Mit neuem Blick auf Statistik: Conceptual Change und systematische Fehler bei der Interpretation statistischer Graphen

AYLINE HEURSEN, HEIDELBERG; SASKIA SCHREITER, SCHWÄBISCH GMÜND & MARKUS VOGEL, HEIDELBERG

***Zusammenfassung**: In der heutigen Zeit spielen Daten eine bedeutende Rolle, weshalb der richtige Umgang mit statistischen Graphen, wie Histogrammen, Boxplots und Dotplots ein wichtiger Teil von data literacy darstellt. Bei der Interpretation dieser statistischen Graphen zeigen sich jedoch systematische Fehler. Der vorliegende Beitrag untersucht diese Fehler im Lichte der Conceptual Change Theorie. Dabei zeigt sich, dass systematische Fehler bei der Interpretation statistischer Graphen auf konzeptuellen Schwierigkeiten basieren. Solche konzeptuellen Schwierigkeiten lassen sich darauf zurückführen, dass zuvor gelernte Grundvorstellungen nicht richtig auf neue statistische Graphen angepasst werden.*

***Abstract:** In today's world, data plays an important role, which is why the correct handling of statistical graphs such as histograms, boxplots and dotplots is an important part of data literacy. However, systematic errors can occur when interpreting these statistical graphs. In this article, these errors are examined in the light of conceptual change theory. It is shown that systematic errors in the interpretation of statistical graphs are based on conceptual difficulties. These can be traced back to the fact that previously learned basic concepts are not correctly adapted to new statistical graphs.*

1. Einleitung

Mit der immer größer werdenden Bedeutung von Statistiken und großen Datenmengen in der Gesellschaft, wächst auch die Notwendigkeit, den Umgang mit diesen Themen zu erlernen (Rubin & Gould, 2023). Ein kritischer Umgang mit Daten ist unter anderem wichtig, um als mündige Bürger:innen Teil einer Gesellschaft sein zu können, die maßgeblich auf Daten und den Umgang mit diesen aufbaut (Engel, 2017). Im alltäglichen Leben und in den Medien sind Daten allgegenwärtig. Diese werden zumeist mithilfe verschiedener Darstellungsformen wie statistischen Graphen und Tabellen visualisiert (Friel et al., 2001). Darstellungen ermöglichen es, die in den Daten enthaltenen Informationen verdichtet und greifbar darzustellen (Büchter & Henn, 2007). Entsprechend findet die Darstellung von Daten in statistische Graphen häufig Verwendung und der kritische Umgang mit diesen wird zu einem wichtigen Bestandteil von data literacy (Deahl, 2014). Forschungsergebnisse zeigen jedoch, dass die Interpretation von Daten und ihrer Darstellung in statistischen Graphen, beispielsweise in Histogrammen, Boxplots und Dotplots, häufig mit Schwierigkeiten verbunden ist (vgl. Boels et al., 2019b; Lem et al., 2013). Diese scheinen auch über den Stochastikunterricht hinweg bestehen zu bleiben. So zeigen Studien, dass auch angehende und ausgebildete Mathematiklehrkräfte zum Teil Schwierigkeiten im Umgang mit statistischen Graphen und inkorrekten Vorstellungen zu statistischen Konzepten haben (vgl. Schreiter et al., 2024; Lem et al., 2014b). Bisher gibt es jedoch nur wenige meta-analytische Arbeiten zu Fehlern, die bei der Interpretation statischer Graphen systematisch auftreten (vgl. Boels et al., 2019b).

Unter solchen „systematischen Fehlern“ versteht man Fehler, die wiederholt auftreten und auf Schwierigkeiten in der Auffassung und dem Umgang mit mathematischen Konzepten basieren (Padberg, 1996). Diese systematischen Fehler unterscheiden sich insbesondere durch ihre Ursache von anderen Fehlern. Während andere Fehler aus Unachtsamkeit entstehen, liegen systematischen Fehlern konzeptuelle Schwierigkeiten zugrunde (Prediger, 2008).

Entsprechend stellt sich die Frage nach dem Grund des Auftretens systematischer Fehler bei der Interpretation von statistischen Graphen. Einen möglichen Erklärungsansatz für konzeptuelle Schwierigkeiten, die sich in systematischen Fehlern zeigen, kann der Blick auf Vorstellungsumbrüche (Prediger, 2008) und die Conceptual Change Theorie (Vamvakoussi et al., 2013; Vosniadou, 2013) liefern. Hiernach entstehen Schwierigkeiten, wenn bereits Erlerntes auf neue, unpassende Situationen angewendet wird.

Dieser Beitrag adressiert systematisch auftretende Fehler bei der Interpretation gängiger statistischer Graphen (Histogramm, Boxplot und Dotplot). Ein besonderer Fokus liegt dabei auf den konzeptuellen Schwierigkeiten, die diesen Fehlern zugrunde liegen. Es wird diskutiert, wie die Conceptual Change Theorie potenzielle Erklärungen für diese Schwierigkeiten bieten kann. Durch das Verständnis dieser konzeptuellen Hürden und deren Ursachen können Ansätze für den Stochastikunterricht entwickelt werden, die auf eine effektive Förderung des Verständnisses bei der Interpretation statistischer Graphen abzielen.

2. Statistische Graphen und ihre Bedeutung für data literacy

Ob in den Nachrichten, den sozialen Medien, der Berufswelt oder dem persönlichen Leben, Daten sind im heutigen Alltag allgegenwärtig. Viele der Entscheidungen, die wir täglich treffen sind von der Analyse von Datenmengen beeinflusst (Arbeitskreis Stochastik der GDM, 2003; Rubin & Gould, 2023). Dabei werden diese Daten meist mithilfe graphischer Darstellungen in statistischen Graphen visualisiert (Büchter & Henn, 2007). Mit solchen Darstellungen umgehen zu können ist von großer Bedeutung, weshalb die Interpretation statistischer Graphen ein wichtiger Bestandteil von data literacy darstellt (Wolff et al., 2016).

2.1 Data literacy

Der Begriff data literacy wird unterschiedlich definiert (z. B. Deahl, 2014; Wolff et al., 2016). Nach Wolff et al. (2016) basiert data literacy auf Fertigkeiten, mit der Fähigkeit Wissen und Fertigkeiten im Umgang mit Daten erweitern zu können. Zu diesen Fähigkeiten zählt Daten auswählen zu können, diese bereinigen und analysieren sowie visualisieren, kritisieren und interpretieren zu können (Wolff et al., 2016).

Der Begriff data literacy hat sich im Laufe der Jahre entwickelt (Schüller et al., 2019). Einer der Ursprünge stellt dabei das Konzept der statistical literacy dar (Schüller et al., 2019). Für Gal (2002) umfasst statistical literacy die zwei folgenden Komponenten:

(a) Die Fähigkeit der Menschen statistische Informationen, datenbezogene Argumente oder stochastische Phänomene, auf die sie in verschiedenen Kontexten stoßen können und die für sie relevant sind, zu interpretieren und kritisch zu bewerten

(b) Ihre Fähigkeit, ihre Reaktionen auf solche statistischen Informationen zu erörtern oder mitzuteilen, wie z. B. ihr Verständnis der Bedeutung der Informationen, ihre Meinung zu den Auswirkungen dieser Informationen oder ihre Bedenken hinsichtlich der Akzeptanz bestimmter Schlussfolgerungen.

(Gal, 2002, S. 2-3, übersetzt durch Autor:innen)

Eine Erweiterung der Definition von statistical literacy auf data literacy ist notwendig, da sich die Bedeutung von Daten in der Welt, durch die Digitalisierung verstärkt und verändert. Junge Menschen sollten dementsprechend sowohl als Konsumenten als auch als Produzenten von Statistik sowie im Umgang mit Datenmengen ausgebildet werden (Gould, 2017).

