, in deren Rahmen die mathematischen Begriffe relevant sind und die somit durch die mathematischen Begriffe strukturiert werden. Damit handelt es sich also auch um Zusammenhänge, in denen mathematische Begriffe für Lernende erfahrbar gemacht werden. *Welche* Phänomene in konkreten Lehr-Lern-Situationen für eine Deutung der mathematischen Begriffe herangezogen werden, ist grundsätzlich offen. Die Auswahl von Phänomenen ist in aller Regel durch die Lehrkraft gesteuert, die bestimmte Phänomene durch z. B. vorbereitete Arbeitsblätter, Erklärungen oder Lern- und Prüfungsmaterialien in den Unterricht einbringt. Auch kann die Auswahl durch Schulbücher beeinflusst sein, die bestimmte Phänomene in beispielsweise Anwendungsaufgaben thematisieren.

Grundvorstellungen werden auf Basis sachanalytischer Überlegungen durch Fachdidaktiker:innen hergeleitet (Griesel et al., 2019; Salle & Clüver, 2021) und stellen folglich *fachlich korrekte* inhaltliche Deutungen dar. Im Zuge der Herleitung von Grundvorstellungen ist es möglich,

> dass konkrete inhaltliche Deutungen ein und desselben mathematischen Begriffs in verschiedenen Kontexten

> zwar Unterschiede aufweisen, dass jedoch die Gemeinsamkeiten dieser unterschiedlichen Deutungen letztendlich dazu führen, die unterschiedlichen Deutungen zu genau einer Grundvorstellung zusammenzufassen (Jetses et al., 2024, S. 3).

Beispielsweise bezieht sich die zum Integralbegriff formulierte Rekonstruktionsgrundvorstellung auf mehrere konkrete inhaltliche Deutungen des Integrals als z. B. zurückgelegter Weg, als Atemzugvolumen oder Gewinn einer Firma (Greefrath et al., 2016). In diesem Zusammenhang stellt eine Grundvorstellung eine aus konkreten inhaltlichen Deutungen herausgearbeitete verallgemeinerte Deutung dar, die im folgenden Abschnitt genauer beschrieben wird.

2.2 Sinnkonstruktion, mentales Operieren und Anwenden

Nach vom Hofe (1995) verfolgt der unterrichtliche Einsatz von Grundvorstellungen drei zentrale Ziele. Erstens soll eine Ausbildung von Grundvorstellungen die Lernenden zur Sinnkonstruktion eines Begriffs „durch Anknüpfung an bekannte Sach- oder Handlungszusammenhänge“ (vom Hofe 1995, S. 97) befähigen. Zweitens sollen die Lernenden hierdurch mentale Repräsentationen[7] aufbauen, die ihnen ein „operatives Handeln auf der Vorstellungsebene ermöglichen“ (vom Hofe, 1995, S. 98) und drittens sollen die Lernenden durch die Ausbildung von Grundvorstellungen in der Lage sein, die mathematischen Begriffe anzuwenden. Diese Ziele werden im Folgenden näher erläutert, da im Zuge der weiteren Begriffsspezifizierung individueller Vorstellungen (s. Abschnitt 3.3) hierauf Bezug genommen wird.

1. Vollstedt (2011, S. 28) und Vorhölter (2009, S. 24) verstehen grundsätzlich unter dem „Sinn“ mathematischer Gegenstände oder Handlungen die „persönliche Relevanz“ eben dieser für ein Individuum. Im engeren Bezug auf mathematische Begriffe kann daher unter dem „Sinn“ eines mathematischen Begriffs eine „persönliche Relevanz“ dieses Begriffs für die Lernenden verstanden werden. Somit hängt in diesem Verständnis eine Sinnkonstruktion auch immer von persönlichen Vorerfahrungen ab:

> Schülerinnen und Schüler konstruieren ihren subjektiven und individuellen Sinn in Abhängigkeit von ihren Erfahrungen, Zielen und Wünschen (Vorhölter & Vollstedt 2012, S. 152).

Indem Grundvorstellungen die mathematischen Begriffe mit solchen realitätsnahen oder mathematischen Phänomenen verknüpfen, die Lernenden (potentiell) vertraut sind, können Lernende durch Grundvorstellungen eine persönliche Relevanz der mathematischen Begriffe erfahren – also nach Vollstedt (2011) und Vorhölter (2009) eine Sinnkonstruktion vornehmen –, müssen dies jedoch nicht zwingend. Das Grundvorstellungskonzept sieht allerdings in dieser Verknüpfung von Begriffen und Phänomenen eine zentrale Möglichkeit der Sinnkonstruktion sowie allgemeiner der Entwicklung eines inhaltlichen Verständnisses. So besteht auch für vom Hofe (1995) eine Sinnkonstruktion mathematischer Begriffe in der „Anknüpfung an bekannte Sach- oder Handlungszusammenhänge“ (S. 97). Für Bender (1991) ist diese Anknüpfung von Grundvorstellungen an für den Lernenden bekannte Phänomene zentral für den Erwerb mathematischer Begriffe:

> [F]ür den Lernenden ist die Einbettung der Begriffe in irgendeine, möglicherweise wenig konkrete Form von lebensweltlichen Situationen eine unumgängliche Voraussetzung für deren Erwerb, da es ihm sonst nicht möglich ist, einen Sinn für das zu Lernende zu konstruieren (Bender 1991, S. 49).

Bender (1991) fasst diese Überlegungen unter dem Schlagwort „Verankerung in der Lebenswelt“ (S. 49) zusammen. Diese „Verankerung in der Lebenswelt“ charakterisiert für Bender (1991, S. 48 ff.) neben einer „allgemeinen Verbindlichkeit“ und einem „fundamentalen Charakter für das jeweilige Teilgebiet“ den Wortbestandteil „Grund-“ in dem Kompositum „Grundvorstellung“.[8]

2. Das *mentale Operieren* kann in Anlehnung an das Bewegliche Denken nach Roth (2005) als „das bewusste, aktive Verändern einer evtl. zunächst statischen Konfiguration einschließlich der Reflexion der Konsequenzen dieser Veränderung“ (S. 38) charakterisiert werden. Dieses „Verändern“ soll nicht ausschließlich als konkrete Handlung, sondern letztendlich gedanklich durchgeführt werden können; also als „gedankliche Handlung“ bzw. „Denkhandlung“ (Gasteiger, 2023, S. 3). Beispielsweise sollen im Sinne einer Grundvorstellung zur Addition Lernende dazu befähigt werden, „gedanklich zwei Mengen im Sinne des Vereinigens zusammen[zuschieben]“ (Gasteiger, 2023, S. 3).

3. Das *Anwenden* der mathematischen Begriffe und damit einhergehend das Anwenden der zu diesen Begriffen formulierten Grundvorstellungen bezieht sich zum einen auf realitätsnahe Anwendungen der Begriffe, wie z. B. beim Mathematisieren eines Realmodells in Modellierungsproblemen (Greefrath et al., 2016; vom Hofe, 1995) und zum anderen auf Anwendungen der Begriffe im Zuge von Übersetzungen zwischen verschiedenen Darstellungsebenen (Schulz & Wartha, 2021; Stölting, 2008). Bzgl. der zuerst genannten realitätsnahen Anwendung hebt Greefrath

(2018) unter Verweis auf qualitative Studien wie die von Matos und Carreira (1995) sowie Greefrath (2015) hervor,

> dass Lernende bei der Bearbeitung von Modellierungsproblemen zwar Modellierungskreisläufen nicht idealtypisch folgen, jedoch in der Regel häufig zwischen *Rest der Welt* und *Mathematik* wechseln (Greefrath, 2018, S. 57, Hervorh. i. Orig.).

Hierfür, d. h. „für diesen Wechsel[,] sind Grundvorstellungen mathematischer Begriffe von zentraler Bedeutung“ (Greefrath, 2018, S. 57). Die Rolle von Grundvorstellungen bei Übersetzungen zwischen verschiedenen Darstellungsebenen erläutern Schulz und Wartha (2021) am Beispiel der Grundvorstellungen zur Addition. Bezüglich der Grundvorstellung des Hinzufügens kann z. B. „der Term 4 + 3 […] in ein Hinzufügen von 3 Plättchen zu 4 Plättchen und der Frage nach der Gesamtmenge übersetzt werden“, wobei „das Ergebnis dieser Handlung […] in einem Bild festgehalten werden“ (Schulz & Wartha, 2021, S. 75) kann.

3. Individuelle Vorstellungen mathematischer Begriffe

3.1 Notwendigkeit einer Spezifizierung individueller Vorstellungen

In Abschnitt 2 wurden Grundvorstellungen als fachlich korrekte inhaltliche Deutungen mathematischer Begriffe spezifiziert. Darüber hinaus wurden zentrale Ziele des Grundvorstellungskonzepts (z. B. Greefrath et al., 2016; Salle & Clüver, 2021; vom Hofe, 1995) dargestellt, die zudem Orientierungspunkte für die Gestaltung von Lehr-Lern-Prozessen bieten. Neben der Nutzung dieser Orientierungspunkte ist es für die Unterrichtsgestaltung von zentraler Bedeutung, dass eine Lehrkraft „eine gezielte Sensibilität für die *tatsächlichen* Vorstellungen des Schülers gewinnt“ (vom Hofe, 1995, S. 103, Hervorh. i. Orig.). Eine hierfür notwendige Rekonstruktion individueller Vorstellungen mathematischer Begriffe ist nach vom Hofe (1995) auf der *deskriptiven Ebene* des Grundvorstellungskonzeptes verortet. Die Bedeutung von „Rekonstruktion“ ist dahingehend zu verstehen, dass die „Beziehung [der Forschenden] zum *Gegenstand* der Forschung eine rekonstruktive ist“ (Bohnsack, 2021, S. 36, Hervorh. i. Orig.): Individuelle Vorstellungen mathematischer Begriffe sind als mentale Konstrukte nicht erfassbar (Hanke, 2022) und müssen daher von Forschenden und Lehrpersonen re-konstruiert, d. h. nachvollzogen und nachgebildet werden.

Der hohen Bedeutung individueller Vorstellungen in Forschung und Praxis, die in verschiedenen Arbeiten zum Ausdruck kommt (z. B. Lengnink et al., 2011; Prediger, 2010; vom Hofe, 1995; Weber, 2013), steht in bisherigen Veröffentlichungen zum Grundvorstellungskonzept eine eher wenig spezifizierte Charakterisierung des Begriffs der individuellen Vorstellung gegenüber. Eine konkrete Festlegung auf eine Auffassung *individueller Vorstellungen* liegt bzgl. des Grundvorstellungskonzeptes bislang nicht vor (Salle & Clüver, 2021). Stattdessen wird der Begriff der individuellen Vorstellung in Arbeiten zum Grundvorstellungskonzept unterschiedlich aufgefasst. Häufig wird er auch gar nicht weiter spezifiziert. Diese Forschungslage erschwert es u. a., Analysen individueller Vorstellungen intersubjektiv nachvollziehbar zu gestalten, Anschlussstudien zu planen und Forschungsergebnisse einzuordnen.

Viele Arbeiten, die das Grundvorstellungskonzept für eine normative Analyse mathematischer Begriffe heranziehen, nehmen für eine empirische Datenerhebung und -auswertung auf die Theorie von *concept image* und *concept definition* nach Tall und Vinner (1981) Bezug (z. B. Greefrath et al., 2021; Roos, 2020; Stölting, 2008). Tall und Vinner (1981) definieren die *concept definition* als „a form of words used to specify that concept” (S. 152) und das *concept image* als „the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes“ (S. 152). Mathematikdidaktische Forschungsarbeiten, die individuelle Vorstellungen durch das Begriffspaar *concept image* – *concept definition* konzeptualisieren, fokussieren in ihren Analysen individueller Vorstellungen oftmals mögliche Verbindungen zwischen einerseits Definitionen und andererseits graphischen Visualisierungen mathematischer Begriffe (z. B. Roos, 2020; Stein & Lengnink, 2020). Diese Schwerpunktsetzung ist vor allem dann sinnvoll, wenn eben diese Verbindungen und graphische Visualisierungen auch Ziel der Forschungsfrage sind; ist das Ziel jedoch eine *Rekonstruktion* individueller Vorstellungen, ist zumindest fraglich, inwiefern das Begriffspaar *concept image* – *concept definition* einen theoretischen und analytischen Rahmen bereitstellt, der spezifisch genug für solche empirischen Analysen zum Grundvorstellungskonzept ist. Insbesondere kann die Gefahr bestehen, dass die Definition des *concept image* als Gesamtheit aller zu einem Inhalt assoziierten kognitiven Strukturen für die Konzeptualisierung, Abgrenzung und empirische Zugänglichkeit individueller Vorstellungen in Arbeiten zum Grundvorstellungskonzept zu weit gefasst ist

(Hanke, 2022). Diesbezüglich wird vornehmlich die Schwerpunktsetzung des Grundvorstellungskonzeptes auf inhaltliche Deutungen mathematischer Begriffe, deren Anwendungen und das mentale Operieren nicht hinreichend berücksichtigt (s. Abschnitt 2.2). Dies erschwert es, empirische Ergebnisse zur Weiterentwicklung des Grundvorstellungskonzeptes zu generieren sowie Grundvorstellungen und rekonstruierte individuelle Vorstellungen methodisch nachvollziehbar in Beziehung zu setzen, um z. B. entsprechende Fördermaßnahmen zu entwickeln.

Im Folgenden sollen daher zunächst unterschiedliche national sowie international diskutierte Auffassungen und Eigenschaften individueller Vorstellungen zusammengetragen werden. Basierend auf einem Vergleich dieser Auffassungen wird eine Konzeptualisierung individueller Vorstellungen vorgeschlagen, die als spezifische Grundlage für die Rekonstruktion individueller Vorstellungen in Arbeiten zum Grundvorstellungskonzept dienen kann.

3.2 Überblick über Auffassungen individueller Vorstellungen

Kognitionstheoretisch kann eine individuelle Vorstellung eines mathematischen Begriffs als mentale Repräsentation dieses Begriffs aufgefasst werden (z. B. Obersteiner, 2012; Städtler, 2003), die sich als „geistige Abb[ildung] von Wahrnehmung, Gedächtnisinhalten o[der] Denkprozessen" (Städtler, 2003, S. 676) spezifizieren lässt (s. a. Griesel et al., 2019, S. 129). Auch Bender (1991) bezieht sich in seinen Überlegungen zu Grundvorstellungen auf die Bezeichnung einer Vorstellung als eine

> (innere) anschauliche Repräsentation eines Objekts, einer Situation, einer Handlung usw., deren sensorische Grundlagen im Langzeitgedächtnis gespeichert sind und die in bewußten [sic] Prozessen aktiviert werden (Bender, 1991, S. 52).

