Eine Praktik der Aufgabenbearbeitung von Lehramtsstudierenden zur Folgenkonvergenz in der Analysis I: Die Vernetzung von Definition, graphischer Darstellung und Vorstellung

NINA UTSCH, GIEßEN

***Zusammenfassung**: In einer an der JLU Gießen durchgeführten Studie mit 26 Lehramtsstudierenden wurde untersucht, welche Vernetzung von Concept Image und Concept Definition in Aufgabenbearbeitungen zur Folgenkonvergenz sichtbar werden. Dabei haben sich verschiedene Praktiken identifizieren lassen, die auf eine solche Vernetzung hinweisen. Mit Praktiken sind keine einzelnen, individuellen Herangehensweisen gemeint, sondern ein umfassenderes, in der Untersuchungsgruppe geteiltes Bündel von Aktivitäten. Im Beitrag wird als Forschungsergebnis eine von den Studierenden besonders aktivierte Praktik der Vernetzung von Concept Image und Concept Definition thematisiert: Die Vernetzung der Definition mit graphischen Darstellungen und Vorstellungen.*

***Abstract:** This paper explores how students connect their concept image with the concept definition in task assignments and reports on a study in which 26 university calculus students solve four exercises on convergence of sequences. In the process, different practices were identified that indicate such interplay. Practices do not refer to individual approaches, but to a more comprehensive set of activities shared within the sample group. As a result of the research, the article focuses on a practice of connection concept image and concept definition that was particularly activated by the students: The interplay of conceptions, visual representations and the formal concept definition.*

1. Einleitung

In Aufgabenbearbeitungen von Studierenden fällt auf, dass ihnen eine formale Bearbeitung häufig Schwierigkeiten bereitet (z. B. Frischemeier, Panse & Pecher, 2016). Es wird vorausgesetzt, dass sie die Definitionen und Sätze des Vorlesungsskriptes in ihren Aufgabenbearbeitungen angemessen verwenden. Andererseits wird erwartet, dass Studierende des Lehramts Mathematik tragfähige Vorstellungen zu den behandelten Begriffen aufbauen, damit sie diese in der Schule angemessen propädeutisch anbahnen können (z. B. Bender, 1991; Greefrath et al., 2016). Für das Themenfeld Folgen und Grenzwerte konnte Ostsieker (2020) zeigen, dass Studierende des Bachelorstudiengangs Mathematik und des gymnasialen Lehramts nach der formalen Einführung in der Vorlesung noch nicht-tragfähige Vorstellungen haben. Häufig wird vermutet, dass die Vorstellungen der Lernenden beziehungsweise ihr *Concept Image* nicht zu der Definition des Begriffs passt (z. B. Tall & Vinner, 1981). Es stellt sich daher die Frage, inwiefern Studierende ihre Vorstellungen bzw. ihr *Concept Image* beim Bearbeiten von Übungsaufgaben nutzen und mit der formalen Arbeit mit Definitionen und Sätzen verbinden. Dies wurde in einer qualitativen Studie an der JLU Gießen für das Themenfeld Folgen und Grenzwerte systematisch untersucht.

Der Forschungsprozess zur Beantwortung der oben formulierten Frage wird im Beitrag dargestellt: Zunächst wird eine Adaption der Theorie von *Concept Image* und *Concept Definition* nach Tall und Vinner (1981) vorgestellt, die als theoretischer Hintergrund der Arbeit dient. Nach einem kurzen Überblick über den fachdidaktischen Forschungsstand folgen das Forschungsanliegen und das methodische Vorgehen der Studie. Anschließend werden die Ergebnisse vorgestellt und Konsequenzen für die Lehre diskutiert.

2. Theorie von *Concept Image* und *Concept Definition*

Tall und Vinner (1981) beobachteten, dass Assoziationen von Studierenden häufig nicht in Einklang mit der formalen Definition stehen. Teilweise existieren bei den Lernenden bereits vor der formalen Einführung der Begriffe in Schule oder Hochschule komplexe kognitive Strukturen, die mit einem Begriff verbunden werden, aber nicht zwingend zur formalen Definition passen. Diese kognitive Struktur kann mentale Bilder, Eigenschaften oder Prozesse zu dem Begriff enthalten und sich bei Stimuli verändern. Tall und Vinner (1981) führen für diese Strukturen den Begriff des *Concept Images* ein und beschreiben diesen folgendermaßen:

> We shall use the term *concept image* to describe the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes. (Tall & Vinner, 1981, S. 152)

Mit der *Concept Definition* beschreiben Tall und Vinner (1981) eine Form von Wörtern, die den Begriff spezifizieren, und führen die *Concept Definition* wie folgt ein:

> We shall regard the *concept definition* to be a form of words used to specify that concept. It may be learnt by an individual in a rote fashion or more meaningfully learnt and related to a greater or lesser degree to the concept as a whole. (Tall & Vinner, 1981, S. 152)

Die Autoren unterscheiden zwischen der *Personal Concept Definition* und der *Formal Concept Definition*. Mit der *Formal Concept Definition* ist eine Definition eines mathematischen Begriffs gemeint, die auch von der Gemeinschaft der Mathematiker und Mathematikerinnen akzeptiert würde. Mit der *Personal Concept Definition* beschreiben Tall und Vinner (1981) hingegen eine persönliche Rekonstruktion einer formalen Definition durch die Lernenden. Die Theorie des *Concept Images* und der *Concept Definition* findet in zahlreichen Publikationen Verwendung (für eine Übersicht vgl. Roos, 2020).

2.1 *Concept Image* und *Concept Definition* in Aufgabenbearbeitungen

Auf der Basis der obigen Theorie hat Vinner (1983; 1991) ein Modell entwickelt, um die Rolle von Definitionen beim Lernen von Mathematik zu beschreiben. Dabei bezieht sich Vinner (1983; 1991) nicht mehr auf die gemeinsam mit Tall (1981) erarbeitete Differenzierung zwischen *Formal Concept Definition* und *Personal Concept Definition* und versteht die *Concept Definition* eher im Sinne einer *Formal Concept Definition*.

Mögliche Prozesse der Aufgabenbearbeitung und den Bezug zu *Concept Image* und *Concept Definition* hat er schematisch darstellt (vgl. Abb. 1-4). Lernende können eine Aufgabe ohne Bezug zur *Concept Definition* bearbeiten (vgl. Abb. 1). Demgegenüber steht eine Bearbeitung, bei der sich ausschließlich auf die Definition des Begriffs bezogen wird (vgl. Abb. 2). Lernende können auch sowohl ihr *Concept Image* als auch die *Concept Definition* in die Aufgabenbearbeitung einbeziehen. Dies kann nacheinander geschehen (vgl. Abb. 3) oder es findet eine Wechselwirkung zwischen *Concept Image* und *Concept Definition* statt (vgl. Abb. 4) (vgl. Vinner, 1983; Vinner, 1991).

Nach Vinner (1991) ist es in der Mathematik normativ erwünscht, bei einer Aufgabenlösung die Definition des mathematischen Begriffs zu berücksichtigen. Allerdings beobachtet er, dass Lernende häufig Aufgaben bearbeiten, ohne die Definition zu beachten, da diese den Lernenden teilweise als zu kompliziert erscheint. Doch selbst wenn die Definition hilfreich erscheint, kann das *Concept Image* durch (zu) spezifische Beispiele in einem so hohen Maße geprägt sein, dass die *Concept Definition* nicht aktiviert oder sogar vergessen wird. Für den gängigsten Aufgabenbearbeitungsprozess hält Vinner (1983; 1991) daher den in Abbildung 1 dargestellten Prozess. Auch in einer Studie von Edwards und Ward (2004) wird auf das Modell von Vinner (1991) zurückgegriffen. Die Autoren vermuten, dass sich Studierende bei Aufgaben zur Gruppentheorie auf die *Concept Definition* beziehen müssten, da sie die in der Gruppentheorie verwendeten Begriffe nicht aus der Schule kennen und keine nicht-tragfähigen Vorstellungen zu den Begriffen existieren dürften. Die Autoren wurden überrascht, denn in ihrer Studie lösten die Studierenden auch die Aufgaben zur Gruppentheorie mit Bezug zu ihrem *Concept Image*. Alcock und Simpson (2004) beschreiben ebenfalls eine Gruppe von Studierenden, die Vorstellungen und mentale Bilder haben, sich aber in Aufgabenbearbeitungen ausschließlich auf diese stützen und die Definitionen der Begriffe in ihren Argumentationen kaum oder gar nicht verwenden. Auch diese Studierenden scheinen das eigene *Concept Image* nicht ausreichend mit der *Concept Definition* vernetzt zu haben.

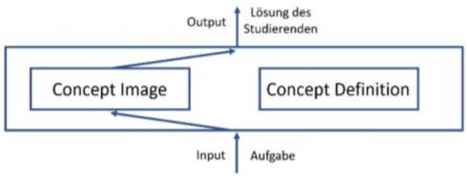

Abb. 1: Bearbeitung mit Bezug zum *Concept Image*

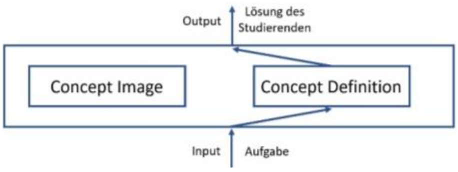

Abb. 2: Bearbeitung mit Bezug zur *Concept Definition*

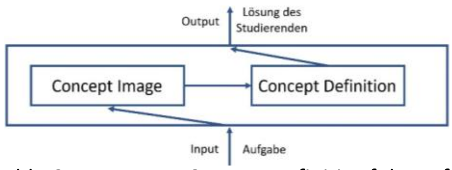

Abb. 3: Bezug zu *Concept Definition* folgt auf Bezug zu *Concept Image*

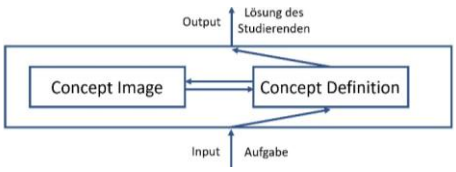

Abb. 4: Zusammenspiel von *Concept Image* und *Concept Definition*

(Abb. 1 – 4: eigene Darstellung nach Vinner (1983, 1991))

2.2 Adaption der Theorie von *Concept Image* und *Concept Definition*

Um zu beschreiben, inwiefern Studierende des Lehramts Mathematik ihr *Concept Image* in Aufgabenbearbeitungen zur Folgenkonvergenz nutzen, müssen zunächst auf theoretischer Ebene mögliche Bestandteile des *Concept Images* identifiziert werden. Erst dann ist es möglich, diese Bestandteile in den Aufgabenbearbeitungsprozessen der Studierenden zu analysieren.

Roos (2020) und Klinger (2019) beschreiben beispielsweise Vorstellungen als Teil des *Concept Images* und grenzen die Theorie von *Concept Image* und *Concept Definition* von der Grundvorstellungstheorie ab. Durch die Vernetzung mit weiteren mathematikdidaktischen Theorien wie der Begriffsbildungstheorie (Weigand, 2018) können dem theoretischen Konstrukt des *Concept Images* die folgenden Bestandteile zugeordnet werden (vgl. Abb. 5): Vorstellungen (Klinger, 2019; Roos, 2020), Beispiele (Roos, 2020), verwandte Begriffe und Eigenschaften (Weigand, 2018), graphische und numerische Darstellungen (Viholainen, 2008).