Statistische Graphen bieten die Möglichkeit, statistische Informationen verdichtet und zugleich übersichtlich darzustellen (Büchter & Henn, 2007). Die Fähigkeit, Daten und ihre Darstellung in statistischen Graphen kompetent und kritisch zu interpretieren, wird als eine der Hauptkomponenten von statistical und data literacy hervorgehoben (z. B. Gal, 2002; Wolff et al., 2016).

2.2 Statistische Graphen im curricularen Zusammenhang

Daten können mithilfe verschiedener statistischer Graphen, wie zum Beispiel Kreisdiagramme, Säulen- oder Balkendiagramme, Boxplots oder Histogramme, dargestellt werden.

Die unterschiedlichen Möglichkeiten der Darstellung von Daten werden im Laufe der Schulzeit nacheinander eingeführt. So empfiehlt die Kultusministerkonferenz (KMK, 2022b) für die Primarstufe das Visualisieren von Daten, das Herauslesen von Informationen aus diesen, sowie das Interpretieren und kritische Reflektieren von Darstellungen von Daten, als Bildungsstandard. Auch für den Abschluss der Sekundarstufe I stellt das Erstellen und Interpretieren von Diagrammen eine Kompetenz dar, die nach den Bildungsstandards der KMK (2022a) erworben werden sollen. Zum Erreichen der Kompetenzen werden verschiedene Diagramme, wie auch Säulen- oder Balkendiagramme, Kreisdiagramme, Histogramme und Boxplots, als Beispiele gegeben. Während die Bildungsstandards der KMK lediglich aufzeigen welche Kompetenzen zum Ende der Schulstufen erreicht werden sollen, zeigt ein genauerer Blick in die Bildungspläne der Länder, in welcher Abfolge die Inhalte erlernt werden sollten.

Zum Vergleich werden die Bildungspläne dreier Bundesländer, herausgegeben vom Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg (MK), dem Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München (ISB) für Bayern und dem Ministerium für Schule und Bildung Nordrhein-Westfalen (MSB) herangezogen. Etwa die Hälfte der deutschen Schüler:innen werden nach diesen Lehrplänen unterrichtet (Statistisches Bundesamt, 2024). Dies ermöglicht einen ausdifferenzierten Einblick in die Art und Weise, wie die Ziele der KMK erreicht werden. Die einzelnen statistischen Graphen werden nacheinander in der Schule eingeführt.

- Primarstufe: Die ersten Darstellungen werden dabei in der Grundschule eingeführt. In Baden-Württemberg werden hierbei unter anderem Säulendiagramme als Möglichkeiten genannt (z. B. MK, 2016a).
- Sekundarstufe I: In den Klassen 5/6 der Sekundarstufe I werden die Darstellungsformen Säulen- und Balkendiagramm, Kreisdiagramm und Streifendiagramm eingeführt (vgl. MK, 2016c; ISB,2021; MSB, 2022).
- In den Klassen 7/8 werden Boxplots und deren Eigenschaften eingeführt (vgl. ISB,2021; MSB, 2022).
- Sekundarstufe II: Histogramme hingegen werden in den Bundesländern erst zum Ende der Sekundarstufe I, in Klasse 10, oder in der Sekundarstufe II als mögliche Darstellungsform aufgezeigt (vgl. MK, 2016b; ISB, 2021; MSB, 2023).

Die Bildungspläne der Bundesländer sehen einheitlich die Einführung statistischer Grafiken in der beschriebenen Reihenfolge vor, sodass die meisten Schüler zuerst Kreis- und Säulendiagramme und später Boxplots und Histogramme kennenlernen (MK, 2016b; MK, 2016c).

Die Darstellung von Daten im statistischen Graphentyp des Dotplots werden in den genannten Bildungsplänen nicht thematisiert. Sie finden jedoch in der mathematikdidaktischen Forschung über verschiedene Klassenstufen hinweg Beachtung (vgl. Boels et al., 2023; Chaphalkar, 2014; Frischemeier, 2019; Schreiter & Vogel, 2023; 2024). Ein wesentlicher Grund dafür ist, dass Dotplots sowohl die einzelnen Datenpunkte als auch deren Verteilung visuell erfassbar machen. Dadurch ermöglichen sie einen intuitiven Zugang zur Datenanalyse und dienen als Brücke zum Verständnis von Histogrammen, bei denen nur noch die Verteilung, nicht aber die einzelnen Datenpunkte sichtbar sind (Boels et al., 2023).

Die beiden Typen statistischer Grafiken, Boxplots und Histogramme, stellen aufgrund spezifischer Herausforderungen eine besondere Hürde für die Interpretation dar. Beispielsweise werden in beiden statistischen Graphen die Daten in aggregierter Form visualisiert. Es ist also nicht möglich einzelne Datenwerte abzulesen (Bakker et al., 2004; Boels et al., 2019b). Histogramme sind für metrisch skalierte Merkmale eine Erweiterung von Stab- und Säulendiagrammen. Um ein Histogramm zu erstellen wird das vorliegende Datenintervall überlappungs- und lückenfrei in Klassen eingeteilt, sodass jede Merkmalsausprägung in genau eine Klasse eingeordnet wird. Werden in einem Histogramm relative Häufigkeiten veranschaulicht, so ergibt sich die Höhe des Rechtecks einer Klasse dadurch, dass die absolute Häufigkeit der Merksmalsausprägungen in dieser Klasse durch das Produkt aus Stichprobenumfang und Klassenbreite dividiert wird (vgl. Eichler & Vogel, 2013). Zum Verständnis von Boxplots sind statistische Konzepte wie Median und Quartile notwendig, da diese eine wichtige Rolle in der Darstellung spielen (Bakker et al., 2004). Studien zeigen, dass dabei häufig Schwierigkeiten auftreten, da statistische Graphen auch statistische Konzepte, wie Lage- und Streuungsparameter, veranschaulichen (Boels et al., 2019b).

Solche Hürden, die das Verstehen und Interpretieren der statistischen Graphen erschweren, können zu systematischen Fehlern führen, deren Analyse im Zentrum dieses Beitrags steht.

3. Systematische Fehler vor dem Hintergrund der Conceptual Change Theorie

Fehleranalysen haben in der Mathematikdidaktik eine lange Tradition (vgl. Eichelmann et al., 2012). Fehler werden als eine Abweichung von Normen gesehen, die es ermöglichen in richtige und falsche Lösungen zu unterscheiden (Oser et al., 1999). Dabei lassen sich unbewusste oder durch Zufall entstandene Fehler, von solchen Fehlern unterscheiden, die aus vorherigen Erfahrungen heraus entstehen (Radatz, 1980). Fehler können in die folgenden drei Kategorien unterteilt werden (Führer, 1997; Padberg, 1996):

1) Flüchtigkeitsfehler: entstehen aus Unachtsamkeit. Diese sind zumeist nicht reproduzierbar und können korrigiert werden, in dem auf die Fehler aufmerksam gemacht wird.
2) Systematische Fehler: treten wiederholt bei bestimmten Aufgaben auf. Auf Nachfrage können Strategien erklärt werden, die zu der Lösung geführt haben.
3) Typische Fehler: treten häufig, bei verschiedenen Personen auf.

Im Mathematikunterricht entstehen Fehler selten zufällig, systematische Fehler machen etwa 70–90 % aller Fehler im Mathematikunterricht aus (Padberg, 1996; Radatz, 1980). Aus mathematikdidaktischer Sicht ist ihre Analyse besonders bedeutsam, da sie auf der Grundlage falscher Vorstellungen entstehen (Padberg, 1996). Entsprechend können die Fehler anders als Flüchtigkeitsfehler nicht direkt korrigiert werden, sondern es benötigt zunächst eine Analyse der zugrundeliegenden konzeptuellen Schwierigkeiten (Prediger & Wittmann, 2009).