Neben der von Bender (1991) und auch Griesel et al. (2019) vorgenommenen Einordnung von Grundvorstellungen als (idealtypische) mentale Repräsentationen wird auch der Begriff des *mentalen Modells* – und zwar im Sinne von mentalen Modellen, die Lernende aus fachdidaktischer Perspektive ausbilden sollen – zur Charakterisierung von Grundvorstellungen herangezogen (z. B. Greefrath et al., 2021; Kleine et al., 2005; Prediger, 2008; Wessel, 2015). Ein mentales Modell kann grundsätzlich als eine spezifische mentale Repräsentation aufgefasst werden, die strukturelle Analogien zum repräsentierten Inhalt aufweist (z. B. Johnson-Laird, 1983; Obersteiner, 2012; Städtler, 2003).

In der internationalen Literatur werden mentale Repräsentationen auch als *internal representations* bezeichnet und von *external representations* abgegrenzt. So übersetzt Goldin (2020, S. 276) die Bezeichnung *internal representation* als Vorstellung und die Bezeichnung *external* representation als Darstellung. Eine *internal representation* besteht für Goldin (2003) aus einem „set of components", die „sensations and perceptions, visualized or otherwise imagined objects or symbols, or even emotional feelings" (S. 277) sein können.

Die Entstehung und Stabilität mentaler Repräsentationen wird in der psychologischen und didaktischen Forschung auf unterschiedliche Weise beschrieben (z. B. Kaufmann, 2021; diSessa, 1993; Strike & Posner, 1992). Auf der einen Seite steht die Auffassung, dass es sich bei einer individuellen Vorstellung um eine stabile mentale Repräsentation handelt, die in entsprechenden Situationen aktiviert wird (Strike & Posner, 1992). Auf der anderen Seite wird davon ausgegangen, dass die mentale Repräsentation in einer konkreten Situation – beeinflusst durch z. B. eine zu lösende Aufgabe, eine Interviewfrage, eine gegebene Darstellung etc. – auf Grundlage von Vorerfahrungen und Vorwissen stets neu konstruiert wird (di-Sessa, 1993). Auf empirischer Ebene konnten in mathematikdidaktischen Erhebungen sowohl Argumente für eine Neukonstruktion als auch für die Stabilität von mentalen Repräsentationen herausgearbeitet werden (Kaufmann, 2021).

In internationalen mathematikdidaktischen Arbeiten steht der Begriff der mentalen Repräsentation vor allem in engem Zusammenhang zu dem der *conception*. Wie zum Repräsentationsbegriff hat sich auch bezüglich des Begriffs einer *conception* keine einheitliche Definition durchgesetzt (für einen Überblick siehe z. B. Amin et al., 2014; Kaldrimidou & Tzekaki, 2006). Der c*onception* wird in mehreren Arbeiten – ähnlich wie in der Theorie von *concept image* und *concept definition* – der Begriff des *concepts* gegenübergestellt (z. B. Amin et al., 2014; Sfard, 1991). Während ein *concept* von der mathematischen Community als fachlich korrekt beurteilt wird, ist eine *conception* ein individuelles Konstrukt, das Sfard (1991) wie folgt erläutert:

> [T]he whole cluster of internal representations and associations evoked by the concept – the concept's counterpart in the internal, subjective 'universe of human knowing' – will be referred to as 'conception' (Sfard, 1991, S. 3).

Dieser Erläuterung folgend kann eine *conception* eines mathematischen Begriffs verschiedene *internal representations* zusammenfassen.

Ein Schwerpunkt der Forschung zu *conceptions* im Rahmen der *conceptual change*-Theorie liegt auf der Analyse von Veränderungen verschiedener Vorstellungen. So fokussiert die *conceptual change*-Theorie ursprünglich Diskrepanzen zwischen vorhandenen vorunterrichtlichen und – aus fachlicher Perspektive – erwünschten Vorstellungen, sodass häufig eine schwierig zu bewältigende Umgestaltung und Anpassung vorhandener kognitiver Strukturen erforderlich ist (Duit, 1999; Hafner, 2012; Stafylidou & Vosniadou, 2004). Vorunterrichtliche Vorstellungen stellen jedoch nicht ausschließlich Lernhindernisse dar, sondern vielmehr auch hilfreiche Anknüpfungspunkte für das Ausbilden von fachlich erwünschten Vorstellungen (Prediger 2010). Ein *conceptual change* kann neben einer Anpassung von vorunterrichtlichen Vorstellungen auch eine Anpassung von bereits gezielt ausgebildeten Vorstellungen erfordern (Stafylidou & Vosniadou, 2004). Beispielsweise kann bezogen auf das Grundvorstellungskonzept eine bereits ausgebildete bzw. für einen bestimmten Gültigkeitsbereich formulierte Grundvorstellung in einem erweiterten Gültigkeitsbereich des mathematischen Begriffs nicht mehr tragfähig sein (Fetzer & Paraviccini, 2024; Wartha, 2007). So ist die Grundvorstellung zur Multiplikation als wiederholte Addition in den natürlichen Zahlen gültig; die Multiplikation zweier Bruchzahlen hingegen kann im Allgemeinen nicht als wiederholte Addition gedeutet werden (Heck Ribereiras et al., 2022; Schulz & Wartha, 2021).

Ein weiterer Schwerpunkt in der Forschung zu *conceptions* ist die Analyse empirisch aufgezeigter Fehlvorstellungen oder *misconceptions* (z. B. Amin et al., 2014; Confrey & Kazak, 2006; Schecker & Duit, 2018). Die Präfixe „Fehl-“ bzw. „mis-“ implizieren dabei eine fachliche Fehlerhaftigkeit der analysierten Vorstellungen bzw. *conceptions*. Schecker und Duit (2018) sprechen daher bei Fehlvorstellungen auch von „hinter den typischen Fehlern von Schülerinnen und Schülern […] vermuteten Denkmuster[n]“ (S. 11), die sich in unterschiedlichen Situationen rekonstruieren lassen.

Das Herausarbeiten von Fehlvorstellungen wird als eine wichtige Basis für das Entwickeln von entsprechenden Fördermaterialien angesehen (Fujii, 2014). Gleichzeitig wird bzgl. einer solchen Analyse von Fehlvorstellungen häufig eine Defizitorientierung gegenüber individuellen Vorstellungen beanstandet (z. B. Fujii, 2014; Lengnink et al., 2011; Schecker & Duit, 2018). Um dieser potentiellen Defizitorientierung entgegenzuwirken und um eine „eigene Wertigkeit“ (Schecker und Duit, 2018, S. 12) individueller Vorstellungen zu betonen, die durch ihre „Bewährung im Alltagsgebrauch“ (Schecker & Duit, 2018, S. 12) begründet wird, hat sich in der deutschsprachigen fachdidaktischen Literatur der Begriff der *Schülervorstellung* herausgebildet.[9] Dieser Begriff hat sich insbesondere in der Biologie- und Physikdidaktik etabliert (z. B. Schecker & Duit, 2018; Schrenk et al., 2019), wird aber auch in der Mathematikdidaktik (z. B. Kaufmann, 2021) verwendet. So bezieht sich Kaufmann (2021) in seiner Arbeit über individuelle Vorstellungen zu Geradengleichungen auf den Begriff der Schülervorstellung, den er wie folgt präzisiert:

> Für die vorliegende Untersuchung wird festgelegt, dass alle alltäglichen, wissenschaftsorientierten und wissenschaftlichen Vorstellungen, die das begriffliche und das konzeptuelle Verständnis eines Schülers zu einem bestimmten Zeitpunkt beschreiben, als ’Schülervorstellungen‘ bezeichnet werden (Kaufmann 2021, S. 19).

Schecker und Duit (2018) bezeichnen Schülervorstellungen auch als „Als-ob-Vorstellungen“ (S. 9) und erläutern diese Bezeichnung an einem physikalischen Beispiel:

> Lernende äußern sich im Unterricht so und bearbeiten Aufgaben so, als ob sie davon ausgingen, Kraft sei eine universelle Wirkungsfähigkeit (Schecker & Duit, 2018, S. 9).

Von den bisher geschilderten, stärker kognitiv veranlagten Perspektiven auf individuelle Vorstellungen grenzen sich unter anderem diskursive Perspektiven ab (z. B. Hanke, 2022; Lavie, Steiner & Sfard, 2019; Roth, 2013; Sfard, 2008). Diese diskursiven Ansätze fokussieren Analysen von beobachtbaren Lernendenäußerungen und vermeiden Rückschlüsse auf an sich nicht beobachtbare mentale Repräsentationen. Dementsprechend betrachtet Roth (2013) mentale Repräsentationen nicht als etwas, das kognitive Konstrukte beschreibt, sondern verwendet den Terminus der mentalen Repräsentation, um kulturell unterschiedliche Weisen zu kennzeichnen, wie über ein bestimmtes Phänomen gesprochen wird. Unter Berücksichtigung von Roths Arbeiten expliziert auch Hanke (2020) Vorstellungen im Sinne des diskursiven Ansatzes der commognition „als Elemente persönlicher, intuitiver mathematischer Diskurse“ (S. 385; s. a. Hanke, 2022); ein intuitiver mathematischer Diskurs entstünde, „wenn Mathematiktreibende darüber kommunizieren, wie sie sich ihre persönliche Bedeutung eines Begriffs vergegenwärtigen“ (Hanke, 2020, S. 387). Im Rahmen dieser intuitiven mathematischen Diskurse werden Vorstellungen durch Hanke (2020) aufgefasst als „Narrative[10] […], die durch visuelle Mediatoren [d. h. sichtbare Medien, Anm. d. Verf.] gestützt sein können“ (S. 387) und durch die eine Person ausdrücken kann, „was für die Person selbst als anschauliche, intuitive Aussage über ein mathematisches Objekt gilt und was sie nutzen kann, um sich selbst oder anderen ein mathematisches Objekt zu erklären“ (S. 387).

Da ein Großteil bisheriger Arbeiten zum Grundvorstellungskonzept mehr auf kognitionstheoretischen als auf diskursiven Ansätzen basiert (z. B. Greefrath et al., 2016; Griesel et al., 2019; Salle & Clüver, 2021), knüpfen wir im Weiteren an die kognitionstheoretischen Auffassungen an. Des Weiteren erhoffen wir uns durch diesen Zugang, Aussagen über die individuelle Vorstellungsentwicklung von Schüler:innen und ihre individuelle Förderung treffen zu können. Gleichzeitig wird jedoch in dem in Abschnitt 3.3 vorgeschlagenen Vorgehen zur Rekonstruktion individueller Vorstellungen in Anlehnung an diskursive Ansätze verstärkt darauf geachtet, Lernendenäußerungen sehr detailliert zu analysieren und keine vorschnellen Rückschlüsse über das konkrete Format und „Vorliegen“ nicht beobachtbarer mentaler Repräsentationen zu tätigen.

Mit der soeben aufgezeigten Vielfalt unterschiedlicher Auffassungen individueller Vorstellungen gehen in deutschsprachigen Arbeiten zu Grundvorstellungen des Weiteren unterschiedliche Bezeichnungen einher: „individuelle Vorstellungen“, „(individuelle) Schülervorstellungen“, „individuelle Grundvorstellungen“ oder „deskriptive Grundvorstellungen“ (z. B. Greefrath et al., 2016; Griesel et al., 2019; Gudladt, 2023; vom Hofe, 1995; Wessel, 2015). Wie im bisherigen Beitrag wählen wir im Folgenden weiterhin den Begriff der „individuellen Vorstellung“, da eine „Schülervorstellung“ eine Verengung auf die Schule implizieren könnte. Wir verzichten auf die Nutzung des Terminus „Grundvorstellung“, da durch eine terminologische Bindung an die normativ formulierten Grundvorstellungen bereits eine Festlegung auf inhaltlich tragfähige Vorstellungen suggeriert werden könnte. Letzteres könnte einer „überprüfend-kontrollierenden Haltung“ (Weber, 2007, S. 113) Vorschub leisten.

Zusammenfassend sind bisherige Begriffsdefinitionen individueller Vorstellungen nicht spezifisch für den deskriptiven Gedanken des Grundvorstellungskonzeptes nach vom Hofe (1995) formuliert worden. Dementsprechend liegt bislang keine Definition vor, die bestimmte Akzentuierungen des Grundvorstellungskonzeptes auf inhaltliche Deutungen mathematischer Begriffe, deren Anwendung und das mentale Operieren einbezieht. Eine Berücksichtigung dieser Akzentuierungen ist jedoch eine wichtige Grundlage dafür, individuelle Vorstellungen und Grundvorstellungen in Beziehung setzen zu können und das Grundvorstellungskonzept durch empirische Arbeiten weiterzuentwickeln. Daher wird im nächsten Abschnitt – aufbauend auf den in diesem Abschnitt dargelegten Auffassungen individueller Vorstellungen – eine Definition individueller Vorstellungen vorgeschlagen, die spezifische Eigenheiten des Grundvorstellungskonzeptes aufgreift, um im Weiteren individuelle Vorstellungen zu rekonstruieren und sie – soweit möglich – auf Grundvorstellungen beziehen zu können.

3.3 Vorschlag zur Auffassung individueller Vorstellungen im Rahmen des Grundvorstellungskonzeptes

Zur Charakterisierung individueller Vorstellungen mathematischer Begriffe im Rahmen des Grundvorstellungskonzeptes knüpfen wir *erstens* an mentale Repräsentationen an, da auch Grundvorstellungen im Großteil der einschlägigen Arbeiten implizit oder explizit als mentale Repräsentationen beschrieben werden (z. B. Griesel et al., 2019; Greefrath et al., 2021; s. Abschnitte 2.1 & 3.2). Diese einschlägigen Arbeiten sind überwiegend auf Grundlage kognitionstheoretischer Überlegungen formuliert. Anschließend an diese Überlegungen und an die Definition von Grundvorstellungen als „idealtypische mentale Repräsentationen“ (Griesel et al., 2019, S. 29) fassen wir individuelle Vorstellungen – entsprechend ihrer subjektiven Natur – also als mentale Repräsentationen auf, die im Gegensatz zu normativ formulierten Grundvorstellungen nicht idealtypisch sein müssen.