Auch das Konstrukt der *Concept Definition* muss auf theoretischer Ebene präzisiert werden, um den Umgang der Studierenden mit mathematischen Definitionen und Sätzen untersuchen zu können. Tall und Vinner (1981) berücksichtigen in ihrer Theorie formale Aufgabenbearbeitung mit Bezug zur *Formal Concept Definition*. Durch die schematischen Darstellungen Vinners (1983; 1991) lässt sich ein deduktives Schließen mit Bezug zu mathematischen Sätzen, die die Studierenden in der Veranstaltung bereits bewiesen haben, nicht abbilden. Das Konstrukt der *Concept Definition* muss folglich ergänzt werden, um weitere formale Handlungen beschreiben zu können. Auch Viholainen (2008) erweitert die Theorie und sieht die *Formal Concept Definition* als Teil eines *Formal Axiomatic System* an, welches er wie folgt beschreibt: „This system consists of axioms, definitions, undefined elementary concepts (e.g., a point and a line in geometry), rules of logic, and mathematical language, and it forms an institutionalized way of understanding mathematics“ (Viholainen, 2008, S. 233). Die Überlegungen von Viholainen (2008) werden aufgegriffen und noch weiter ergänzt, da auch der Umgang mit mathematischen Sätzen eine formale deduktiv schließende Aufgabenbearbeitung ermöglicht. Eine kalkülhafte Anwendung von mathematischen Sätzen ist also ebenfalls einer formalen Ebene zuzuordnen. Das Konstrukt der *Concept Definition* wird daher in diesem Artikel in eine *Concept Definition im engeren Sinne* und eine *Concept Definition im weiteren Sinne* untergliedert. Die *Concept Definition im engeren Sinne* meint den Umgang mit der *Formal Concept Definition* im Sinne von Tall und Vinner (1981). Mit der *Concept Definition im weiteren Sinne* können weitere formale Aktivitäten der Studierenden beschrieben werden, wie das Verwenden von Sätzen des Vorlesungsskriptes, der schriftliche Umgang mit Quantoren und algebraischen Ausdrücken oder der Umgang mit der Definition verwandter Begriffe (vgl. Abb. 5, vgl. Utsch & Lengnink, in Druck).

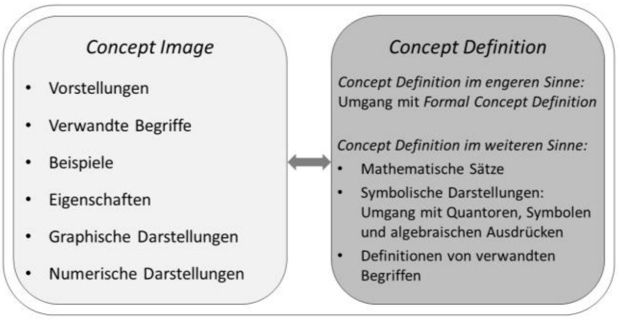

Abb. 5: Übersicht der Theorieadaption

Erst jetzt ist es möglich, zu beschreiben, inwiefern sich Studierende während des Bearbeitens von Aufgaben auf ihr *Concept Image* oder auf die *Concept Definition (im engeren oder weiteren Sinne)* beziehen und eine Verbindung zwischen den in Abbildung 5 dargestellten Teilen herstellen.

2.3 Nutzen der Verbindung von *Concept Image* und *Concept Definition* für das Lernen

Die oben zitierten Studien von Vinner (1983; 1991), Edwards und Ward (2004) sowie Alcock und Simpson (2004) legen nahe, dass viele Studierende Aufgaben mit Bezug zu ihrem *Concept Image* bearbeiten, obwohl eine formale Bearbeitung mit Bezug zur *Formal Concept Definition* erwartet wird. Es scheint also, als seien *Concept Image* und *Formal Concept Definition* bei Studierenden oft unverbunden. Welche Vorteile eine Vernetzung von *Concept Image* und *Concept Image* und *Concept Definition (im engeren und weiteren Sinne)* haben kann, wird im Folgenden erläutert:

1) Eine Verbindung von *Concept Image* und *Concept Definition (im engeren und weiteren Sinne)* kann das Bearbeiten von Übungsaufgaben unterstützen. Für viele Studierenden stellt die formale Bearbeitung von Übungsaufgaben besonders zu Beginn des Studiums eine große Herausforderung dar (z. B. Frischemeier, Panse & Pecher, 2016). Haben Studierende ein angemessenes *Concept Image* aufgebaut, können sie zunächst mithilfe dessen eine Vermutung

äußern oder eine Lösungsidee entwickeln. Wenn ihr *Concept Image* dann mit der *Concept Definition (im engeren und weiteren Sinne)* vernetzt ist, so kann dies den Studierenden ermöglichen, ihre Lösungsidee zu einer formalen Aufgabenbearbeitung auszubauen. Ein Zusammenspiel von *Concept Image* und *Concept Definition (im engeren und weiteren Sinne)* kann also den Aufgabenbearbeitungsprozess unterstützen. Ein solcher Aufgabenbearbeitungsprozess würde in dem Modell von Vinner (1983; 1991) wie in Abbildung 3 oder 4 dargestellt werden.

2) Auch im weiteren Verlauf des Studiums kann eine Vernetzung von *Concept Image* und *Concept Definition (im engeren und weiteren Sinne)* hilfreich sein. Gelernte Inhalte können möglicherweise leichter mit unbekannten Inhalten vernetzt werden, wenn zuvor ein breites und tragfähiges *Concept Image* aufgebaut und dieses mit der *Concept Definition (im engeren und weiteren Sinne)* vernetzt wurde. Eine Vernetzung der Grenzwertdefinition mit tragfähigen Vorstellungen, wie der Annäherungsvorstellung und der Umgebungsvorstellung (vgl. Abschnitt 3), könnte zum Beispiel das Erlernen der *Formal Concept Definition* von Stetigkeit und die Vernetzung mit einem angemessenen *Concept Image* zur Stetigkeit vereinfachen. Auch beim Erarbeiten der Definitionen des Ableitungs- und des Integralbegriff und der Vernetzung mit einem jeweils angemessenen *Concept Image* können tragfähige Vorstellungen zum Grenzwertbegriff helfen. In der Studie von Edwards und Ward (2004) zum Lernen von Begriffen aus der Gruppentheorie zeigte sich, dass das *Concept Image* zu einem Begriff, den die Studierenden bereits kennengelernt haben, auch das Lernen von neuen Begriffen beeinflussen kann. Obgleich es ein anderes mathematischen Feld betrifft, kann auch für die Analysis vermutet werden, dass das Lernen eines neuen Begriffs durch ein bestehendes *Concept Image* geprägt werden kann. Es liegt daher nahe, dass eine Vernetzung von *Concept Image* und *Concept Definition (im engeren und weiteren Sinne)* für das Themenfeld Folgen und Grenzwerte auch für das Lernen weiterer Inhalte hilfreich sein kann.

3) Ein weiterer Nutzen der Verbindung von *Concept Image* und *Concept Definition (im engeren und weiteren Sinne)* ergibt sich mit Blick auf den schulischen Mathematikunterricht: Angehende Lehrkräfte benötigen gut ausgebildete Vorstellungen zu mathematischen Begriffen, um diese bei ihren späteren Schüler:innen ausbilden zu können. Andernfalls besteht die Gefahr, dass durch ungeeignete Formulierungen im Unterricht nicht-tragfähige Vorstellungen bei Schülerinnen und Schülern erzeugt werden, die einer adäquaten Weiterentwicklung des Begriffsverständnisses im Wege stehen (vgl. Bender, 1991).

Hahn und Prediger (2008) beschreiben für die Kurvendiskussion, dass diese ohne den Aufbau von inhaltlichen Vorstellungen zu einem mechanischen Abarbeiten von Schemata führt. Überträgt man diesen Befund, so besteht die Gefahr, dass Beweise oder andere formale Operationen ebenfalls als inhaltsleere Schemata abgespeichert werden und ohne inhaltliche Vorstellungen schnell wieder vergessen werden. Auch bei ihren zukünftigen Schüler:innen sollen die Studierenden daher eine Vernetzung von inhaltlichen Vorstellungen als Teil des *Concept Images* mit formalen Operationen und der *Concept Definition (im engeren und weiteren Sinne)* fördern. Damit dies gelingen kann, müssen zunächst die Studierenden solche Vernetzungen herstellen können.

3. Vorstellungen zu Folgen und Grenzwerten

Um das *Concept Image* von Studierenden angemessen beschreiben zu können, müssen unter anderem die Vorstellungen der Lernenden analysiert werden. In der Literatur sind sowohl Grundvorstellungen als auch verschiedene mathematisch nicht-tragfähige Vorstellungen zum Grenzwert beschrieben. Diese werden im Folgenden kurz dargestellt.

3.1 Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff

Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriffs, die bei Lernenden ausgebildet werden sollen, sind insbesondere die Annäherungsvorstellung und die Umgebungsvorstellung (vgl. Greefrath et al., 2016). Auf die Objektvorstellung (vgl. ebd.) wird in diesem Artikel nicht eingegangen, da sich diese in den Daten dieser Studie nicht rekonstruieren lässt. Die Annäherungsvorstellung beschreibt das „Zustreben oder Annähern der Werte der Folgeglieder an einen festen Wert“, den Grenzwert (Greefrath et al., 2016, S. 105). Können die Lernenden den Prozess des Zustrebens der Werte der Folgenglieder an den Grenzwert in graphischen und numerischen Darstellungen erkennen, weist dies auf eine Annäherungsvorstellung hin. Da die Annäherungsvorstellung auf der Vorstellung des sukzessiven Durchlaufens der Folge aufbaut, wird hier eine dynamische Sicht auf den Grenzwertbegriff betont (vgl. ebd.).

Wenn die Definition des Grenzwertes betrachtet wird, dann legt dies eine eher statische Sicht nahe: Im Falle der Konvergenz muss zu jeder beliebig kleinen Umgebung um den Grenzwert ein fester Wert gefunden werden, sodass ab diesem Wert alle weiteren Folgenwerte in dieser Umgebung liegen. Hier steht nicht das schrittweise Durchlaufen der Folge im Vordergrund, sondern dass zu einer beliebigen Umgebung um den Grenzwert ein fester, also statischer, Wert gesucht wird, ab dem alle weiteren Folgenglieder in der Umgebung liegen (vgl. Greefrath et al., 2016). Da der Index, ab dem alle weiteren Folgenglieder in der Umgebung um den Grenzwert liegen, von der Größe der Umgebung abhängt und diese beliebig ist, weist diese Vorstellung dennoch eine gewisse Dynamik auf, die zum Beispiel durch GeoGebra-Applets visualisiert werden kann.

3.2 Vorstellungen der Lernenden zu Folgen und Grenzwerten

Studien zeigen, dass Studierende häufig Schwierigkeiten in den Vorstellungen zu Folgen und Grenzwerten zeigen (u. a. Davis & Vinner, 1986; Vinner, 1991, Roh, 2005; Ostsieker, 2020), weswegen im Folgenden ein Überblick über die tatsächlichen Lernendenvorstellungen gegeben wird (vgl. Utsch, 2023).