Die Fehlerbetrachtungen der mathematikdidaktischen Forschung konzentrieren sich meist auf bestimmte Inhaltsbereiche, wie dem Bruchrechnen (vgl. Eichelmann et al., 2012, Obersteiner et al., 2013), Rechenverfahren (vgl. Padberg, 1996; Radatz, 1980) oder dem Darstellungswechsel im Bereich des funktionalen Zusammenhangs (Nitsch, 2015).

Zur Erklärung des Auftretens systematischer Fehler wurde von verschiedenen Autor:innen auf die Conceptual Change Theorie zurückgegriffen (z. B. Prediger, 2008; Nitsch, 2015). Systematischen Fehlern liegen häufig konzeptuelle Schwierigkeiten zugrunde, die sich aus einem nicht vollzogenen oder unvollständigen Grundvorstellungsumbruch ergeben (vgl. Prediger, 2008). Grundvorstellungen beschreiben grundlegende mathematische Begriffe oder Verfahren sowie Möglichkeiten zur Deutung dieser in realen Kontexten. Dabei beschreiben sie Beziehungen zwischen der Mathematik, dem Individuum und der Realität (vom Hofe, 1992). Grundvorstellungen umfassen die drei folgenden Aspekte:

> Sinnkonstituierung eines Begriffs durch Anknüpfung an bekannte Sach- oder Handlungszusammenhänge bzw. Handlungsvorstellungen,
>
> Aufbau entsprechender (visueller) Repräsentationen bzw. „Verinnerlichungen“, die operatives Handeln auf der Vorstellungsebene (im Sinne Piagets) ermöglichen,
>
> Fähigkeit zur Anwendung eines Begriffs auf die Wirklichkeit durch Erkennen der entsprechenden Struktur in Sachzusammenhängen oder durch Modellieren des Sachproblems mit Hilfe der mathematischen Struktur.
>
> (vom Hofe, 1992, S. 347)

Die Vorstellung, dass die Multiplikation zu einer Vergrößerung einer Zahl führt, ist ein Beispiel einer solchen Grundvorstellung im Bereich der natürlichen Zahlen (vgl. Padberg & Wartha, 2017; Prediger, 2008; vom Hofe & Roth, 2023).

Werden Grundvorstellungen von bereits erlernten Inhalten auf neue Inhalte angewendet, kann ein Umbruch in der Grundvorstellung notwendig sein, da das Übertragen der Vorstellung ohne Anpassung an die neue Situation fachlich nicht immer möglich ist. Beispielsweise lässt sich die aus dem Bereich der natürlichen Zahlen vertraute Grundvorstellung „Multiplizieren vergrößert stets“ nicht uneingeschränkt auf den erweiterten Zahlbereich der rationalen Zahlen übertragen. In der Bruchrechnung bedeutet eine Multiplikation nicht unbedingt eine Vergrößerung der Zahl. Ein Umbruch in der Grundvorstellung ist somit erforderlich (vgl. Padberg & Wartha, 2017; Prediger, 2008; vom Hofe & Roth, 2023).

Werden konzeptuelle Umbrüche nicht oder nur unvollständig vollzogen, entstehen konzeptuelle Schwierigkeiten, die sich in systematischen Fehlern manifestieren. Die Conceptual Change Theorie sieht die Überwindung solcher Schwierigkeiten als zentrale Voraussetzung für den Erwerb neuer Inhalte an (Vosniadou, 2013). Demnach sind systematische Fehler auf sogenannte synthetische Vorstellungen zurückzuführen, die aus vorhandenem Vorwissen entstehen. Dieses Vorwissen kann informell durch Alltagserfahrungen oder formal durch früheren Unterricht erworben worden sein. Werden diese synthetischen Vorstellungen auf neue, damit unvereinbare Sachverhalte übertragen, resultieren systematische Fehler (Vamvakoussi et al., 2013).

4. Systematische Fehler und zugrundeliegende konzeptuelle Schwierigkeiten bei der Interpretation statistischer Graphen

In der mathematikdidaktischen Forschung wurde eine Reihe systematischer Fehler bei der Interpretation statistischer Graphen festgestellt (z. B. Boels et al., 2019b; Lem et al., 2013). Diese sollen in diesem Beitrag im Rahmen der Conceptual Change Theorie analysiert werden.

Der Fokus liegt dabei auf den drei statistischen Graphen Histogramme, Boxplots und Dotplots. Diese drei statistischen Graphen sind deshalb von Interesse, da sie gemäß den curricularen Vorgaben in verschiedenen Klassenstufen eingeführt werden – insbesondere nachdem die Darstellungsarten Säulendiagramm und Kreisdiagramm thematisiert wurden. Es ist entsprechend anzunehmen, dass Schüler:innen beim Erlernen dieser neuen statistischen Graphen auf bereits Gelerntes zurückgreifen. Dies ist aus fachlicher Sicht nicht immer ohne weiteres möglich, so dass zu erwarten ist, dass sich daraus konzeptuelle Schwierigkeiten ergeben, die zu systematischen Fehlern führen.

Vor diesem Hintergrund stellt sich in diesem Beitrag die Frage, welche der in der Forschung berichteten systematischen Fehler bei der Interpretation der statistischen Graphen Histogramme, Boxplots und Dotplots durch Umbrüche in den zugrundeliegenden Grundvorstellungen theoretisch verortbar sind.

In der mathematikdidaktischen Forschung lassen sich Beispiele von systematischen Fehlern bei der Interpretation statistischer Graphen finden, die durch konzeptuelle Schwierigkeiten entstehen und mit nicht oder nicht komplett vollzogenen Grundvorstellungsumbrüchen erklärbar sind. Für Histogramme und Dotplots lassen sich mehrere systematische Fehler dieser Art identifizieren.

4.1 Verwechslung von Datenwert und Häufigkeit

Ein häufig berichteter systematische Fehler dieser Art besteht in einer Verwechslung von Häufigkeiten und Datenwerten bei der Bestimmung von Mittelwerten. Die Befragten mehrerer Untersuchungen (für Histogramme vgl. Boels et al., 2019a; Cooper & Shore, 2008; Kaplan et al., 2014; für Dotplots vgl. Boels & Van Dooren, 2023) zeigten dabei, dass bei der Bestimmung von Mittelwerten aus Histogrammen und Dotplots die Mittelwerte der Häufigkeiten und nicht die der Werte bestimmt wurden. Die Abbildung 1a zeigt ein Beispiel, bei dem ein solch systematischer Fehler auftreten könnte. Auf die Frage nach der durchschnittlichen Anzahl an Haustieren in der Klasse würden Lernende, die diese konzeptuellen Schwierigkeiten haben, einen Wert im Bereich zwischen 2,8 und 3,3 nennen (vgl. Cooper & Shore, 2008). Dies entspricht dem Mittelwert der Häufigkeiten, also die durchschnittliche Höhe der Säulen. Die richtige Antwort, der mittlere Datenwert, liegt jedoch bei 2,03 (siehe Abb. 1b).

Dieser systematische Fehler steht mit bestimmten Schwierigkeiten auf der konzeptuellen Ebene in Verbindung, die durch einen unvollständigen Grundvorstellungsumbruch, also einem nicht ausreichenden Anpassen der Vorstellungen, verursacht werden können.