Hinsichtlich der in Abschnitt 3.2 diskutierten Einordnung von mentalen Repräsentationen als tendenziell *situationsüberdauernde* stabile Repräsentationen oder tendenziell *situationsspezifisch* konstruierte Repräsentationen, betrachten wir individuelle Vorstellungen *zweitens* als mentale Repräsentationen, die von einem Individuum eher situationsspezifisch konstruiert (und weniger aktiviert) werden. Mit dieser Betrachtung wird – stärker als durch eine ausschließlich situationsüberdauernde Auffassung von Vorstellungen – betont, dass individuelle Vorstellungen stets an die Eigenheiten einzelner konkreter Situationen angepasst werden und demnach in ähnlich gelagerten Situationen auch unterschiedlich ausdifferenziert sein können (Balacheff & Gaudin, 2010; Schindler, 2014). Dies zeigt sich insbesondere in empirischen Arbeiten, in denen in ähnlichen Situationen bei ein und derselben Person deutlich unterschiedliche individuelle Vorstellungen rekonstruiert wurden, die zum Teil fachlich korrekt und zum Teil inkorrekt waren (z. B. Jetses et al., 2024; Kaufmann, 2021).

Mit dieser situationsspezifischen Betrachtung individueller Vorstellungen tragen wir vornehmlich einer empirischen Konkretisierung methodisch Rechnung: Eine individuelle Vorstellung kann als solche situationsspezifisch in konkreten Daten nachvollziehbar rekonstruiert werden, ohne stets die kaum zu beantwortende Frage mitzutragen, inwieweit sich jetzt tatsächlich eine „überdauernde" Vorstellung „gefestigt" oder „verändert" hat. Situationsspezifische individuelle Vorstellungen sind also methodisch zugänglich und können in sich geschlossen rekonstruiert werden. Damit soll jedoch keinesfalls die situationsüberdauernde Bedeutung von individuellen Vorstellungen nivelliert oder verneint werden; vielmehr können (und sollen) beispielsweise Vergleiche situationsspezifischer Vorstellungen einer Person über einen längeren Zeitraum dazu führen, Unterschiede und vor allem Gemeinsamkeiten der jeweils situationsspezifisch rekonstruierten individuellen Vorstellungen herauszuarbeiten und so Auswirkungen auf den längerfristigen Lernprozess in den Blick zu nehmen. Dies ist ein zentraler Fokus für die Ausbildung tragfähiger Vorstellungen, die immer über längere Zeiträume gedacht werden muss.

Die mit der hervorgehobenen Situationsspezifität mentaler Repräsentationen einhergehende Auffassung individueller Vorstellungen weist Überschneidungen mit dem sogenannten Situationsmodell auf, das häufiger Berücksichtigung bei Analysen von kognitiven Verarbeitungsprozessen beim Textverstehen findet (z. B. Nieding & Ohler, 2008; van Dijk & Kintsch, 1983; Zwaan & Radvansky, 1998). Ein Situationsmodell kann als eine „cognitive representation of the events, actions, persons, and in general the situation, a text is about" (van Dijk & Kintsch, 1983, S. 12) verstanden werden. Situationsmodelle enthalten damit auch Informationen, die nicht explizit im Text erwähnt werden (Nieding & Ohler, 2008; van Dijk & Kintsch, 1983). Übertragen auf individuelle Vorstellungen mathematischer Begriffe können z. B. im Zuge der Bearbeitung von Mathematikaufgaben Situationsmodelle konstruiert werden, die auch Informationen umfassen, die nicht explizit in der vorliegenden Aufgabe zum Tragen kommen.

Im Sinne einer situationsspezifischen Betrachtung individueller Vorstellungen, sprechen wir im Folgenden davon, dass ein Individuum eine Vorstellung eher situationsspezifisch „konstruiert" als „aktiviert". Durch diesen festgelegten Sprachgebrauch wird jedoch, wie oben bereits ausgeführt, keinesfalls ausgeschlossen, dass ein Individuum in verschiedenen vergleichbaren Situationen ähnliche Vorstellungen konstruieren kann (z. B. Kaufmann, 2021; Schindler, 2014).

Drittens nehmen wir für die hier verfolgte Ausschärfung des Begriffs der individuellen Vorstellung auf zentrale Eckpunkte von Grundvorstellungen Bezug. Analog zur Charakterisierung von Grundvorstellungen knüpfen wir auch zur Charakterisierung von individuellen Vorstellungen im Rahmen des Grundvorstellungskonzeptes an Deutungen mathematischer Begriffe an. Wir fassen individuelle Vorstellungen als *inhaltliche Deutungen* mathematischer Begriffe auf, die allerdings – wie oben bereits ausgeführt – nicht normativ hergeleitet sind, sondern sich von Individuum zu Individuum unterscheiden können. Individuelle inhaltliche Deutungen können sich mit normativ formulierten Deutungen im Sinne von Grundvorstellungen überschneiden; sie können fachlich korrekt sein, müssen dies – anders als Grundvorstellungen – jedoch nicht.[11] Durch diese Fokussierung individueller Deutungen kann die *Sinnkonstruktion* mathematischer Begriffe für das Individuum analysiert werden, die nach dem Grundvorstellungskonzept im Rahmen einer individuellen Begriffsbildung angestrebt werden soll (vom Hofe, 1995; s. Abschnitt 2.2) und daher auch für die Analyse individueller Vorstellung in diesem Rahmen zentral ist. Diese Sinnkonstruktion kann z. B. darin bestehen, dass das Individuum die mathematischen Begriffe an persönliche Erfahrungen mit realitätsnahen oder mathematischen Phänomenen anknüpft (s. Abschnitt 2.2).

Eine individuelle Vorstellung eines mathematischen Begriffs spezifizieren wir im vorliegenden Beitrag des Weiteren dahingehend, dass sie in einer konkreten Situation leitend für bestimmte Handlungen des Individuums ist. Damit werden weitere zentrale Ziele des Grundvorstellungskonzeptes aufgegriffen, da neben der Sinnkonstruktion ein „operatives Handeln auf Vorstellungsebene" (vom Hofe, 1995, S. 98) sowie eine Anwendung der mathematischen Begriffe durch Lernende im Fokus der im Grundvorstellungskonzept betrachteten individuellen Begriffsbildung liegen (s. Abschnitt 2.2). Die Handlungen und Anwendungen der jeweiligen Deutungen eines mathematischen Begriffs müssen ebenfalls nicht korrekt im mathematischen Sinne sein. Dieses handlungsleitende Moment schließt an die Arbeit von Balacheff und Gaudin (2010) an, die die Konstruktion einer individuellen Vorstellung situationsspezifisch eng an die dabei durchgeführten Handlungen knüpfen. Dass eine individuelle Deutung mentales Operieren bestimmt, kann auch darin zum Ausdruck kommen, dass die individuelle Deutung genutzt wird, um einzuschätzen, wie sich Handlungen oder Operationen auf bestimmte Eigenschaften der mathematischen Objekte auswirken. Diese Einschätzungen müssen ebenfalls nicht zwingend fachlich korrekt sein. Handlungen können dabei aufgefasst werden als „zielgerichtete, in ihrem inneren Aufbau verstandene Vollzüge, die ein faßbares [sic] Ergebnis erzeugen" (Aebli, 1983, S. 182). Dabei können Handlungen äußerlich beobachtbar sein, müssen dies jedoch nicht (z. B. Steffen, 2022). Ebenfalls können Handlungen abstrahiert und als Operationen „verinnerlicht" werden (Aebli, 1983).[12]

Entsprechend den obigen Ausführungen charakterisieren wir eine *individuelle Vorstellung* eines mathematischen Begriffs im Rahmen des Grundvorstellungskonzeptes als eine situationsspezifisch konstruierte, individuelle inhaltliche Deutung des entsprechenden Begriffs, die in sachkontext- oder mathematikbezogenen Situationen vorgenommen wird und in mathematikbezogenen Handlungen oder beim mentalen Operieren zum Tragen kommt.

Diese Definition kann als Grundlage einer Rekonstruktion individueller Vorstellungen genutzt werden, die unabhängig von konkreten normativ formulierten Grundvorstellungen durchgeführt werden kann. Gleichzeitig ist es jedoch möglich, rekonstruierte individuelle Vorstellungen (im Sinne der vorgeschlagenen Begriffsdefinition und ihrem Fokus auf spezifische individuelle Deutungen mathematischer Begriffe) differenziert mit normativ hergeleiteten Grundvorstellungen in Beziehung zu setzen. Wie genau bei dieser Rekonstruktion vorgegangen werden kann, wird im nächsten Abschnitt näher erläutert.

4. Rekonstruktion individueller Vorstellungen

4.1 Überblick über Herangehensweisen zur Rekonstruktion

Bisherige methodische Herangehensweisen bei der Rekonstruktion individueller Vorstellungen (im Sinne der den Arbeiten jeweils zugrunde gelegten Definition einer individuellen Vorstellung) sind vielfältig und finden verstärkt in qualitativ orientierten Studien statt. In diesen Studien wird vorrangig auf schriftliche Aufgabenbearbeitungen, Lerntagebücher, Interaktions- oder Lernprozessbeobachtungen sowie Interviews als Erhebungsformate zurückgegriffen (z. B. Halverscheid & Müller, 2013; Kaufmann, 2021; Kollhoff, 2021; Krause & Salle 2018; Wessel, 2015; s. a. Kleine, 2007). Zum Teil werden diese Untersuchungen auch an vorhergehende, quantitativ angelegte Untersuchungen angeschlossen, wie im Falle der PALMA-Studie geschehen (Hafner, 2012; Stölting, 2008; Wartha, 2007; s. a. Roos, 2020). Um sogenannte „Fehlvorstellungen" zu erklären, wurden in diesem Rahmen ausgewählte Lernende im Anschluss an eine Testbearbeitung und -auswertung interviewt. In diesen aufgabenbasierten Interviews wurde der Bearbeitungsprozess dokumentiert, um individuelle Vorstellungen detailliert analysieren zu können (Hafner, 2012; Stölting, 2008; Wartha, 2007).

Die Datenauswertung und Rekonstruktion individueller Vorstellungen wird in bisherigen Studien, die auf das Grundvorstellungskonzept Bezug nehmen, häufig durch eine kategoriengeleitete oder -entwickelnde Auswertung der Daten strukturiert (z. B. Halverscheid & Müller, 2013; Kaufmann, 2021; Roos, 2020; Schink, 2013). Roos (2020) fasst z. B. rekonstruierte individuelle Vorstellungen zum Extrempunktbegriff induktiv in Kategorien zusammen, um darauf aufbauend Schwierigkeiten von Studierenden mit diesem Begriff zu erklären. Darüber hinaus werden auch deduktive Kategorien an das Datenmaterial herangetragen, die unter anderem durch zum Extrempunktbegriff formulierte „Aspekte" bestimmt sind, wobei die Aspekte „in engem Zusammenhang mit dem (teilweisen) Vorliegen einer Grundvorstellung" (Roos, 2020, S. 160) stehen. Anders als Roos (2020) orientieren sich die von Halverscheid und Müller (2013, S. 125) zur Analyse individueller Vorstellungen herangezogenen Kategorien nicht an konkreten normativ formulierten Aspekten oder Grundvorstellungen, sondern an den drei Charakteristika von Grundvorstellungen „‚Sinnkonstituierung', ‚Verinnerlichung' und ‚Fähigkeit zur Anwendung'" (s. Abschnitt 2.2).

Arbeiten zum Grundvorstellungskonzept, die keine kategoriengeleitete Datenauswertung vornehmen, interpretieren das erhobene Datenmaterial zunächst auf einer sogenannten Beschreibungs- und dann Erklärungsebene (z. B. Gudladt, 2023; Katter, 2023; Kollhoff, 2021; vom Hofe, 1998). Für diese Interpretation werden Interviews oder Videodaten zunächst in einzelne Szenen gegliedert. Anschließend werden die Szenen auf der Beschreibungsebene hinsichtlich verschiedener Leitfragen analysiert, beispielsweise: „Welche subjektiven Vorstellungen bzw. Deutungsmodelle werden in den Lösungsversuchen der Schülerinnen deutlich? Inwieweit lassen sich dabei individuelle Denkmuster bzw. Lösungsstrategien nachzeichnen?“ (vom Hofe, 1998, S. 266; s. a. Katter, 2023; Kollhoff, 2021). Kollhoff (2021) spezifiziert diese Leitfragen und das methodische Vorgehen für die Analyse von Interaktionen auf der Beschreibungsebene durch Bezugnahme auf die interpretative Unterrichtsforschung. Auf der Beschreibungsebene herausgearbeitete Interpretationen werden dann auf der Erklärungsebene mit normativ formulierten Grundvorstellungen in Beziehung gesetzt, indem hinterfragt wird, inwieweit „sich Denkprozesse der Schülerinnen mit vorhandenen didaktischen Begriffen und Modellen erfassen und erklären“ (vom Hofe, 1998, S. 266) lassen.

Insgesamt stehen in den zitierten Arbeiten zu Grund- und individuellen Vorstellungen häufig die normativ formulierten Grundvorstellungen im Vordergrund der Erhebung und Auswertung, sodass eine detaillierte Rekonstruktion individueller Vorstellungen in den Hintergrund rückt. Derartige Arbeiten bieten erste Orientierungspunkte für weitergehende Analysen und Fördermaßnahmen, können jedoch gleichzeitig die unvoreingenommene Rekonstruktion individueller Vorstellungen einschränken und die Gefahr bergen, dass „man die Grundvorstellungen gewissermaßen in die Lernenden hineinsieht, obwohl sie als Modelle ihrer empirischen Vorstellungen möglicherweise überhaupt nicht angemessen sind“ (Lensing, 2021, S. 74).

Um individuelle Vorstellungen möglichst detailliert sowie intersubjektiv nachvollziehbar zu rekonstruieren und eine Defizitorientierung durch den frühzeitigen Einbezug normativer Leitlinien zu vermeiden, schlagen wir im folgenden Abschnitt ein entsprechendes Vorgehen zur Rekonstruktion individueller Vorstellungen vor. Dieses Vorgehen knüpft unmittelbar an die in Abschnitt 3.3 vorgeschlagene Definition individueller Vorstellungen an, da diese Definition bestimmte Notwendigkeiten bei der Rekonstruktion eben dieser individuellen Vorstellungen impliziert und erfordert.

