

Förderung digitaler Kompetenzen durch LLMs – Darstellungswechsel quadratischer Funktionen mit ChatGPT

VALENTIN KATTER, UNIVERSITÄT BIELEFELD & JUDITH HUGET, UNIVERSITÄT SIEGEN

Zusammenfassung: In dieser Arbeit wird der Einsatz von Large Language Models (LLMs) wie ChatGPT in Verbindung mit dem Wolfram Alpha Plugin zur Förderung digitaler Kompetenzen von Lehramtsstudierenden untersucht. Der Fokus liegt auf dem Darstellungswechsel zwischen der graphischen und der verbalen Darstellung quadratischer Funktionen. In einer explorativen qualitativen Studie mit N=12 Lehramtsstudierenden wurde analysiert, welche Herausforderungen beim Einsatz solcher Technologien auftreten und wie diese gemeistert werden können. Die Ergebnisse zeigen, dass LLMs innovative Lernumgebungen ermöglichen, die technologische Kompetenzen fördern und die Reflexion sowie die präzise sprachliche Beschreibung mathematischer Inhalte unterstützen.

Abstract: This paper examines the use of Large Language Models (LLMs) such as ChatGPT in conjunction with Wolfram Alpha to promote digital skills of prospective teachers. The focus is on change of representation between graphical and verbal representations of quadratic functions. A qualitative study was conducted to analyze the challenges that arise when using such technologies and how these can be mastered. The results show that LLMs enable innovative learning environments that promote technological skills and support reflection and the precise linguistic description of mathematical content.

1. Einleitung

Funktionale Zusammenhänge und funktionales Denken stehen seit längerer Zeit im Fokus mathematikdidaktischer Forschung (Klinger, 2018; Lichti, 2019; Rolfes, 2017; Stölting, 2008; Zindel, 2019). Im Umgang mit Funktionen spielen Darstellungen und Darstellungswechsel eine zentrale Rolle. Dabei wird meist zwischen vier verschiedenen Darstellungsformen unterschieden: Formal-symbolisch, grafisch-visuell, numerisch-tabellarisch und situativ-sprachlich (Barzel, Glade & Klinger, 2021; Hußmann & Laakmann, 2011). Empirische Studien lassen jedoch häufig die situativ-sprachliche Darstellung unberücksichtigt (Zindel, 2019). Hinzukommt, dass bislang die Nutzung situativ-sprachlicher Darstellungen von Funktionen in Computer-Algebra-Systemen aufgrund technischer und konzeptioneller Einschränkungen nicht möglich war. In diesem Beitrag wird

eine Untersuchung vorgestellt, in der Lehramtsstudierende ChatGPT in Verbindung mit Wolfram Alpha nutzen, um zwischen der Darstellung quadratischer Funktion als Graph und der situativ-sprachlichen Darstellung – also der Darstellung in eigenen Worten – zu wechseln. Durch die Entwicklung von Large Language Models (LLMs) wie ChatGPT und deren Integration mit Systemen wie Wolfram Alpha, ist die flexible Auseinandersetzung mit verschiedenen Darstellungen nun möglich. Diese Studie widmet sich der Frage, wie die situativ-sprachliche Repräsentation von Funktionen in der Interaktion mit ChatGPT eingesetzt werden kann, um digitale und mathematische Kompetenzen von angehenden Mathematiklehrkräften zu stärken.

In diesem Zusammenhang wurden Aufgaben entwickelt, bei denen ChatGPT auf eine innovative Weise eingesetzt wird. Nämlich für den bis dato noch nicht durch digitale Medien durchführbaren Darstellungswechsel von Funktionen in verbaler Darstellung. Um die Sinnhaftigkeit der entwickelten Aufgaben empirisch zu belegen, wurde ein qualitatives Forschungsdesign gewählt, bei dem in Fallstudien untersucht wurde, welche digitalen Kompetenzen durch die Nutzung von ChatGPT in diesen Kontexten besonders gefördert werden können. Es zeigte sich, dass diese Aufgaben besonders gut zur kritischen Reflexion der durch ChatGPT generierten Antworten geeignet sind.

In den folgenden vier Abschnitten wird der theoretische Rahmen der vorliegenden Arbeit erläutert. In Abschnitt 2 werden zunächst zentrale Aspekte mathematischer Darstellungen und Darstellungswechsel behandelt. Anschließend wird in Abschnitt 3 auf die Leistungsfähigkeit von Large Language Models (LLMs) wie ChatGPT im mathematischen Kontext eingegangen, bevor in Abschnitt 4 zentrale digitale Kompetenzen von Lehrkräften im Umgang mit solchen Technologien beleuchtet werden. In Abschnitt 5 wird anhand eines Beispiels gezeigt, wie diese theoretischen Perspektiven zusammenwirken, indem eine exemplarische Interaktion mit ChatGPT analysiert wird, bei der zwischen graphischer und verbaler Darstellung eines Funktionsgraphen gewechselt wird. Auf dieser theoretischen Grundlage folgt anschließend die Darstellung der empirischen Studie.

2. Darstellungen mathematischer Inhalte

Im folgenden Kapitel werden die verschiedenen Darstellungsformen mathematischer Objekte, Darstellungswechsel und Merkmale von Darstellungen, die einen Darstellungswechsel erschweren können, erläutert. Dabei wird ein besonderer Fokus auf die verbalen Darstellungen gelegt.

2.1 Darstellungsebenen

Darstellungen mathematischer Objekte spielen eine zentrale Rolle in der Mathematik und ihrer Didaktik (Salle, Schmidt-Thieme, Schulz & Söbbeke, 2023). Die flexible Verwendung unterschiedlicher Darstellungen kann zum Aufbau inhaltlicher Vorstellungen zu einem mathematischen Begriff beitragen (Prediger & Wessel, 2013). Darüber hinaus zählt das *Verwenden von mathematischen Darstellungen* zu den allgemeinen mathematischen Kompetenzen, die Schüler:innen gemäß den Bildungsstandards (KMK, 2012) am Ende ihr Schulzeit erworben haben sollten.

Im Kontext von Darstellungen mathematischer Inhalte unterscheiden Prediger und Wessel (2013) grundsätzlich zwischen dem verbalen, dem graphischen, dem symbolisch-algebraischen und dem symbolisch-numerischen Register. Diese Einteilung erfolgt aus sprachlicher Perspektive und zielt auf eine allgemeine Kategorisierung von Darstellungsformen im Mathematikunterricht ab. Bossé et al. (2011), Stölting (2008) und Zindel (2020) konzentrieren sich auf den Bereich des funktionalen Denkens. Hier werden insbesondere die symbolische, graphische, tabellarische und verbale Darstellung von Funktionen betrachtet. Greefrath et al. (2016) betrachten Darstellungen aus der Perspektive des Modellierens und führen die Realsituation als eigenständige Darstellungsform funktionaler Zusammenhänge ein.

Die symbolische und die verbale Darstellung werden von Prediger (2013) weiter ausdifferenziert. Sie unterscheidet zwischen formal-symbolischen und numerisch-symbolischen und teilt die verbalen Darstellungen in die drei Kategorien verbal-fachsprachlich, verbal-bildungssprachlich und verbal-alltagssprachlich ein. Darüber hinaus beschreibt Prediger (2013) drei grundlegende Rollen von Sprache im Mathematiklernen: Sprache als *Lerngegenstand*, *Lernmedium* und *Lernvoraussetzung*. Als Lerngegenstand umfasst Sprache insbesondere den Erwerb mathematischer Fachbegriffe und diskursiver Strukturen. Als Lernmedium wird Sprache zum Werkzeug der Erkenntnisgewinnung und der aktiven Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten, beispielsweise durch das

Beschreiben, Begründen oder Argumentieren. Als Lernvoraussetzung bildet Sprache schließlich die Grundlage für die Teilhabe am mathematischen Diskurs – insbesondere für Lernende mit sprachlichen Hürden kann ein Mangel an bildungs- oder fachsprachlichen Kompetenzen zum Lernhindernis werden. Diese Differenzierung unterstreicht die Bedeutung sprachlicher Aspekte für das Verständnis und die Produktion mathematischer Darstellungen und liefert eine theoretische Basis für die Analyse sprachlicher Prozesse beim Darstellungswechsel.

Bossé et al. (2011) teilt die verbalen Darstellungen in zwei Kategorien ein „verbal situations“ und „verbal descriptions“, was in dieser Arbeit mit verbal-situativ und verbal-beschreibend übersetzt wird. Verbal-situative Darstellungen von Funktionen umfassen reale Sachkontexte, in denen funktionale Zusammenhänge auftauchen, z. B. der lineare Zusammenhang zwischen der Anzahl und dem Gewicht von Mehlütten. Verbal-beschreibende Darstellungen beziehen sich auf innermathematische Kontexte, in denen Eigenschaften von Funktionen beschrieben werden, dazu gehört beispielsweise die verbale Beschreibung des Verlaufs eines Funktionsgraphen. Zindel (2020) unterscheidet drei Formen verbaler Beschreibungen: Beschreibung einer Alltagssituation, Beschreibung einer Funktion, Beschreibung einer Darstellung der Funktion. Die Beschreibung einer Alltagssituation entspricht den verbal-situativen Darstellungen, während die Beschreibung einer Funktion sowie die Beschreibung einer Darstellung der Funktion eine Ausdifferenzierung der verbal-beschreibenden Darstellungen entsprechen.

2.2 Darstellungswechsel

Darstellungswechsel in der Mathematik situationsgerecht einzusetzen bzw. anzuwenden, sind entscheidende Fähigkeiten, die für die Ausbildung funktionalen Denkens notwendig sind (Bruner, 1974; Duval, 1993; Klinger, 2018; Stölting, 2008). Der Darstellungswechsel und die Darstellungsvernetzung zu mathematischen Inhalten, können außerdem allgemein als Prinzip zur Förderung der Begriffsbildung und dem Aufbau von Grundvorstellungen (vom Hofe, 1995) eingesetzt werden (Salle et al., 2023; Zindel, 2019). In Schulen dominiert häufig der Darstellungswechsel zwischen Funktionsgleichung und Graph (Herget, 2013) was laut Herget mit der etablierten Praxis der Kurvendiskussion zusammenhängt. Gehen wir davon aus, dass es vier Darstellungsformen für Funktionen gibt (V = verbal, G = graphisch, S = symbolisch und T = tabellarisch), dann ergeben sich insgesamt zwölf Möglichkeiten des

Darstellungswechsels. In einer Studie von Bossé et al. (2011) wurde untersucht, welche dieser Darstellungswechsel von Lehrer:innen als einfach bzw. besonders schwierig eingestuft werden. Dabei stellte sich heraus, dass die Darstellungswechsel in eine verbale Darstellung am schwierigsten bewertet wurde. Malle (1993) zeigte außerdem in einigen Fallbeispielen mit akademischen Mitarbeiter:innen aus unterschiedlichen Fachrichtungen, dass auch der Wechsel von der verbalen Beschreibung einer Sachsituation zu einem Funktionsterm mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden ist.

2.3 Merkmale von Darstellungen

Betrachtet man die einzelnen Darstellungen im Hinblick auf die Übersetzungsschwierigkeiten der Schüler:innen, so lassen sich mehrere Dimensionen identifizieren, die einen Einfluss auf diese Schwierigkeiten haben. Bossé et al. (2011) fasst diese Dimensionen unter folgenden Begriffen zusammen: Fehlende Informationen, Informationsdichte und störende Informationen. Diese Dimensionen ermöglichen es, die unterschiedlichen Schwierigkeitsgrade mathematischer Übersetzungen zu erläutern.