Dabei wird eine Grundvorstellung zum Mittelwert in Säulendiagrammen übernommen und auf Histogramme oder Dotplots übertragen (vgl. Boels et al., 2019b; Boels & Van Dooren, 2023). Bei Säulendiagrammen lassen sich Mittelwerte durch das „Ausbalancieren“ der Säulen bestimmen. Die Grundvorstellung des arithmetischen Mittels als Ausgleichswert ist eine alltägliche Erfahrung der Lernenden. Diese lässt sich durch Umverteilung, beispielsweise innerhalb der Säulen eines Säulendiagramms veranschaulichen (Krüger et al., 2015; Sill & Kurtzmann, 2019). Das ist möglich, da bei Säulendiagrammen die gesuchten Informationen entlang der y-Achse dargestellt werden. Bei Histogrammen hingegen werden diese Informationen entlang der x-Achse dargestellt, weshalb es bei einem unvollständigen Grundvorstellungsumbruch zu konzeptuellen Schwierigkeiten und damit verbundenen systematischen Fehlern, wie in Abbildung 1a veranschaulicht, kommt. Bei Histogrammen werden Mittelwerte nicht mehr anhand der vertikalen y-Achse bestimmt, sondern an der x-Achse (siehe Abb. 1b im Vergleich zu Abb. 1c), weshalb die Grundvorstellung des Mittelwerts als Ausgleichswert der Säulenhöhen an die neue Situation angepasst werden muss.

Säulendiagramme gehören zu den ersten statistischen Graphen, die Schüler:innen lernen, während Histogramme erst zu einem späteren Zeitpunkt unterrichtet werden (vgl. 2.2). Adäquate Grundvorstellungen zu Mittelwerten in Säulendiagrammen sind weitgehend vorhanden, wenn Histogramme eingeführt werden. Sie bilden eine solide und funktionierende Grundvorstellung, die jedoch nicht auf den neuen statistischen Graphentyp Histogramm übertragbar ist. Ein Umbruch in den Grundvorstellungen ist notwendig, um diesen systematischen Fehler zu vermeiden.

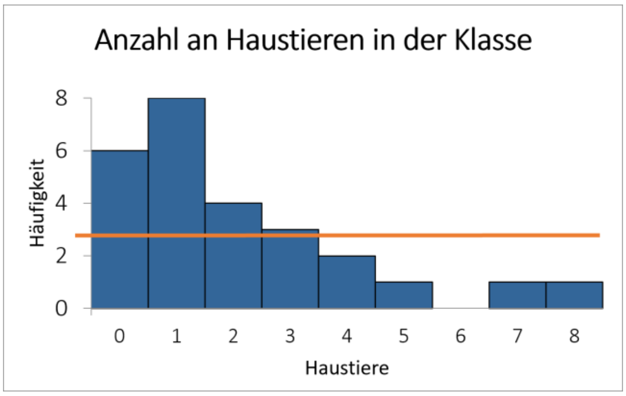


Abb. 1a: Grundvorstellung des Mittelwertes bei Säulendiagrammen angewendet bei Histogramm

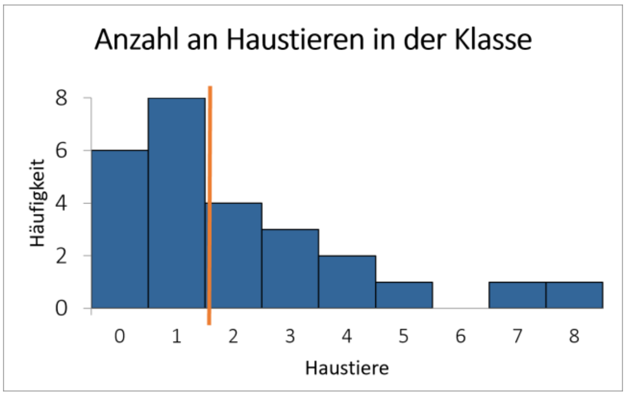


Abb. 1b: Mittelwert bei Histogrammen

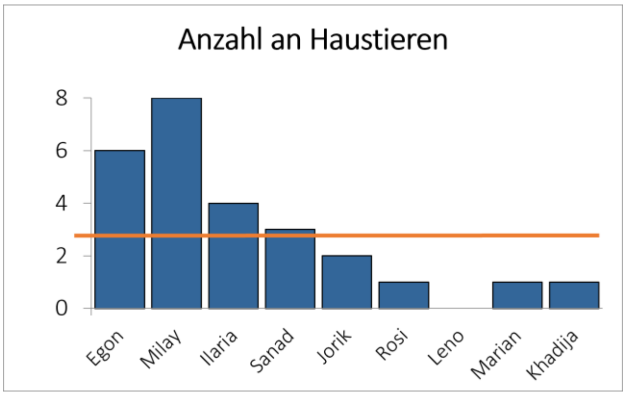


Abb. 1c: Mittelwert bei Säulendiagrammen

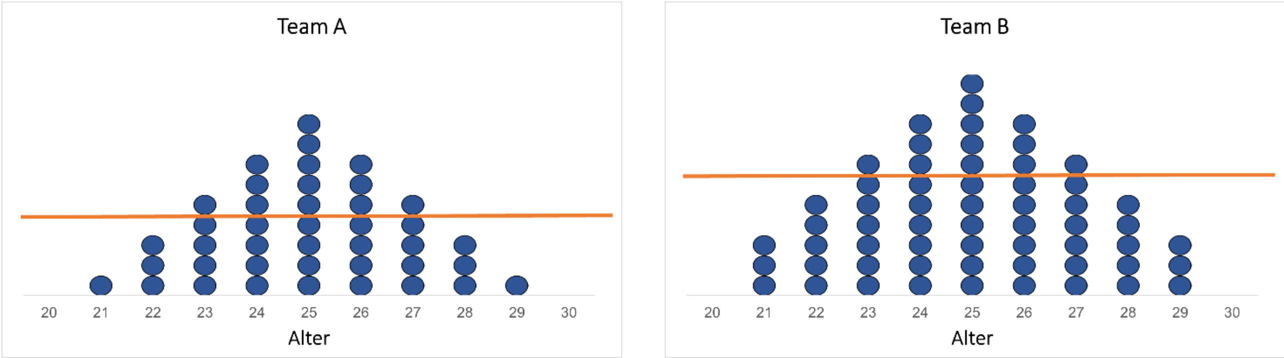


Abb. 2: Systematischer Fehler: Höhere Säulen – Höherer Mittelwert

Ein weiteres Beispiel für das Auftreten dieses systematischen Fehlers zeigt sich beim Vergleich zweier Histogramme (vgl. Lem et al., 2014b) oder Dotplots (vgl. Reaburn, 2012). Hierbei werden höhere Säulen mit einem höheren Mittelwert assoziiert.

Betrachtet man die beiden Dotplots in Abbildung 2 und die Frage welches Team durchschnittlich älter ist, würde sich der systematische Fehler in der Antwort „Team B" zeigen. Tatsächlich haben beide Teams den gleichen Mittelwert, beide Teams sind durchschnittlich 25 Jahre alt.

Es liegt die Vermutung nahe, dass hier dieselben konzeptuelle Schwierigkeiten in Bezug auf die Bestimmung des Mittelwertes zugrunde liegen. Die Bestimmung des Mittelwerts bei Dotplots folgt der gleichen Logik wie die Bestimmung des Mittelwertes bei Histogrammen. Wendet man, wie im vorherigen Beispiel beschrieben, Strategien zur Bestimmung des Mittelwertes bei Säulendiagramme an und liest mit der entsprechenden Grundvorstellung die Mittelwerte ab, kommt man auf einen höheren Mittelwert für das Team mit den höheren Säulen, Team B. Die Vorstellung, dass höhere Säulen einen höheren Mittelwert bedeuten, stellt für Säulendiagramme eine tragfähige Vorstellung dar. Bei Dotplots führt sie jedoch systematisch zu Fehlern.