Die oben genannten Autorinnen und Autoren beschreiben unter anderem die nicht-tragfähige Vorstellung, eine Folge dürfe ihren Grenzwert nicht über- oder unterschreiten. Der Grenzwert einer Folge wird von den Lernenden also als eine obere oder untere Schranke interpretiert (vgl. Davis & Vinner, 1986).

Eine weitere mathematisch nicht-tragfähige Vorstellung von Lernenden ist die Vorstellung, es existiere ein letztes Folgenglied im Sinne eines a_∞. Teilweise gehen die Lernenden davon aus, dass ein Durchlaufen von unendlich vielen Folgengliedern sie zu diesem letzten Folgenglied führe (vgl. Davis & Vinner, 1986).

Roh (2005) beschreibt außerdem die Vorstellung der Lernenden, dass in der Definition von Folgenkonvergenz zu dem Index n_ε die Größe von ε bestimmt werden müsse. Die Abhängigkeit in der Definition ist also genau umgekehrt zu der intuitiven Denkweise vieler Studierender, weswegen Roh (2005) formuliert, dass Studierende ein *reverse thinking* benötigen, um die Beziehung von ε und n_ε zu verstehen. Die Vorstellung, die Größe von ε hänge von dem Index n_ε ab, könnte durch die komplexe Quantorenstruktur der Definition verursacht werden. Dubinsky und Yiparaki (2000) weisen darauf hin, dass die Reihenfolge der Quantoren in mehrquantifizierten Aussagen Studierenden Schwierigkeiten bereiten kann.

In der Literatur ist außerdem die nicht-tragfähige Vorstellung beschrieben, eine Folge dürfe ihren Grenzwert nicht erreichen. Die Vorstellung kann dazu führen, dass Lernende konstante Folgen nicht als konvergent klassifizieren. Einige Studierende argumentieren wiederum, dass eine konstante Folge nicht konvergiere, da sich deren Folgeglieder keinem Wert annähern würden (vgl. Roh, 2005). Davis und Vinner (1986) sehen eine alltagssprachliche Deutung der Formulierung „going toward a limit" als eine mögliche Ursache für diese Vorstellung an.

Als eine weitere mögliche Ursache für das Entstehen von nicht-tragfähigen Vorstellungen wird außerdem die Auswahl von (zu) spezifischen Beispielen diskutiert (vgl. Davis & Vinner, 1986; Vinner, 1991; Alcock & Simpson, 2004; Ostsieker, 2020). Werden in einer Vorlesung überwiegend monotone Folgen behandelt, ist es nicht verwunderlich, dass das *Concept Image* der Lernenden vor allem von diesen Beispielen von Folgen dominiert wird (vgl. Tall & Vinner, 1981). In der Literatur wird empfohlen, dass bei der Einführung der Folgenkonvergenz vielfältige Beispiele thematisiert werden sollten, um ein angemessenes *Concept Image* zu fördern (z. B. Davis & Vinner, 1986; Alcock & Simpson, 2004; Ostsieker, 2020).

Wie wichtig der Aufbau von tragfähigen Vorstellungen und die Förderung eines breiten *Concept Images* ist, wird durch die Untersuchung von Ostsieker (2020) deutlich. In ihrer Studie zeigten sich nach dem Besuch einer Analysis-Vorlesung bei noch 30 % der Studierenden nicht-tragfähige Vorstellungen zum Grenzwertbegriff. Dieses Ergebnis zeigt die Dringlichkeit, die an den Universitäten übliche formale Einführung des Grenzwertbegriffs mit dem Aufbau von tragfähigen Vorstellungen zu verbinden.

4. Begriff der Praktik

Im Fokus des Artikels stehen die Vernetzungen von *Concept Image* und *Concept Definition (im engeren und weiteren Sinne),* die in der Untersuchungsgruppe geteilt werden und in verschiedenen Aufgaben auftreten. Um solche „routinisierte[n] Bündel von Aktivtäten" zu beschreiben, wird im Folgenden der Begriff der *Praktik* verwendet (Reckwitz, 2003, S. 289). In der Praxeologie wird das Phänomen untersucht, „wie es dazu kommt, dass in der sozialen Welt ‚Raum und Zeit gebunden werden', d. h. wie eine zumindest relative Reproduzierbarkeit und Repetitivität von Handlungen über zeitliche Grenzen und über räumliche Grenzen hinweg möglich wird" (ebd.). Nach Reckwitz ist die Antwort folgende:

> Die Antwort ist für die Praxistheorie darin zu suchen, dass diese ‚Handlungen' nicht als diskrete, punktuelle und individuelle Exemplare vorkommen, sondern dass sie im sozialen Normalfall eingebettet sind in eine umfassendere, sozial geteilte und durch ein implizites,

methodisches und interpretatives Wissen zusammengehaltene Praktik als ein typisiertes, routinisiertes und sozial ‚verstehbares' Bündel von Aktivitäten. (Reckwitz, 2003, S. 289)

Bezugnehmend auf die Definition des Begriffs der Praktik von Reckwitz (2003) verstehe ich unter Praktiken der Aufgabenbearbeitung Folgendes: Praktiken der Aufgabenbearbeitung beschreiben die Art und Weise, wie Studierende bei der Bearbeitung der Aufgaben vorgehen. Mit Praktiken sind keine einzelnen, individuellen Aktivitäten gemeint, sondern ein „umfassendere[s]", in der Untersuchungsgruppe „geteilte[s]" und „routinisiertes […] Bündel von Aktivitäten" (ebd.). In diesem Artikel wird eine Praktik vorgestellt, die auf eine Vernetzung von *Concept Image* und *Formal Concept Definition* hinweist.

5. Forschungsanliegen

Im Vorherigen wurde beschrieben, dass das *Concept Image* und die *Concept Definition (im engeren und weiteren Sinne)* bei Studierenden häufig unverbunden zu sein scheint (vgl. Abschnitt 2.1). Eine solche Verbindung kann für die Studierenden verschiedene Vorteile für ihr aktuelles Lernen, das Erlernen neuer Begriffe und ihren späteren Mathematikunterricht haben (vgl. Abschnitt 2.3). Mit diesem Artikel und dem Dissertationsprojekt der Autorin sollen daher mögliche Vernetzungen von *Concept Image* und *Concept Definition (im engeren und weiteren Sinne)* qualitativ beschrieben werden.

Diese Vernetzungen sollen anhand des Begriffs der Folgenkonvergenz in der Analysis I untersucht werden. Der Begriff der Folgenkonvergenz eignet sich dafür besonders, da er zum einen eine wichtige Rolle im Theorieaufbau in der Analysis spielt. Zum anderen gibt es, wie sich in Abschnitt 3 andeutet, bereits einige Untersuchungen zum Lehren und Lernen des Konvergenz- und Grenzwertbegriffs von Folgen, insbesondere zu den Vorstellungen der Lernenden. Mit der Kenntnis des fachdidaktischen Forschungsstandes kann die Vernetzung von *Concept Image* und *Concept Definition (im engeren und weiteren Sinne)* systematisch untersucht werden.

Mit dem Begriff der Praktik (vgl. Abschnitt 4) kann nun folgende Forschungsfrage formuliert werden: Welche Praktiken, die auf eine Vernetzung von *Concept Image* und *Concept Definition (im engeren und weiteren Sinne)* hinweisen, können in Aufgabenbearbeitungen von Studierenden des Lehramts Mathematik nach der Behandlung der Folgenkonvergenz in der Analysis-Veranstaltung identifiziert werden?

6. Methodisches Vorgehen

Um die oben formulierte Frage beantworten zu können, wurde eine qualitative Studie mit 26 Studierenden des Lehramts Mathematik durchgeführt. Im Folgenden wird zunächst die Datenerhebung, eine in der Studie eingesetzte Aufgabe und die Auswertungsmethode vorgestellt.

6.1 Datenerhebung

Die qualitative Studie fand im Sommersemester 2019 und Wintersemester 2019/2020 an der Justus-Liebig-Universität Gießen statt. Sieben Haupt- und Realschullehramtsstudierende und 19 Gymnasiallehramtsstudierende bearbeiteten vier mathematische Aufgaben zu Folgenkonvergenz. Alle Studierenden waren zu dem Zeitpunkt der Erhebung im dritten oder vierten Fachsemester und besuchten eine Analysis-Veranstaltung ihres Studiengangs. Die vier Aufgaben wurden in Einzelarbeit mit der Methode des lauten Denkens bearbeitet. Die Studierenden wurden also gebeten, möglichst alle Gedanken, die ihnen während der Bearbeitung durch den Kopf gehen, laut zu verbalisieren.

6.2 Aufgaben der Studie

Da in diesem Artikel Studierendenbearbeitungen zu Aufgabe 3 der Studie analysiert werden, soll lediglich diese Aufgabe vorgestellt werden. Ein Überblick aller vier in der Studie eingesetzten Aufgaben befindet sich in Utsch (2023). Die dritte Aufgabe der Studie fordert die Studierenden auf, eine Folge zu untersuchen, die durch die Permutation der Folgenglieder einer konvergenten Folge entsteht. Die zu untersuchende Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entsteht durch das Vertauschen je zweier Folgenglieder einer konvergenten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dabei wird a_1 mit a_2 getauscht, a_3 mit a_4 getauscht, a_5 mit a_6 getauscht und so weiter. Die Idee zu dieser Aufgabe stammt von Prof. Dr. Thomas Bauer. Die Aufgabe mit einem Lösungsvorschlag ist in Anhang 1 abgebildet. Entscheidend beim Lösen der Aufgabe ist die Wahl von n_ε. Wenn die Studierenden verstanden haben, dass es ein n geben kann, das kleiner als n_ε ist und für das dennoch $|a_n - a| < \varepsilon$ gilt, kann die Aufgabe gelöst werden.

Die Aufgabe eignet sich für die Studie besonders gut, da sie für die meisten Studierenden eine Problemlöseaufgabe dargestellt, für die sie zunächst eine Lösungsstrategie entwickeln müssen. Bei der Suche nach einem Lösungsweg können Einblicke in das *Concept Image* der Studierenden gewonnen werden. Die Studierenden könnten mit Beispielen von

Folgen arbeiten. Wenn die Studierenden eine Umgebungsvorstellung ausgebildet haben, könnten die Studierenden mit einer ε-Umgebung um den Grenzwert argumentieren. Eine Annäherungsvorstellung kann sich bei dieser Aufgabe ebenfalls zeigen, wenn die Studierenden darüber nachdenken, ob sich $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder Teilfolgen von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dem Wert a annähern. Wenn die Studierenden dies mit einer formalen Lösung mit Bezug zur *Formal Concept Definition* oder mathematischen Sätzen verbinden, kann sich ein Zusammenspiel von *Concept Image* und *Concept Definition (im engeren oder weiteren Sinne)* zeigen.

6.3 Auswertung

Die Studierenden wurden während der Aufgabenbearbeitung videographiert, um die Bearbeitungsprozesse mithilfe von Transkripten darzustellen. Für Aufgabe 3 wurden die Bearbeitungen von allen 26 Teilnehmenden transkribiert. Die Transkripte, die sowohl das Gesagte als auch das Geschriebene der Studierenden abbilden, wurden in einem dreistufigen Prozess ausgewertet: 1) Zuerst wurde eine strukturierende qualitative Inhaltsanalyse nach Mayring (2015) durchgeführt. 2) Die Codierung der Transkripte wurde in sogenannten Prozessmatrizen visualisiert. 3) Ausgewählte Transkripte wurden mit einem Vorgehen in Anlehnung an die Objektive Hermeneutik gemeinsam mit anderen Forschenden zeilenweise interpretiert (vgl. Oevermann et al., 1979). Der dreistufige Auswertungsprozess wird im Folgenden ausführlicher beschrieben.