Fehlende Informationen: Jede Darstellung eines mathematischen Objekts hebt spezifische Eigenschaften hervor, während andere Aspekte verborgen bleiben. Dies führt dazu, dass bestimmte Informationen in einer Darstellung direkt zugänglich sind, während andere zunächst noch im Hintergrund bleiben. Beispielsweise ermöglicht die Darstellung einer Parabel in der Scheitelpunktform

$$f(x) = -2 \cdot (x - 3)^2 - 8$$

das direkte Ablesen des Scheitelpunkts $(3, -8)$, während die Nullstellen nicht ohne weiteres erkennbar sind. Eine alternative Darstellung der gleichen Funktion in der Nullstellenform

$$f(x) = -2 \cdot (x - 1)(x - 5)$$

zeigt die Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 5$, verbirgt aber den Scheitelpunkt. Beide Darstellungen enthalten zusätzliche Informationen wie den Streckungsfaktor oder geben Auskunft über das Krümmungsverhalten, die ebenfalls von Bedeutung sind. Ebenso können graphische Darstellungen fehlende Informationen enthalten, bspw. wenn die Beschriftung der Achsen nicht gegeben ist. Diese Beispiele verdeutlichen die Herausforderungen für die Schüler:innen beim Übersetzen zwischen verschiedenen Darstellungsformen. Sie arbeiten dabei oft mit unvollständigen Informationen, die sie ergänzen oder

interpretieren müssen, um ein vollständigeres Bild des mathematischen Objekts zu erhalten.

Informationsdichte: Die Informationsdichte bezieht sich auf die Menge und Zugänglichkeit von Informationen innerhalb einer mathematischen Darstellung. Je höher die Informationsdichte, desto mehr Informationen sind in der Darstellung enthalten und desto leichter lassen sich diese Informationen extrahieren (Bossé et al., 2011). Beispielsweise besitzen Funktionsgraphen und Funktionsterme eine hohe Informationsdichte, da sie eine Vielzahl von Informationen wie Steigung, Krümmungsverhalten und Extremwerte kompakt und leicht zugänglich präsentieren. Im Gegensatz dazu weisen Tabellen und verbale Darstellungen eine niedrigere Informationsdichte auf, da sie tendenziell weniger Informationen bereitstellen und es zudem schwieriger ist, zusätzliche Informationen aus ihnen zu gewinnen. Dies bedeutet, dass Schüler:innen bei Darstellungen mit hoher Informationsdichte oft auf einen Blick viele relevante mathematische Eigenschaften erkennen können, während sie bei Darstellungen mit niedriger Informationsdichte möglicherweise mehr Aufwand betreiben müssen, um relevante Details zu extrahieren.

Störende Informationen: Jede mathematische Darstellung vermittelt spezifische Eigenschaften und Merkmale eines Objekts und stellt somit eine bestimmte Perspektive auf dieses Objekt dar. In Bezug auf den Übersetzungsprozess können solche Darstellungen jedoch auch Informationen enthalten, die potenziell störend sind und für den Wechsel zu einer anderen Darstellungsform irrelevant oder sogar hinderlich sein können. Beispielsweise kann eine Tabelle eine Vielzahl von Punkten enthalten, von denen jedoch nur wenige für die Herleitung eines Funktionsterms relevant sind. Ähnlich kann der Graph einer Polynomfunktion mehrere Minima und Maxima aufweisen, die für die Übersetzung in den entsprechenden Funktionsterm nicht notwendig sind. Solche überflüssigen Informationen können Schüler:innen verwirren und den Fokus von den relevanten Aspekten ablenken, was den Darstellungswechsel zusätzlich erschwert.

Die Fähigkeit, flexibel mit verschiedenen Darstellungen umzugehen und typische Fehlerquellen beim Darstellungswechsel zu erkennen, ist für Lehrkräfte zentral, insbesondere vor dem Hintergrund des digitalen Wandels. Mit der zunehmenden Integration digitaler Technologien in den Unterricht verändern sich nicht nur die Anforderungen an den Umgang mit Darstellungen, sondern auch die Werkzeuge selbst.

Systeme künstlicher Intelligenz wie ChatGPT eröffnen neue Möglichkeiten, mathematische Inhalte automatisch zu generieren, darzustellen und zu transformieren, zum Beispiel durch das Erzeugen von Funktionsgraphen, die Beschreibung mathematischer Zusammenhänge in Alltagssprache oder das Umformen symbolischer Ausdrücke. Diese Entwicklungen verlaufen rasant und stellen die Didaktik vor neue Herausforderungen. Es stellt sich die Frage, wie verlässlich KI-generierte Darstellungen sind, wie gut ein Sprachmodell zwischen verschiedenen Darstellungsformen wechseln kann und welche Fehler dabei auftreten.

Im folgenden Kapitel wird daher die mathematische Leistungsfähigkeit von ChatGPT betrachtet, mit besonderem Fokus auf die Qualität der erzeugten Darstellungen und deren Bedeutung für den schulischen Kontext.

3. Mathematische Leistung von ChatGPT

Die Schnelligkeit der mathematikdidaktischen Forschung im Umgang mit LLMs zeigt sich durch die Untersuchungen der Leistungsfähigkeit von ChatGPT bei der Lösung mathematischer Aufgaben (Frieder et al., 2023). Kurz nach der Veröffentlichung von ChatGPT 3.5 im November 2022 gab es zahlreiche Beispiele über die fehlende mathematische Leistungsfähigkeit der LLMs wie bspw. die fehlerhafte Faktorisierung der Zahl 2023 (Escher, 2023) sowie die Frage, wie lange vier Eier kochen müssen, wenn zwei Eier vier Minuten dauere. Diese Frage wurde mit acht Minuten beantwortet (Buchholtz et al., 2023). Schnell zeigte sich, dass solche offensichtlichen Fehlurteile mit dem Upgrade zu ChatGPT 4.0 im März 2023 weitaus seltener auftraten (Schorcht et al., 2023) und es häuften sich die Beiträge, in denen das didaktische Potential von ChatGPT diskutiert wurde (Dilling, Holten, Pielsticker & Witzke, 2024; Schorcht et al., 2023; Spannagel, 2023).

Die Verbesserung der mathematischen Fähigkeiten von der Version 3.5 zu 4.0 wurde in einer umfangreichen Studie von Frieder et al. (2023) empirisch nachgewiesen, in der 733 mathematische Fragestellungen mit ChatGPT 3.5 und 170 Fragestellungen mit ChatGPT 4.0 aus sechs verschiedenen Kategorien getestet und ausgewertet wurden. Bei ChatGPT 4.0 ist festzustellen, dass sich der prozentuale Anteil der korrekten Antworten im Vergleich zu ChatGPT 3.5 fast verdoppelte, während sich der prozentuale Anteil der falschen Antworten etwa halbierte (Frieder et al. 2023). Für ein differenzierteres Bild können die verschiedenen Kategorien der Aufgabensammlung genauer betrachtet werden. Diese setzt sich

zusammen aus Aufgaben der folgenden Bereiche: Hochschulmathematik (Analysis, Topologie & Stochastik), lückenhafte Beweise, Problemstellungen aus der Mathematikolympiade, symbolische Integration, Mathematik (Algebra & Stochastik) sowie die Nutzung von ChatGPT als Suchmaschine für Definitionen, Sätze und Beweise. Es lässt sich feststellen, dass die Aufgaben aus der Mathematikolympiade auch für ChatGPT nach wie vor schwer lösbar sind. Auch Beweise werden häufig fehlerhaft geführt. Schorcht et al. (2024) ließen mathematische Probleme durch ChatGPT lösen. Es zeigt sich, dass LLMs einfache rechnerische Aufgaben im Mathematikunterricht gut lösen können, jedoch Schwächen bei komplexeren algebraischen Problemstellungen zeigen, die über reine Berechnungen hinausgehen und heuristisches Denken erfordern. Vor diesem Hintergrund stellt sich die Frage, wie die Leistungsfähigkeit von LLMs beim Lösen mathematischer Aufgaben gezielt verbessert werden kann.

3.1 Verbesserung der mathematischen Leistung

Um die Performanz beim Lösen mathematischer Aufgaben zu verbessern, gibt es mehrere Möglichkeiten:

- Optimierung der LLMs
- Gezieltes Prompting
- Einbindung von externen Tools

In der KI-Forschung gibt es unterschiedliche Methoden, um das Training von LLMs gezielt auf mathematische Aufgaben auszurichten. Eine dieser Methoden besteht darin, bereits vorhandene LLMs durch geeignete Verfahren in ihrer Leistungsfähigkeit zu optimieren. Ein vielversprechendes Verfahren ist die Verwendung des Monte Carlo Tree Search Algorithmus, wie von Chen et al. (2024) und Zhang et al. (2024) beschrieben. Dieses Verfahren ermöglicht eine feinere Anpassung der Parameter, um den Output der Modelle zu verbessern. Allerdings erfordert dieser Ansatz umfassende mathematische und informatische Kenntnisse, da die Implementierung und das Training solcher Algorithmen komplex sind und entsprechendes Fachwissen erfordern.

Eine weitere Möglichkeit, die Leistung von ChatGPT beim Lösen mathematischer Aufgaben zu verbessern, ist das gezielte Prompting. Beim Prompting können unterschiedliche Techniken angewendet werden, um die Qualität der Ergebnisse zu steigern. Schorcht et al. (2023) vergleichen in ihrem Beitrag zwei Techniken: die „Chain of Thoughts“ und den „Query Loop“. Bei der „Chain of Thoughts“-Technik

wird ChatGPT dazu angeleitet, die Lösung einer Aufgabe Schritt für Schritt zu erläutern, was oft zu präziseren und nachvollziehbaren Ergebnissen führt. Der „Query Loop“ hingegen fordert ChatGPT auf, nacheinander Fragen an den Benutzer zu stellen, um die benötigten Informationen für die Lösung der Aufgabe zu sammeln. Diese Methode kann besonders hilfreich sein, um die Interaktion mit dem Modell zu verbessern und sicherzustellen, dass keine wichtigen Details übersehen werden. Schorcht et al. (2024) sehen bei der Entwicklung heuristischer Lösungsansätze Potential bei der Nutzung gezielter Prompt-Techniken. Besonders die Chain-of-Thought und Ask-me-Anything Techniken machen laut ihrer Studie die Verwendung von heuristischen Strategien sichtbar und ermöglichen so eine gezielte Unterstützung des Problemlöseprozesses.

Eine dritte Möglichkeit, die Performanz zu verbessern, ist die Einbindung externer Tools. Ein Beispiel dafür ist die Integration von Wolfram Alpha (Wolfram, 2023). Spannagel (2023) zeigte in seinem Beitrag, wie die Einbindung von Wolfram Alpha in ChatGPT die Leistung erheblich steigern kann, indem das Modell beispielsweise in die Lage versetzt wird, präzise Funktionsgraphen zu erstellen. Er kommt zu dem Schluss: Die Kopplung von LLMs mit einem Computeralgebrasystem wie Wolfram Alpha „ermöglicht die Interaktion mit dem Mathematik-System in natürlicher Sprache bei gleichzeitiger Erhöhung der Wahrscheinlichkeit, dass die Ausgabe korrekt ist“. Auch Helfrich-Schkarbanenko (2023) vergleicht die Leistung von ChatGPT alleinstehend mit der Leistung von ChatGPT in Kombination mit Wolfram Alpha und stellt fest, dass auf diese Weise bestehende Leistungslücken effektiv geschlossen werden können. Die Integration solcher spezialisierten Tools eröffnet somit neue Möglichkeiten, die Genauigkeit und Zuverlässigkeit von ChatGPT bei mathematischen Aufgaben signifikant zu verbessern, ohne dafür tiefgehendes mathematisches und informatisches Wissen zu benötigen.

Die bisherigen Ausführungen verdeutlichen, dass ChatGPT zunehmend in der Lage ist, mathematische Aufgaben zu bearbeiten, insbesondere durch geeignetes Prompting und den Einsatz externer Tools. Daraus ergibt sich die Frage, welche Kompetenzen erforderlich sind, um solche Systeme im Bildungskontext sinnvoll zu nutzen. Im folgenden Abschnitt werden zentrale digitale Kompetenzen vorgestellt, die insbesondere für angehende Lehrkräfte im Umgang mit LLMs im Mathematikunterricht von Bedeutung sind.

4. Professionelle Kompetenzen von Lehrkräften im digitalen Wandel

Im Kontext der Auseinandersetzung mit ChatGPT und seiner Verwendung zur Generierung und Interpretation mathematischer Darstellungen spielen digitale Kompetenzen von Lehrkräften eine zentrale Rolle. Klieme und Leutner (2006) weisen darauf hin, dass es sich bei Kompetenzen um *kontextspezifische* Leistungsdispositionen handelt, die sich funktional auf Situationen und Anforderungen in bestimmten Domänen beziehen.