4.2 Vorschlag zur Rekonstruktion individueller Vorstellungen

Aufgrund der theoretischen Festlegung, dass individuelle Vorstellungen situationsspezifisch konstruiert werden (s. Abschnitt 3.3), ist es sinnvoll, die Rekonstruktion individueller Vorstellungen entlang aufkommender Situationen zu gliedern (z. B. Balacheff & Gaudin, 2010; Schindler, 2014). Als Situation fassen wir dabei eine räumlich und zeitlich begrenzte Einheit auf, die durch ein bestimmtes Thema inhaltlich charakterisiert ist. Die Identifikation und Abgrenzung von Situationen ergeben sich aus dem Forschungsinteresse und der empirischen Analyse des vorliegenden Datenmaterials. Eine erste Orientierung für die empirisch begründete Abgrenzung von Situationen können z. B. Aufgaben bieten, die in einem Interview bearbeitet werden (Schindler, 2014).

Eine feinere Untergliederung könnte zudem auf Basis mathematikbezogener Tätigkeiten der Interviewten (z. B. berechnen oder beschreiben) vorgenommen werden. Die Identifikation von Situationen kann somit je nach Forschungsinteresse unterschiedlich begründet werden. Wurden für eine Situation individuelle Vorstellungen einer Person rekonstruiert, bietet es sich an, weitere Situationen in den Blick zu nehmen, in denen diese Person agiert und die entsprechend rekonstruierten Vorstellungen in den verschiedenen Situationen gegenüberzustellen. Des Weiteren können durch fallexterne Gegenüberstellungen individuelle Vorstellungen rekonstruiert werden, die bei mehreren Personen identifiziert werden können.

Bei der konkreten Rekonstruktion individueller Vorstellungen nutzen wir – den obigen Ausführungen folgend – *individuelle inhaltliche Deutungen* als sensibilisierendes Konzept (s. Kelle & Kluge, 2010; vom Hofe, 1998). Basierend auf vorliegenden Daten, wie z. B. Interviewtranskripten, werden individuelle inhaltliche Deutungen auf Basis der Äußerungen der Lernenden analysiert. Diese Äußerungen sollten grundsätzlich multimodal aufgefasst werden (z. B. verankert in Sprache oder Gestik), damit eine möglichst umfassende Analyse realisiert werden kann. Um zum einen eine Rekonstruktion individueller Vorstellungen entlang des sensibilisierenden Konzeptes der individuellen inhaltlichen Deutungen möglichst systematisch und intersubjektiv nachvollziehbar zu gestalten und zum anderen in späteren Analysen ein In-Beziehung-Setzen zu Grundvorstellungen zu ermöglichen, operationalisieren wir individuelle inhaltliche Deutungen durch „Elementarisierung“. Diese Elementarisierung besteht in einem

Betrachten einzelner Bestandteile einer individuellen inhaltlichen Deutung. Diese Bestandteile werden *deutungskonstituierende Elemente* genannt.

Eine solche Idee der Elementarisierung wird in ähnlicher Weise auch bei der Rekonstruktion sogenannter mentaler Räume verwendet (z. B. Fauconnier, 1994, 1997; Zima, 2021). Die Theorie der mentalen Räume wurde von Gilles Fauconnier (1994; 1997) erarbeitet, um Prozesse der Bedeutungsgenerierung von Sprache, d. h. „Prozesse der Produktion, des Verstehens und der Verarbeitung von Sprache" (Zima, 2021, S. 103) zu modellieren und zu erklären. Sie ist ursprünglich als Analyseinstrument der kognitiven Semantik zu verorten und verfolgt die Absicht, u. a. Vorstellungen von Sprachrezipient:innen durch mentale Räume zu analysieren (z. B. Evans & Green, 2006; Hartner, 2012; Zima, 2021). In seinen ersten Arbeiten definiert Fauconnier (1994, S. xxxix & S. 16) mentale Räume als kognitive Konstrukte, die im Verlauf eines Diskurses und vor allem bei der Rezeption eines schriftlich vorliegenden Textes zur Konstruktion von Satzbedeutungen temporär gebildet werden. Bei der Analyse mentaler Räume werden Prozesse der Bedeutungskonstruktion ausgewertet, die nicht versprachlicht vorliegen, sondern von denen angenommen wird, dass sie im Rahmen der sogenannten *backstage cognition* ablaufen (Fauconnier, 1994; Zima, 2021). Ausgehend von einzelnen Sätzen oder kurzen Texten rekonstruiert Fauconnier (1994; 1997) deren Bedeutung, indem er einzelne so bezeichnete Elemente, hier Einzelwörter oder Wortgruppen, identifiziert und deren Verbindungen zueinander strukturiert.

In Anlehnung an dieses Vorgehen und spezifiziert auf das Grundvorstellungskonzept, zeichnen sich deutungskonstituierende Elemente dadurch aus, dass sie in den Äußerungen (Einzelwörter, Wortgruppen, Kombinationen aus Wörtern und Gesten etc.) des Individuums in Beziehung zu dem mathematischen Begriff stehen, zu welchem individuelle Vorstellungen rekonstruiert werden sollen. Somit bestimmen sie letztendlich eine individuelle inhaltliche Deutung des mathematischen Begriffs (im Sinne der in Abschnitt 3.2 formulierten Definition einer inhaltlichen Deutung). Ein „Element" kann in diesem Zusammenhang im Sinne eines „Grundbestandteils" (Pfeifer 1993, S. 276) und in Anlehnung an chemische Zusammenhänge als ein nicht weiter sinnvoll zerlegbarer Bestandteil einer Äußerung und letztendlich auch einer individuellen inhaltlichen Deutung verstanden werden.

Zur Rekonstruktion individueller Vorstellungen in diesem Sinne ist eine wertungsneutrale Analyse vorliegender Äußerungen von Lernenden notwendig, in der die deutungskonstituierenden Elemente und deren Beziehungen untereinander durch die Forschenden identifiziert werden. Zur Identifikation deutungskonstituierender Elemente wird auf der einen Seite zunächst analysiert, welche Äußerungen des Individuums sich auf den im Fokus stehenden mathematischen Begriff beziehen (orientiert an der durch das Individuum gewählten Bezeichnung). Auf der anderen Seite werden Äußerungen analysiert, die sich auf realitätsnahe oder mathematische Referenzkontexte beziehen und die mit dem mathematischen Begriff bzw. dem analysierten Bezeichner durch das Individuum in Beziehung gesetzt werden. Für eine möglichst detaillierte und feingliedrige Analyse der zuletzt genannten Äußerungen werden diese zunächst in einzelne Worte, Wortgruppen, Gesten oder Zeichnungen bzw. Kombinationen hiervon gegliedert. Die so identifizierten Worte, Wortgruppen etc. sind grundlegend für die weiteren Analysen und werden im Sinne der obigen Ausführungen (d. h. im Sinne von Grundbestandteilen der analysierten Äußerungen) im Folgenden als Elemente bezeichnet.

Um die individuelle inhaltliche Deutung letztendlich charakterisieren zu können, muss stets reflektiert werden, wie genau die Elemente, die in den Äußerungen identifiziert werden können, vom Individuum aufgefasst werden. So ist hier – und in entsprechenden empirischen Analysen – zu berücksichtigen, dass es sich bei den herausgearbeiteten Elementen zunächst nur um Bezeichnungen handelt, von denen wir als Forschende nicht oder nur eingeschränkt wissen, wie die Individuen diese Elemente wiederum interpretieren. Des Weiteren muss geprüft werden, inwieweit Äußerungen und bestimmte Worte – und damit mögliche Elemente – durch die Forschenden, z. B. durch die Fragestellung, einen Aufgabenkontext, eine gegebene Darstellung etc. in das Interview oder den Fragebogen eingebracht werden oder ob die interviewte bzw. befragte Person sie selbst initial äußert. Nimmt eine interviewte bzw. befragte Person ein von Forschendenseite eingebrachtes Element auf, so muss sorgfältig reflektiert werden, wie darauf Bezug genommen wird.

Weiterhin wird fokussiert, wie genau die identifizierten Elemente mit dem mathematischen Begriff bzw. dem analysierten Bezeichner durch das Individuum in Beziehung gesetzt werden. Das In-Beziehung-Setzen der Elemente mit dem mathematischen Begriff kann z. B. darin bestehen, dass der Begriff mit einem oder mehreren Elementen durch das Individuum gleichgesetzt wird, von einem oder mehreren Elementen abgegrenzt wird oder durch ein oder mehrere Elemente ausdifferenziert wird. Dabei können mehrere Elemente auch selbst entweder verbunden, gleichgesetzt oder voneinander abgegrenzt werden. Letztendlich können diejenigen identifizierten Elemente als deutungskonstituierende Elemente bezeichnet werden, die – indem sie sich auf realitätsnahe oder mathematische Referenzkontexte beziehen und durch das Individuum mit dem mathematischen Begriff in Beziehung gesetzt werden – eine individuelle Deutung des mathematischen Begriffs charakterisieren (s. Abschnitt 2.1 zum Deutungsbegriff).

Entscheidend für die Einordnung der individuellen Deutung als individuelle Vorstellung auf der deskriptiven Ebene des Grundvorstellungskonzeptes ist, dass die herausgearbeitete individuelle Deutung in Anwendungen und Handlungen wirksam wird (s. Abschnitt 3.3): Dies wird in der Rekonstruktion aufgegriffen, indem wir diejenigen herausgearbeiteten individuellen Deutungen als individuelle Vorstellungen auffassen, bei denen die Deutungen im Rahmen eines Sachkontextes bzw. eines Darstellungswechsels vom Individuum vorgenommen werden oder die eine mathematikbezogene Handlung bestimmen bzw. im Zusammenhang mit einem möglichen mentalen Operieren des Individuums stehen (vgl. Balacheff & Gaudin, 2010; Vergnaud, 1999; vom Hofe & Blum, 2016).

Um über eine konkrete Situation hinaus auch breitere Erkenntnisse zu generieren, können in der Gegenüberstellung verschiedener Interviewsituationen (fallintern oder fallextern) ähnliche deutungskonstituierende Elemente bzw. ähnliche Beziehungen dieser Elemente untereinander identifiziert sowie analysiert werden und damit ähnliche individuelle Deutungen rekonstruiert werden. Hier sprechen wir von einem gemeinsamen *Kern* der jeweiligen rekonstruierten individuellen Deutungen.

Hinsichtlich der Rekonstruktion individueller Vorstellungen sollte die grundlegende Bedeutung von eingesetzten Aufgaben für die spätere Datenauswertung frühzeitig reflektiert werden. So sollten die Aufgaben derart gestaltet sein, dass in der Datenauswertung zentrale Charakteristika individueller Vorstellungen im Sinne der in Abschnitt 3.3 vorgeschlagenen Definition eingeschätzt werden können. Für diese Einschätzung können auch mehrere zu bearbeitende Aufgaben notwendig sein, um die genannten Charakteristika hinreichend abzubilden und eine Überforderung durch zu komplexe Arbeitsaufträge zu vermeiden.

Um das in diesem Abschnitt beschriebene Vorgehen zur Rekonstruktion individueller Vorstellungen mithilfe individueller Deutungen und deutungskonstituierender Elemente zu illustrieren und zu konkretisieren, wird im folgenden Abschnitt die Analyse eines Interviewausschnitts detailliert vorgestellt.

5. Illustrierendes Beispiel zur Rekonstruktion individueller Vorstellungen im Grundvorstellungskonzept

5.1 Einordnung des Interviewausschnitts

Das folgende Transkript stammt aus dem Forschungsprojekt GruSiKo, das sich mit Vorstellungen in der Trigonometrie befasst. In diesem Projekt wurden Interviews mit 18 Schüler:innen aus 12 Klassen des zehnten Jahrgangs dreier städtischer Gesamtschulen und Gymnasien in Niedersachsen geführt. Die Auswahl der interviewten Schüler:innen erfolgte auf Basis eines Fragebogens, in dem schriftliche Aufgaben zu Sinus und Kosinus beantwortet werden mussten und den alle teilnehmenden Schüler:innen ausfüllten. Es wurden sowohl Schüler:innen ausgewählt, die im Fragebogen eine sehr hohe als auch eine sehr geringe Punktzahl aufwiesen. Zudem wurde die Zugehörigkeit zu den drei Schulen berücksichtigt, um eine möglichst heterogene Gruppe von Schüler:innen für die Interviews zu erhalten.

Ziel der Interviews war es, individuelle Vorstellungen der Schüler:innen zu Sinus und Kosinus zu rekonstruieren, um darauf aufbauend Unterrichts- und Fördermaterialien zu gestalten. Die im Interview gestellten Fragen sollten daher einerseits das Gespräch immer wieder auf die zentralen Begriffe fokussieren, andererseits dabei keine normativ formulierten, inhaltlichen Deutungen der Begriffe vorgeben, um den Schüler:innen Raum für das Einbringen eigener Vorstellungen zu geben.

Das ausgewählte Transkript zeigt einen Ausschnitt aus dem Interview mit Luna (Pseudonym), einer Schülerin des zehnten Jahrgangs eines städtischen Gymnasiums in Niedersachsen. Luna erreichte im Fragebogen eine geringfügig unterdurchschnittliche Punktzahl. Die Entscheidung, diesen Ausschnitt aus Lunas Fall darzustellen, erfolgte aufgrund der Eignung der Daten für den Zweck im vorliegenden Beitrag: Anhand des Interviewausschnitts können die

Schritte des vorgestellten Vorgehens zur Rekonstruktion individueller Vorstellungen (s. Abschnitt 3.3) sowie die Konkretisierung der eingeführten Konzepte nachvollzogen werden. Zudem können anschließend mögliche Unschärfen und Schwierigkeiten während der Rekonstruktion thematisiert werden (s. Abschnitt 6).

Die Analyse in Abschnitt 5.3 soll die theoretischen und methodischen Vorschläge dieses Beitrags illustrieren sowie konkretisieren und wird nicht als Evidenz für die Nützlichkeit der vorgeschlagenen Auffassung individueller Vorstellungen und deren Rekonstruktion verstanden. Zuvor werden im folgenden Abschnitt 5.2 die im analysierten Interviewausschnitt eingesetzten Aufgaben vorgestellt.

5.2 Eingesetzte Aufgaben im Interviewausschnitt

In den dargestellten Ausschnitten des Interviews werden zwei Aufgaben eingesetzt, durch die individuelle Deutungen des Sinus bzw. Kosinus eines Winkels im rechtwinkligen Dreieck fokussiert werden sollen:

Aufgabe 1: Zu einem abgebildeten rechtwinkligen Dreieck (vgl. Abb. 1) sollen die Schüler:innen angeben, was sie über Sinus und Kosinus in diesem Dreieck äußern können. Durch diese offene Einstiegsaufgabe sollen zunächst erste Assoziationen und individuelle Deutungen zu Sinus und Kosinus in Erfahrung gebracht werden.