Qualitative Inhaltsanalyse

Die strukturierende qualitative Inhaltsanalyse wurde ausgewählt, da mit ihr Aufgabenbearbeitungen von allen Studierenden im Hinblick auf das Zusammenspiel von *Concept Image* und *Concept Definition (im engeren oder weiteren Sinne)* untersucht werden können, was mit einem zeitintensiveren hermeneutischen Verfahren nicht möglich wäre. Der Ablauf der qualitativen Inhaltsanalyse entspricht dem von Mayring (2015) vorgeschlagenen Vorgehen. Eine Zweitcodierung durch eine eingearbeitete studentische Hilfskraft ergab eine gute Intercoderreliabilität für die Unterkategorien und eine sehr gute Intercoderreliabilität für die Kategorien (vgl. Landis & Koch, 1977). Die strittigen Fälle wurden abschließend konsensuell codiert.

Das Kategoriensystem ist in Anhang 2 und 4 abgebildet und basiert auf der Theorieadaption, die in Abschnitt 2.2 beschrieben wurde. Die theoretisch identifizierten möglichen Bestandteile eines *Concept Images* wie Vorstellungen, verwandte Begriffe, Eigenschaften, Beispiele, graphische und numerische Darstellungen wurden als Kategorien in das Kategoriensystem aufgenommen. Kategorien zum Umgang mit der *Concept Definition (im engeren oder weiteren Sinne)* befinden sich ebenfalls im Kategoriensystem (vgl. Abb. 5, siehe Anhang 2 & 4). Das Codiermanual kann über einen QR-Code in Anhang 6 heruntergeladen werden.

Visualisierung in Prozessmatrizen

Alle Codierungen der qualitativen Inhaltsanalyse wurden in Prozessmatrizen visualisiert. Die Prozessmatrix entsteht, indem das Kategoriensystem durch eine Achse erweitert wird, auf der die Codiereinheiten abgebildet sind. Die Abfolge der Codierungen wird dann in der individuellen Prozessmatrix sichtbar. In Anhang 2 und 4 sind die Prozessmatrizen von den beiden Studentinnen Ina und Uta zu Aufgabe 3 abgebildet.

Für das Erstellen der Prozessmatrizen wurde das Visualisierungstool CodeLine in der Computersoftware MAXQDA genutzt. Die Darstellung der Codierung mithilfe der CodeLine hat verschiedene Vorteile, die auch von Rädiker und Kuckartz (2019) beschrieben werden. Mithilfe der Prozessmatrix kann auf einen Blick erfasst werden, auf welche Teile von *Concept Image* und *Concept Definition (im engeren oder weiteren Sinne)* sich Studierende während der Aufgabenbearbeitung beziehen. Die Prozessmatrizen können genutzt werden, um den Verlauf der Codierungen zu untersuchen, was Einblicke in den Verlauf der Bezüge zu *Concept Image* und *Concept Definition (im engeren oder weiteren Sinne)* ermöglicht. Die Prozessmatrizen können außerdem auf mögliche strukturelle Besonderheiten im Aufgabenbearbeitungsprozess hinweisen. Die gleichzeitige Codierung von zwei Kategorien fällt in der Prozessmatrix visuell auf. Wenn Kategorien aus den Oberkategorien *Concept Image* und *Concept Definition (im engeren oder weiteren Sinne)* gleichzeitig codiert wurden, ist das ein Hinweis auf ein mögliches Zusammenspiel von *Concept Image* und *Concept Definition (im engeren oder weiteren Sinne),* was im Fokus dieser Arbeit steht. Es ist außerdem möglich, verschiedene Prozessmatrizen zu vergleichen (vgl. Rädiker & Kuckartz, 2019).

Nachdem die Prozessmatrizen von allen Studierenden zu Aufgabe 3 und für zwölf ausgewählte Studierende zu Aufgabe 2 und 4 erstellt wurden, wurden diese mithilfe von verschiedenen Leitfragen miteinander verglichen und die Studierenden in Gruppen eingeteilt. Durch die Leitfragen wurde unter anderem berücksichtigt, ob Kategorien des *Concept*

Images und der *Concept Definition (im engeren oder weiteren Sinne)* codiert wurden, ob diese gemeinsam oder im häufigen Wechsel codiert wurden und für welche Unterkategorien dies der Fall ist. Durch das Einteilen der Studierenden in Gruppen konnten mögliche Praktiken identifiziert werden, die in Abschnitt 6 vorgestellt werden.

Interpretation ausgewählter Transkripte

Für jede Studierendengruppe, die eine gemeinsame Praktik zeigt, wurden einige Studierende ausgewählt, deren Transkripte in Anlehnung an das Vorgehen der Objektiven Hermeneutik nach Oevermann et al. (1979) gemeinsam mit anderen Forschenden zeilenweise interpretiert wurden. In der Sequenzanalyse stellten mehrere Forschende möglichst umfangreiche Deutungen zu allen Elementen des Transkriptausschnitts auf. Im Sinne der diskursiven Validierung bestand die Interpretationsgruppe aus zwei bis acht Forschenden, die sich gemeinsam über ihre subjektiven Deutungen austauschten und durch eine gemeinsame Diskussion auf eine oder zwei plausible Deutungen verständigten (vgl. Kleemann et al., 2013).

In Anlehnung an den von Beretz, Lengnink und von Aufschnaiter (2017) entwickelten diagnostischen Prozess hat die Interpretationsgruppe dafür zunächst die für die Forschungsfragen relevanten *Beobachtungen* beschrieben, die nicht wertend und offen für verschiedene Deutungen sind. Erst dann konnten verschiedene *Deutungen* formuliert und diese durch Bezüge zu den zuvor beschriebenen Beobachtungen und Belegen aus den Transkripten transparent gemacht werden. Auf der Basis der Beobachtungen und Deutungen konnten gemeinsam mögliche *Ursachen* und *Fördermaßnahmen* diskutiert werden (vgl. Beretz, Lengnink & von Aufschnaiter, 2017).

Es soll dennoch betont werden, dass es sich um reine Interpretationen der Forschenden über mögliche Denkprozesse der Studierenden handelt und die tatsächlichen Denkprozesse der Studierenden für uns unsichtbar bleiben. Die Interpretationssitzungen bieten die Grundlage für die Analysen der Bearbeitungen in Abschnitt 8.

7. Ergebnisse der Analyse der Prozessmatrizen

Durch den Vergleich der Prozessmatrizen zu Aufgabe 2, 3 und 4 konnten die Studierendenbearbeitungen, deren Prozessmatrizen strukturell ähnliche Vernetzungen von *Concept Image* und *Concept Definition (im engeren oder weiteren Sinne)* zeigen, in Gruppen eingeteilt werden. Auch wenn die in der Studie eingesetzten Aufgaben unterschiedlich sind, zeigen sich strukturell in allen Aufgabenteilen ähnliche Vernetzungen von *Concept Image* und *Concept Definition (im engeren oder weiteren Sinne)*. Da diese also keine einzelnen, individuellen Aktivitäten, sondern ein in der Untersuchungsgruppe „geteilte[s]", „umfassendere[s]" und „routinisiertes Bündel von Aktivitäten" darstellen, können diese als *Praktiken der Aufgabenbearbeitung* bezeichnet werden (Reckwitz, 2003, S. 289).

In den Aufgaben 2, 3 und 4 der durchgeführten Studie zeigen sich die in Abbildung 6 dargestellten Praktiken: Es gibt Vernetzungen der *Formal Concept Definition* mit Vorstellungen und / oder graphischen Darstellungen als Teile des *Concept Images* und Vernetzungen von mathematischen Sätzen als Teil der *Concept Definition im weiteren Sinne* mit Vorstellungen, verwandten Begriffen und / oder graphischen Darstellungen als Teile des *Concept Images*. Die in Abbildung 6 dargestellten Gruppen von Studierendenbearbeitungen sind nicht disjunkt, da es einige Prozessmatrizen gibt, die Hinweise auf mehrere unterschiedliche Praktiken enthalten.

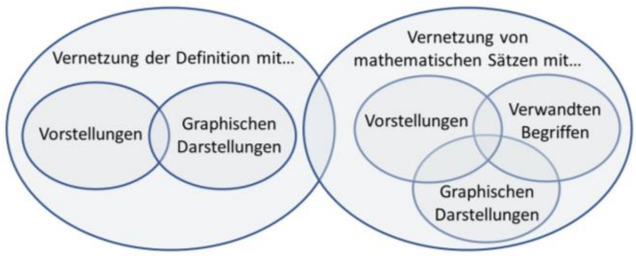

Abb. 6: Übersicht der identifizierten Praktiken

Die Praktiken lassen sich in den Prozessmatrizen durch die farbliche Markierung der Kategorien leicht unterscheiden. Um die Praktiken zu kontrastieren, sind in Abbildung 7 beispielhaft zwei Prozessmatrizen dargestellt, die auf eine Vernetzung der Definition (gelb) mit Vorstellungen (türkis) und graphischen Darstellungen (grün) hinweisen. Abbildung 8 zeigt hingegen zwei Prozessmatrizen, die auf eine Vernetzung von mathematischen Sätzen (rot) mit Vorstellungen (türkis) und verwandten Begriffen (dunkelblau) hinweisen. Alle vier Prozessmatrizen können auch über den QR-Code im Anhang heruntergeladen werden. In Anhang 2 und 4 sind außerdem zwei weitere Prozessmatrizen der Praktik *Vernetzung der Definition mit Vorstellungen und graphischen Darstellungen* abgebildet.

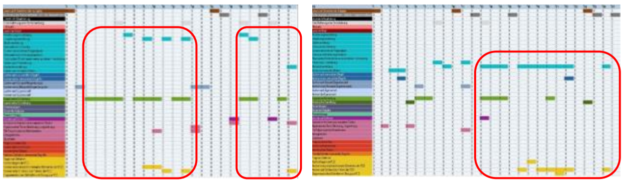

Abb. 7: Zwei Prozessmatrizen der Praktik *Vernetzungen der Definition mit Vorstellungen und / oder graphischen Darstellungen*

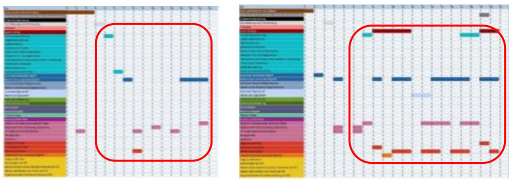

Abb. 8: Zwei Prozessmatrizen der Praktik *Vernetzungen von mathematischen Sätzen mit Vorstellungen und verwandten Begriffen*

Es ist selbstverständlich, dass sich die identifizierten Praktiken in den individuellen Bearbeitungen sehr unterschiedlich ausdifferenzieren. Um neben den strukturellen Gemeinsamkeiten der Prozessmatrizen – also den identifizierten Praktiken – die individuellen Unterschiede, mit denen die Praktiken auftreten, beschreiben zu können, ist die interpretative Analyse ausgewählter Transkripte unerlässlich. In Abschnitt 8 wird die Praktik *Vernetzung der Definition mit graphischen Darstellungen und Vorstellungen* mit Bezug zu zwei Transkripten in ihrer Tiefe vorgestellt.