Im Hinblick auf die professionellen Kompetenzen von Lehrkräften erwies sich die Wissenstaxonomie nach Shulman (1986) als besonders relevant für die didaktische Forschung. Shulman unterscheidet beim Lehrerprofessionswissen die drei Kategorien *Fachwissen*, *fachdidaktisches Wissen* und *pädagogisches Wissen*, welche seither in einer Vielzahl von Studien als konzeptuelle Grundlage genutzt wurden (Bau-mert & Kunter, 2011; Blömeke, Kaiser & Lehmann, 2010; Schumacher, 2017).

Loewenberg Ball et al. (2008) beschreiben zentrale mathematische Tätigkeiten von Lehrkräften, die für den Unterricht essenziell sind und auch im digitalen Kontext, wie bei der Arbeit mit ChatGPT, hohe Relevanz haben. Zu diesen Tätigkeiten gehören:

T1: das Erkennen, welche Informationen einer bestimmten Darstellung entnommen werden können

T2: das Verknüpfen von Darstellungen mit sinngebenden Kontexten und anderen Darstellungen

T3: die Verwendung und kritische Bewertung mathematischer Notation und Sprache

T4: sowie die Auswahl geeigneter Darstellungen für spezifische Zwecke.

Wenn angehende Lehrkräfte Darstellungen mit ChatGPT generieren und bewerten, gewinnen zusätzlich Tätigkeiten an Bedeutung:

T5: die Plausibilitätsbewertung von Schüleraussagen

T6: die Vermittlung oder Bewertung mathematischer Erklärungen.

In der in diesem Beitrag vorgestellten Studie erproben angehende Lehrkräfte den Umgang mit ChatGPT. Somit rückt die digitale Komponente professioneller Kompetenz verstärkt in den Fokus.

4.1 Erweiterung der professionellen Kompetenz durch die digitale Komponente

Im Zuge der Digitalisierung der letzten Jahrzehnte änderten sich die Anforderungen an (Mathematik-) Lehrkräfte, welchen durch Konzeptualisierungen zu digitalen Kompetenzen begegnet wurde. Ein viel genutztes Beispiel für eine Konzeptualisierung digitaler Kompetenzen ist das Technological Pedagogical Content Knowledge (TPACK)-Modell von Koehler & Mishra (2009). Das TPACK-Modell baut auf der Idee von Shulman (1986) auf, die Wissensdimensionen von Fachinhalt und Pädagogik unterscheiden, und fügt eine technologische Dimension hinzu. Besonders relevant erscheinen an diesem Ansatz die Schnittmengen der einzelnen Dimensionen, nämlich das technologische-pädagogische Wissen, das technologische Fachwissen und das pädagogische Fachwissen, sowie die Schnittstelle, an der alle drei Dimensionen zusammenkommen: Technologisches-pädagogisches Fachwissen.

In der Beschreibung der digitalen Kompetenzen angehender Mathematiklehrkräfte lassen sich zentrale Anforderungen unterschiedlicher Rahmenkonzepte miteinander verbinden. So betont die KMK-Strategie zur „Bildung in der digitalen Welt“ (KMK, 2017) die Notwendigkeit, digitale Technologien kritisch auszuwählen und reflektiert in Lehr-Lern-Prozesse zu integrieren. Dies schließt insbesondere Kompetenzen in den Bereichen Kommunikation und Kollaboration, Problemlösen sowie Analysieren und Reflektieren ein, die Mathematiklehrkräfte befähigen, digitale Werkzeuge gezielt und effektiv im Unterricht einzusetzen. Wesentlich hierfür ist auch eine kontinuierliche Fortbildung, damit Lehrkräfte stets aktuelle Entwicklungen und Methoden im Bereich digitaler Medien und Technologien kennen und anwenden können. Zudem wird der Bereich einer ethischen und verantwortungsvollen Mediennutzung hervorgehoben, der es Lehrkräften ermöglicht, Schüler:innen zur reflektierten und sicheren Nutzung digitaler Medien anzuleiten, insbesondere hinsichtlich Datenschutz, Sicherheit und sozialer Auswirkungen digitaler Technologien. Platz und Plote (2025) unterstreichen ergänzend, dass sowohl ethische als auch rechtliche Fragen des Einsatzes von KI bereits in der Primarstufe berücksichtigt und das damit verbundene technologische Wissen vermittelt werden sollten (Information and Communication Technology-Literacy bzw. Lernen über KI).

Die fachdidaktische Spezifizierung erfolgt durch den Orientierungsrahmen „Digitale Kompetenzen für das Lehramt in den Naturwissenschaften“ (DiKoLAN,

Arbeitsgruppe Digitale Basiskompetenzen, 2020). Hier werden besonders Kompetenzen hervorgehoben, die mathematisch-naturwissenschaftliche Inhalte betreffen, wie etwa die Datenerfassung und -analyse, Simulation und Modellierung sowie die kritische Bewertung digitaler Quellen. Gerade im Mathematikunterricht sind solche Fähigkeiten entscheidend, um Schüler:innen in der authentischen Anwendung digitaler Methoden und Werkzeuge zu unterstützen.

Der DigCompEdu-Rahmen (Ghomi & Redecker, 2019) ergänzt diese Perspektive, indem er das berufliche Engagement der Lehrkräfte sowie deren Fähigkeit, digitale Ressourcen professionell auszuwählen und zu verwalten, hervorhebt. Zudem betont er die Gestaltung kollaborativer und selbstgesteuerter Lernprozesse sowie eine formative, digital unterstützte Leistungsbewertung. Besonders relevant für Mathematiklehrkräfte ist hier die Befähigung der Lernenden zur eigenständigen digitalen Problemlösung und Zusammenarbeit, was die Kompetenzentwicklung der Schüler:innen nachhaltig fördert.

Zusammenfassend verdeutlichen die Rahmenwerke, dass angehende Mathematiklehrkräfte über ein vielseitiges Spektrum digitaler Kompetenzen verfügen müssen. Sie sollen nicht nur fachlich versiert digitale Werkzeuge nutzen, sondern diese auch kritisch-reflektiert auswählen, methodisch-didaktisch sinnvoll integrieren sowie Schüler:innen zur kompetenten und ethisch verantwortlichen Nutzung digitaler Technologien befähigen. Somit werden die Anforderungen an die digitalen Kompetenzen von Lehrkräften deutlich. Im Hinblick auf die neuesten Entwicklungen generativer KI, insbesondere im Bereich großer Sprachmodelle, treten neue digitale Kompetenzen für Lehrkräfte hervor.

4.2 Digitale Kompetenzen im Umgang mit künstlicher Intelligenz

Zusätzlich zu etablierten digitalen Kompetenzen gewinnt die Vermittlung von Wissen über Künstliche Intelligenz (KI) zunehmend an Bedeutung. Ein zentraler Grund dafür ist die wachsende Relevanz von KI für die Zukunftsperspektiven junger Menschen. Laut der Vodafone-Studie „Pioniere des Wandels“ (2023) sind über zwei Drittel der 14- bis 20-Jährigen überzeugt, dass gute KI-Kenntnisse entscheidend für ihre beruflichen Ziele sind. Das Impulspapier der Ständigen Wissenschaftlichen Kommission der KMK (SWK, 2024) fordert, Schüler:innen an den Umgang mit KI, inklusive Large Language Models (LLMs) wie ChatGPT, heranzuführen – mit Verständnis ihrer Funktionsweisen und Reflexion möglicher Verzerrungen.

Mathematikdidaktisch erhält dieser Ansatz zusätzliche Relevanz durch die theoretischen Überlegungen aus dem TPACK-Framework. Wie Kadluba et al. (2025) zeigen, liegt in bisherigen TPACK-Erfassungen häufig ein stärkerer Fokus auf den technologischen und pädagogischen Aspekten, während die inhaltliche Dimension – insbesondere bezogen auf mathematische Inhalte und deren unterschiedliche Darstellungsebenen – weniger präzise erfasst wird. Gerade für die Integration von KI in den Mathematikunterricht ist jedoch eine explizite Verbindung zwischen mathematischem Inhalt und technologiegestützter Darstellung wesentlich.

Für die konkrete Nutzung von KI im Mathematikunterricht beschreiben Zhang und Tur (2024) Möglichkeiten, wie KI insbesondere auf Schüler:innenebene mathematische Kompetenzen unterstützen kann, beispielsweise durch personalisiertes Feedback und adaptive Lernprozesse. Auch Pepin, Buchholtz & Salinas-Hernández (2025) weisen auf Potenziale hin, etwa die Förderung mathematischen Verständnisses sowie kollaborativen Lernens durch KI. Diese theoretischen und empirischen Befunde bilden den Ausgangspunkt für eine mathematikdidaktisch fundierte Integration von KI-Kompetenzen in Unterrichtskonzepte.

Darüber hinaus sind ethische Überlegungen, Datenschutzfragen und gesellschaftliche Auswirkungen automatisierter Prozesse grundlegende Elemente für den kompetenten Umgang mit KI im Bildungsbe-
reich (Deutscher Ethikrat, 2023).

Nachdem in den vorangegangenen Theorieteil zentrale Aspekte mathematischer Darstellungen, der Leistungsfähigkeit von LLMs sowie digitaler Kompetenzen angehender Lehrkräfte erläutert wurden, soll im folgenden Abschnitt exemplarisch eine Interaktion mit ChatGPT vorgestellt werden, anhand derer sich die zuvor entwickelten theoretischen Perspektiven nachvollziehen lassen.

5. Digitale Fähigkeiten im Umgang mit ChatGPT – neuartige Einsatzmöglichkeiten

Um zu veranschaulichen, wie ChatGPT dazu verwendet werden kann, zwischen der verbalen Darstellung und dem Funktionsgraphen zu wechseln, wird im Folgenden ein Chatprotokoll vorgestellt, bei dem dieser Darstellungswechsel vollzogen wird. Dieses Gespräch fand im Dezember 2023 mit der Version ChatGPT 4.0 statt. Zu diesem Zeitpunkt gab es noch die Möglichkeit, Plug-Ins zu verwenden. Dieser Dienst wurde in April 2024 eingestellt. Dafür wurden individuelle GPT's zur Verfügung gestellt, darunter

auch das Wolfram Alpha GPT, welches im März 2024 veröffentlicht wurde. Die Präsentation des Protokolls ist verbunden mit einer Reflexion über die Qualität der Prompts und des von ChatGPT generierten Outputs. Die Prompts (P) und die Antworten von ChatGPT (GPT) sind dabei durchnummeriert.

Ziel ist es, den Graphen der folgenden Funktion von ChatGPT und Wolfram Alpha zeichnen zu lassen, ohne den Funktionsterm explizit zu kennen (Abb. 1).

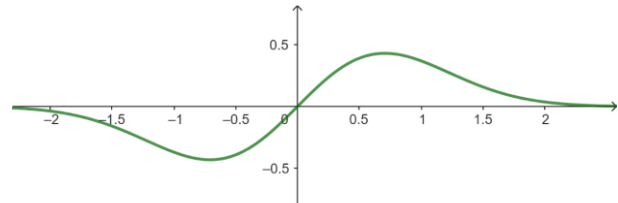


Abb. 1: Graph der Funktion $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$

Dazu wurde ChatGPT der folgende Prompt vorgelegt:

P1: Zeichne mir den Graphen einer punktsymmetrischen Funktion, mit genau einer Nullstelle bei $x = 0$, einem Hochpunkt im ersten Quadranten und einem Tiefpunkt im dritten Quadranten.

GPT1: Eine Funktion die punktsymmetrisch zum Ursprung ist, ist typischerweise eine ungerade Funktion. Eine einfache Wahl für eine solche Funktion, die eine Nullstelle bei $x = 0$ hat und Hoch- sowie Tiefpunkte in den angegebenen Quadranten aufweist, ist eine kubische Funktion. Ein Beispiel dafür wäre:

$$f(x) = ax^3 + bx$$

Um sicherzustellen, dass der Hochpunkt im ersten Quadranten und der Tiefpunkt im dritten Quadranten liegt, sollten die Koeffizienten a und b so gewählt werden, dass die Funktion im ersten Quadranten ansteigt und im dritten Quadranten abfällt. Eine mögliche Wahl der Koeffizienten könnte $a = -1$ und $b = 3$ sein. Damit ergibt sich die Funktion

$$f(x) = -x^3 + 3x$$

Ich werde nun den Graphen dieser Funktion zeichnen (Abb. 2).