Abb. 1: Skizze des rechtwinkligen Dreiecks aus Aufgabe 1 des Interviewleitfadens

Der im Interview eingesetzte halbstandardisierte Interviewleitfaden umfasst gezielte Nachfragen zur dargestellten Aufgabe, durch die weitere Informationen zur Rekonstruktion individueller Vorstellungen eingeholt werden können. Geben die Schüler:innen bei der ersten Aufgabe an, sich nicht zu Sinus und Kosinus äußern zu können, sind im Interviewleitfaden unter anderem die Fragen „Helfen dir die Winkelgrößen weiter?“ oder „Hilft es dir, wenn die Seiten benannt werden?“ vermerkt. Grundsätzlich könnten auch gezielt bestimmte Winkel oder Seiten thematisiert und Winkelgrößen oder Seitenlängen in einer GeoGebra-basierten Darstellung des Dreiecks variiert werden. Wie genau eine solche Variation der Seitenlängen thematisiert werden kann, wird in der im Folgenden dargestellten zweiten Aufgabe erläutert.

Aufgabe 2: In einem gegebenen rechtwinkligen Dreieck ABC werden zwei Punkte so verschoben, dass ähnliche Dreiecke entstehen (vgl. Abb. 2). Die Schüler:innen sollen entscheiden, inwieweit sich unter dieser Variation der Kosinus des Winkels α verändert und dies begründen. Für Schüler:innen, die Schwierigkeiten haben, die Bewegung in das Dreieck „hineinzusehen“ (Roth, 2005, S. 78), ist im Interview eine GeoGebra-basierte Darstellung zur Visualisierung der Bewegung verfügbar.

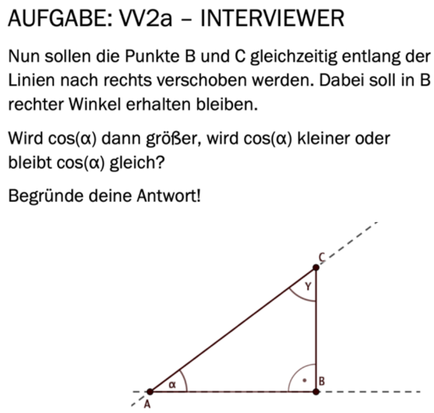

Abb. 2: Aufgabe 2 des Interviewleitfadens

Auch in dieser offen gestalteten Aufgabe wird keine Deutung des Kosinus vorgegeben; vielmehr gibt die Aufgabe Anlass zur individuellen Deutung des Kosinus sowie zur Nutzung dieser Deutung im Rahmen eines mentalen Operierens.

Zusammenfassend bieten diese beiden Aufgaben großes Potential, individuelle Vorstellungen zum Kosinusbegriff – wie in Abschnitt 3.3 dargestellt – zu rekonstruieren: Keine der Aufgaben gibt eine Deutung des Kosinus durch die Forschenden vor. Insbesondere die erste Aufgabe ist hinreichend offen, um in den Äußerungen des Individuums die in Abschnitt 3.3 erläuterten Elemente zu identifizieren, die durch das Individuum selbst (und nicht die Forschenden) zur Deutung des Kosinusbegriffs eingebracht werden. Gleichzeitig bietet die Aufgabe durch das abgebildete Dreieck dem Individuum zumindest Gelegenheit, sich auf einen mathematischen Referenzkontext zu beziehen, was wiederum Grundlage für eine individuelle inhaltliche Deutung sein kann (s. Abschnitt 2.1). Der Offenheit der ersten Aufgabe wird eine zweite Variationsaufgabe entgegengestellt, um dem Individuum Gelegenheit zu geben, eine eigene individuelle Deutung des Kosinusbegriffs zum mentalen Operieren zu nutzen. Dieses mentale Operieren wird durch die erste Aufgabe nicht explizit evoziert, kann nach Abschnitt 3.3 jedoch entscheidend für die Einordnung einer individuellen Deutung als individuelle Vorstellung sein. Auf diese Weise kann eine gemeinsame Betrachtung der beiden Aufgaben eine differenziertere Rekonstruktion ermöglichen.

5.3 Analyse des Interviews mit Luna

Erste Situation – Einstieg in das Interview

Nachdem die Interviewerin Aufgabe 1 präsentiert hat, beginnt Luna sich zu Sinus und Kosinus am dargestellten Dreieck zu äußern:

7 L: Also Sinus und Kosinus sind glaube ich Verhältnisse
8 zwischen zwei Seiten in einem rechtwinkligen Drei-
9 eck. Und der Sinus ist ja Gegenkathete durch Hypote-
10 nuse und das könnte man dann ja hier ausrechnen. Ge-
11 nauso wie den Kosinus, das ist ja Ankathete durch Hy-
12 potenuse. Und da wir hier einen rechten Winkel haben,
13 wäre dann ja die Seite c die Hypotenuse (*beschriftet*
14 *Seite c*), Seite a die (*beschriftet Seite a*) – also wenn
15 wir jetzt von α den Sinus ausrechnen würden, wäre
16 dann ja a die Gegenkathete und b (*beschriftet Seite b*)
17 die Ankathete für den Kosinus

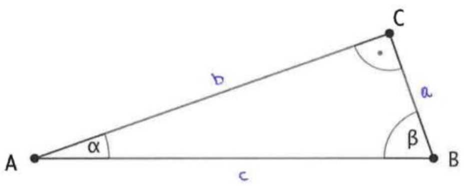

Abb. 3: Rechtwinkliges Dreieck aus Aufgabe 1, Seiten bezeichnet von Luna

Im ersten Teil der Antwort charakterisiert Luna Sinus und Kosinus als „Verhältnisse zwischen zwei Seiten in einem rechtwinkligen Dreieck“ (Z. 7–9). Direkt im Anschluss ergänzt sie dies für Sinus durch „Gegenkathete durch Hypotenuse“ (Z. 9–10) und für Kosinus durch „Ankathete durch Hypotenuse“ (Z. 11–12), wobei sie den Nachsatz „und das könnte man dann ja hier ausrechnen“ (Z. 10) anfügt. Im zweiten Teil der Antwort (Z. 12–17) beginnt Luna ihre bisher geäußerten Erläuterungen von Sinus und Kosinus auf das vorliegende Dreieck zu übertragen, indem sie die Seiten benennt und beschriftet sowie ihnen darüber hinaus mit Bezug zum Winkel α die Bezeichnungen Ankathete, Gegenkathete und Hypotenuse zuweist.

In Lunas ersten Äußerungen können mehrere deutungskonstituierende Elemente bzgl. Sinus und Kosinus identifiziert werden[13]: Als Elemente treten „Verhältnisse“, das „rechtwinklige Dreieck“ und verschiedene „Seiten“ in diesem rechtwinkligen Dreieck auf, wobei das Element des rechtwinkligen Dreiecks explizit durch die Interviewerin zuvor angesprochen wurde. Die Elemente werden von Luna in Beziehung gesetzt, insofern als dass „Verhältnisse“ „zwischen“ den „Seiten“ „in einem rechtwinkligen Dreieck“ angeführt werden und Sinus und Kosinus wiederum mit diesen „Verhältnissen“ verbunden werden.

Des Weiteren setzt Luna den Sinus mit der „Gegenkathete“ und der „Hypotenuse“ sowie den Kosinus mit der „Ankathete“ und der „Hypotenuse“ in Beziehung (Z. 9–12). Ihre Äußerungen und die genannten Verbindungen der Elemente legen nahe, dass für Luna die „Verhältnisse“ mit der jeweils angegebenen Division zweier Seitenlängen in Beziehung stehen, nämlich für Sinus Länge der „Gegenkathete“ „durch“ die Länge der „Hypotenuse“ und für Kosinus die Länge der „Ankathete“ „durch“ die Länge der „Hypotenuse“. Ob mit der Konjunktion „Und“ (Z. 9) hier eine Präzisierung (dann wäre Sinus ein Verhältnis, und zwar ein Verhältnis der Seitenlängen) oder eine alternative Beschreibung (dann wäre Sinus ein Verhältnis, kann aber auch eine Rechnung sein) gemeint ist, bleibt an dieser Stelle unklar.

In Lunas folgenden Äußerungen können weitere deutungskonstituierende Elemente bzgl. Sinus und Kosinus identifiziert werden, die sie zu den bisher genannten in Beziehung setzt (Z. 13–17): Die „Hypotenuse“ wird mit der von Luna beschrifteten „Seite c“ des Dreiecks gleichgesetzt, die „Gegenkathete“ mit der „Seite a“, wobei sie hier als Voraussetzung spezifiziert, dass diese Gleichsetzung nur dann zutrifft, wenn man „Sinus“ „von α“ bestimmt. Analog identifiziert sie die „Ankathete“ mit „b“. Der Winkel „α“ spezifiziert für Luna den Sinusbegriff („von α den Sinus“) und ist für sie mitentscheidend, um „Sinus aus[zu]rechnen“ (Z. 15).

Als individuelle Deutung des Sinus ließe sich an dieser Stelle, basierend auf den aufgeführten deutungskonstituierenden Elementen, demnach formulieren: Sinus des Winkels α ist das Verhältnis von Gegenkathete a und Hypotenuse c in einem rechtwinkligen Dreieck, welches sich durch die Division „Länge der Gegenkathete“ durch „Länge der Hypotenuse“ berechnen lässt. Analog wird der Kosinus des Winkels α gedeutet. Wie in Abschnitt 3.3 erläutert ist hier – und in entsprechenden empirischen Analysen – zu berücksichtigen, dass es sich bei den deutungskonstituierenden Elementen zunächst nur um Bezeichnungen handelt, von denen wir als Forschende nicht oder nur eingeschränkt wissen, wie die Interviewten diese Elemente wiederum interpretieren. Im vorliegenden Transkript wäre beispielsweise zu prüfen, inwieweit sich die Verwendung der Bezeichnungen „Sinus“, „Kosinus“ etc. als konsistent erweist und inwieweit Bezeichnungen von Dreiecksteilen in gleicher Weise weiterhin interpretiert werden.[14]

Im weiteren Verlauf des Interviews bringt die Interviewerin den Winkel β bzw. den Sinus des Winkels β in den Dialog ein:

I: Okay, wenn wir uns jetzt mal den Winkel β angucken und den Sinus von β ausrechnen wollen würden. Wo wäre dann die Gegenkathete?
L: Das wäre dann b und c die Hypotenuse.
I: Und wenn wir da den Kosinus ausrechnen würden?
L: Das wäre dann a durch c.
I: Weil a welche Seite ist?
L: Die Ankathete, also an (*"an" betont*) dem Winkel β.

Lunas Antworten bzw. Äußerungen geben Anlass zur Interpretation, dass sie in einem rechtwinkligen Dreieck je nach ausgewähltem Winkel die Begriffe Ankathete, Gegenkathete und Hypotenuse den unterschiedlichen Seiten a, b und c zuordnen kann. So wird z. B. in Bezug auf die Berechnung von Kosinus des Winkels β die „Ankathete" mit „a" identifiziert (Z. 42).

Zusammenfassend bringt Luna in diesen Äußerungen keine für sie neuen deutungskonstituierenden Elemente bzgl. des Kosinus ein, sondern setzt die bereits genannten neu zueinander in Beziehung. Diese Analyse der deutungskonstituierenden Elemente bestätigt die oben ausgeführte individuelle Deutung von Sinus und Kosinus; sie zeigt jedoch, dass Luna ihre individuelle Deutung jeweils durch entsprechende Wahl der Seiten auf unterschiedliche Winkel anpassen kann.

Bis zu dieser Stelle wendet Luna die bisher rekonstruierte individuelle Deutung des Verhältnisses zweier Seitenlängen weder in einem Sachkontext noch im Rahmen eines Darstellungswechsels oder einer mathematikbezogenen Handlung an. Die folgende Situation, die sich an die erste Situation anschließt und die durch eine neue Aufgabenstellung charakterisiert ist, legt offen, inwiefern eine entsprechende individuelle Deutung des Kosinusbegriffs als Verhältnis von Luna genutzt wird, um Auswirkungen von spezifischen Variationen eines Dreiecks auf den Kosinus eines Winkels einzuschätzen.

Zweite Situation – Variation eines rechtwinkligen Dreiecks

Im weiteren Interviewverlauf präsentiert die Interviewerin Luna Aufgabe 2 (vgl. Abb. 2). Luna schweigt ca. 15 Sekunden, bevor sie eine Antwort formuliert:

L: Nee, der wird größer.
I: Und wieso?
L: Weil die Länge AC und AB größer wird. Weil die ja in die Länge gezogen werden. Also weil B und C wird ja so langgezogen (vgl. *Abb. 4, sie „greift" die Punkte und zieht die Punkte von ihr aus gesehen nach rechts).* Und für Kosinus brauche ich ja die Ankathete, das wäre dann ja b (*notiert b*), also AC-Strecke und die Hypotenuse (*notiert c*), das wäre ja c, also die AB-Strecke. Und wenn man die länger ziehen würde, dann würden die Seiten länger werden und somit würden ja auch größere Zahlen dann bei der Rechnung sein.
I: Ich glaube du hast das gerade vertauscht mit Hypotenuse und Ankathete.
L: Achso ja genau b ist die Hypotenuse und c die Ankathete. Und die würden dann ja länger gezogen werden und ja der Winkel an sich bleibt eigentlich gleich.