8. Inhaltliche Beschreibung der Praktik *Vernetzung der Definition mit graphischen Darstellungen und Vorstellungen*

Die Praktik *Vernetzung der Definition mit graphischen Darstellungen und Vorstellungen* zeigt sich in Aufgabe 3 insgesamt in elf der 26 untersuchten Studierendenbearbeitungen. Im Folgenden soll diese Praktik in den Bearbeitungen der beiden Studentinnen Ina und Uta zu Aufgabe 3 analysiert werden, um vertiefende Einblicke in die Praktik zu geben. Wichtige Ausschnitte der Transkripte sind in Anhang 3 und 5 abgebildet. Die vollständigen Transkripte stehen über den QR-Code in Anhang 6 zum Download bereit. In Abschnitt 8.3 wird ein Bezug zu zwei weiteren Studierendenbearbeitungen hergestellt, um die Praktik zusammenzufassen.

8.1 Analyse der Bearbeitung von Ina

Im Folgenden wird die Vernetzung der Definition mit Vorstellungen und graphischen Darstellungen in der Bearbeitung von Ina zu Aufgabe 3 beschrieben, um vertiefende Einblicke in diese Praktik zu geben. Die Prozessmatrix von Ina ist in Anhang 2 abgebildet. Die Kategorien Vorstellungen, graphische Darstellungen und Umgang mit der *Formal Concept Definition* treten in der Prozessmatrix von Ina ab Codiereinheit 13 (im Folgenden abgekürzt mit C. 13) gemeinsam oder im häufigen Wechsel auf, was auf eine Vernetzung hinweist (siehe Anhang 2). Inwiefern Ina an diesen Stellen der Bearbeitung ihr *Concept Image* tatsächlich mit der *Formal Concept Definition* vernetzt, wird in diesem Abschnitt mit Bezug zu Transkriptausschnitten analysiert. Inas graphische Darstellungen sind in Abbildung 9 und 10 und ausgewählte Ausschnitte des Transkripts in Anhang 3 dargestellt. Das gesamte Transkript kann mit dem QR-Code in Anhang 6 heruntergeladen werden.

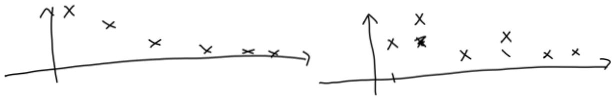

Abb. 9: Graphische Darstellungen von Ina zu Aufgabe 3

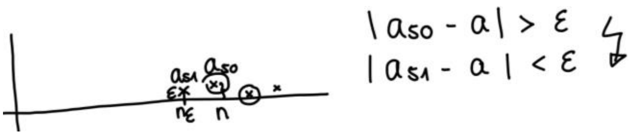

Abb. 10: Notizen von Ina zu Aufgabe 3

Zum *Concept Image* von Ina

Ina zeigt während der Aufgabenbearbeitung verschiedene Vorstellungen zur Folgenkonvergenz. Eine Vorstellung, die sich besonders deutlich zeigt, ist eine Vorstellung, die im Folgenden als Abstandsvorstellung bezeichnet wird. Die Abstandsvorstellung beschreibt die Vorstellung, dass zu jedem beliebigen $\varepsilon > 0$ ein Index n_ε gefunden werden kann, ab dem der Abstand aller weiteren Folgenglieder zum Grenzwert kleiner als ε ist (vgl. Utsch, 2023). Ina spricht während ihrer Bearbeitung sehr häufig von Abständen zwischen Folgengliedern und dem Grenzwert und vergleicht diesen Abstand mit dem „Abstand Epsilon" (vgl. Anhang 3, C. 20). Insgesamt fällt der Begriff des Abstandes 18 Mal in ihrer Bearbeitung von Aufgabe 3. Die Konvergenz der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ begründet sie zu Beginn der Aufgabenbearbeitung intuitiv damit, dass „im Unendlichen […] der Abstand immer kleiner wird" (vgl. Anhang 3, C. 8-9). Studierende mit einer Abstandsvorstellung wie Ina interpretieren also den Term $|a_n - a|$ aus der Definition von Folgenkonvergenz geometrisch und überprüfen, ob für jedes beliebige $\varepsilon > 0$ ab einem bestimmten Folgenglied a_{n_ε} der Abstand aller weiteren Folgenglieder zum Grenzwert kleiner als ε ist. In Abbildung 10 visualisiert Ina den Abstand zwischen je einem Folgenglied a_n und dem Grenzwert Null durch vertikale Linien. In Abgrenzung dazu zeichnen Studierende mit einer Umgebungsvorstellung (vgl. Greefrath et al., 2016) meist eine oder zwei horizontale Linien bei den Werten $a + \varepsilon$ und $a - \varepsilon$, um eine beliebig große Umgebung um den Grenzwert zu visualisieren. Eine Umgebung um den vermuteten Grenzwert wird von Ina nicht visualisiert. Hinzukommt, dass Verbalisierungen wie Umgebung, Tunnel, Schlauch oder Streifen nicht verwendet werden. Es ist folglich davon auszugehen, dass Ina in dieser Bearbeitung eine Abstandsvorstellung, aber keine Umgebungsvorstellung zeigt. Im Zusammenhang mit der Abstandsvorstellung steht der Begriff des „Mindestabstandes“, den Ina mehrfach, beispielsweise in Codiereinheit 18, verwendet (vgl. Anhang 3). Diese ungewöhnliche Formulierung kann zum einen folgendermaßen gedeutet werden: Ina möchte beschreiben, dass Folgenglieder mit $n \geq n_\varepsilon$ im Falle der Konvergenz mindestens so nah an dem Grenzwert sein müssen wie der Abstand ε. Zum anderen ist möglich, dass Ina einen Höchstabstand meint. In Codiereinheit 18 spricht Ina über einen Mindestabstand und in Codiereinheit 19 ersetzt sie in einer ähnlichen Formulierung den Begriff des Mindestabstandes durch „Epsilon“ (vgl. Anhang 3). Das weist darauf hin, dass sie mit dem Begriff des Mindestabstandes einen Abstand mit Größe ε meint.

Eine weitere Vorstellung, die sichtbar wird, ist die Vorstellung, die im Folgenden als „im Unendlichen“-Vorstellung bezeichnet wird. Studierende mit dieser Vorstellung betonen, dass sie das Verhalten der Folge im Unendlichen prüfen, um zu einer Einschätzung bezüglich des Konvergenzverhaltens zu kommen. Die Vorstellung wird in der folgenden Aussage von Ina sichtbar: „Also, dass es vielleicht am Anfang. Also das ist ja so, dass es am Anfang noch extremere Ausschläge gibt. Also dass man hier wirklich den Unterschied zwischen den Folgegliedern hier (zeigt paarweise auf die vertauschten Folgenglieder der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$) extrem erkennt, aber im Unendlichen würde ich jetzt sagen, dass es beides gegen a konvergiert“ (vgl. Anhang 3, C. 8). Unklar bleibt, was Ina mit „beides“ meint. Möglicherweise meint Ina die beiden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Auch möglich wäre, dass Ina intuitiv über Teilfolgen nachdenkt und die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in die beiden Teilfolgen $(b_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(b_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ einteilt. In ihrer Äußerung scheint es aber insgesamt so, als würde Ina die Folge in mehrere Abschnitte untergliedern und wissen, dass die ersten endlich vielen Folgenglieder, also in ihren Worten die Folgenglieder „am Anfang“, zur Beurteilung des Konvergenzverhaltens zu vernachlässigen sind. Sie setzt den Fokus auf das langfristige Verhalten der Folge, um die Konvergenz zu beurteilen.

Weitere Einblicke in das *Concept Image* von Ina können durch ihre graphischen Darstellungen gewonnen werden. Diese sind in Abbildung 9 und 10 abgebildet. Ina stellt verschiedene Folgen in einem zweidimensionalen Koordinatensystem dar. Es kann festgehalten werden, dass Ina als Beispiel für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton-fallende und durch Null beschränkte Folge wählt (siehe Abb. 9). In Abschnitt 3 wurde beschrieben, dass monotone und beschränkte Folgen häufig ein Prototyp für konvergente Folgen sind (vgl. Davis & Vinner, 1986; Vinner, 1991; Alcock & Simpson, 2004; Ostsieker, 2020).

Zur Verwendung der *Concept Definition*

Ina überlegt, wie sie die Konvergenz der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beweisen könnte. Dafür bezieht sie sich ab Codiereinheit 13 immer wieder auf die Definition von Folgenkonvergenz (vgl. Anhang 3). ε wird von Ina angemessen als ein Vergleichsmaß für den Abstand der Folgenglieder zum Grenzwert oder als eine obere Schranke für den Abstand der Folgenglieder zum Grenzwert gedeutet. Dass Epsilon beliebig ist, also auf die Bedeutung des Allquantors, geht Ina allerdings nicht ein.

In Codiereinheit 17 spricht Ina über den Index n_ε: „Wenn ich mir die Definition anschaue und noch einmal genauer überlege, finde ich ja ein n Epsilon für das ich ein n finde, was dann einen kleineren Abstand hat zu dem Grenzwert als Epsilon aber ja nicht für jedes n“. Ina beschreibt, dass sie ein n_ε „finde[n]“ kann. Es ist daher davon auszugehen, dass sie also ein von ε abhängiges n_ε finden möchte. Hier deutet sich ein *reverse thinking* nach Roh (2005) an, da Ina im Gegensatz zu der von Roh (2005) beschriebenen intuitiven Interpretation der Definition vieler Studierender nicht zuerst ein n_ε wählt und anschließend ein davon abhängiges ε bestimmt. Würde Ina zuerst n_ε wählen, würde sie vermutlich nicht das Verb „finden“ verwenden. Auch in ihrer graphischen Darstellung in Abbildung 10 zeichnet Ina zuerst den Abstand des Folgenglieds a_{51} zum Grenzwert als vertikale Linie ein und beschriftet diese mit „ε“. Erst danach markiert sie den Index und notiert „n_ε“, was ebenfalls dafürspricht, dass Ina weiß, dass die Wahl des Index n_ε von ε abhängt.

Auch die Beziehung von n_ε und n beschreibt Ina mathematisch passend. Durch die oben zitierte Äußerung wird sichtbar, dass Ina weiß, dass im Falle der Konvergenz, ein (von ε abhängiger) Index existiert, ab dem dann alle weitere Folgenglieder einen kleineren Abstand haben als ε. Ina spricht in der Äußerung von Abständen von n zum Grenzwert. Es ist aber davon auszugehen, dass sie Abstände der Folgenglieder zum Grenzwert meint, da auch diese in der graphischen Darstellung visualisiert werden. Das

Sprechen über den Abstand zeigt, dass sie den Ausdruck $|a_n - a|$ in der Definition geometrisch interpretieren kann.