Der Grundvorstellungsumbruch zum Mittelwert von Säulendiagrammen hin zu Histogrammen und Dotplots scheint in beiden Beispielen nicht oder nicht vollständig vollzogen worden. Daraus ergeben sich konzeptuelle Schwierigkeiten bei der Bestimmung und dem Vergleich von Mittelwerten bei Histogrammen und Dotplots, die sich beständig, auch bei geübten Nutzer:innen, in systematischen Fehlern bei entsprechenden Aufgaben zeigen (Lem et al., 2014b).

4.2 Flacherer Form bedeutet weniger Variabilität

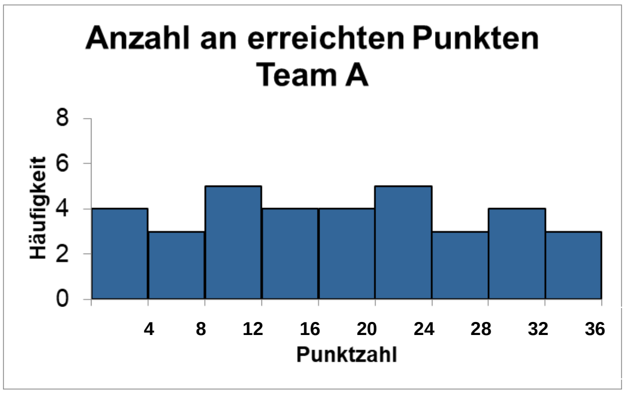
Der zweite systematische Fehler basiert auf der Vorstellung, dass eine Verteilung, bei der der statistische Graph eine flachere Form aufweist, weniger Variabilität hat als eine Verteilung bei der der statistische Graph eine weniger flache Form aufweist. Dieser systematische Fehler lässt sich insbesondere bei Histogrammen (Chaphalkar, 2014; Cooper, 2018; Dabos, 2014; Kaplan et al., 2014; Lem et al., 2013) beobachten.

Wie in Abbildung 3 beispielhaft dargestellt, tritt dieser systematische Fehler beim Vergleich zweier Verteilungen auf. Auf die Frage nach dem Team mit der niedrigeren Variabilität in den erreichten Punkten, würden Befragte entsprechend Team A wählen und dies mit der flacheren Form des Graphen begründen (vgl. Kaplan et al., 2014).

Die Schlussfolgerung, dass die Verteilung bei der der Graph eine flachere Form aufweist, weniger Variabilität hat, kann, je nach Verteilung des anderen Graphen, richtig sein, sie ist jedoch nicht verallgemeinerbar. Variabilität kann unterschiedlich konzeptualisiert und mithilfe verschiedener Kennzahlen bestimmt werden. Beispielsweise kann Variabilität als Maß der Abweichung von der Mitte verstanden werden (Büchter & Henn, 2007).

Bei dem vorliegenden systematischen Fehler liegt die Vermutung nahe, dass die Vorstellung von Variabilität als Maß der Schwankungen um einen Wert vorliegt. Variabilität wird als Schwankung wahrgenommen, jedoch ist der Wert, um den die Häufigkeiten schwanken nicht der Mittelwert der Verteilung. Dabos (2014) schreibt dazu:

> Zum Beispiel schrieben einige [Dozierende], dass ihre Entscheidung auf der Streuung der Daten vom Zentrum aus beruhte, was die richtige Auffassung von Variation ist, aber sie nutzten dieses Verständnis, um die falsche Grafik (Schule B) zu wählen. [Ein:e Teilnehmer:in]



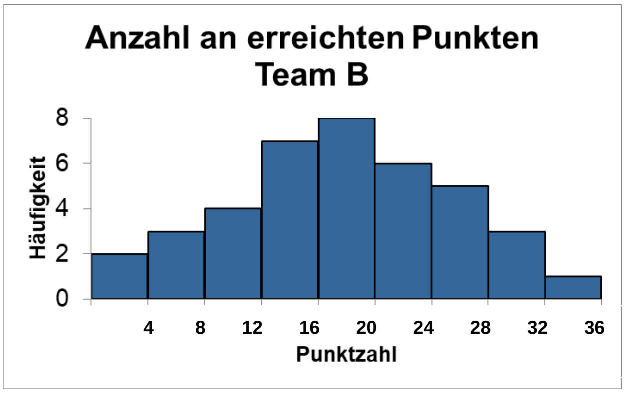


Abb. 3: Systematischer Fehler: Flache Form – Weniger Variabilität

> zum Beispiel wählte Schule B, da sie mehr Variabilität aufwies, und schrieb: "Der obere Graph zeigt mehr Konzentration um den Mittelwert."
>
> (Dabos, 2014, S. 2, übersetzt durch Autor:innen)

Die befragten Dozierenden in dieser Studie zeigten die Vorstellung von Variabilität als Maß der Abweichung von einem Mittelwert und dennoch zeigte sich der systematische Fehler, wie im Zitat beschrieben. Es kann angenommen werden, dass sich die konzeptuellen Schwierigkeiten, die diesem systematischen Fehler zugrunde liegen, auf einen nicht oder unvollständig vollzogenen Vorstellungsumbruch von Säulendiagrammen zu Histogrammen zurückführbar sind.

Bei Säulendiagrammen zeigt sich Variabilität in den Schwankungen der Säulenhöhen. Da in Säulendiagrammen der Mittelwert entlang der y-Achse bestimmt wird, wird nun auch die Variabilität entsprechend anhand von Schwankungen entlang der y-Achse, in den Höhen der Säulen, bestimmt. Bei Säulendiagrammen stellt die Vorstellung von Variabilität als Höhenunterschiede in den Säulen eine tragfähige Vorstellung dar.

Wird diese Grundvorstellung von Säulendiagrammen auf Histogramme übertragen, die erst in höheren Klassenstufen eingeführt werden, ohne dass ein angemessener Vorstellungsumbruch vollzogen wird, kommt es zu konzeptuellen Schwierigkeiten und systematischen Fehlern. In Histogrammen werden Mittelwerte entlang der x-Achse bestimmt. Entsprechend ist für die Einschätzung der Variabilität die gewichtete Streuung entlang der x-Achse von Bedeutung.

4.3 Größere Fläche bedeutet größere Häufigkeit

Auch für Boxplots lassen sich systematische Fehler identifizieren, die auf konzeptuelle Schwierigkeiten und unvollständige Grundvorstellungsumbrüche hinweisen. Der folgende systematische Fehler zeigt sich hier bei der Einschätzung der Häufigkeiten im Vergleich zweier Boxplots (vgl. Abt et al., 2023; Edwards et al., 2017; Lem et al., 2014a). In Abbildung 4 ist ein Beispiel gegeben, bei dem sich der systematische Fehler zeigen kann. Auf die Frage welches der beiden gleichgroßen Teams mehr Spieler hat, die größer als 1,90m sind, würde die fehlerbehaftete Antwort „Team B“ lauten.

Die Antwort ist durch die Fläche der Box beeinflusst. Eine größere Fläche wird dabei mit einer größeren Häufigkeit an beobachteten Fällen verbunden. Wo es mehr Fläche gibt, gibt es also auch mehr Spieler (vgl. Lem et al., 2014a). Dieser Annahme liegt eine konzeptuelle Schwierigkeit zugrunde, die im Folgenden näher erläutert wird.