Abb. 4: Lunas Handbewegung

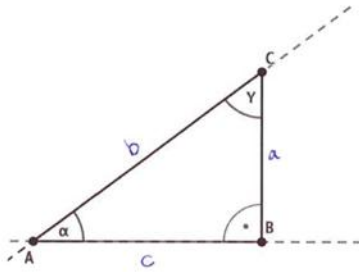

Abb. 5: Dreieck aus Aufgabe 2, Seiten bezeichnet von Luna

Nachdem die Interviewerin den Aufgabentext der zweiten Aufgabe vorgestellt hat, legt sich Luna fest, dass „der" (Kosinus des Winkels α) größer würde (Z. 85). Auf Nachfrage der Interviewerin schließt sie eine Begründung an, in der sie auf die sich vergrößernden Seitenlängen „AC" und „AB" eingeht. Diese Seitenlängen würden größer, weil „B und C wird ja so langgezogen" (Z. 88–89). Hier bezieht sie sich vermutlich auf die im Arbeitsauftrag benannten Punkte B und C, da sie in einer entsprechenden Geste Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger auf jeweils einen Punkt oberhalb des auf dem Papier dargestellten Dreiecks zusammenführt und die Hände in dieser Haltung von sich aus gesehen nach rechts bewegt (vgl. Abb. 4). Im Folgenden konkretisiert sie für den gesuchten Kosinus, dass sie die „Ankathete" und die „Hypotenuse" benötige, wobei sie die „Ankathete" mit der Seite „b" sowie der „AC-Strecke" und die Hypotenuse mit der Seite „c" sowie der „AB-Strecke" gleichsetzt (Z. 91–94). Nachdem sie nochmals betont, dass die Seiten länger würden, begründet sie zuletzt auf diese Weise, dass „dann ja auch größere Zahlen bei der Rechnung" auftreten würden (Z. 96–97).

Als deutungskonstituierende Elemente bzgl. des Kosinus können in dieser Situation die „Ankathete“, die Seite „b“ und die „AC-Strecke“ identifiziert werden, wobei diese Elemente gleichgesetzt werden und deren „Länge“ betrachtet wird. Analog werden „Hypotenuse“, Seite „c“ und „AB-Strecke“ als deutungskonstituierende Elemente des Kosinus identifiziert und gleichgesetzt. Auf einen Hinweis der Interviewerin, dass Luna Hypotenuse und Ankathete vertauscht hätte, korrigiert Luna: „Achso ja genau. b ist die Hypotenuse und c die Ankathete. Und die würden dann ja länger gezogen werden und ja der Winkel an sich bleibt eigentlich gleich.“ (Z. 100–103) Abschließend wird also zudem die konstante Größe des „Winkels“ angesprochen. Des Weiteren kann eine „Rechnung“ (Z. 97) als deutungskonstituierendes Element bzgl. des Kosinus identifiziert werden, in die Längen der angesprochenen Seiten eingehen. Aus „größeren Zahlen“ (Z. 96) in der Rechnung, bedingt durch längere Seiten, resultiert für Luna bzgl. der betrachteten Aufgabe ein größerer Kosinuswert.

Zusammenfassend lässt sich in dieser zweiten Situation die Deutung des Kosinusbegriffs als In-Beziehung-gesetzte Seitenlängen herausarbeiten. Anders als in der ersten Situation wird in dieser zweiten Situation eine Variation des Dreiecks angeregt, die in dem Verschieben der Punkte entlang der gestrichelten Linien besteht, wobei außerdem eingeschätzt werden soll, wie sich diese Variation auf Kosinus des Winkels α auswirkt. Die Deutung des Kosinusbegriffs als In-Beziehung-gesetzte Seitenlängen wird in dieser zweiten Situation im Sinne des mentalen Operierens genutzt, um Auswirkungen der durchgeführten Handlung auf den Kosinus des Winkels α einzuschätzen und kann somit als individuelle Vorstellung auf der deskriptiven Ebene des Grundvorstellungskonzeptes rekonstruiert werden.

Abschließend erlaubte die Analyse auf Elementebene eine sehr kleinschrittige und intersubjektiv nachvollziehbare Rekonstruktion der individuellen Deutungen und letztendlich individuellen Vorstellungen von Luna. Weiteres Potential der Analyse auf Elementebene besteht in der Möglichkeit eines sehr differenzierten In-Beziehung-Setzen von normativ formulierten Grundvorstellungen und empirisch rekonstruierten individuellen Vorstellungen. Dieses In-Beziehung-Setzen könnte konkret über eine vergleichende Analyse der hier betrachteten deutungskonstituierenden Elemente und der in Salle und Clüver (2021) eingeführten Kernelemente durchgeführt werden. Letztere können als zentrale Bestandteile von Grundvorstellungen aufgefasst werden und sind wie folgt definiert:

> „Kernelemente sind jene zentralen Elemente des mathematischen Begriffs, die sich in […] korrespondierenden Phänomenen wiederfinden.“ (Salle & Clüver, 2021, S. 563)

In Bezug auf das dargestellte Fallbeispiel könnte die Analyse folgendermaßen aussehen: Die im Datenmaterial des Fallbeispiels bezüglich des Kosinusbegriffs identifizierten deutungskonstituierenden Elemente des „rechtwinkligen Dreiecks“ sowie der „Ankathete“ und der „Hypotenuse“, weisen Parallelen zu zentralen Kernelementen der Seitenverhältnis-Grundvorstellung auf (vgl. Salle & Clüver, 2021). Beispielsweise zeigen Lunas Erläuterungen der Hypotenuse bzw. der Ankathete, dass sie diese Elemente fachlich korrekt beschreiben kann und mit dem Kosinusbegriff in Beziehung setzt. Aufgrund der von Luna explizierten Seitenlängen kann an dieser Stelle ein Bezug zur normativ formulierten Seitenverhältnis-Grundvorstellung hergestellt werden (s. Salle & Clüver, 2021; Salle & Frohn, 2017).

Luna setzt die Länge der Hypotenuse zur Länge der Ankathete durch eine Division dieser Längen in Beziehung. In der ersten analysierten Situation spricht sie in diesem Zusammenhang auch von Kosinus als „Verhältnis“. Die zweite analysierte Situation zeigt jedoch auf, dass dieses „Verhältnis“ nicht im Sinne der Seitenverhältnis-Grundvorstellung aufgefasst wird. Insofern darf, nur, weil Luna diese Begrifflichkeit äußert, nicht vorschnell davon ausgegangen werden, dass auch eine individuelle Vorstellung im Sinne der Seitenverhältnis-Grundvorstellung ausgebildet ist. Durch die detaillierte Datenanalyse auf Elementebene konnte jedoch „potentialorientiert“ herausgearbeitet werden, dass Luna entscheidende Kernelemente der Seitenverhältnis-Grundvorstellung heranzieht und fachlich korrekt auffasst. Für eine gezielte individuelle Förderung kann auf diese Erkenntnisse aufgebaut werden, wobei die Analysen gezeigt haben, dass insbesondere die Auffassung eines Bruchs als Verhältnis in den Blick genommen werden sollte.

6. Diskussion und Perspektiven

Im vorliegenden Beitrag wird ein Vorschlag präsentiert, wie individuelle Vorstellungen bzgl. der deskriptiven Ebene des Grundvorstellungskonzeptes aufgefasst werden können und wie darauf aufbauend individuelle Vorstellungen rekonstruiert werden können. Zusammenfassend wird basierend auf verschiedenen Arbeiten zu individuellen Vorstellungen und den Grundlagen des Grundvorstellungskonzeptes folgende Begriffsdefinition vorgeschlagen (s. Abschnitt 3.3): Eine individuelle Vorstellung eines mathematischen Begriffs kann aufgefasst werden „als eine situationsspezifisch konstruierte, individuelle inhaltliche Deutung des entsprechenden Begriffs, die in sachkontext- oder mathematikbezogenen Situationen vorgenommen wird, in mathematikbezogenen Handlungen zum Tragen kommt oder für mentales Operieren relevant ist“ (S. 10 in diesem Beitrag).

Diese Definition bietet eine bisher nicht vorhandene Begriffsspezifizierung individueller Vorstellungen für die deskriptive Ebene des Grundvorstellungskonzeptes bzw. für empirische Studien mit Bezug zum Grundvorstellungskonzept. Die Definition berücksichtigt insbesondere die Schwerpunktsetzung des Grundvorstellungskonzeptes auf inhaltliche Deutungen mathematischer Begriffe, deren Anwendung und das mentale Operieren, ohne jedoch normative Analysen in den Vordergrund zu stellen. Damit wird durch den Definitionsvorschlag eine bislang fehlende Grundlage dafür gelegt, Schwerpunktsetzungen des Grundvorstellungskonzeptes auch in der Rekonstruktion und Analyse individueller Vorstellungen hinreichend zu berücksichtigen und damit wichtige empirische Ergebnisse zur Weiterentwicklung des Grundvorstellungskonzeptes zu generieren.

Die Definition ist zentraler Ausgangspunkt für eine intersubjektiv nachvollziehbare Rekonstruktion individueller Vorstellungen basierend auf empirischen Daten. Der dargestellte Vorschlag eines rekonstruktiven Vorgehens (Abschnitt 4) sieht eine Identifikation und Analyse deutungskonstituierender Elemente in den Äußerungen der Lernenden sowie ein Herausarbeiten individueller Deutungen entlang aufkommender Situationen vor. Die deutungskonstituierenden Elemente werden basierend auf der Interpretation der individuellen Äußerungen identifiziert und ihre Beziehungen untereinander werden analysiert – auf diese Weise konstituieren diese Elemente eine individuelle inhaltliche Deutung und können als nicht weiter sinnvoll zerlegbare Bestandteile dieser individuellen Deutung aufgefasst werden.

In dem beschriebenen Vorgehen zur Rekonstruktion individueller Vorstellungen sehen wir eine Möglichkeit, individuelle Vorstellungen zum einen detailliert und möglichst unabhängig von bestehenden konkreten Grundvorstellungen zu analysieren, die Ergebnisse der Rekonstruktion jedoch zum anderen auch differenziert und systematisch mit vorliegenden normativ formulierten Grundvorstellungen in Beziehung zu setzen. Dieses In-Beziehung-Setzen könnte darin bestehen, vergleichende Analysen der in diesem Beitrag eingeführten deutungskonstituierenden Elementen und den von Salle und Clüver (2021) eingeführten Kernelementen durchzuführen, die bisher zur Herleitung einer Grundvorstellung genutzt wurden.

Wie bereits in der Einleitung verdeutlicht, hängen die Begriffsdefinition individueller Vorstellungen und das Vorgehen der Rekonstruktion eng zusammen: Empirische Arbeiten, die das Grundvorstellungskonzept nutzen und sich insbesondere auf die deskriptive Ebene dieses Konzeptes berufen, verfolgen eine Analyse individueller Vorstellungen von Schüler:innen bzgl. bestimmter mathematischer Begriffe (vom Hofe, 1995; vom Hofe & Blum, 2016) – eine entsprechende Definition individueller Vorstellungen steht somit auch immer im Kern des jeweils gewählten methodischen Vorgehens. Ohne begriffliche Klärung kann ein Rekonstruktionsvorgehen kaum intersubjektiv nachvollziehbar sein und lässt sich in seinen Schritten nur schwierig inhaltlich begründen. Deshalb werden in diesem Beitrag Definition und Rekonstruktion individueller Vorstellungen stets zusammen gedacht. Dies zeigt sich vornehmlich in den deutungskonstituierenden Elementen, die unmittelbar auf die Definition individueller Vorstellungen Bezug nehmen.

Im dargestellten Beispiel wird dies aufgegriffen und exemplarisch gezeigt, wie Definition und Rekonstruktion zusammenhängen: Aus der Identifikation deutungskonstituierender Elemente in entsprechenden Situationen kann auf mögliche individuelle inhaltliche Deutungen geschlossen werden, die in Handlungen relevant sind und daher individuelle Vorstellungen von Luna im Sinne der Definition darstellen – gleichzeitig wird auch deutlich, in welchen Fällen gerade nicht von individuellen Vorstellungen gesprochen werden sollte (s. Abschnitt 5.3). Insbesondere soll durch die dargestellte Gegenüberstellung der deutungskonstituierenden Elemente sowie der Kernelemente von Kosinus expliziert werden, wie individuelle Vorstellungen und Grundvorstellungen systematisch gegenübergestellt werden können – und aus dieser Gegenüberstellung eine detaillierte Grundlage für weitere konstruktive Überlegungen erwachsen kann.

Um die in diesem Beitrag getroffenen theoretischen Festlegungen und das vorgeschlagene Vorgehen zur Rekonstruktion individueller Vorstellungen an einem Beispiel zu verdeutlichen, wurde als Datensorte ein Interviewtranskript gewählt, in dem es um individuelle Vorstellungen zu Sinus und Kosinus geht

(Abschnitt 5). Die Eignung von Interviews für die Rekonstruktion individueller Vorstellungen wird in bisherigen Studien besonders deutlich (z. B. Hafner, 2012; Kaufmann, 2021; Roos, 2020): Interviews ermöglichen detaillierte Aussagen von Schüler:innen sowie gezielte Nachfragen der Forschenden, sodass eine gehaltvolle Datengrundlage für die Vorstellungsrekonstruktion gewonnen werden kann (z. B. Kaufmann, 2021; Niebert & Gropengießer, 2014). Grundsätzlich ist das beschriebene methodische Vorgehen jedoch auf verschiedene Studiendesigns mit anderen Datensorten übertragbar.

Es ist zudem möglich, das Vorgehen mit anderen Auswertungsmethoden zu kombinieren. So könnten die rekonstruierten individuellen Vorstellungen als induktiv entwickelte Kategorien, beispielsweise im Sinne einer Qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring (2022), an weitere Daten herangetragen werden, um unter anderem auch fallextern Vergleiche rekonstruierter individueller Vorstellungen systematisch in größeren Datenmengen durchführen zu können. In diesem Fall würde das in diesem Beitrag illustrierte Vorgehen zur Rekonstruktion individueller Vorstellungen eine Möglichkeit darstellen, überhaupt nachvollziehbare Kategorien induktiv zu formulieren. Das vorgeschlagene Vorgehen zur Rekonstruktion individueller Vorstellungen wurde in diesem Beitrag im Rahmen einer qualitativ orientierten Interviewstudie mit einer kleinen Stichprobengröße dargestellt. Grundsätzlich ist es jedoch denkbar, individuelle Vorstellungen mithilfe deutungskonstituierender Elemente auch für größere Stichproben in quantitativen Zusammenhängen zu analysieren. Wie genau dieses Vorgehen umgesetzt werden kann, insbesondere wie Erhebungsinstrumente und Auswertungsmethoden aussehen, welche Stärken und Schwächen eine entsprechend angepasste Umsetzung hat und wie diese sich mit hypothesentestenden Verfahren verträgt, ist aus unserer Perspektive ein wichtiger Gegenstand zukünftiger Forschungsarbeiten.