In der Bearbeitung von Ina zeigt sich allerdings eine zentrale Lernhürde in Bezug auf die Definition: Ina bestimmt den Index n_ε an einer Stelle, an der das Folgenglied einen geringeren Abstand zum Grenzwert als ε hat. Dann fordert sie, dass auch alle weiteren Folgenglieder mit $n \geq n_\varepsilon$ einen geringeren Abstand zum Grenzwert als ε haben müssten. Diese Lernhürde führt für Ina zu einem Widerspruch zwischen ihrem Verständnis der *Formal Concept Definition* einerseits und ihrer graphischen Darstellung andererseits, was zeigt, dass diese nicht unverbunden sind. Sie äußert dies folgendermaßen: „Oder was sich jetzt hier als Problem herausstellt ist, dass jetzt, wenn ich mir die Definition anschaue und das jetzt mal aufmale (zeichnet Koordinatensystem) und das hier jetzt so ist (beginnt die graphische Darstellung aus Abbildung 10 zu zeichnen) und es immer ein Folgeglied gibt, das da hinten dran einen größeren Abstand zum Grenzwert hat, passt das ja nicht mehr mit der Definition von der Konvergenz (zeigt mit Finger auf Definition) überein“ (vgl. Anhang 3, C. 13). Ina geht also von einem an dieser Stelle fixierten Index n_ε aus, den sie nicht flexibel wählen darf. Ihr fehlt an dieser Stelle die Idee, den Index n_ε so zu wählen, dass der Abstand der Folgenglieder zum Grenzwert für alle Folgenglieder mit $n \geq n_\varepsilon$ kleiner als Epsilon ist. In Abbildung 10 ist sichtbar, dass eine Verschiebung von n_ε um zwei Stellen Inas Problem lösen würde. Auch die oben beschriebene Verwendung des Verbes „finden“ deutet daraufhin, dass Ina denkt, den Index n_ε nicht selbst passend wählen zu dürfen, sondern ein fixiertes n_ε „finde[n]“ zu müssen. Dieses nicht-passende Verständnis der Definition könnte folgende Ursachen haben: Ina könnte den Index n_ε als diejenige Stelle deuten, an der ein Folgenglied erstmals einen geringeren Abstand als ε hat. Das könnte verbunden sein mit der Vorstellung einer funktionalen Abhängigkeit des Index n_ε von ε. In der graphischen Darstellung würde sich diese Vorstellung wie bei Ina zeigen, indem n_ε genau an der Stelle eingezeichnet ist, an der ein Folgenglied erstmals einen geringeren Abstand als ε hat. Eine weitere mögliche Ursache könnte sein, dass Ina den Index n_ε der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ab dem alle Folgenglieder a_n mit $n \geq n_\varepsilon$ einen kleineren Abstand zum Grenzwert als ε haben, auch für die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ übernimmt. Die Folgenglieder der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ haben aber, wie in Anhang 1 gezeigt, erst ab dem Index ${n_\varepsilon}^* = n_\varepsilon + 1$ einen kleineren Abstand zum Grenzwert als ε. Eine mögliche Ursache für Inas Verständnis eines fixierten Index n_ε könnte also sein, dass sie davon ausgeht, die Stelle, ab der alle weiteren Folgenglieder einen kleineren Abstand zum Grenzwert als ε haben, müsse für die beiden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ identisch sein. Es gibt allerdings im Transkript keine Hinweise darauf, dass Ina den Index n_ε der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ betrachtet, weswegen die oben beschriebene Ursache für wahrscheinlicher gehalten wird.

Beide möglichen Ursachen können mit einem Nichtbeachten oder nicht-tragfähigem Verständnis der Quantoren in der Definition zusammenhängen. Der Existenzquantor vor dem Index n_ε in der Definition von Folgenkonvergenz beschreibt, dass es im Falle der Konvergenz nur irgendeine Stelle geben muss, ab der alle weiteren Folgenglieder einen kleinen Abstand zum Grenzwert als ε haben müssen. Dass Ina von einem fixierten n_ε ausgeht und dieses nicht flexibel wählt, zeigt, dass sie Existenzquantor vor dem Index n_ε in der Definition nicht beachtet oder nicht richtig interpretiert.

Dass Ina diese Schwierigkeit nicht überwinden kann, zeigt, wie stabil ihr Verständnis eines fixierten Index n_ε ist. Sie versucht dieses Problem zu lösen, indem sie sich immer wieder auf ihre Vorstellungen, ihre graphischen Darstellungen und ihr Verständnis der Definition, also ihre *Personal Concept Definition*, bezieht. Es findet folglich ein Zusammenspiel von Definition, Vorstellungen und graphischer Darstellung statt, welches im Folgenden beschrieben wird.

Zur Vernetzung der Definition mit Vorstellungen und graphischen Darstellungen

Inas Verständnis von n_ε führt zu dem Problem, das Ina in ihrer anfänglichen Vermutung, die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei konvergent, verunsichert. Diese Unsicherheit versucht sie dann zu lösen, indem sie sich immer wieder auf die *Formal Concept Definition* einerseits und ihre Vorstellungen und graphischen Darstellungen andererseits bezieht. Diese Vernetzung von *Concept Image* und *Formal Concept Definition* zeigt sich in der Prozessmatrix ab Codiereinheit 13.

Die Vernetzung von Definition und graphischer Darstellung als Teil des *Concept Images* wird besonders durch das Hinzufügen von formalen Elementen der Definition in der graphischen Darstellung sichtbar. Während Ina die graphische Darstellung erzeugt, spricht sie über Elemente der Definition wie ε, n_ε und n. ε wird in der graphischen Darstellung durch eine vertikale Linie als Abstand zwischen einem Folgenglied und dem Grenzwert visualisiert. Der Index

n_ε wird ebenfalls in der graphischen Darstellung hinzugefügt. Das zeigt deutlich, dass Ina ihre graphische Darstellung nicht losgelöst von der Definition betrachtet, sondern in der Lage ist, Elemente der Definition in ihrer graphischen Darstellung zu visualisieren und damit die Definition mit ihrer graphischen Darstellung zu vernetzen.

Auch ihre Abstandsvorstellung ist eng mit der Definition und mit ihrer graphischen Darstellung verbunden. Ina visualisiert die Abstände auch in ihrer graphischen Darstellung durch vertikale Linien. Die Abstandsvorstellung ist wie oben beschrieben eine mathematisch tragfähige Vorstellung. Zu der in der Veranstaltung behandelten formalen Definition hat Ina demnach eine tragfähige Vorstellung aufgebaut und kann den Term $|a_n - a|$ aus der Definition als Abstand deuten. Während der Aufgabenbearbeitung gelingt es ihr, ihre Abstandsvorstellung wieder in eine formale Notation zu übersetzen und notiert die von ihr angesprochenen Abstände beispielsweise durch den Term „$|a_{51} - a| < \varepsilon$“ (vgl. Anhang 3, C. 21). Hier zeigt sich eine weitere Vernetzung von *Concept Image* und *Formal Concept Definition*, da zum einen zur Definition eine Abstandsvorstellung aufgebaut wurde und zum anderen die Abstandsvorstellung während der Aufgabenbearbeitung das Erstellen einer formalen Notation unterstützt hat. Auch Inas Verständnis von n_ε wird möglicherweise erst durch ihre Vernetzung der *Formal Concept Definition* mit ihren graphischen Darstellungen sichtbar. Hätte Ina den Index n_ε formal durch einen Beweis bestimmt, wäre ihre Vorstellung eines fixierten Index n_ε vermutlich nicht sichtbar geworden. Die Vernetzung der Definition mit der graphischen Darstellung ermöglicht an dieser Stelle Einblicke in Inas Verständnis der Definition und hilft, Missverständnisse aufzudecken.

Es kann festgehalten werden, dass Ina zu dem Ausdruck „$|a_n - a| < \varepsilon$“ aus der Definition eine tragfähige Abstandsvorstellung aufgebaut hat und ihr *Concept Image* und die *Formal Concept Definition* hier verbunden werden. Die Abstände zwischen Folgengliedern und Grenzwert visualisiert Ina auch durch vertikale Linien in der graphischen Darstellung, womit der Fokus auf der vertikalen Achse liegt. Mit dem Ausdruck „$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon$“ aus der Definition kann hingegen eine Bewegung in Richtung der horizontalen Achse verbunden werden. Der Index n_ε muss in Abhängigkeit von ε in der graphischen Darstellung auf der horizontalen Achse so gewählt werden, dass für alle weiteren Folgenglieder der Abstand zum Grenzwert kleiner als ε ist. Dafür ist eine Bewegung des Index n_ε in horizontaler Richtung nötig. Während Ina die vertikale Sichtweise mehrfach durch das Sprechen über Abstände oder Einzeichnen von vertikalen Linien zeigt, fehlt in ihrer Bearbeitung die horizontale Sichtweise in Bezug auf den Index n_ε. Bezogen auf die vertikale Sichtweise konnte Ina ihr *Concept Image* folglich mathematisch passend mit dem entsprechenden Ausdruck in der *Formal Concept Definition* verbinden. Bezüglich des Index n_ε verbindet Ina zwar immer wieder ihre *Personal Concept Definition* mit ihrem *Concept Image*, ihr nicht-tragfähiges Verständnis von n_ε zeigt sich aber auf beiden Ebenen. Auch in anderen Bearbeitungen von Studierenden, die mit einer Umgebungsvorstellung eher eine horizontale Sicht haben, zeigen sich ähnliche Schwierigkeiten in Bezug auf den Index n_ε wie bei der Studentin Ina. Um zu dem Ausdruck „$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon$“ in der *Formal Concept Definition* eine mathematisch tragfähige Verbindung zum *Concept Image* zu fördern, könnte über die Unterscheidung zwischen vertikaler und horizontaler Sicht hinausgehend die Möglichkeit der freien Wahl des Index n_ε thematisiert werden. Dies könnte eine Möglichkeit darstellen, die zentrale Lernhürde von Studierenden wie Ina zu beheben.

8.2 Analyse der Bearbeitung von Uta

Um die Vernetzung der Definition mit graphischen Darstellungen und Vorstellungen in der Bearbeitung zu Aufgabe 3 von Uta analysieren zu können, wird im Folgenden ihr *Concept Image* und ihr Umgang mit der *Formal Concept Definition* analysiert. In Anhang 4 ist ihre Prozessmatrix zu Aufgabe 3 abgebildet, in der ebenfalls ein ständiger Wechsel zwischen den Kategorien *Vorstellungen*, *graphischer Darstellungen* und *Umgang mit der Formal Concept Definition* sichtbar ist. Utas graphische Darstellungen sind in Abbildung 11 und ausgewählte Transkriptausschnitte in Anhang 5 dargestellt. Auch zu ihrer Bearbeitung steht das gesamte Transkript unter dem QR-Code im Anhang zum Download bereit.

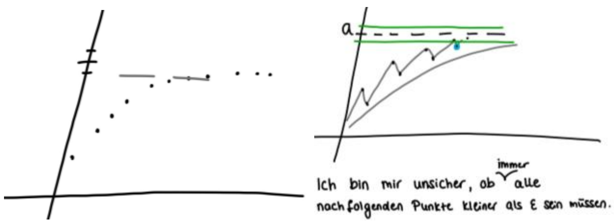

Abb. 11: Graphische Darstellungen von Uta

Zum *Concept Image* von Uta

Uta zeigt in der Bearbeitung zu Aufgabe 3 eine Umgebungsvorstellung (vgl. Greefrath et al., 2016). Sie spricht mehrmals von einem „Epsilon-Schlauch“ oder von einem „Bereich“, in dem die Folgenglieder liegen. Diese Verbalisierungen zeigen, dass Uta Folgenkonvergenz mit der Existenz einer Umgebung um den Grenzwert verbindet. Uta zeigt außerdem eine Annäherungsvorstellung (vgl. ebd.). Es wird an neun Stellen in ihrer Bearbeitung von einem „annähern", „nähern" oder „näher an dem Grenzwert lieg[en]" gesprochen. Das zeigt ihre dynamische Vorstellung von Folgenkonvergenz.