Bei diesem Prompt wurden insgesamt vier zentrale Eigenschaften der Funktion genannt: Punktsymmetrie, Einzige Nullstelle, Bereich für den Hochpunkt, Bereich für den Tiefpunkt.

Der von ChatGPT erzeugte Graph besitzt drei der vier geforderten Eigenschaften. Er ist punktsymmetrisch außerdem befinden sich der Hoch- und der Tiefpunkt in den richtigen Quadranten. Allerdings besitzt der Funktionsgraph nicht genau eine, sondern drei Nullstellen.

Used Wolfram
 Hier ist der Graph der Funktion $f(x) = -x^3 + 3x$:

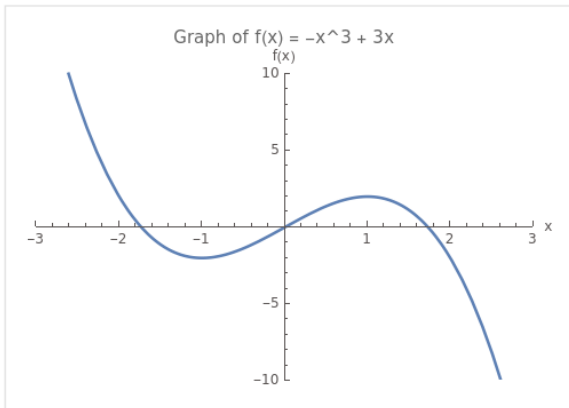


Abb. 2: erster Output von ChatGPT

ChatGPT folgert richtig, dass punktsymmetrische Funktionen (per Definition) ungerade Funktionen sind. Lässt man außer Acht, dass die Funktion genau eine Nullstelle haben soll, ist auch die Annahme, dass es sich um ein kubisches Polynom mit ungeraden Exponenten handelt, plausibel. Die Aussage, dass man a und b so wählen sollte, dass die Funktion „im ersten Quadranten ansteigt“ und „im dritten Quadranten abfällt“, ist logisch nicht einwandfrei. Schließlich steigt und fällt die Funktion in beiden Quadranten. Wie ChatGPT auf die Werte $a = -1$ und $b = 3$ kommt, ist auch nicht ersichtlich.

P2: Nein, meine Funktion soll nur eine Nullstelle haben, deine Funktion hat drei Nullstellen. Die Funktion soll sich zu den oben genannten Eigenschaften auch noch asymptotisch der x -Achse annähern.

GPT2: Verstanden. Eine Funktion, die punktsymmetrisch ist, sich der x -Achse asymptotisch annähert und nur eine Nullstelle bei $x = 0$ hat, könnte eine ungerade Potenzfunktion mit einem Exponenten größer als 1 sein. Eine geeignete Funktion wäre beispielsweise:

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

Diese Funktion hat eine Nullstelle bei $x = 0$, ist punktsymmetrisch zum Ursprung und nähert sich asymptotisch der x -Achse an, da der Nenner für große $|x|$ dominiert. Außerdem hat sie einen Hochpunkt im ersten Quadranten und einen Tiefpunkt im dritten Quadranten (Abb. 3).

Bei diesem Prompt wurde zunächst darauf hingewiesen, dass der zuvor generierte Funktionsgraph nicht alle geforderten Eigenschaften aufweist. Es wird erneut explizit gefordert, dass der Graph nur genau eine Nullstelle haben soll. Außerdem wird eine weitere Eigenschaft des Funktionsgraphen genannt: Der Graph soll sich asymptotisch der x -Achse annähern.

Used Wolfram
 Hier ist der Graph der Funktion $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$:

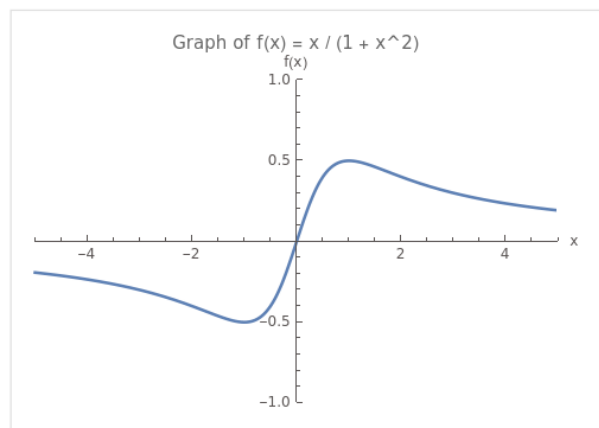


Abb. 3: zweiter Output von ChatGPT

Der von ChatGPT erzeugte Funktionsgraph weist tatsächlich alle fünf geforderten Eigenschaften auf. Allerdings entspricht er nicht dem vorgegebenen Bild. Die genannten Eigenschaften sind also nicht hinreichend, um den Funktionsgraphen eindeutig zu bestimmen.

Die von ChatGPT generierte Begründung passt nicht zum Funktionsterm. Es handelt sich nicht um eine Potenzfunktion, sondern um eine gebrochen rationale Funktion. Als Begründung dafür, dass sich die Funktion asymptotisch der x -Achse annähert, gibt ChatGPT an, dass der Nenner für große $|x|$ dominiert, was korrekt ist.

P3: Ich suche eine andere Funktion, sie soll all die oben genannten Eigenschaften haben, im Funktionsterm soll aber auch die Exponentialfunktion auftauchen.

GPT3: Eine Funktion, die die gewünschten Eigenschaften erfüllt und die Exponentialfunktion enthält, könnte eine Kombination aus einer linearen Funktion und einer exponentiell abklingenden Funktion sein. Eine solche Funktion ist punktsymmetrisch, wenn sie ungerade ist. Ein Beispiel dafür wäre:

$$f(x) = x \cdot e^{-x^2}$$

Diese Funktion hat eine Nullstelle bei $x = 0$, ist punktsymmetrisch zum Ursprung, und nähert sich asymptotisch der x -Achse an, da der exponentielle Term für große $|x|$ gegen Null geht. Außerdem hat sie einen Hochpunkt im ersten Quadranten und einen Tiefpunkt im dritten Quadranten. (Abb. 4)

Im letzten Prompt wird noch die Information hinzugefügt, dass im Funktionsterm die Exponentialfunktion auftauchen soll. Im Gegensatz zu den vorherigen Prompts bezieht sich diese Information auf die symbolische Darstellung der Funktion und nicht auf Eigenschaften des Funktionsgraphen.

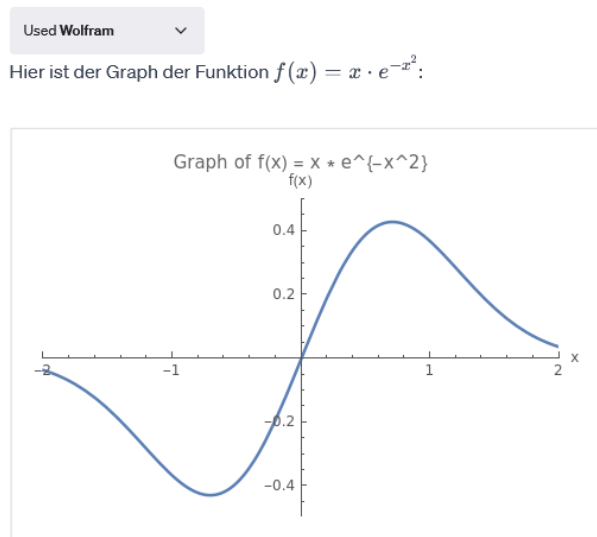


Abb. 4: dritter Output von ChatGPT

Mit der letzten Information war ChatGPT in der Lage den gesuchten Funktionsgraphen zu erzeugen. Dadurch, dass die Skalierung der x- und y-Achse unterschiedlich ist, erweckt das Bild den Eindruck, dass die Funktionsgraphen nicht übereinstimmen. Vergleicht man einzelne Punkte auf dem Graphen stellt man jedoch fest, dass beide Graphen zur selben Funktion gehören. Die Argumentation von ChatGPT ist im Wesentlichen korrekt.

Auf der Basis der analysierten Prompts und der erzeugten Funktionsgraphen lassen sich drei Fertigkeiten identifizieren, die Studierende im Umgang mit ChatGPT entwickeln sollten. Erstens die Fertigkeit zur präzisen Prompt-Formulierung, um klare und spezifische Anweisungen zu geben, die die gewünschten mathematischen Darstellungen hervorbringen. In Hinblick auf die in Abschnitt 4 genannten Tätigkeiten müssen die Studierenden mathematische Notationen und mathematische Sprache verwenden (T3) sowie sinngebende Kontexte mit der gewünschten mathematischen Darstellung verknüpfen (T2).

Zweitens die Fertigkeit zur kritischen Reflexion und Anpassung von Antworten, die es ermöglicht, die generierten Ergebnisse zu überprüfen, Missverständnisse zu erkennen und durch gezieltes Nachsteuern der Prompts zu korrigieren. Dies involvieren die folgenden Tätigkeiten: Die Auswahl geeigneter Darstellungen für spezifische Zwecke (T4), die kritische Bewertung mathematischer Notation und Sprache (T3), eine Plausibilitätsbewertung von (Schüler-) Aussagen (T5) und die Bewertung mathematischer Erklärungen (T6).

Drittens ein Verständnis für Darstellungsformen und graphische Interpretation, um die Beziehungen

zwischen verbaler und visueller Darstellung zu erkennen und korrekt zu interpretieren. Hier werden die mathematischen Tätigkeiten hinsichtlich der Darstellungen (T1, T2, T4) und der sprachlichen Auseinandersetzung (T3, T5, T6) relevant. Diese Fertigkeiten stellen eine Grundlage für den effektiven und reflektierten Einsatz von ChatGPT dar und bieten Möglichkeiten zur Förderung digitaler Kompetenzen im Mathematikunterricht.

6. Methodik

In diesem Abschnitt wird das methodische Vorgehen der empirischen Untersuchung vorgestellt. Nach der Herleitung der Forschungsfragen werden das Studiendesign, das Aufgabensetting sowie die Auswertungsmethode erläutert. Abschließend wird das entwickelte Kategoriensystem beschrieben, das zur Analyse der Bearbeitungsprozesse im Umgang mit ChatGPT herangezogen wurde.

6.1 Forschungsfrage

Die angestellten theoretischen Überlegungen legen nahe, dass bestimmte Merkmale von mathematischen Darstellungen den Darstellungswechsel entweder positiv oder negativ beeinflussen (Bossé et al., 2011). Diese Wechsel können besonders herausfordernd sein, wenn wesentliche Informationen in einer bestimmten Darstellungsform fehlen oder missverständlich wiedergegeben werden. LLMs wie ChatGPT bieten durch ihre Fähigkeit, natürliche Sprache zu verarbeiten und damit verschiedene Darstellungen zu erzeugen, neue Ansätze zur Unterstützung und zur Analyse dieser Darstellungswechsel. Erste Beispiele, wie in Abschnitt 5 beschrieben, deuten darauf hin, dass eine Untersuchung der Interaktion mit LLMs in Bezug auf den Darstellungswechsel von Funktionen lohnenswert sein kann. Im Fokus der Studie stehen insbesondere die Schwierigkeiten, die sich beim Darstellungswechsel im Umgang mit LLMs ergeben. Diese Herausforderungen resultieren einerseits aus den spezifischen Merkmalen mathematischer Darstellungen von Funktionen (Zindel 2020, Bossé et al., 2011) und andererseits aus den sprachlichen Kompetenzen der Lernenden, sowohl im Hinblick auf die fachsprachliche als auch die alltagssprachliche Kommunikation (Prediger, 2013). Daraus ergeben sich die folgenden Forschungsfrage:

Welche Schwierigkeiten ergeben sich für Studierende im Umgang mit ChatGPT beim Darstellungswechsel von Funktionen?

Welche sprachlichen Schwierigkeiten treten bei der Formulierung mathematischer Prompts auf, insbesondere im Umgang mit Fachsprache?