Boxplots werden nach curricularen Vorgaben in der Mittelstufe eingeführt. Zuvor, in der Primar- und Unterstufe, wurden bereits Säulendiagramme und Kreisdiagramme unterrichtet. Bei diesen statistischen Graphen werden Häufigkeiten mithilfe der Fläche, durch größere Kreisabschnitte oder höhere Säulenhöhe, visualisiert. Die Grundvorstellung, dass mehr Fläche eine größere Häufigkeit zeigt, ist hier eine tragfähige Vorstellung und liefert zumeist das richtige Ergebnis. Diese Grundvorstellung ist entsprechend vorhanden, wenn Boxplots als Darstellungsart eingeführt werden. Bei Boxplots handelt es sich jedoch um einen Dichtegraph. Boxplots basieren auf fünf Kennzahlen von Verteilungen, dem Minimum, dem ersten Quartil, dem Median, dem oberen Quartil und dem Maximum. Diese Kennzahlen werden visualisiert und die mittleren 50% der Verteilung durch die Box, die durch die Verbindung des unteren und oberen Quartils entsteht, veranschaulicht (Büchter & Henn, 2007). Folglich ist die Größe der Box für Aussagen zur Häufigkeit unerheblich.

Es ist anzunehmen, dass dieser systematische Fehler auf einem nicht vollständig vollzogenen Grundvorstellungsumbruch von Kreisdiagrammen und Säulendiagrammen hin zu Boxplots basiert. Während

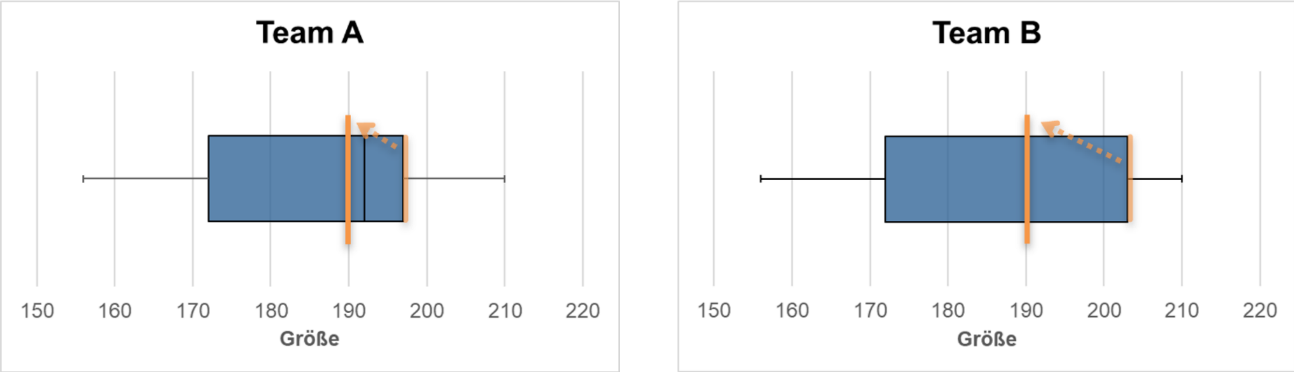


Abb. 4: Systematischer Fehler: Größere Fläche – Größere Häufigkeit

bei Kreis- und Säulendiagrammen die Grundvorstellung, dass mehr Fläche eine höhere Häufigkeit bedeutet, zur korrekten Interpretation dieser führt, stellt sie bei Boxplots eine konzeptuelle Schwierigkeit dar. Dieser unvollständige Umbruch in den Grundvorstellungen zeigt sich in systematischen Fehlern bei der Interpretation von Boxplots.

Dieser systematische Fehler zeigt sich in der bisherigen mathematikdidaktischen Forschung in zweierlei Gestalt. Zum einen werden längere Boxen, also eine horizontal breitere Box (vgl. Abb. 4) mit einer höheren Häufigkeit assoziiert (vgl. Abt et al., 2023, Lem et al., 2014a). Zum anderen zeigt sich, dass höhere Boxen, mit mehr Fläche in die vertikale Richtung, ebenfalls mit einer höheren Häufigkeit verbunden werden (Lem et al., 2013).

Betrachtet man die verschiedenen systematischen Fehler, ergibt sich ein umfassendes Bild. Systematische Fehler lassen sich bei der Interpretation aller drei statistischen Graphen Boxplot, Dotplot und Histogramm finden. Dabei zeigen Histogramme und Dotplots teilweise die gleichen systematischen Fehler. Das Auftreten dieser systematischen Fehler lassen sich dabei auf nicht (gänzlich) vollzogene Grundvorstellungsumbrüche zurückführen. Die Grundvorstellungen beziehen sich auf unterschiedliche Grundkonzepte statistischer Graphen. Zum einen zeigen sich Schwierigkeiten mit statistischen Konzepten, wie der Variabilität, die in statistischen Graphen visualisiert werden. Zum anderen zeigen sich die systematischen Fehler in Bezug auf die Funktionsweise der statistischen Graphen, zum Beispiel darin, dass Boxplots Dichte visualisieren oder, dass in Histogrammen und Dotplots die Datenwerte entlang der x-Achse visualisiert werden.

5. Fazit

Die Betrachtung zeigt, dass die Interpretation statistische Graphen trotz ihrer Bedeutung für das Verständnis von Daten und Verteilungen mit Fehlern behaftet ist. Für die statistischen Graphen Histogramm, Dotplot und Boxplot finden sich in der mathematikdidaktischen Forschung verschiedene Beispiele systematischer Fehler. Einige der Fehler sind dabei mit den unterschiedlichen visuell-strukturellen Logiken der Graphen verbunden, die beim Auslesen von Informationen beachtet werden müssen und als „Funktionsweise eines Graphen" bezeichnet werden können.

Systematische Fehler wie die Bestimmung des Mittelwerts der Häufigkeiten statt der Datenwerte oder die Annahme, dass eine größere Fläche eine höhere Häufigkeit bedeutet, stehen im Zusammenhang mit der spezifischen Funktionsweise statistischer Grafiken. Die konzeptuellen Schwierigkeiten und synthetischen Vorstellungen, die zu diesen systematischen Fehlern führen, entstehen dadurch, dass die Art der Visualisierung der Daten und die Bestimmung entsprechende Kennzahlen nicht vollständig verstanden werden. Solche konzeptuellen Schwierigkeiten mit der Funktionsweise der statistischen Graphen lassen sich sowohl bei Histogrammen und Dotplots als auch bei Boxplots beobachten.

Eine weitere konzeptuelle Schwierigkeit zeigt sich beim systematischen Fehler, dass die flache Form eines statistischen Graphen eine geringere Variabilität bedeutet. Hierbei scheint das Konzept der Variabilität und dessen Darstellung im statistischen Graphen der Ausgangspunkt für systematische Fehler zu sein.

Es kann vermutet werden, dass die konzeptuellen Schwierigkeiten, die sich in diesen systematischen Fehlern zeigen, auf nicht vollständig vollzogene Grundvorstellungsumbrüche basieren. Wie auch in anderen Bereichen der Mathematikdidaktik ist das Erlernen neuer Inhalte im Bereich Statistik von Umbrüchen in Grundvorstellungen beeinflusst. Schüler:innen stützen sich auf zuvor gelerntes Wissen und wenden dieses auf neue Situationen an. Dies ist jedoch nicht immer möglich, da statistische Graphen beispielsweise trotz ihres ähnlichen Erscheinungsbildes, wie bei Säulendiagrammen und Histogrammen, eine unterschiedliche Funktionsweise haben und entsprechend Umbrüche in den jeweiligen Grundvorstellungen notwendig sind.