Im Zusammenhang mit der Vorstellung des Annäherns an den Grenzwert zeigt Uta allerdings eine weitere dynamische Vorstellung, die mathematisch nicht tragfähig ist. Utas Vorstellung wird in Codiereinheit 18–20 sichtbar (vgl. Anhang 5). In ihrer Äußerung wird deutlich, dass Uta Zweifel hat, ob die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, da sich die Folgenglieder nicht in jedem Schritt immer weiter an den Grenzwert annähern. Diese nicht-tragfähige Vorstellung wird im Folgenden als die „Folgenglieder kommen Grenzwert in jedem Schritt immer näher"-Vorstellung bezeichnet. Eine mögliche Ursache dieser Vorstellung könnte das häufige Arbeiten mit Beispielen von konvergenten Folgen sein, bei denen die Folgenglieder dem Grenzwert in jedem Schritt näherkommen. Dies wäre bei monotonen Folgen, aber auch bei alternierenden Folgen wie $((-1)^n \cdot \frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ der Fall. Ostsieker (2020) hat diese Vorstellung bereits im Zusammenhang mit konstanten Folgen und Folgen mit konstanten Teilfolgen beschrieben.

Auffällig ist, dass Uta einen Widerspruch zwischen diesen beiden dynamischen Sichtweisen erlebt. Zum einen beschreibt sie, dass die Folgenglieder dem Grenzwert nicht in jedem Schritt näherkommen und zum anderen fällt ihr auf, dass die Folgenglieder „aber insgesamt immer näher gegen den Grenzwert" „gehen" (C. 30). Die Annäherungsvorstellung, die sich in diesem Zitat zeigt, ist verbunden mit einer globalen Sicht auf die Folge. Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wird von Uta hier als Ganzes betrachtet. Die Vorstellung, dass die Folgenglieder dem Grenzwert nicht in jedem Schritt näherkommen, ist hingegen mit einer lokalen Sicht verbunden, da Uta nicht die Folge als Ganzes in den Blick nimmt, sondern wenige Folgenglieder betrachtet und diese vergleicht.

Eine weitere Vorstellung von Uta wird sichtbar, wenn Uta in ihrer Bearbeitung Verbalisierungen wie „weiter hinten in der Folge" verwendet (C. 16). Es scheint als würde Uta die Folge gedanklich in mehrere Abschnitte untergliedern und wissen, dass die ersten endlich vielen Folgenglieder zur Beurteilung des Konvergenzverhaltens zu vernachlässigen sind. Uta zeigt also genau wie Ina eine „im Unendlichen-Vorstellung". Ina und Uta setzen den Fokus auf das langfristige Verhalten einer Folge, um die Konvergenz zu beurteilen.

Die bereits in der Literatur beschriebene Vorstellung über die Existenz eines letzten Folgenglieds zeigt sich bei Uta in Codiereinheit 21 (vgl. Anhang 5). Uta spricht hier von einem ersten und einem letzten „Punkt". Eine mögliche Deutung ist, dass sie den ersten und den letzten Punkt in ihrer graphischen Darstellung meint. Eine andere Deutung ist, dass Uta von der Existenz eines letzten Punktes bzw. eines letzten Folgenglieds im Sinne eines a_∞ ausgeht. Dies wäre ein Hinweis darauf, dass Uta die Vorstellung eines unendlich fortsetzbaren Prozesses möglicherweise schwerfällt.

Weitere Einblicke in das *Concept Image* von Uta können durch ihre graphischen Darstellungen gewonnen werden. Die graphische Darstellung, die Uta während der Bearbeitung von Aufgabe 1 erstellt hat und zu Beginn der Bearbeitung von Aufgabe 3 heranzieht, zeigt eine monoton steigende und beschränkte Folge (siehe Abb. 11, links). Auch die Zeichnung, die Uta dann im weiteren Verlauf der Bearbeitung erstellt, zeigt eine graphische Darstellung der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, für die Uta die Folgenglieder einer monoton steigenden und beschränkten Folge entsprechend der Aufgabenstellung vertauscht hat (siehe Abb. 11, rechts). Monoton steigende und beschränkte Folgen scheinen für sie ein Prototyp für konvergente Folgen zu sein, mit dem sie häufig arbeitet. Es fällt außerdem auf, dass Uta in ihrer ersten Skizze eine Abbildung von $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ zeichnet, während sie in ihrer zweiten Skizze Abbildung von $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zeichnet (siehe Abb. 11). Den Unterschied kommentiert sie nicht, weshalb unklar ist, ob ihr der Unterschied zwischen Folgen und Funktionen bewusst ist oder ob ihr der Unterschied während der Bearbeitung nicht relevant erscheint. In ihrer graphischen Darstellung in Abbildung 11 sind außerdem der Grenzwert a der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und eine Umgebung um den Grenzwert a visualisiert. Uta markiert farblich das Folgenglied, welches außerhalb der Umgebung um den Grenzwert liegt, nachdem das vorherige Folgenglied in der Umgebung um den Grenzwert lag. Uta nutzt ihre graphische Darstellung also, um ihre Frage zur Definition bzw. ihre Unsicherheit in Bezug auf die Definition zu visualisieren (vgl. Anhang 5).

Dass Uta häufig in mentalen Bildern denkt, auch wenn kein Bezug zu einer graphischen Darstellung expliziert wird, wird durch ihre Sprache deutlich. Sie verwendet in ihrer Bearbeitung insgesamt 19 Mal den Begriff „Punkt" um Folgenglieder zu beschreiben. Auch in ihrer schriftlichen Antwort in Abbildung 11 schreibt sie, dass sie unsicher sei, „ob immer alle nachfolgenden *Punkte* kleiner ε sein müssen“. Der Begriff des Folgenglieds wird hingegen von Uta nur beim Vorlesen der Aufgabenstellung genannt und die verkürzte Variante „Glieder“ nur einmal während der Aufgabenbearbeitung verwendet. Diese bildliche Sprache von Uta zeigt deutlich, dass sie sich in ihrer Argumentation auf mentale Bilder mit „Punkten“ bezieht, auch wenn sie ihre graphische Darstellung erst ab Codiereinheit 34 erstellt.

Zur Verwendung der *Concept Definition*

Uta bezieht die *Formal Concept Definition* in ihre Aufgabenbearbeitung ein. Das wird vor allem dadurch sichtbar, dass Uta die Definition im Vorlesungsskript nachliest. Auch an vielen anderen Stellen der Bearbeitung findet ein Bezug zu einzelnen formalen Elementen der Definition wie ε oder n_ε statt. Es stellt sich die Frage, ob Uta verstanden hat, dass in der Definition ein beliebiges Epsilon betrachtet wird. In Codiereinheit 6 spricht Uta von einem „gewissen Epsilon“, das „definiert“ wurde. Möglicherweise meint Uta, dass ε entsprechend der Folgenkonvergenzdefinition „definiert“ ist oder sie hat die Vorstellung eines fest gewählten ε. Wenig später betont sie allerdings, dass man „das Epsilon ja beliebig wählen können“ müsse (C. 11). Dies deutet darauf hin, dass sie trotz der ungewöhnlichen Formulierung des „definierten“ ε, verstanden hat, dass sie ein beliebiges ε betrachten muss, um Folgenkonvergenz nachzuweisen. In ihrer graphischen Darstellung wird zwar eine Epsilon-Umgebung um den vermuteten Grenzwert durch horizontale Linien visualisiert, es wird aber nicht expliziert, dass diese Epsilon-Umgebung mit dem Ausdruck $|a_n - a| < \varepsilon$ der Definition zusammenhängt. Zudem werden die y-Koordinaten der horizontalen Linien der ε-Umgebung auch nicht mit $a + \varepsilon$ und $a - \varepsilon$ beschriftet oder auch sonst in der graphischen Darstellung kein ε notiert. Uta schreibt, dass sie unsicher ist, „ob immer alle nachfolgenden *Punkte* kleiner ε sein müssen“ (siehe Abb. 11). Es stellt sich die Frage, ob Uta verstanden hat, dass nicht die „Punkte“, also die Folgenglieder a_n, kleiner als Epsilon sein müssen, sondern deren Abstand zum Grenzwert kleiner als Epsilon sein muss.

Auf die Beziehung von n und n_ε geht Uta zum Beispiel in Codiereinheit 15 ein: „Ja genau, es muss für alle n größer n null gelten, dass es kleiner als Epsilon ist“, wobei offenbleibt, ob Uta mit „es“ den Abstand der Folgenglieder zum Grenzwert meint. Bezüglich der Wahl den Index n_ε zeigt sich bei Uta eine ähnliche Lernhürde wie bei der Studentin Ina: Uta ist unsicher, ob n_ε diejenige Stelle ist, an der ein Folgenglied erstmals in der ε-Umgebung um den Grenzwert liegt oder ob sie n_ε flexibel wählen darf als diejenige Stelle, ab der alle weiteren Folgenglieder mit $n \geq n_\varepsilon$ in der Epsilon-Umgebung um den Grenzwert liegen. Dass Uta n_ε als diejenige Stelle deutet, an der ein Folgenglied erstmals in der ε-Umgebung um den Grenzwert liegt, zeigt sich zum Beispiel in der folgenden Äußerung: „Und ich überlege gerade, also, wie streng die Bedingung war, dass sobald der erste Punkt da drin ist, dass dann alle drin sein müssen. Das ist nämlich das, was ich gerade überlege, weil ich meine, das hätten wir so gesagt gehabt“ (vgl. Anhang 5, C. 22). Mit der Formulierung „sobald der erste Punkt da drin ist“ könnte Uta das erste Folgenglied meinen, das in der Epsilon-Umgebung um den Grenzwert liegt. Sie vermutet, dass im Falle der Konvergenz dann auch alle weiteren Folgenglieder in der Epsilon-Umgebung liegen müssen. Dieses nicht-passende Verständnis der Definition zeigt sich während der Bearbeitung immer wieder. Andererseits beschreibt Uta die Möglichkeit, dass der Index n_ε so gewählt werden könne, dass alle Folgenglieder mit $n \geq n_\varepsilon$ in der ε-Umgebung um den Grenzwert liegen. Dies deutet sich zum Beispiel in der folgenden Aussage von Uta an: „Also man sieht ja, eigentlich müsste es ein Grenzwert sein und ich schätze mal, dass es auch so ist, dass man dann einfach sagen würde, dass man das hier so wählen kann oder so, dass das passt. Aber ich weiß es nicht genau“ (C. 56). Die Unsicherheit bezüglich des Index n_ε bleibt bis zum Ende der Aufgabenbearbeitung erhalten und kann von Uta nicht aufgelöst werden. Deshalb notiert sie in ihrer schriftlichen Bearbeitung ihre Unsicherheit: „Ich bin mir unsicher, ob immer alle nachfolgenden Punkte kleiner als ε sein müssen“ (siehe Abb. 11). Genau wie bei Ina könnte ein Nichtbeachten oder ein nicht-tragfähiges Verständnis der Quantoren in der Definition eine mögliche Ursache für die Unsicherheit von Uta in Bezug auf den Index n_ε sein. Der Existenzquantor vor dem Index n_ε in der Definition von Folgenkonvergenz beschreibt, dass es im Falle der Konvergenz nur irgendeine Stelle geben muss, ab der alle weiteren Folgenglieder einen kleineren Abstand zum Grenzwert als ε haben müssen. Dass Uta unsicher ist, ob der Index n_ε so zu wählen ist, dass „sobald der erste Punkt da drin ist, dass dann alle drin sein müssen“ und den Index n_ε nicht flexibel wählt, zeigt, dass sie Existenzquantor vor dem Index n_ε in der Definition nicht beachtet. Trotz dieser Lernhürde, kann hervorgehoben werden, dass Uta sich auf die Definition bezieht und in der