6.2 Studiendesign

Es handelt sich bei der vorliegenden Arbeit um eine explorative Studie mit $N=12$ Lehramtsstudierenden für die Sekundarstufe I im 3. und 4. Semester. Die zwölf Studierenden wurden in sechs Zweiergruppen eingeteilt und dazu aufgefordert, in Partnerarbeit innerhalb von fünfzehn Minuten eine Reihe von mathematischen Aufgaben mithilfe von ChatGPT zu lösen. Die Studie fand im Dezember 2023 in der Universität Bielefeld statt. Es wurde die Version ChatGPT 4.0 mit dem damals verfügbaren Wolfram-Alpha Plugin genutzt. ChatGPT hat bei der Durchführung der Studie keinen Zugriff zum Internet gehabt. Die Studierenden wurden bei Ihrer Bearbeitung dabei gefilmt, wie sie mit ChatGPT arbeiten. Außerdem wurden die Chatprotokolle gesichert.

6.3 Aufgabendesign

Zu Beginn der Studie wurde den Studierenden ein Aufgabenblatt mit der Aufgabenbeschreibung zur Verfügung gestellt. Der Aufgabentext lautete:

„Vor Ihnen liegt ein kleiner Stapel laminierter Karten. Auf jeder dieser Karten ist ein Funktionsgraph abgebildet. Ihre Aufgabe in den nächsten 15 Minuten wird es sein, zu jedem dieser Graphen einen Text zu erstellen, so dass ChatGPT ihn mit der Hilfe von Wolfram Alpha zeichnen kann.“

Anschließend folgte eine Anleitung, in der die Studierenden Schritt für Schritt instruiert wurden. Auf den laminierten Karten waren in der entsprechenden Reihenfolge die folgenden vier Graphen zu sehen (Abb. 5):

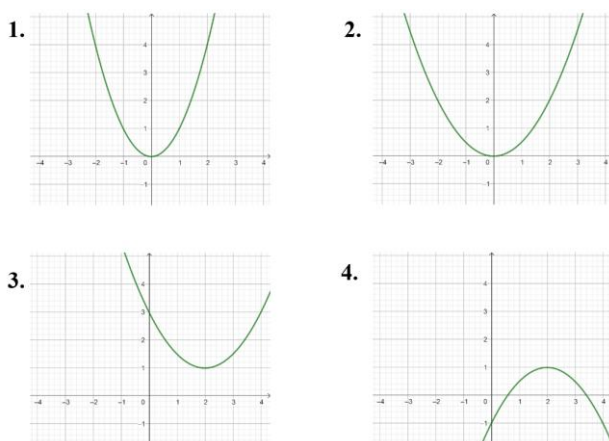


Abb. 5: Funktionsgraphen der Studie

Die Aufgaben sind so formuliert, dass die Teilnehmenden stets dazu angehalten werden, den Output von ChatGPT zu evaluieren.

6.4 Auswertungsmethode

Im Zentrum der Datenauswertung stehen die Transkripte der Videoaufnahmen, die durch die Chatprotokolle flankiert werden. Die Analyse folgt dem methodischen Vorgehen der qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring und Fenzl (2019). Ziel der Analyse ist es, die Bearbeitungsprozesse der Studierenden im Umgang mit ChatGPT systematisch zu erfassen und zu interpretieren.

Hierfür wurde ein Kategoriensystem entwickelt, das auf Prozesse des Darstellungswechsels fokussiert und sowohl darstellungsbezogene als auch sprachliche Aspekte berücksichtigt. Das Kategoriensystem basiert auf theoretischen Überlegungen und wurde im Sinne eines deduktiv-induktiven Vorgehens nach Sichtung des empirischen Materials weiter ausdifferenziert. Es umfasst zwei Kategorien, die in Abschnitt 6.5 detailliert beschrieben werden.

Während die erste Kategorie zum Anpassungsprozess auf die Dimensionen „fehlende Informationen“, „störende Informationen“ und „Informationsdichte“ nach Bossé et al. (2011) Bezug nehmen, bezieht sich die zweite Kategorie zum Sprachgebrauch im Kontext digitaler Werkzeuge auf die Herausforderungen verbaler Darstellungen im Sinne von Zindel (2020) und Prediger (2013). Auf diese Weise werden zwei Analyseebenen miteinander verknüpft: die situative Handlungsebene der Studierenden und die theoretische Reflexionsebene.

Die Codierung erfolgte auf der Ebene kommunikativer Einheiten. Dabei wurden in der Regel einzelne Redebeiträge oder Prompteingaben als Analyseeinheit herangezogen. Bei der Codierung wurde der jeweilige Darstellungsbezug berücksichtigt, also insbesondere der Zusammenhang zwischen der verbalen Äußerung und der zugehörigen grafischen Darstellung. Mehrfachcodierungen wurden vorgenommen, wenn Äußerungen mehreren Kategorien gleichzeitig zugeordnet werden konnten.

6.5 Kategoriensystem

Zur systematischen Analyse der Transkripte wurde ein Kategoriensystem entwickelt, das zwei zentrale Aspekte der Bearbeitungsprozesse fokussiert: (1) die Anpassung grafischer Darstellungen und (2) die sprachliche Auseinandersetzung mit ChatGPT. Die nachfolgend beschriebenen Oberkategorien wurden

deduktiv angelegt und im Verlauf der Transkriptanalyse induktiv ausdifferenziert.

Kategorie 1: Anpassungsprozess

Diese Kategorie umfasst alle kommunikativen Handlungen (gesprochen und geschrieben), mit denen Studierende auf wahrgenommene Abweichungen oder Unstimmigkeiten zwischen einem intendierten Funktionsgraphen und dem von ChatGPT erzeugten Output reagieren. Dazu zählen sowohl Äußerungen, in denen fehlende Informationen ergänzt werden, als auch solche, die auf eine genauere oder differenziertere graphische Darstellung abzielen. Indikatoren hierfür sind Formulierungen wie „da fehlt noch was“, „müsste noch rein“, „ändere“, „präziser“ oder „mach es genauer“.

Beispiele hierfür sind Aussagen wie: „Mich nervt, dass da die eins und drei nicht stehen.“ oder „Warte jetzt machen wir: ändere das Koordinatensystem. In welchem Bereich wollen wir das haben?“

Kategorie 2: Sprachgebrauch im Kontext digitaler Werkzeuge

Diese Kategorie zielt auf sprachliche Handlungen im Zusammenhang mit der Kommunikation über oder mit ChatGPT. Sie berücksichtigt sowohl die Verwendung von Fachsprache als auch metasprachliche Reflexionen über Sprache und Systemverhalten bei der Formulierung von Prompts.

Verwendung mathematischer Fachsprache: Erfasst wird die korrekte und inkorrekte Verwendung mathematischer Fachbegriffe in Prompts oder Diskussionen. Kodiert werden sowohl korrekte Begriffe wie „Normalparabel“ als auch Begriffe, die missverständlich oder fachlich unpräzise eingesetzt werden, etwa „Ursprung“ für den Scheitelpunkt.

Beispiel: „verschiebe den Ursprung auf den Punkt x gleich zwei“ (gemeint ist der Scheitelpunkt)

Formulierung von Prompts: Diese Kategorie bezieht sich auf den Prozess der sprachlichen Anweisung an ChatGPT. Sie umfasst Unsicherheiten, Suchprozesse und Aushandlungen geeigneter Begriffe. Indikatoren sind etwa: „sollen wir... schreiben?“, „wie heißt das nochmal?“

Beispiel: „sollen wir jetzt einfach Schreiben. Äh. Zeichne, Zeichne oder erstelle?“

Die Subkategorien wurden so konzipiert, dass sie die Beziehung zwischen der intendierten Zielvorstellung und dem tatsächlichen Output möglichst objektiv erfassen. Dabei konzentriert sich das Kategoriensys-

tem auf die Beschreibung beobachtbarer Anpassungs- und Kommunikationsprozesse, ohne bereits eine Interpretation vorzunehmen. Erst in einer zweiten, interpretativen Diskussion der Ergebnisse können die Codierungen im Lichte der theoretischen Konzepte gedeutet werden.

7. Ergebnisse

Im Folgenden werden zentrale Ausschnitte aus einem der sechs Transkripte exemplarisch vorgestellt, in denen sich die entwickelten Kategorien besonders prägnant nachvollziehen lassen. Die Szenen werden dabei jeweils nach demselben Schema dargestellt: Zunächst wird eine kurze Überschrift gegeben, die den Inhalt der Szene knapp wiedergibt und die Kategorie benennt, die in dieser Szene kodiert wurde. Anschließend wird ein Auszug der Szene vorgestellt. Darauf folgt eine objektive Zusammenfassung des Szenenverlaufs, in der die wesentlichen Inhalte und Abläufe dargestellt werden. Abschließend wird eine Begründung für die Kodierung geliefert, die aufzeigt, warum diese spezifische Kategorie auf die Szene angewendet wurde und welche Aspekte der Interaktion besonders zur Codierung beigetragen haben.

7.1 Lisa und Beate

Zunächst schauen wir uns eine Szene zwischen den Studierenden Lisa und Beate an.

Lisa und Beate Szene 1 – Erstellen eines Funktionsgraphen – Formulierung von Prompts

Lisa: (...) Okay, Alles klar.

Beate: Die erste Karte.

Lisa: Angucken. Okay?

Beate: Ja. Eine Parabel. Normalform.

Lisa: Genau. (..) So,

Beate: Ähm sollen wir jetzt einfach Schreiben. Äh.

Zeichne, Zeichne oder erstelle (..) Ja zeichne.

Zeichne einen Graphen. [Lisa fängt an zu tippen] (6) Wir können nicht die Formel nennen, sondern eher so...

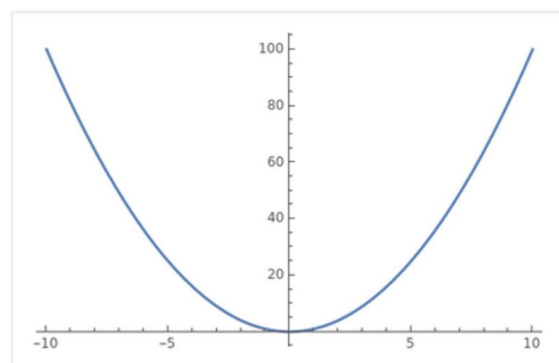


Abb. 6: Prompt: Zeichne eine Parabel in Normalform

Lisa: Wir können alles ausprobieren. Zeichne eine (tippt) (...) Vielleicht hätten wir ihn erst begrüßen sollen. Ah, okay. used Wolfram (...)

In dieser Szene diskutieren Beate und Lisa, wie sie ChatGPT nutzen können, um eine Parabel in Normalform darzustellen. Beate ist sich zunächst unsicher, wie sie den Prompt formulieren soll, schlägt dann vor, das Verb „zeichnen“ zu benutzen. Lisa tippt währenddessen bereits einen Prompt ein (Abb. 6) und überlegt laut, ob sie ChatGPT zuerst hätten begrüßen sollen.

Die Interaktion zwischen Beate und Lisa bei der Entwicklung des Prompts zeigt, dass sie sich zunächst über eine angemessene Sprache und geeignete Befehle für die Nutzung von ChatGPT verständigen müssen. Dabei ist unklar, ob dies aus Unsicherheit geschieht oder aus dem Bedürfnis heraus, die Formulierung gemeinsam abzustimmen. Ihre Überlegungen, ob sie ChatGPT zunächst begrüßen oder welches Verb (etwa „zeichnen“) sie verwenden sollen, weisen jedenfalls auf eine gewisse Unklarheit im Umgang mit dem System hin.

Lisa und Beate Szene 2 – Skalierung der Koordinatenachsen – Anpassungsprozess

Lisa: [schaut auf den Graphen] Warte jetzt machen wir: [tippt und murmelt] ändere das Koordinatensystem. In welchem Bereich wollen wir das haben?

Beate: Von minus vier

Lisa: bis plus vier. (...) Muss ich Plus schreiben? Nein vier [tippt und murmelt] auf der x-Achse und minus eins bis...

Beate: Vier auf der Y.

Lisa: Anfangen. (...) Geh schon mal runter. (...) Ich glaube. Ich glaube aber, jetzt haben wir es uns zu einfach gemacht. (...) Aber vielleicht klappt's ja.