Durch die exemplarische Analyse des Interviewtranskriptes in Abschnitt 5 lassen sich verschiedene Herausforderungen aufzeigen, die bei der Rekonstruktion individueller Vorstellungen im Sinne des vorgeschlagenen Vorgehens aufkommen können und in den jeweiligen konkreten Forschungsvorhaben diskutiert werden müssen: Zunächst kann die Abgrenzung einzelner Situationen unterschiedlich feingliedrig vorgenommen werden. Wie grob oder fein das Datenmaterial in einzelne Situationen gegliedert wird, muss stets vor dem Hintergrund des jeweils vorliegenden Forschungsinteresses geklärt und begründet werden. Im Fallbeispiel erfolgte eine Gliederung nach eingesetzten Aufgaben. Da Aufgaben hier nicht nur eine Gliederungsebene darstellen, sondern – wie ausgeführt – zentral mitbestimmen, welche Charakteristika individueller Vorstellungen und welche mathematischen Inhalte thematisiert werden, sollte der Einfluss eingesetzter Aufgaben auf die Äußerungen der Lernenden stets reflektiert und diskutiert werden.

Des Weiteren ist die Identifikation der deutungskonstituierenden Elemente nicht als ein eindeutiges Verfahren anzusehen, sodass es durchaus denkbar ist, dass bei der Datenanalyse durch unterschiedliche Forschende auch unterschiedliche Elemente identifiziert und analysiert werden. Intersubjektive Vergleiche von durchgeführten Interviewanalysen zeigen jedoch, dass die identifizierten und analysierten Elemente ähnlich gelagert sind und damit auch zur Rekonstruktion inhaltlich vergleichbarer individueller Vorstellungen führen. Im Sinne einer größtmöglichen Transparenz und intersubjektiven Nachvollziehbarkeit der Analysen gilt es dennoch, deutlich zu machen, welche Elemente warum als solche ausgewählt wurden. Darüber hinaus sollte stets abgewogen werden, inwiefern durch z. B. eine feinere Zerlegung bereits identifizierter Elemente andere individuelle Deutungen rekonstruiert werden können. Ungeachtet der angemerkten Herausforderungen in der Identifikation und Analyse deutungskonstituierender Elemente sehen wir in dieser Elementarisierung und dem beschriebenen Vorgehen jedoch großes Potential, individuelle Vorstellungen sehr detailliert und vor allem nicht ausschließlich entlang bereits normativ formulierter Vorstellungen zu analysieren. Auf diese Weise kann einer möglichen Defizitorientierung in der Analyse individueller Vorstellungen begegnet werden. Letztendlich besteht ein weiterer Diskussionspunkt unter anderem auch darin, inwiefern eine rekonstruierte individuelle Deutung z. B. durch das Individuum vorgenommen wird und damit eine individuelle Vorstellung im Sinne der vorgeschlagenen Begriffsdefinition darstellt. Insbesondere die Frage, ob eine rekonstruierte individuelle Deutung eine Handlung des Individuums bestimmt oder für mentales Operieren relevant ist, kann in einzelnen Situationen herausfordernd sein und ist sicherlich nicht immer eindeutig zu entscheiden. Daher sollte auch hier eine größtmögliche Transparenz in der Analyse und ihrer Darstellung verfolgt werden. Zudem sollte bereits bei der Durchführung der Datenerhebung berücksichtigt werden, dass dem Individuum überhaupt die Möglichkeit gegeben wird, individuelle Deutungen nicht nur zu nennen, sondern auch anzuwenden.

Arbeiten, die sich an die theoretischen Spezifizierungen dieses Beitrags sowie an die Herleitung von Grundvorstellungen (Salle & Clüver, 2021) anschließen, könnten die Frage vertiefen, wie genau normativ hergeleitete Grundvorstellungen und deskriptiv rekonstruierte individuelle Vorstellungen differenziert in Beziehung gesetzt werden können. Darauf aufbauend könnten Ansätze zur Entwicklung gezielter Fördermaterialien formuliert werden. Da die Vorschläge zur Auffassung und Rekonstruktion individueller Vorstellungen in Abschnitt 3 und 4 dieses Beitrags unabhängig von spezifischen Inhaltsbereichen formuliert sind, erhoffen wir uns, dass die Überlegungen in verschiedenen Inhaltsgebieten Anwendung finden und zukünftigen Forschungsarbeiten eine Orientierung geben können.

Anmerkungen

[1] Die Auffassung der Begriffe „Grundvorstellung“ und „Deutung“ wird in Abschnitt 2 näher erläutert.

[2] Der Terminus des „Mathematischen Begriffs“ bezieht sich in der vorliegenden Arbeit immer auf eine fachliche Ebene. Nach Ruwisch und Weigand (2023) kann ein mathematischer Begriff eine Klasse von Objekten, eine Eigenschaft von Objekten, eine Relation oder ein Verfahren bezeichnen.

[3] Grundvorstellungen, die wie im angeführten Zitat „Deutungsmöglichkeiten in realen Situationen“ (vom Hofe, 1995, S. 98, Hervorh. d. Verf.) charakterisieren, werden als sogenannte „primäre Grundvorstellungen“ eingeordnet und von sogenannten „sekundären Grundvorstellungen“ abgegrenzt (vom Hofe & Blum, 2016, S. 234). Hierauf wird mittig in Abschnitt 2.1 genauer eingegangen.

[4] Eine Begriffserläuterung von „Sinnkonstruktionen“ findet in Abschnitt 2.2 statt.

[5] Ein „Aspekt eines mathematischen Begriffs“ wird von Greefrath et al. (2016) als „ein Teilbereich des Begriffs, mit dem dieser fachlich charakterisiert werden kann“ (S. 17) definiert. Identifiziert werden könne ein solcher Aspekt „durch fachwissenschaftliche Analysen“ (Greefrath et al., 2016, S. 17).

[6] Die Unterscheidung von primären und sekundären Grundvorstellungen ist – wie auch Vohns (2005) kritisch anmerkt – nicht trennscharf.

[7] Der Repräsentationsbegriff wird in Abschnitt 3.2 erläutert.

[8] Für Bender (1991, S. 55) ist „Verständnis nicht ohne Vorstellungen [möglich], und Vorstellungen sind nicht ohne Verständnis möglich“, sodass er die Termini Grundvorstellungen und Grundverständnis stets zusammen verwendet.

[9] Auch im internationalen Raum finden zunehmend Bezeichnungen wie „students’ conceptions“ oder „alternative conceptions“ Verwendung (z. B. Driver, 1981; Fujii, 2014).

[10] Narrative wiederum erklärt Hanke (2020) unter Rückgriff auf Sfard (2008) als „Äußerungen über die Objekte des jeweiligen Diskurses sowie die Zusammenhänge zwischen Objekten oder Operationen, die mit den Objekten ausgeführt werden können“ (S. 386).

[11] Für die Unterscheidung verschiedener Sichtweisen auf mathematische Inhalte nutzen Ruf und Gallin (2005) die Bezeichnungen regulär und singulär. Regulär ist eine Sichtweise, wenn sie durch die Community akzeptiert ist (Ruf & Gallin, 2005); demnach sind Grundvorstellungen regulär (Weber, 2007). Singulär ist eine Sichtweise, wenn sie auf das Individuum bezogen ist (Ruf & Gallin, 2005). Individuelle Vorstellungen, ob fachlich korrekt oder nicht, sind demnach zunächst singulär, können jedoch auch als regulär angesehen werden, wenn sie fachlich korrekt und dementsprechend auch von der fachlichen Community akzeptiert sind.

[12] Die Betrachtung von Handlungen findet sich auch bei den theorems in action nach Vergnaud (1999), auf die in bestimmten Arbeiten zu individuellen Vorstellungen und Grundvorstellungen Bezug genommen wird (z. B. Stölting, 2008; Zwetschler, 2015). In diesen *theorems in action* muss sich keine Deutung mathematischer Begriffe widerspiegeln. Ist dies jedoch der Fall, dann können entsprechende *theorems in action* als individuelle Vorstellungen im Sinne der vorgeschlagenen Auffassung verstanden werden.

[13] Inwiefern es sich bei diesen Elementen zunächst auch um im Unterricht erworbene Wissensfacetten handelt, lässt sich im Interview zunächst nur durch entsprechende Nachfragen der Interviewer:innen klären. Für die in diesem Beitrag hinterfragte Rekonstruktion individueller Vorstellungen ist bzgl. der weiteren Interviewauswertung wie im Folgenden beschrieben nicht der Ursprung der Elemente entscheidend, sondern inwiefern die Elemente zueinander in Beziehung gesetzt werden und ob bzw. wie die in Beziehung gesetzten Elemente angewendet werden oder ein mentales Operieren bestimmen.

[14] Im weiteren Verlauf des Interviews zeigt sich, dass Luna die Hypotenuse als „Seite, die gegenüber von dem rechten Winkel liegt und der rechte Winkel ist ja immer 90“ erläutert. Bezüglich der Bezeichnungen „Ankathete“ und „Gegenkathete“ weist Luna darauf hin, dass es „halt darauf an[kommt], welchen Winkel man nimmt“.

Literatur

Aebli, H. (1983). *Zwölf Grundformen des Lehrens: eine allgemeine Didaktik auf psychologischer Grundlage*. Klett-Cotta.

Amin, T. G., Smith, C. L. & Wiser, M. (2014). Student conceptions and conceptual change: Three overlapping phases of research. In N. G. Lederman & S. K. Abell (Hrsg.), *Handbook of Research on Science Education* (S. 57–81). Routledge.

Balacheff, N. & Gaudin, N. (2010). Modeling students’ conceptions: The case of function. In F. Hitt, D. Holton & P. W. Thompson (Hrsg.), *CBMS Issues in Mathematics Education* (S. 183–211). American Mathematical Society.

Bender, P. (1991). Ausbildung von Grundvorstellungen und Grundverständnissen – ein tragendes didaktisches Konzept für den Mathematikunterricht – erläutert an Beispielen aus den Sekundarstufen. In H. Postel, A. Kirsch & W. Blum (Hrsg.), *Mathematik lehren und lernen: Festschrift für Heinz Griesel* (S. 48–60). Schroedel.

Bohnsack, R. (2021). *Rekonstruktive Sozialforschung: Einführung in qualitative Methoden*. utb. https://doi.org/10.36198/9783838587851

Confrey, J. & Kazak, S. (2006). A thirty-year reflection on constructivism in mathematics education in PME. In Á. Gutiérrez & P. Boero (Hrsg.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (S. 305–306). BRILL. https://doi.org/10.1163/9789087901127 van Dijk, T. A. & Kintsch, W. (1983). *Strategies of discourse comprehension*. Academic Press.

diSessa, A. A. (1993). Toward an epistemology of physics. *Cognition and Instruction, 10*(2–3), 105–225. https://doi.org/10.1080/07370008.1985.9649008

Driver, R. (1981). Pupils' alternative frameworks in science. *European Journal of Science Education, 3*(1), 93–101. https://doi.org/10.1080/0140528810030109

Duit, R. (1999). New perspectives on conceptual change. In W. Schnotz, S. Vosniadou & M. Carretero (Hrsg.), *New perspectives on conceptual change* (S. 263–282). Pergamon.

Etzold, H. (2021). *Neue Zugänge zum Winkelbegriff. Fachdidaktische Entwicklungsforschung zur Ausbildung des Winkelfeldbegriffs bei Schülerinnen und Schülern der vierten Klassenstufe* [Dissertation, Universität Potsdam]. https://doi.org/10.25932/publishup-50418

Evans, V. & Green, M. (2006). *Cognitive Linguistics. An Introduction.* Edinburgh University Press.

Fauconnier, G. (1994). *Mental spaces: Aspects of meaning construction in natural language*. Cambridge University Press.

Fauconnier, G. (1997). *Mappings in thought and language*. Cambridge University Press.

Fetzer, A. & Paravicini, W (2024). Das Grundvorstellungskonzept in der Hochschulgeometrie. Eine Diskussion anhand des Konzepts der parallelen Geraden. *Mathematica Didactica*. *47*(1). https://doi.org/10.18716/ojs/md/2024.1651

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Reidel.

Fujii, T. (2014). Misconceptions and alternative conceptions in mathematics education. In S. Lerman (Hrsg.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (S. 453–455). Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_114

Gasteiger, H. (2023). Mathematik im Kopf. Mit mentalen Bildern handeln - Mathematik verstehen. *Grundschulmagazin, 2,* 2–5. Friedrich-Verlag.

Goldin, G. A. (2003). Representation in school mathematics: A unifying research perspective. In J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Hrsg.), *A research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (S. 275–285). NCTM.

Goldin, G. A. (2020). Mathematical representations. In S. Lerman (Hrsg.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (S. 566–572). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_103

Greefrath, G. (2015). Eine Fallstudie zu Modellierungsprozessen. In G. Kaiser & H.-W. Henn (Hrsg.), *Werner Blum und seine Beiträge zum Modellieren im Mathematikunterricht* (S. 171–186). Springer Fachmedien. https://doi.org/10.1007/978-3-658-09532-1_13

Greefrath, G. (2018). *Anwendungen und Modellieren im Mathematikunterricht: Didaktische Perspektiven zum Sachrechnen in der Sekundarstufe*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-57680-9

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V. & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-48877-5

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V. & Weigand, H.-G. (2021). Basic mental models of integrals: Theoretical conception, development of a test instrument, and first results. *ZDM – Mathematics Education*, *53*(3), 649–661. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01207-0

Griesel, H., vom Hofe, R. & Blum, W. (2019). Das Konzept der Grundvorstellungen im Rahmen der mathematischen und kognitionspsychologischen Begrifflichkeit in der Mathematikdidaktik. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *40*(1), 123–133. https://doi.org/10.1007/s13138-019-00140-4

Gudladt, P. (2023). Deskriptive Grundvorstellungen von Lernenden zum Prozentbegriff: Eine qualitative Untersuchung zu Eigenproduktionen von ikonischen Darstellungen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *44*(1), 171–195. https://doi.org/10.1007/s13138-022-00212-y

Hafner, T. (2012). *Proportionalität und Prozentrechnung in der Sekundarstufe I: Empirische Untersuchung und Didaktische Analysen.* Vieweg+Teubner. https://doi.org/10.1007/978-3-8348-8668-2

Halverscheid, S. & Müller, N.C. (2013). Experimentelle Aufgaben als grundvorstellungsorientierte Lernumgebungen für die Differenzialrechnung mehrerer Veränderlicher. In C. Ableitinger, J. Kramer & S. Prediger (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung. Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik*. Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-01360-8_7

Hanke, E. (2020). Vorstellungen im intuitiven mathematischen Diskurs. In H.-S. Siller, W. Weigel & J. F. Wörler (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 385–388). WTM. https://doi.org/10.17877/DE290R-21347

Hanke, E. (2022). *Aspects and images of complex path integrals. An epistemological analysis and a reconstruction of experts' interpretations of integration in complex analysis* [Dissertation, Universität Bremen]. https://doi.org/10.26092/ELIB/1964

Häsel-Weide, U. (2016). *Vom Zählen zum Rechnen: Struktur-fokussierende Deutungen in kooperativen Lernumgebungen*. Springer Fachmedien. https://doi.org/10.1007/978-3-658-10694-2

Hartner, M. (2012). *Perspektivische Interaktion im Roman. Kognition, Rezeption, Interpretation*. De Gruyter.