Dieser Beitrag gibt einen Einblick in systematische Fehler, die sich aufgrund konzeptueller Schwierigkeiten durch nicht vollzogene Grundvorstellungsumbrüche bei der Interpretation statistischer Graphen zeigen. Es wurden lediglich systematische Fehler betrachtet, die sich mit konzeptuellen Schwierigkeiten erklären lassen. Dabei werden durch Vorwissen synthetische Vorstellungen gebildet, die, wenn sie auf neue, nicht vereinbare Situationen angewendet werden zu Fehlern führen. Es ist jedoch anzunehmen, dass es bei der Interpretation von statistischen Graphen zu weiteren Fehlern kommt, deren Ursachen anderer Natur sind. Angesichts der Bedeutung von statistischen Graphen und dem adäquaten Umgang mit diesen ist es wichtig, eine Übersicht der auftretenden Fehler und zugrundeliegender möglicher Ursachen zu gewinnen.

Ein umfassender Überblick über solche Schwierigkeiten über die Grenzen der einzelnen statistischen Graphen hinaus, scheint hier ein weiterer wichtiger Schritt zu sein. Hierzu ist eine systematische Suche notwendig, die jedoch über die Möglichkeiten dieses Artikels hinausgeht.

Die Analyse systematischer Fehler und der Gründe für ihr Auftreten dient dem Erwerb entsprechenden Wissens. Dieser tiefere Einblick ist eine Voraussetzung, um Lehrkräfte im Hinblick auf systematische Fehler bei der Interpretation statistischer Graphen sowie den zugrunde liegenden konzeptuellen Schwierigkeiten zu schulen. Im Rahmen des Projekts „Eye-teach-stats" werden, aufbauend auf den gewonnenen Erkenntnissen, Module zur Diagnose systematischer Fehler und zum Umgang mit diesen entwickelt. Diese Module kommen in der Lehrkräftebildung zum Einsatz.

Förderhinweis

Das Projekt "Eye-teach-stats" (2023-1-DE03-KA220-SCH-000158223) wird im Rahmen des Erasmus+ Programms gefördert. Die geäußerten Ansichten und Meinungen entsprechen jedoch ausschließlich denen des Autors bzw. der Autoren und spiegeln nicht zwingend die der Europäischen Union oder der Nationalen Agentur wider. Weder die Europäische Union noch die Nationale Agentur können dafür verantwortlich gemacht werden.

Literatur

Abt, M., Reinhold, F. & van Dooren, W. (2023). Revealing Cognitive Processes when Comparing Box Plots using Eye-Tracking Data—A Pilot Study. In M. Ayalon, B. Koichu, R. Leikin, L. Rubel & M. Tabach (Vorsitz), *Proceedings of the 46th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (Vol. 2, pp. 11-18). PME 46.

Arbeitskreis Stochastik der GDM (2003). Empfehlungen zu Zielen und zur Gestaltung des Stochastikunterrichts. *Stochastik in der Schule,* 23(3), 21–26.

Bakker, A., Biehler, R. & Konold, C. (2004). Should Young Students Learn About Box Plots? *Curricular Development in Statistics Education IASE Roundtable Conference*, 163–173. https://doi.org/10.52041/SRAP.04302

Boels, L., Bakker, A. & Drijvers, P. (2019a). Unravelling teachers' strategies when interpreting histograms: an eye-tracking study. In Jankvist, Uffe, Thomas, M. van den Heuvel-Panhuizen & M. Veldhuis (Vorsitz), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education,* Utrecht.

Boels, L., Bakker, A., van Dooren, W. & Drijvers, P. (2019b). Conceptual difficulties when interpreting histograms: A review. *Educational Research Review*, *28*, 100291. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2019.100291

Boels, L., Lyford, A., Bakker, A. & Drijvers, P. (2023). Assessing Students' Learning when Interpreting Histograms: A Gaze-Based Machine Learning Analysis. *Frontline Learning Research*, *11*(2). https://doi.org/10.14786/flr.v11i2.1139

Boels, L. & van Dooren, W. (2023). Secondary school students interpreting and comparing dotplots: An eye-tracking study. In M. Ayalon, B. Koichu, R. Leikin, L. Rubel & M. Tabach (Vorsitz), *Proceedings of the 46th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (Vol. 2, S. 123-130). PME 46.

Büchter, A. & Henn, H.-W. (2007). *Elementare Stochastik: Eine Einführung in die Mathematik der Daten und des Zufalls* (2., überarb. und erw. Aufl.). Mathematik für das Lehramt: vol. 9. Springer.

Chaphalkar, R. M. (2014). *A longitudinal study of students' reasoning about variation in distributions in an introductory college statistics course* (9-A(E) [Dissertation, ProQuest Information & Learning]. RIS. https://scholarworks.umt.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=5476&context=etd

Cooper, L. L. (2018). Assessing Students' Understanding of Variability in Graphical Representations that Share the Common Attribute of Bars. *Journal of Statistics Education*, *26*(2), 110–124. https://doi.org/10.1080/10691898.2018.1473060

Cooper, L. L. & Shore, F. S. (2008). Students' Misconceptions in Interpreting Center and Variability of Data Represented via Histograms and Stem-and-Leaf Plots. *Journal of Statistics Education*, *16*(2). https://doi.org/10.1080/10691898.2008.11889559

Dabos, M. (2014). A glimpse of two year college instructors' understanding of variation in histograms. In K. Makar, B. de Sousa & R. Gould (Vorsitz), *Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS)*. http://icots.info/9/proceedings/pdfs/icots9_c150_dabos.pdf

Deahl, E. S. (2014). Better the Data You Know: Developing Youth Data Literacy in Schools and Informal Learning Environments. CrossRef.

Edwards, T. G., Özgün-Koca, A. & Barr, J. (2017). Interpretations of Boxplots: Helping Middle School Students to Think Outside the Box. *Journal of Statistics Education*, *25*(1), 21–28. https://doi.org/10.1080/10691898.2017.1288556

Eichelmann, A., Narciss, S., Schnaubert, L. & Melis, E. (2012). Typische Fehler bei der Addition und Subtraktion von Brüchen – Ein Review zu empirischen Fehleranalysen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *33*(1), 29–57. https://doi.org/10.1007/s13138-011-0031-5

Eichler, A. & Vogel, M. (2013). *Leitidee Daten und Zufall*. Springer Fachmedien Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-00118-6

Engel, J. (2017). Statistical literacy for active Citizenship: A call for Data Science Education. *Statistics Education Research Journal*, *16*(1), 44–49. https://doi.org/10.52041/serj.v16i1.213

Friel, S. N., Curcio, F. R. & Bright, G. W. (2001). Making Sense of Graphs: Critical Factors Influencing Comprehension and Instructional Implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32*(2), 124. https://doi.org/10.2307/749671

Frischemeier, D. (2019). Primary school students' reasoning when comparing groups using modal clumps, medians, and hatplots. Mathematics Education Research Journal, 31(4), 485–505. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00261-6

Führer, L. (1997). Pädagogik des Mathematikunterrichts: Eine Einführung in die Fachdidaktik für Sekundarstufen. Didaktik der Mathematik. Vieweg. https://doi.org/10.1007/978-3-663-14678-0

Gal, I. (2002). Adults' Statistical Literacy: Meanings, Components, Responsibilities. *International Statistical Review*, *70*(1), 1–25. https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.2002.tb00336.x

Gould, R. (2017). Data Literacy is statistical literacy. *Statistics Education Research Journal*, *16*(1), 22–25. https://doi.org/10.52041/serj.v16i1.209

Kaplan, J. J., Gabrosek, J. G., Curtiss, P. & Malone, C. (2014). Investigating Student Understanding of Histograms. *Journal of Statistics Education*, *22*(2). https://doi.org/10.1080/10691898.2014.11889701

Krüger, K., Sill, H.-D. & Sikora, C. (2015). *Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I*. Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-43355-3

Kultusministerkonferenz (Hrsg.). (2022a). *Bildungsstandards für das Fach Mathematik Erster Schulabschluss (ESA) und Mittlerer Schulabschluss (MSA)*. https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23-Bista-ESA-MSA-Mathe.pdf