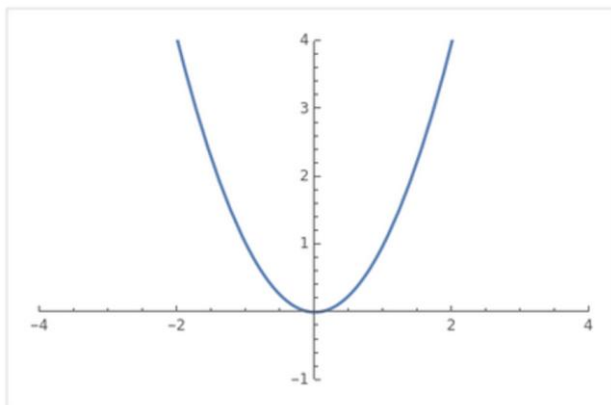


Abb. 7: Prompt: ändere das Koordinatensystem von -4 bis +4

Beate: (...) Okay.

Lisa: Sieht gut aus, oder?

Beate: Ich hätte noch gesagt, die Einteilung soll einfach nur in... Ne ist Okay.

Lisa: Ja, denke ich auch. Das einzige was halt ist, ist das er hier die minus eins und minus drei und eins und drei nicht aufgeschrieben hat. Aber

Beate: Ja, ich denke auch das passt. Sieht auch ganz gut aus

In dieser Szene fordern Lisa und Beate ChatGPT auf, das Koordinatensystem anzupassen. Nachdem ChatGPT die Anpassungen vorgenommen hat (Abb. 7), überprüfen sie das Ergebnis und sind beide der Meinung, dass der Graph angemessen aussieht. Lisa merkt an, dass einige Werte (-1, -3, 1 und 3) nicht auf dem Graphen zu sehen sind. Die beiden bewerten das jedoch nicht als problematisch.

Diese Szene wurde mit der Kategorie Präzisierung der Darstellung kodiert, da die ursprüngliche Einteilung und Skalierung der Achsen unangemessen waren und von den beiden Studentinnen angepasst wurden.

In Szene 3 stauchen Lisa und Beate den Graphen derart, dass er auch durch den Punkt (2,2) geht. Hier wurden keine Codes vergeben, daher wird diese Szene übersprungen.

Lisa und Beate Szene 4 – Hintergrund des Koordinatensystems – Verwendung mathematischer Fachsprache, Anpassungsprozess, Formulierung von Prompts

Nachdem Lisa und Beate den zweiten Graphen haben generieren lassen, denken Sie darüber nach, das Koordinatensystem anzupassen. Es beginnt der folgende Dialog:

Beate: (...) Sollen wir mal fragen, ob er ein Gitter hinterlegen kann, damit wir gucken können, ob das passt?

Lisa: Oh, ja. Das ist eine gute Idee.

Beate: Soll ich jetzt schreiben kannst, oder?

Lisa: Ja. Kannst du? (...)

Beate: Raster? Gitter?

Lisa: Mhm.

Beate: [tippt und murmelt] Gitter hinterlegen

Lisa: Mal gucken.

Beate tippt: „kannst du ein Gitter hinter die Parabel legen“ und erhält den folgenden Graphen (Abb. 8).

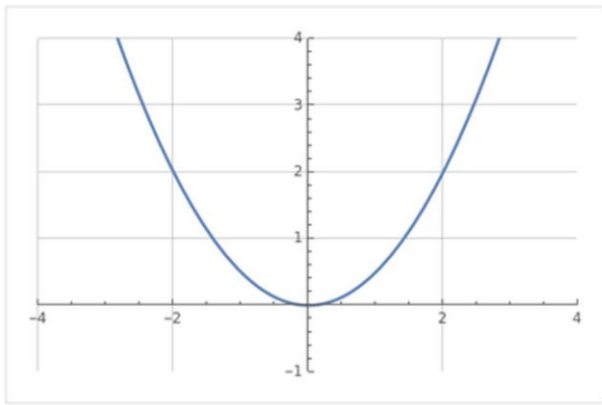


Abb. 8: Prompt: kannst du ein Gitter hinter die Parabel legen

In dieser Szene überlegt Beate, ob sie ChatGPT fragen sollen, ein Gitter hinter die Parabel zu legen, um die Darstellung besser prüfen zu können. Lisa findet die Idee gut, und gemeinsam diskutieren sie, wie sie den Prompt formulieren sollen, wobei Beate zwischen den Begriffen "Raster" und "Gitter" schwankt. Schließlich entscheidet sich Beate für "Gitter".

In dieser Szene wurden drei Codes vergeben: *Verwendung mathematischer Fachsprache*, *Anpassungsprozess* und *Formulierung von Prompts*. Zunächst zeigt sich in der Diskussion um die Begriffe „Gitter“ und „Raster“ eine Unsicherheit hinsichtlich der korrekten Terminologie. Die Schwankung zwischen verschiedenen Begriffen verweist auf eine noch nicht vollständig gefestigte fachsprachliche Präzision im Umgang mit digitalen Werkzeugen, die grafische Ausgaben erzeugen. Inhaltlich geht es darum, ein Koordinatengitter hinzuzufügen, um die Darstellung besser überprüfen zu können also eine Ergänzung fehlender Informationen. Schließlich wird gemeinsam ein Prompt formuliert, wobei erneut Unsicherheiten in der sprachlichen Gestaltung sichtbar werden. Die Abstimmung über die Wortwahl sowie die vorsichtige Rückversicherung bei der Partnerin deuten auf einen Aushandlungsprozess hin, der in die Kategorie *Formulierung von Prompts* fällt.

Lisa und Beate Szene 5 – Koordinatenraster – Verwendung mathematischer Fachsprache, Präzisierung der Darstellung, Formulierung von Prompts

Lisa: Geht, ne? Aber die sieht doch eigentlich

Beate: Sind die Abstände vielleicht nicht gleich? Oder kommt mir das nur so vor?

Lisa: Ne, die sind nicht gleich? Nee, doch [zeigt auf den Bildschirm] das ist ja nur. Da müsste theoretisch noch ein Dazwischen. Ähm. [tippt und spricht ihren Text mit] Kannst du das auf Kästchenpapier oder wie heißt das?

Beate: Quadrate.

Lisa: Wie heißt das denn?

Beate: Karo kariert. Nein, es ist immer also Karopapier. (...) Quadratische Kästchen wollen wir da

Lisa: Kästchen. Ich schreibe jetzt einfach Kästchen Papier. (...)

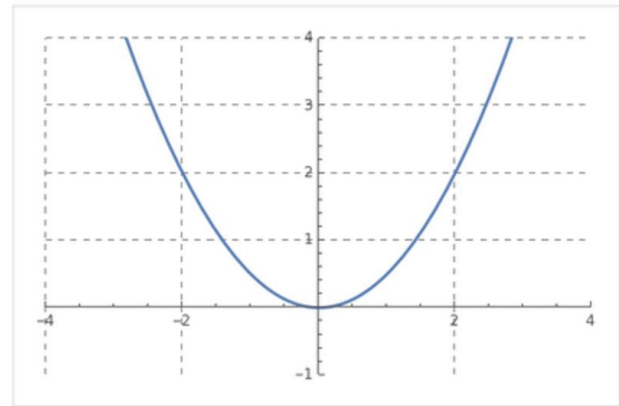


Abb. 9: Prompt: kannst du das auf Kästchenpapier zeichnen

In dieser Szene diskutieren Lisa und Beate über die Darstellung des Graphen und bemerken, dass die Abstände auf der Achse ungleich sind. Sie überlegen, wie sie ChatGPT dazu auffordern können, den Graphen auf kariertem Papier darzustellen. Dabei sind sie unsicher, welches Wort dafür am besten geeignet ist, und schwanken zwischen Begriffen wie "Quadrate", "Karopapier" und "Kästchenpapier". Schließlich entscheidet Lisa, "Kästchenpapier" zu verwenden (Abb. 9).

In dieser Szene wurden drei Codes vergeben: *Verwendung mathematischer Fachsprache*, *Präzisierung der Darstellung* und *Formulierung von Prompts*. Zunächst zeigt sich erneut ein unsicherer Umgang mit Begriffen: „Kästchenpapier“, „Karopapier“ und „Quadrate“. Dieser Suchprozess verweist auf eine fehlende begriffliche Klarheit in der Verwendung mathematischer Fachsprache. Inhaltlich zielt die Interaktion auf eine genauere visuelle Darstellung ab, nicht durch das Hinzufügen neuer Informationen, sondern durch die Präzisierung der bestehenden Darstellung – etwa im Hinblick auf die Gleichmäßigkeit der Achsabstände. Auch die Formulierung des Prompts wird gemeinsam ausgehandelt, wobei Lisa und Beate sich gegenseitig absichern und laut denkend verschiedene Formulierungen erproben.

Lisa und Beate Szene 6 – Parabel verschieben – Verwendung mathematischer Fachsprache & Formulierung von Prompts

Lisa: Also verschiebe [Lisa tippt].

Beate: Den Ursprung.

Lisa: (...) Auf den Punkt.

Beate: x gleich zwei.

Lisa: (...) Äh. Wie hat er das oben nochmal gemacht? [scrollt mit der Maus nach oben]

Beate: Ich hatte x gleich zwei und y gleich.

Lisa: Ja aber der hat hier: in Klammern und dann muss da

Beate: Also Klammer auf und dann muss zwei eins. (...)

Lisa: Ich finde, wir sollten gleich mal ausprobieren, die Formel einfach hinzuschreiben. Ja, sieht doch gut aus.

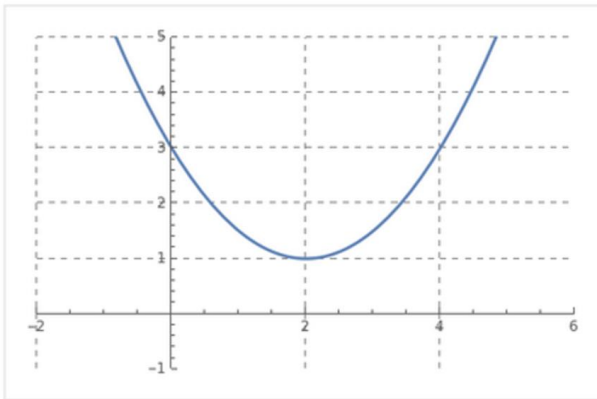


Abb. 10: Prompt: verschiebe den Ursprung auf den Punkt (2,1)

In dieser Szene versuchen Lisa und Beate, den Graphen der Parabel so zu verschieben, dass der Scheitelpunkt auf den Punkt (2,2) liegt. Während Lisa tippt, überlegt sie, wie ChatGPT zuvor Punkte ausgegeben hat, und scrollt, um nachzusehen. Beate ergänzt „x gleich zwei und y gleich...“, und sie diskutieren, wie die korrekte Syntax sein sollte. Lisa schlägt schließlich vor, die Formel direkt einzugeben und äußert sich genervt darüber, dass bestimmte Werte im Graphen nicht korrekt angezeigt werden (Abb. 10).

In dieser Szene wurden zwei Codes vergeben: *Verwendung mathematischer Fachsprache* und *Formulierung von Prompts*. Der Code *Verwendung von Fachsprache* bezieht sich auf den fehlerhaften Gebrauch des Begriffs „Ursprung“, der hier fälschlich anstelle von „Scheitelpunkt“ verwendet wird. Die Studierenden verwenden damit einen zentralen mathematischen Fachbegriff inkorrekt, ohne dies selbst zu bemerken oder zu thematisieren und auch ChatGPT reagiert nicht korrigierend. Gleichzeitig wird bei der Prompt-Formulierung Reflexionsprozess sichtbar: Lisa orientiert sich explizit am bisherigen Output von ChatGPT und versucht, die eigene Ausdrucksweise an den Output von ChatGPT anzupassen.

Lisa und Beate Szene 7 – Beschriftung der Koordinatenachsen – Anpassungsprozess, Formulierung von Prompts

Lisa: Mich nervt, dass da die eins und drei nicht stehen

Beate: Dann lass uns das doch schreiben. [murmelt und tippt] Zeige auch die eins und die drei.

Lisa: Auf der

Beate: [murmelt und tippt] auf der Koordinatenachse an. Jetzt dauerts wieder ewig

Lisa: Ja, ja, vielleicht hätten wir noch X schreiben sollen auf Y hat er die ja schon. Ich bin gespannt ob er das so kann.

Beate: Ja das kriegt er schon...Aber an sich hats ja funktioniert.

Lisa: Ja.