Heck Ribeiras, P., Obersteiner, A. & Wittmann, G. (2022). In welcher Weise unterstützen Schulbücher Vorstellungsumbrüche beim Lernen von Bruchzahlen? Eine Schulbuchanalyse. *Mathematica Didactica, 45.* https://doi.org/10.18716/ojs/md/2022.1595

vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Spektrum.

vom Hofe, R. (1998). Probleme mit dem Grenzwert — Genetische Begriffsbildung und geistige Hindernisse: Eine Fallstudie aus dem computergestützten Analysisunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *19*(4), 257–291. https://doi.org/10.1007/BF03338877

vom Hofe, R. & Blum, W. (2016). "Grundvorstellungen" as a category of subject-matter didactics. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *37*(S1), 225–254. https://doi.org/10.1007/s13138-016-0107-3

Hüser, A. (2023). Deutungsprozesse beim Verallgemeinern distributiver Zusammenhänge. Eine epistemologisch interaktionistische Untersuchung der Deutungsprozessen von Schüler*innen mit dem Förderschwerpunkt Sprache. In B. Brandt & K. Gerlach (Hrsg.), *Mathematiklernen aus interpretativer Perspektive* II (S. 175–202). Waxmann.

Jetses, T., Salle, A. & Mikoleit, M. (2024). Lernendenschwierigkeiten bei der Anwendung fachlich korrekter Deutungen des Ableitungsbegriffs: Ergebnisse einer Interviewstudie zum

Grundvorstellungskonzept. *Mathematica Didactica*, *47*. https://doi.org/10.18716/ojs/md/2024.1659

Johnson-Laird, P. N. (1983). *Mental models: Towards a cognitive science of language, inference and consciousness*. Harvard Univ. Press.

Kaldrimidou, M. & Tzekaki, M. (2006). Theoretical issues in research of mathematics education: some considerations, In M. Bosch (Hrsg.), *Proceedings of the 4th Congress on Research in Mathematics Education* (S. 1244–1253). Congress of Research in Mathematics Education.

Katter, V. (2023). *Historische, logische und individuelle Genese der Trigonometrie aus didaktischer Sicht*. Springer Fachmedien. https://doi.org/10.1007/978-3-658-41355-2

Kaufmann, S.-H. (2021). *Schülervorstellungen zu Geradengleichungen in der vektoriellen Analytischen Geometrie*. Springer Fachmedien. https://doi.org/10.1007/978-3-658-32278-6

Kelle, U. & Kluge, S. (2010). *Vom Einzelfall zum Typus*. VS Verlag für Sozialwissenschaften. https://doi.org/10.1007/978-3-531-92366-6

Kleine, M. (2007). Analyse von Grundvorstellungen: Möglichkeiten und Grenzen. In *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 183–186). Franzbecker.

Kleine, M., Jordan, A. & Harvey, E. (2005). With a focus on 'Grundvorstellungen' Part 1: A theoretical integration into current concepts. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *37*(3), 226–233. https://doi.org/10.1007/s11858-005-0013-5

Kollhoff, S. (2021). *Analyse von Transferprozessen in der Entwicklung des Bruchzahlbegriffs: Theoretische Rahmung und empirische Untersuchung*. Springer Fachmedien. https://doi.org/10.1007/978-3-658-33981-4

Krause, C. M. & Salle, A. (2018). On the role of gestures for the descriptive analysis of 'Grundvorstellungen': A case of linear functions. In N. Presmeg, L. Radford, W.-M. Roth & G. Kadunz (Hrsg.), *Signs of Signification* (S. 293–313). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-70287-2_16

Lavie, I., Steiner, A. & Sfard, A. (2019). Routines we live by: From ritual to exploration. *Educational Studies in Mathematics*, 101(2), 153–176. https://doi.org/10.1007/s10649- 018-9817-4

Lengnink, K., Prediger, S. & Weber, C. (2011). Lernende abholen, wo sie stehen - Individuelle Vorstellungen aktivieren und nutzen*. Praxis der Mathematik in der Schule*, 40, 2–7.

Lensing, F. (2021). *Das Begreifen begreifen*. Springer Fachmedien. https://doi.org/10.1007/978-3-658-32807-8

Matos, J. & Carreira, S. (1995). Cognitive processes and representations involved in applied problem solving. In C. Slover, W. Blum & I. Huntley (Hrsg.), *Advances and Perspectives in the Teaching of Mathematical Modelling and Applications* (S. 71–82). Water Street Mathematics.

Mayring, P. (2022). *Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen und Techniken*. Beltz.

Niebert K. & Gropengießer, H. (2014). Leitfadengestützte Interviews. In D. Krüger, I. Parchmann & H. Schecker (Hrsg.), *Methoden in der naturwisschenschaftsdidaktischen Forschung* (S. 179-188). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-642-37827-0_10

Nieding, G. & Ohler, P. (2008). Mediennutzung und Medienwirkung bei Kindern und Jugendlichen. In B. Batinic & M. Appel (Hrsg.), *Medienpsychologie* (S. 379–400). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-540-46899-8_16

Obersteiner, A. (2012). *Mentale Repräsentationen von Zahlen und der Erwerb arithmetischer Fähigkeiten: Konzeptionierung einer Förderung mit psychologisch-didaktischer Grundlegung und Evaluation im ersten Schuljahr.* Waxmann.

Pfeifer, W. (1993). *Etymologisches Wörterbuch des Deutschen*. Akademie Verlag.

Prediger, S. (2008). The relevance of didactic categories for analysing obstacles in conceptual change: Revisiting the case of multiplication of fractions. *Learning and Instruction*, *18*(1), 3–17.

Prediger, S. (2010). „Aber wie sag ich es mathematisch?" – Empirische Befunde und Konsequenzen zum Lernen von Mathematik als Mittel zur Beschreibung von Welt. In D. Höttecke (Hrsg.), *Entwicklung naturwissenschaftlichen Denkens zwischen Phänomen und Systematik. Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik. Jahrestagung in Dresden 2009* (S. 6–20). LIT.

Roos, A.-K. (2020). *Mathematisches Begriffsverständnis im Übergang Schule–Universität.* Springer Fachmedien. https://doi.org/10.1007/978-3-658-29524-0

Roth, J. (2005). *Bewegliches Denken im Mathematikunterricht*. Franzbecker.

Roth, W.-M. (2013). *On meaning and mental representation: A pragmatic approach*. SensePublishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6209-251-8

Ruf, U. & Gallin, P. (2005). *Austausch unter Ungleichen. Grundzüge einer interaktiven und fächerübergreifenden Didaktik*. Kallmeyer.

Ruwisch, S. & Weigand, H.-G. (2023). Begriffe bilden. In R. Bruder, A. Büchter, H. Gasteiger, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 281–311). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-66604-3_9

Salle, A. & Clüver, T. (2021). Herleitung von Grundvorstellungen als normative Leitlinien – Beschreibung eines theoriebasierten Verfahrensrahmens. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *42*(2), 553–580. https://doi.org/10.1007/s13138-021-00184-5

Salle, A. & Frohn, D. (2017). Grundvorstellungen zu Sinus und Cosinus. *mathematik lehren*, *204*, 8–12.

Schecker, H. & Duit, R. (2018). Schülervorstellungen und Physiklernen. In H. Schecker, T. Wilhelm, M. Hopf & R. Duit (Hrsg.), *Schülervorstellungen und Physikunterricht* (S. 1–21). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-57270-2_1

Schindler, M. (2014). *Auf dem Weg zum Begriff der negativen Zahl*. Springer Fachmedien. https://doi.org/10.1007/978-3-658-04375-9

Schink, A. (2013). *Flexibler Umgang mit Brüchen*. Springer Fachmedien. https://doi.org/10.1007/978-3-658-00921-2

Schrenk, M., Gropengießer, H., Groß, J., Hammann, M., Weitzel, H. & Zabel, J. (2019). Schülervorstellungen im Biologieunterricht. In J. Groß, M. Hammann, P. Schmiemann & J. Zabel (Hrsg.), *Biologiedidaktische Forschung: Erträge für die Praxis* (S. 3–20). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-58443-9_1

Schulz, A. & Wartha, S. (2021). *Zahlen und Operationen am Übergang Primar-/Sekundarstufe: Grundvorstellungen aufbauen, festigen, vernetzen*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-62096-0

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 1–36. https://doi.org/10.1007/BF00302715

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating. Human development, the growth of discourses, and mathematizing.* University Press.

Stölting, P. (2008). *Die Entwicklung funktionalen Denkens in der Sekundarstufe I vergleichende Analysen und empirische Studien zum Mathematikunterricht in Deutschland und Frankreich* [Dissertation, Universität Regensburg]. https://doi.org/10.5283/epub.10725

Städtler, T. (2003). *Lexikon der Psychologie. Wörterbuch, Handbuch, Studienbuch*. Kröner.

Stafylidou, S. & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction, 14*(5), 503–518. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.015

Steffen, A. (2022). *Digitale Lernbegleitungen bei der Bearbeitung von Raumvorstellungsaufgaben: Eine Interventionsstudie mit einem digitalen Spielsystem im frühkindlichen Bildungsbereich*. Waxmann.

Stein, N. & Lengnink, K. (2020). Concept Images und Concept Definition zur Analyse von Aufgabenbearbeitungen zur Folgenkonvergenz. In H.-S. Siller, W. Weigel & J. F. Wörler (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 901–904). WTM.

Steinbring, H. (2000). Mathematische Bedeutung als eine soziale Konstruktion—Grundzüge der epistemologisch orientierten mathematischen Interaktionsforschung. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 21(1), 28–49. https://doi.org/10.1007/BF03338905

Stölting, P. (2008). *Die Entwicklung funktionalen Denkens in der Sekundarstufe I vergleichende Analysen und empirische Studien zum Mathematikunterricht in Deutschland und Frankreich* [Dissertation, Universität Regensburg]. https://doi.org/10.5283/epub.10725

Strike, K. & Posner, G. (1992). A revisionist theory of conceptual change. In R. A. Duschl (Hrsg.), *Philosophy of Science, Cognitive Psychology, and Educational Theory and Practice* (S. 147–175). State Univ. of New York Press.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151–169. https://doi.org/10.1007/BF00305619

Tiedemann, K., Hülser, A. & Brandt, B. (2023). Deutungsprozesse beim Verallgemeinern distributiver Zusammenhänge. Eine epistemologisch interaktionistische Untersuchung der Deutungsprozesse von Schüler*innen mit dem Förderschwerpunkt Sprache. In B. Brandt & K. Gerlach (Hrsg.), *Mathematiklernen aus interpretativer Perspektive 2* (S. 175-202). Waxmann.

Vergnaud, G. (1999). A comprehensive theory of representation for mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(2), 167–181.

Vohns, A. (2005). Fundamentale Ideen und Grundvorstellungen: Versuch einer konstruktiven Zusammenführung am Beispiel der Addition von Brüchen. *Journal für Mathematik-Didaktik, 26*(1), 52–79. https://doi.org/10.1007/BF03339006

Vollstedt, M. (2011). *Sinnkonstruktion und Mathematiklernen in Deutschland und Hongkong. Eine rekonstruktiv-empirische Studie*. Vieweg+Teubner. https://doi.org/10.1007/978-3-8348-9915-6

Vorhölter, K. (2009). Sinn im Mathematikunterricht. Zur Rolle von Modellierungsaufgaben bei der Sinnkonstruktion von Schülerinnen und Schülern. Budrich.

Vorhölter, K. & Vollstedt, M. (2012). Zur theoretischen Konzeption und zu den Möglichkeiten der unterrichtspraktischen Umsetzung der Sinnkonstruktion. In W. Blum, R. Borromeo Ferri & K. Maaß (Hrsg.), *Mathematikunterricht im Kontext von Realität, Kultur und Lehrerprofessionalität* (S. 148–156). Vieweg+Teubner. https://doi.org/10.1007/978-3-8348-2389-2_16

Wartha, S. (2007). *Längsschnittliche Untersuchungen zur Entwicklung des Bruchzahlbegriffs*. Franzbecker.

Weber, C. (2007). *Mathematische Vorstellungen bilden: Praxis und Theorie von Vorstellungsübungen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II*. h.e.p. https://doi.org/10.5167/UZH-111439

Weber, C. (2013). Grundvorstellungen zum Logarithmus – Bausteine für einen verständlichen Unterricht. In H. Allmendinger, K. Lengnink, A. Vohns & G. Wickel (Hrsg.), *Mathematik verständlich unterrichten* (S. 79–98). Springer Fachmedien. https://doi.org/10.1007/978-3-658-00992-2_6

Wessel, J. (2015). *Grundvorstellungen und Vorgehensweisen bei der Subtraktion*. Springer Fachmedien. https://doi.org/10.1007/978-3-658-11386-5

Zima, E. (2021). *Einführung in die gebrauchsbasierte Kognitive Linguistik*. De Gruyter. https://doi.org/10.1515/9783110665642

Zwaan, R. A. & Radvansky, G. A. (1998). Situation models in language comprehension and memory. *Psychological Bulletin, 123*(2), 162–185. https://doi.org/10.1037/0033-2909.123.2.162

Zwetzschler, L. (2015). *Gleichwertigkeit von Termen: Entwicklung und Beforschung eines diagnosegeleiteten Lehr-Lernarrangements im Mathematikunterricht der 8. Klasse.* Springer Fachmedien. https://doi.org/10.1007/978-3-658-08770-8

Anschrift der Verfasser:innen

Tomma Jetses (geb. Clüver)
Universität Bielefeld
Institut für Didaktik der Mathematik
Universitätsstraße 25
33615 Bielefeld
tomma.jetses@uni-bielefeld.de

Alexander Salle
Universität Bielefeld
Institut für Didaktik der Mathematik
Universitätsstraße 25
33615 Bielefeld
alexander.salle@uni-bielefeld.de