Kultusministerkonferenz (Hrsg.). (2022b). *Bildungsstandards für das Fach Mathematik Primarbereich*. https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23-Bista-Primarbereich-Mathe.pdf

Lem, S., Onghena, P., Verschaffel, L. & van Dooren, W. (2013). On the misinterpretation of histograms and box plots. *Educational Psychology*, *33*(2), 155–174. https://doi.org/10.1080/01443410.2012.674006

Lem, S., Onghena, P., Verschaffel, L., van Dooren, W., Lem, S., Onghena, P. & Verschaffel, L. (2014a). Experts' Misinterpretation of Box Plots - a Dual Processing Approach. *Psychologica Belgica*, *54*(4), 395–405. https://doi.org/10.5334/pb.az

Lem, S., Onghena, P., Verschaffel, L. & van Dooren, W. (2014b). Interpreting histograms. As easy as it seems? *European Journal of Psychology of Education*, *29*(4), 557–575. https://doi.org/10.1007/s10212-014-0213-x

Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg (Hrsg.). (2016a). *Bildungsplan der Grundschule: Mathematik*. https://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lsbw/export-pdf/depot-pdf/ALLG/BP2016BW_ALLG_GS_M.pdf

Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg (Hrsg.). (2016b). *Bildungsplan des Gymnasiums: Mathematik*. https://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lsbw/export-pdf/depot-pdf/ALLG/BP2016BW_ALLG_GYM_M.pdf

Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg (Hrsg.). (2016c). *Gemeinsamer Bildungsplan der Sekundarstufe I: Mathematik*. https://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lsbw/export-pdf/depot-pdf/ALLG/BP2016BW_ALLG_SEK1_M.pdf

Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen (Hrsg.). (2022). *Kernlehrplan für die Sekundarstufe I Gesamtschule/Sekundarschule in Nordrhein-Westfalen*. https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/311/gesk_m_klp_2022_06_17.pdf

Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen (Hrsg.). (2023). *Kernlehrplan für die Sekundarstufe II Gymnasium /Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen: Mathematik*. https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/331/gost_klp_m_2023_06_07.pdf

Nitsch, R. (2015). *Diagnose von Lernschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammenhänge*. Springer Fachmedien Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-10157-2

Obersteiner, A., van Dooren, W., van Hoof, J. & Verschaffel, L. (2013). The natural number bias and magnitude representation in fraction comparison by expert mathematicians. *Learning and Instruction*, *28*, 64–72. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2013.05.003

Oser, F., Hascher, T. & Spychiger, M. (1999). Lernen aus Fehlern Zur Psychologie des „negativen" Wissens. In W. Althof (Hrsg.), *Fehlerwelten* (S. 11–41). VS Verlag für Sozialwissenschaften. https://doi.org/10.1007/978-3-663-07878-4_1

Padberg, F. (1996). Aus Fehlern lernen: Den Mathematikunterricht durch Fehleranalysen verbessern. *Friedrich-Jahresheft XIV: Prüfen und Beurteilen*, 56–59.

Padberg, F. & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Bruchrechnung*. Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-52969-0

Prediger, S. (2008). The relevance of didactic categories for analysing obstacles in conceptual change: Revisiting the case of multiplication of fractions. *Learning and Instruction*, *18*(1), 3–17. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2006.08.001

Prediger, S. & Wittmann, G. (2009). Aus Fehlern lernen–(wie) ist das möglich. *Praxis der Mathematik in der Schule*, *51*(3), 1–8. https://www.mathematik.tu-dortmund.de/~prediger/veroeff/09-prediger_wittmann_pm27_webversion.pdf

Radatz, H. (1980). *Fehleranalysen im Mathematikunterricht*. Vieweg+Teubner Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-663-06824-2

Reaburn, R. (2012). Strategies Used by Students to Compare Two Data Sets. In 35th Annual Meeting of the Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA).

Rubin, A. & Gould, R. (2023). Introduction. In G. F. Burrill, L. de Oliveria Souza & E. Reston (Hrsg.), *Research on Reasoning with Data and Statistical Thinking: International Perspectives* (S. 1–8). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-031-29459-4_1

Schreiter, S., Friedrich, A., Fuhr, H., Malone, S., Brünken, R., Kuhn, J. & Vogel, M. (2024). Teaching for statistical and data literacy in K-12 STEM education: a systematic review on teacher variables, teacher education, and impacts on classroom practice. *ZDM – Mathematics Education*, *56*(1), 31–45. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01531-1

Schreiter, S. & Vogel, M. (2023). Eye-tracking measures as indicators for a local vs. global view of data. *Frontiers in Education*, *7*, Artikel 1058150. https://doi.org/10.3389/feduc.2022.1058150

Schreiter, S. & Vogel, M. (2024). Students' local vs. Global views of data distributions: A cross-grade-level analysis using eye-tracking. *Educational Studies in Mathematics.* https://doi.org/10.1007/s10649-024-10352-2

Schüller, K., Busch, P. & Hindinger, C. (2019). *Future skills: ein framework für data literacy*. https://hochschulforumdigitalisierung.de/sites/default/files/dateien/hfd_ap_nr_47_dali_kompetenzrahmen_web.pdf

Sill, H.-D. & Kurtzmann, G. (2019). *Didaktik der Stochastik in der Primarstufe*. Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-59268-7

Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München (Hrsg.). (2021). *LehrplanPLUS Gymnasium: Mathematik*. https://www.lehrplanplus.bayern.de/

Statistisches Bundesamt. (3. November, 2024). Anzahl der Schülerinnen und Schüler an Schulen in Deutschland im Schuljahr 2023/2024 nach Bundesländern [Graph]. In Statista. Zugriff am 25. März 2025, von https://de.statista.com/statistik/daten/studie/1321/umfrage/anzahl-der-schueler-an-allgemeinbildenden-schulen/

Vamvakoussi, X., Vosniadou, S. & van Dooren, W. (2013). The Framework Theory Approach Applied to Mathematics Learning. In S. Vosniadou (Hrsg.), *Educational psychology handbook series. International Handbook of Research on Conceptual Change // International handbook of research on conceptual change* (2. Auflage, S. 305–321). Routledge.

vom Hofe, R. (1992). Grundvorstellungen mathematischer Inhalte als didaktisches Modell. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *13*(4), 345–364. https://doi.org/10.1007/BF03338785

vom Hofe, R. & Roth, J. (2023). Grundvorstellungen aufbauen. *mathematik lehren, 236*, 2–7.

Vosniadou, S. (2013). Conceptual Change in Learning and Instruction : The Framework Theory Approach. In S. Vosniadou (Hrsg.), Educational psychology handbook series. International Handbook of Research on Conceptual Change // International handbook of research on conceptual change (2. Auflage, S. 11–30). Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203154472-3

Wolff, A., Gooch, D., Cavero Montaner, J. J., Rashid, U. & Kortuem, G. (2016). Creating an Understanding of Data Literacy for a Data-driven Society. *The Journal of Community Informatics*, *12*(3). https://doi.org/10.15353/joci.v12i3.327

Anschrift der Verfasser:innen

Ayline Heursen
Pädagogische Hochschule Heidelberg
Institut für Mathematik
Im Neuenheimer Feld 561
69120 Heidelberg
heursen@ph-heidelberg.de

Saskia Schreiter
Pädagogische Hochschule Schwäbisch Gmünd
Institut für Mathematik und Informatik
Oberbettringer Str. 200
73525 Schwäbisch Gmünd
saskia.schreiter@ph-gmuend.de

Markus Vogel
Pädagogische Hochschule Heidelberg
Institut für Mathematik
Im Neuenheimer Feld 561
69120 Heidelberg
vogel@ph-heidelberg.de