Beate: Und das Schöne ist, man kriegt einmal die Formel gezeigt.

Lisa: Man, wäre jetzt lustig, wenn er den Rest nicht macht, sondern nur eins und drei. [der Funktionsgraph erscheint auf dem Bildschirm]

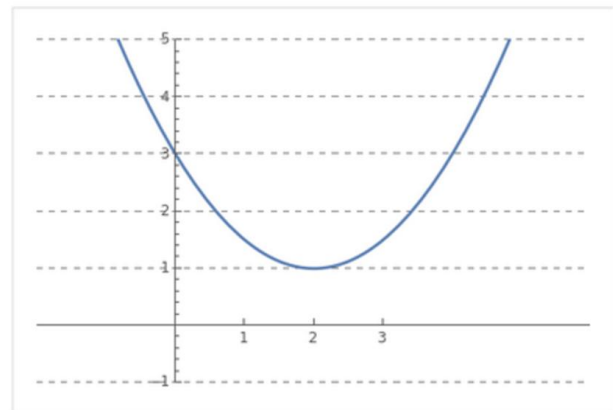


Abb. 11: Prompt: zeige auch die 1 und die 3 auf der Koordinatenachse an

Lisa: Siehste [lacht]. Also man muss wirklich sehr ähm präzise sein (...)

In dieser Szene bemerkt Lisa, dass auf der x-Achse des Koordinatensystems die Werte 1 und 3 nicht angezeigt werden, was sie stört. Beate schlägt vor, dies explizit in den Prompt zu schreiben und gibt die Anweisung ein, dass die Werte 1 und 3 auf der Koordinatenachse angezeigt werden sollen. Sie diskutieren darüber, ob sie auch die Achsen (x und y) hätten angeben sollen, und sind gespannt, ob ChatGPT den Prompt korrekt umsetzt. Lisa kommentiert scherzhaft, dass es lustig wäre, wenn nur die 1 und 3 dargestellt würden. Sie lacht, als sie den Graphen sieht und feststellt, dass ChatGPT den von ihr vorhergesagten Fehler gemacht hat (Abb. 11).

Diese Szene wurde die Codes *Anpassungsprozess* und *Formulierung von Prompts* vergeben. Der Code *Anpassungsprozess* wurde verwendet, weil Lisa und Beate explizit fehlende Elemente der Darstellung identifizieren (die Zahlen 1 und 3 auf der Koordinatenachse) und diese Information im Prompt erwähnen, um die graphische Darstellung zu verbessern. Die Kodierung *Formulierung von Prompts* bezieht sich auf die abschließende Reflexion darüber, ob der eingegebene Prompt präzise genug war oder ob eine genauere Spezifikation, etwa durch die Nennung der Achse, notwendig gewesen wäre). Die Szene zeigt damit sowohl die bewusste Ergänzung fehlender Informationen als auch eine metasprachliche Auseinandersetzung mit der Genauigkeit der eigenen Eingabe.

8. Diskussion der Ergebnisse

Die Analyse der Transkripte ermöglichte es, zentrale Schwierigkeiten der Studierenden im Umgang mit ChatGPT beim Darstellungswechsel zu identifizieren. Im Folgenden werden die Kategorien theoriegeleitet interpretiert und in den aktuellen mathematikdidaktischen Diskurs eingeordnet.

8.1 Anpassungsprozesse als Reaktion auf unzureichende Darstellungen

In mehreren Szenen wurde deutlich, dass die Studierenden auf Unvollständigkeiten oder Unstimmigkeiten in der Darstellung des Funktionsgraphen durch ChatGPT reagierten, indem sie gezielte Anpassungen vornahmen. Die identifizierten Merkmale sind: die Skalierung der Achsen, der Hintergrund des Koordinatensystems und die Achsenbeschriftung. Diese Merkmale lassen sich als Reaktion auf *fehlende oder störende Informationen* im Sinne von Bossé et al. (2011) deuten.

Die Szene zum Koordinatenraster (z. B. Szene 4 und 7) zeigt darüber hinaus, wie die Studierenden solche Merkmale identifizieren und im Prompt gezielt adressieren. Daraus lässt sich schließen, dass der Umgang mit KI-Systemen eine situierte Kompetenz der Darstellungsbewertung erfordert: Lernende müssen bewerten können, ob eine generierte Darstellung den intendierten mathematischen Gehalt adäquat widerspiegelt.

8.2 Verwendung mathematischer Fachsprache und sprachliche Aushandlungsprozesse

Die kodierten Szenen zur „Verwendung mathematischer Fachsprache“ lassen sich differenziert vor dem Hintergrund der drei Funktionen von Sprache nach

Prediger (2013) interpretieren: Sprache als Lerngegenstand, Lernmedium und Lernvoraussetzung. Diese Perspektive erlaubt es, die sprachlichen Prozesse in den Interaktionen mit ChatGPT nicht nur hinsichtlich fachlicher Richtigkeit, sondern auch im Hinblick auf ihre lernförderliche Funktion einzuordnen.

Die Funktion von Sprache als Lerngegenstand wird in den Transkripten besonders dort sichtbar, wo Unsicherheiten im Gebrauch mathematischer Begriffe auftreten. In mehreren Szenen zeigen sich Schwierigkeiten sowohl im fachsprachlichen Bereich, etwa bei der Verwechslung von „Ursprung“ und „Scheitelpunkt“, als auch im bildungssprachlichen Register, beispielsweise bei der uneinheitlichen Bezeichnung von kariertem Papier. Hinzu kommen alltagssprachliche Formulierungen, die in der Interaktion zwischen den Studierenden zunächst ausgehandelt werden müssen, bevor sie im Prompt verwendet werden („Was schreibe ich jetzt? Kannst du...?“). Die Interaktion mit ChatGPT bringt Unsicherheiten ans Licht und schafft Anlässe zur Auseinandersetzung mit der angemessenen Verwendung mathematischer Begriffe in verschiedenen sprachlichen Registern.

Die Funktion von Sprache als Lernmedium zeigt sich besonders deutlich in den Anpassungsprozessen der Darstellungen. Indem sprachlich ausgehandelt wird, wie eine bestimmte grafische Anpassung formuliert werden kann – etwa beim Verschieben der Parabel durch das Verschieben des Scheitelpunktes – setzen sich die Lernenden mit der zugrunde liegenden Darstellung auseinander. Auch bei der Präzisierung der Darstellung, etwa durch die Formulierung einer gewünschten Achsenskalierung, wird deutlich, dass die für eine sprachliche Beschreibung des Funktionsgraphen eine Reflexion über mathematische Eigenschaften, über Proportionen, Abstände oder Symmetrien erforderlich ist. Gerade weil die Anpassungsvorgänge in Sprache gefasst werden müssen, wird das Denken über mathematische Inhalte aktiviert und geschärft. Die sprachliche Auseinandersetzung mit der Darstellung trägt somit unmittelbar zum Lernprozess bei.

Sprache als Lernvoraussetzung wird schließlich dort sichtbar, wo die Verständigung über mathematische Inhalte durch unpräzise oder uneindeutige Sprache erschwert wird. Die Tatsache, dass ChatGPT auch auf inkorrekte Begriffe reagiert, ohne diese zu korrigieren, legt offen, wie wichtig eine hinreichende sprachliche Kompetenz für die zielgerichtete Nutzung solcher Systeme ist. ChatGPT reagiert nicht auf

fehlerhafte Begriffsverwendung im Sinne einer konstruktiven Rückmeldung, sondern übernimmt sie implizit in die Verarbeitung.

Zusammenfassend lässt sich festhalten: Die Interaktion mit ChatGPT erfordert von den Studierenden eine flexible, präzise und reflektierte Verwendung mathematischer Sprache. Die Analyse der Szenen zeigt, dass alle drei Sprachfunktionen nach Prediger relevant sind – nicht nur als analytische Kategorien, sondern auch als didaktischer Rahmen für die Gestaltung von Lernumgebungen mit LLMs. Gerade in der Verbindung dieser Sprachfunktionen liegt ein didaktisches Potenzial, das gezielt für die Förderung fachlicher und digitaler Kompetenzen genutzt werden kann.

8.3 Professionelles Handeln im Umgang mit KI-gestützten Darstellungen

Das Fallbeispiel mit den beiden Studierenden Lisa und Beate macht deutlich, an welchen Stellen im Umgang mit mathematischen Darstellungen unter Einsatz von ChatGPT professionelle Lehrkraft-Kompetenzen gefordert sind (Loewenberg Ball et al., 2008). Dabei ist zu beachten, dass die Studierenden in der gegebenen Aufgabenstellung primär Lernen-Tätigkeiten ausführen. Die beobachteten Aktivitäten lassen sich daher nicht direkt als professionelle Lehrkraft-Kompetenzen interpretieren. Die dargestellten Situationen zeigen stattdessen exemplarisch auf, wo und wie die in Abschnitt 4 erläuterten zentralen professionellen Tätigkeiten für eine erfolgreiche Lernbegleitung erforderlich werden.

So wählen die beiden Studierenden Darstellungen aus und passen diese an spezifische Anforderungen an, was als Hinweis auf eine beginnende Auseinandersetzung mit Tätigkeitsbereich T4 gelesen werden kann. Dabei bemühen sie sich um eine fachlich angemessene Sprache (T3), stoßen jedoch auf Unsicherheiten hinsichtlich der korrekten Terminologie – etwa bei der Unterscheidung zwischen „Raster“ und „Gitter“ oder bei der Verwendung von Begriffen wie „Ursprung“ bzw. „Scheitelpunkt“. Die Szene verdeutlicht, dass der Einsatz digitaler Werkzeuge auch fachsprachliche Präzision erfordert, die im Lernprozess explizit thematisiert und weiterentwickelt werden muss.

Darüber hinaus zeigen Lisa und Beate, dass sie in der Lage sind, fehlerhafte Darstellungen zu identifizieren (T1) und Korrekturversuche zu unternehmen, indem sie einen Prompt zur gezielten Verbesserung formulieren. Im Prozess erkennen sie zugleich die Grenzen von ChatGPT im Hinblick auf

mathematische Korrektheit und Darstellungsmöglichkeiten. Ihre Auseinandersetzung verweist damit auch auf die Notwendigkeit der kritischen Bewertung von KI-generierten Inhalten. Eine Kompetenz, die insbesondere im Hinblick auf die Simulation und Modellierung sowie die Analyse digitaler Quellen zentral ist.

Eine weitere relevante Beobachtung betrifft die Formulierung von Prompts. Diese Handlung wurde häufig gemeinsam geplant. Die Fähigkeit, ein LLM wie ChatGPT präzise und zielgerichtet anzuleiten, kann als technisch-operationale Teilkompetenz im Sinne des DigCompEdu-Rahmens interpretiert werden.

Die Interaktion mit ChatGPT wurde von den Studierenden nicht bloß rezeptiv, sondern aktiv und kontextbezogen gestaltet: Digitale Werkzeuge wurden an die Anforderungen eines spezifischen didaktischen Settings angepasst, womit bereits erste Schritte in Richtung einer späteren unterrichtlichen Anwendung sichtbar werden. In dieser Hinsicht zeigen die beiden Studierenden auch Elemente kollaborativen und selbstgesteuerten Lernens, indem sie eigenständig Problemstellungen bearbeiten, sich gegenseitig Feedback geben und gemeinsam Lösungsansätze entwickeln.

Insgesamt zeigt sich, dass die untersuchten Interaktionen mehrdimensionales Kompetenzhandeln sichtbar machen: Das präzise Benennen mathematischer Objekte, die Bewertung von Darstellungen und deren gezielte Modifikation mit digitalen Werkzeugen greifen ineinander. Besonders hervorzuheben ist, dass viele dieser Aktivitäten in einem reflexiven Aushandlungsprozess stattfinden, bei dem Studierende nicht nur mathematische Inhalte verhandeln, sondern auch sprachliche Kompromisse finden. Diese Art des Arbeitens deutet auf eine Form digitaler Kompetenz hin, die nicht allein durch technisches Wissen, sondern durch die Verknüpfung von Fachwissen, Sprache und Tool-Kompetenz getragen ist. Die Studie zeigt damit auf, dass der Einsatz von LLMs wie ChatGPT nicht nur neue Anforderungen, sondern auch neue Gelegenheiten für den Erwerb digital-mathematischer Kompetenzen schafft.

9. Fazit

Die vorliegende Studie hat zentrale Herausforderungen von Lehramtsstudierenden im Umgang mit LLMs beim Darstellungswechsel mathematischer Funktionen identifiziert. Besonders deutlich wurden Unsicherheiten bei der Formulierung von Prompts und beim Gebrauch mathematischer Fachsprache. Zudem erwies sich die Bewertung und Anpassung der

von ChatGPT generierten Darstellungen teilweise als anspruchsvoll. Diese Befunde deuten darauf hin, dass die für einen reflektierten und fachlich fundierten Einsatz von KI im Mathematikunterricht erforderlichen digitalen Kompetenzen keineswegs vorausgesetzt werden können, sondern gezielt geschult werden müssen.

Gleichzeitig sind die Ergebnisse der Studie nur begrenzt generalisierbar. Die gewählte methodische Vorgehensweise ist in ihrer Aussagekraft begrenzt. Die qualitative Inhaltsanalyse ermöglichte zwar eine detailliertere Rekonstruktion der Bearbeitungsprozesse, ist jedoch grundsätzlich abhängig von Interpretationsentscheidungen der Forschenden. Die Kategorien wurden deduktiv aus theoretischen Modellen entwickelt und induktiv mit dem Datenmaterial ausdifferenziert; dennoch bleibt die Frage bestehen, inwiefern alternative Kategorien zu anderen Akzentsetzungen geführt hätten. Die Stichprobe war mit N=12 Lehramtsstudierenden nicht repräsentativ, so dass keine belastbaren Aussagen über die Breite der Zielgruppe getroffen werden können. Die teilnehmenden Studierenden waren nicht vertraut im Umgang mit LLMs zur Bearbeitung mathematischer Aufgaben. Welche weiteren Erfahrungen möglicherweise vorhanden waren, wurde allerdings nicht systematisch erfasst. Damit bleibt unklar, welche digitalen und sprachlichen Kompetenzen durch wiederholte Nutzung langfristig aufgebaut werden und an welchen Stellen gezielte Unterstützungsmaßnahmen erforderlich wären.

Daraus ergibt sich eine Perspektive für die mathematikdidaktische Entwicklungsforschung: Es bedarf geeigneter mathematischer Lernumgebungen, die Lehrkräften und zukünftig auch Schüler:innen niederschwellige Zugänge zur Nutzung von KI im Unterricht eröffnen. Solche Lernumgebungen sollten dabei nicht nur die Nutzung, sondern auch die kritische Reflexion über Stärken und Grenzen von LLMs in mathematischen Kontexten ermöglichen.

Literatur

- Barzel, B., Glade, M., & Klinger, M. (2021). *Algebra und Funktionen: Fachlich und fachdidaktisch*. Springer Spektrum.
- Baumert, J. & Kunter, M. (2011). Das Kompetenzmodell von COACTIV. In *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften* (S. 163–192). Waxmann.
- Arbeitsgruppe Digitale Basiskompetenzen: Becker, S., Bruckermann, T., Finger, A., Huwer, J., Kremser, E., Meier, M., Thoms, L.-J., Thyssen, C., & von Kotzebue, L. (2020). Orientierungsrahmen Digitale Kompetenzen für das Lehramt in den Naturwissenschaften – DiKoLAN. In S. Becker, J. Meßinger-Koppelt, & C. Thyssen (Hrsg.), *Digitale Basiskompetenzen – Orientierungshilfe und Praxisbeispiele für die universitäre Lehramtsausbildung in den Naturwissenschaften*, (S. 14-43). Hamburg: Joachim Herz Stiftung. https://www.joachim-herz-stiftung.de/fileadmin/Redaktion/Projekte/Naturwissenschaften/2020_Nawi_Digitale_Basiskompetenzen_web.pdf
- Blömeke, S., Kaiser, G. & Lehmann, R. (2010). *TEDS-M 2008: Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Mathematiklehrkräfte für die Sekundarstufe I im internationalen Vergleich*. Waxmann.
- Bossé, M. J., Adu-Gyamfi, K., & Cheetham, M. (2011). Translations among mathematical representations: Teacher beliefs and practices. *International Journal of Mathematics Teaching and Learning*, 15(6), 1–23.
- Bruner, J. (1974). *Entwurf einer Unterrichtstheorie*. Berlin-Verlag.
- Buchholtz, N., Baumanns, L., Huget, J., Peters, F., Pohl, M. & Schorch, S. (2023). Herausforderungen und Entwicklungsmöglichkeiten. *GDM-Mitteilungen*, 114.
- Chen, G., Liao, M., Li, C. & Fan, K. (2024, 6. Mai). AlphaMath Almost Zero: Process supervision without process. <http://arxiv.org/pdf/2405.03553v2>
- Deutscher Ethikrat. (2023). *Mensch und Maschine – Herausforderungen durch Künstliche Intelligenz*. <https://www.ethikrat.org/fileadmin/Publikationen/Stellungnahmen/deutsch/stellungnahme-mensch-und-maschine.pdf>
- Dilling, F., Holten, K., Pielsticker, F. & Witzke, I. (2024). Aushandlungs- und Argumentationsprozesse fördern durch den Einsatz generativer KI-Sprachmodelle beim schulischen Mathematiklernen? Erste Einsichten und Perspektiven aus der Empirie. *GDM-Mitteilungen*, 116.
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37–65.
- Escher, J. (2023). Mündliche Prüfung mit ChatGPT. Oder warum die Primzahl $2023 = 43 \times 47$ ist. *Mitteilungen der DMV*, 31(2).
- Frieder, S., Pinchetti, L., Chevalier, A., Griffiths, R.-R., Salvatori, T., Lukasiewicz, T. et al. (2023). Mathematical capabilities of ChatGPT. <http://arxiv.org/pdf/2301.13867v2>
- Ghomi, M. & Redecker, C. (2019). Digital competence of educators (DigCompEdu): Development and evaluation of a self-assessment instrument for teachers' digital competence. In *Proceedings of the 11th International Conference on Computer Supported Education*. SCITEPRESS – Science and Technology Publications.
- Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H. S., Weigand, H. G. & Ulm, V. (2016). *Didaktik der Analysis*. Springer Berlin Heidelberg.
- Helfrich-Schkarbanenko, A. (2023). *Mathematik und ChatGPT*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-68209-8>
- Herget, W. (2013). Funktionen – immer gut für eine Überraschung. In H. Allmendinger, K. Lengnink, A. Vohns & G. WICKEL (Hrsg.), *Mathematik verständlich unterrichten, Perspektiven für Unterricht und Lehrerbildung* (S. 47–61). Springer Spektrum.
- Hußmann, S. & Laakmann, H. (2011). Eine Funktion – viele Gesichter: Darstellen und Darstellungen wechseln. *Praxis der Mathematik in der Schule*, (38), 2–11.
- Kadluba, A., Strohmaier, A., Schons, C. et al. (2025). How much C is in TPACK? A systematic review on the assessment of TPACK in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 118, 169–199. <https://doi.org/10.1007/s10649-024-10357x>

- Klieme, E. & Leutner, D. (2006). Kompetenzmodelle zur Erfassung individueller Lernergebnisse und zur Bilanzierung von Bildungsprozessen. *Zeitschrift für Pädagogik*, 52, 876–903.
- Klinger, M. (2018). *Funktionales Denken beim Übergang von der Funktionenlehre zur Analysis*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-20360-3>
- KMK. (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife*. Wolters Kluwer.
- KMK. (2017). *Bildung in der digitalen Welt. Strategie der Kultusministerkonferenz*. https://www.kmk.org/fileadmin/pdf/PresseUndAktuelles/2018/Digitalstrategie_2017_mit_Weiterbildung.pdf
- Koehler, M. J. & Mishra, P. (2009). What is technological pedagogical content knowledge? *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, 9(1), 60–70.
- Lichti, M. (2019). *Funktionales Denken fördern. Experimentieren mit gegenständlichen Materialien oder Computer-Simulationen*. Spektrum Akademischer Verlag.
- Loewenberg Ball, D., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Malle, G. (2013). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Springer-Verlag.
- Mayring, P. & Fenzl, T. (2019). Qualitative Inhaltsanalyse. In N. Baur & J. Blasius (Hrsg.), *Handbuch Methoden der empirischen Sozialforschung* (S. 633–648). Springer Fachmedien Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-21308-4_42
- Pepin, B., Buchholtz, N. & Salinas-Hernández, U. (2025). A scoping survey of ChatGPT in mathematics education. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 11, 9–41. <https://doi.org/10.1007/s40751-025-00172-1>
- Platz, R. & Plote, R. (2025). KI und Ethik im Klassenzimmer. *GDM-Mitteilungen*, 118.
- Prediger, S. (2013). Darstellungen, Register und mentale Konstruktion von Bedeutungen und Beziehungen. In M. Becker-Mrotzek, K. Schramm, E. Thürmann & H. J. Vollmer (Hrsg.), *Sprache im Fach – Sprachlichkeit und fachliches Lernen* (S. 167–183). Waxmann.
- Prediger, S. & Wessel, L. (2013). Darstellen – Deuten – Darstellungen vernetzen. In E. Özdil & S. Prediger (Hrsg.), *Mathematiklernen unter Bedingungen der Mehrsprachigkeit*. Waxmann.
- Rolfes, T. (2017). *Funktionales Denken. Empirische Ergebnisse zum Einfluss von statischen und dynamischen Repräsentationen*. Springer.
- Salle, A., Schmidt-Thieme, B., Schulz, A. & Söbbeke, E. (2023). Darstellen und Darstellungen verwenden. In R. Bruder, A. Büchter, H. Gasteiger, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik*, 429–461. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-66604-3_14
- Schorcht, S., Baumanns, L., Buchholtz, N., Huget, J., Peters, F. & Pohl, M. (2023). Ask smart to get smart: Mathematische Ausgaben generativer KI-Sprachmodelle verbessern durch gezieltes Prompt Engineering. *GDM-Mitteilungen*, 115.
- Schorcht, S., Buchholtz, N. & Baumanns, L. (2024). Prompt the problem – Investigating the mathematics educational quality of AI-supported problem solving by comparing prompt techniques. *Frontiers in Education*, 9. <https://doi.org/10.3389/educ.2024.1386075>
- Schumacher, S. (2017). *Lehrerprofessionswissen im Kontext beschreibender Statistik*. Springer.
- Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14. <https://doi.org/10.3102/0013189X015002004>
- Spannagel, C. (2023). Hat ChatGPT eine Zukunft in der Mathematik? *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 3, 168–172. <https://www.degruyter.com/document/doi/10.1515/dmvm-2023-0055/html>
- Stölting, P. (2008). *Die Entwicklung des funktionalen Denkens in der Sekundarstufe I* [Dissertation, Université Paris Diderot].
- SWK. (2024). Large language models und ihre Potenziale im Bildungssystem. https://www.swk-bildung.org/content/uploads/2024/02/SWK-2024-Impulspapier_LargeLanguageModels.pdf
- Wolfram, S. (2023). *Das Geheimnis hinter ChatGPT*. mitp-Verlag.
- Zhang, D., Huang, X., Zhou, D., Li, Y. & Ouyang, W. (2024, 11. Juni). Accessing GPT-4 level Mathematical Olympiad Solutions via Monte Carlo Tree Self-refine with LLaMa-3 8B. <http://arxiv.org/pdf/2406.07394v2>
- Zhang, P. & Tur, G. (2024). A systematic review of ChatGPT use in K-12 education. *European Journal of Education*, 59, e12599. <https://doi.org/10.1111/ejed.12599>
- Zindel, C. (2019). *Den Kern des Funktionsbegriffs verstehen* [Dissertation, Technische Universität Dortmund]. Springer.
- Zindel, C. (2020). Identifikation von Teilprozessen des situationsbezogenen funktionalen Denkens in der Sekundarstufe I. *Mathematica Didactica*, 43.

Anschrift der Verfasser:innen

Valentin Katter
Universität Bielefeld
Institut für Didaktik der Mathematik
Universitätsstr. 25
33615 Bielefeld
vkatter@uni-bielefeld.de

Judith Huget
Universität Siegen
Fakultät IV
Adolf-Reichwein-Str. 2
57076 Siegen
judith.huget@uni-siegen.de