Lage ist, eine inhaltliche Frage zur Definition zu formulieren. Ihre Unsicherheit in Bezug auf die Wahl des Index n_ε könnte schnell aufgehoben werden, wenn Uta ihre Frage in der Veranstaltung stellen würde. Das alleinige Lesen der Definition hat Uta nicht geholfen, um ihre Frage zu klären, obwohl die Definition alle nötigen Informationen enthält. Eine mögliche Ursache ist, dass Uta Schwierigkeiten hat, stark formalisierte Aussagen wie Definitionen sinnentnehmend zu lesen. Die Äußerung in Codiereinheit 22 in Anhang 5 zeigt, dass Uta von einer Bedingung spricht und davon, dass etwas über diese Bedingung „gesagt“ wurde. Hier bezieht sich Uta nicht auf die Definition, sondern auf eine „Bedingung“, über die möglicherweise in der Vorlesung oder Übung etwas „gesagt“ wurde. Es ist unklar, ob Uta bewusst ist, dass die Definition alle Informationen enthält, die sie zur Beantwortung ihrer Frage benötigt und dass es keine weiteren Informationen oder „Bedingungen“ gibt, die sie berücksichtigen muss.

Zur Vernetzung der Definition mit Vorstellungen und graphischen Darstellungen

Ein Zusammenspiel von *Concept Image* und *Formal Concept Definition* wird an mehreren Stellen der Bearbeitung sichtbar, da Uta die Definition von Folgenkonvergenz mit ihren eigenen Vorstellungen und der graphischen Darstellung vernetzt. Wie zuvor beschrieben zeigt Uta unter anderem eine Umgebungsvorstellung. Diese wird sichtbar während Uta über einzelne formale Elemente der Definition ε und n_ε spricht. Sie sagt beispielweise Folgendes: „Und den dürftest du ja nicht haben, denn du wüsstest ja nach dem n null musst du ja alle da, also wo immer das so liegt, sind ja alle in diesem Epsilonschlauch-Ding“ (C. 9). Hier zeigt sich, dass ihre Vorstellungen nicht losgelöst von der Definition sind und dass sie versucht, eine Verbindung zwischen ihrer Vorstellung und Elementen der Definition herzustellen. In ihren Verbalisierungen bezieht sich Uta vor allem auf ε und n_ε. Das Bild des „Epsilonschlauch[s]“ wird aber wie oben beschrieben nicht mit dem formalen Ausdruck $|a_n - a| < \varepsilon$ der Definition vernetzt.

Eine weitere Stelle, an der Uta die eigenen Vorstellungen mit der *Formal Concept Definition* in Kontakt zu bringen versucht, ist Codiereinheit 14, in der Uta die *Formal Concept Definition* nachliest. Ihre vorherige Argumentation basiert überwiegend auf ihrem *Concept Image* und einzelnen formalen Elementen der Definition. An dieser Stelle der Bearbeitung, versucht Uta durch das Nachlesen der Definition, ihre vorherigen Überlegungen mit der Definition zu verknüpfen. Das Gelesene aus der Definition gibt Uta unmittelbar danach in eigenen Worten wieder und bindet es dadurch an ihre eigenen Vorstellungen an, denn sie sagt: „Gut. Ja genau, es muss für alle n größer n Null gelten, dass es kleiner als Epsilon ist“ (C. 15). Es wird allerdings nicht spezifiziert, was genau „kleiner als Epsilon“ ist. An dieser Stelle zeigt sich die fehlende Verbindung zu dem Ausdruck $|a_n - a| < \varepsilon$ der Definition. An dieser Stelle hätte Uta explizieren können, dass $|a_n - a|$ „kleiner als Epsilon ist“ oder dass der Abstand der Folgenglieder zum Grenzwert „kleiner als Epsilon ist“.

Auch gegen Ende der Bearbeitung vernetzt Uta die Definition mit ihrer Vorstellung und ihrer graphischen Darstellung. Uta stellt sich wie oben beschrieben die Frage, wie sie den Index n_ε wählen darf. Diese inhaltliche Frage zur Definition visualisiert sie durch eine graphische Darstellung, in der sie ihr Problem veranschaulicht. Sie markiert das Folgenglied mit blauer Farbe, das auf ihren vermuteten Index n_ε folgt, aber nicht in der visualisierten ε-Umgebung liegt (siehe Abb. 11, rechts). Sie kommentiert ihre Zeichnung folgendermaßen: „Was ich halt nicht mehr ganz wusste, ob das so wichtig ist, dass direkt der Punkt danach auch da drin liegt“ (C. 49). Mit dem „Punkt danach“ meint sie möglicherweise das Folgenglied an der Stelle $n_\varepsilon + 1$. Hier zeigt sich, dass Uta einen Teil der Definition in ihrer graphischen Darstellung visualisiert und sie ihre inhaltliche Frage zur Definition durch die graphische Darstellung verdeutlicht.

Auch wenn das *Concept Image* von Uta teilweise mathematisch nicht-tragfähige Vorstellungen enthält und auch wenn sie noch Unsicherheiten in Bezug auf die *Formal Concept Definition* bei der Wahl des Index n_ε zeigt, sind *Concept Image* und *Formal Concept Definition* bei Uta nicht unverbunden. Teile der formalen Definition werden von Uta einbezogen, während sie eine graphische Darstellung erstellt und ihre Vorstellungen zeigt. Sie liest die *Formal Concept Definition* nach und verknüpft ihre vorherige vorstellungsbasierte Argumentation mit der gelesenen Definition. Außerdem kann Uta ihre inhaltliche Unsicherheit in Bezug auf den Index n_ε mit ihrer graphischen Darstellung vernetzen und anhand dieser erklären.

8.3 Zur Praktik *Vernetzung der Definition mit graphischen Darstellungen und Vorstellungen*

Durch die Analysen der Bearbeitungen von Ina und Uta konnten Einblicke in die Praktik *Vernetzung der Definition mit graphischen Darstellungen und Vorstellungen* gegeben werden.

In den Prozessmatrizen aller Bearbeitungen zu Aufgabe 3 konnte beobachtet werden, dass in dieser Aufgabe lediglich elf von 26 Studierenden überhaupt einen Bezug zur Definition von Folgenkonvergenz herstellen. Alle elf Studierenden vernetzen diese dann auch mit graphischen Darstellungen und Vorstellungen. Es zeigt sich folglich ein enger Zusammenhang zwischen dem Verwenden der Definition und der Vernetzung dieser mit graphischen Darstellungen und den eigenen Vorstellungen. Werden die elf Prozessmatrizen mit dieser Praktik bezüglich der aktivierten Vorstellungen untersucht, dann fällt auf, dass die Definition und die graphischen Darstellungen mit einer Umgebungsvorstellung (vgl. Greefrath et al., 2016) oder mit einer Abstandsvorstellung (vgl. Utsch, 2023) verbunden werden.

Durch die hermeneutische Auswertung wurde sichtbar, dass Studierende, die die Definition mit ihrer graphischen Darstellung und einer Umgebungsvorstellung vernetzen, von einer ε-Umgebung um den Grenzwert sprechen und diese zum Teil auch in der graphischen Darstellung visualisieren. Sie beziehen also Elemente der Definition wie ε in ihre Arbeit mit der graphischen Darstellung ein und zeigen durch ihre Verbalisierungen und ihre graphischen Darstellungen eine Umgebungsvorstellung (vgl. Greefrath et al., 2016). Sie suchen dann in ihrer graphischen Darstellung nach einem Index n_ε, ab dem alle Folgenglieder mit $n \geq n_\varepsilon$ in der ε-Umgebung um den Grenzwert liegen. Der formale Ausdruck „$\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_\varepsilon$" der Definition wird von den Studierenden dabei verbal korrekt wiedergegeben, da sie in ihren Bearbeitungen erklären, dass „ab dem" oder „nach dem" Index n_ε alle weiteren Folgenglieder in dem „Epsilonschlauch" um den Grenzwert liegen. Dieser Teil der Definition scheint also mit den Vorstellungen der Lernenden vernetzt zu sein. Der Ausdruck $|a_n - a| < \varepsilon$ der Definition wird in den analysierten Studierendenbearbeitungen allerdings nicht explizit mit dem Bild des „Epsilonschlauchs" verbunden, auch wenn sich die Studierenden häufig auf dieses Bild beziehen.

Neben der Umgebungsvorstellung wird die Definition von Studierenden auch mit einer Abstandsvorstellung vernetzt. Mit der Abstandsvorstellung ist wie oben beschrieben die Vorstellung gemeint, dass zu jedem beliebigen $\varepsilon > 0$ ein Index n_ε gefunden werden kann, ab dem der Abstand aller weiteren Folgenglieder zum Grenzwert kleiner als ε ist. Das Zusammenspiel von Definition, graphischer Darstellung und Abstandsvorstellung zeigt sich unter anderem darin, dass Elemente der Definition wie ε, n_ε und n einbezogen werden während über die graphische Darstellung gesprochen wird. Der Term $|a_n - a|$ aus der Definition wird angemessen als Abstand gedeutet und in der graphischen Darstellung durch vertikale Linien visualisiert. Auch der Abstand ε wird durch eine vertikale Linie als Vergleichsmaß für den Abstand zwischen Folgengliedern und Grenzwert in der graphischen Darstellung eingezeichnet. Die Abstandsvorstellung wird dann während der Aufgabenbearbeitung wieder in eine formale Notation übersetzt, da zum Beispiel der Term „$|a_{51} - a| < \varepsilon$" notiert und gleichzeitig über den „Abstand von a einundfünfzig zu a" gesprochen wird, welcher „kleiner als Epsilon" ist (Ina, C. 21). Zu diesem symbolischen Ausdruck wurde also eine Abstandsvorstellung aufgebaut (vgl. Abschnitt 8.2).

Neben den Bearbeitungen von Ina und Uta wurden zwei weitere Studierendenbearbeitungen hermeneutisch ausgewertet. In Abbildung 12 ist für diese vier Studierendenbearbeitungen dargestellt, welche graphischen Darstellungen erzeugt und welche Vorstellungen gezeigt werden. Es wird sichtbar, dass die Studentinnen in Aufgabe 3 sowohl monotone als auch nicht-monotone Beispiele für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wählen. Nullfolgen werden dabei besonders häufig betrachtet. Drei der vier Studentinnen zeigen eine Umgebungsvorstellung und eine Annäherungsvorstellung (vgl. Greefrath et al., 2016). Die Studentin Ina grenzt sich von den drei anderen Studentinnen ab, da sie eine Abstandsvorstellung (vgl. Utsch, 2023) und keine Umgebungs- oder Annäherungsvorstellung zeigt.

In Abbildung 13 ist der Umgang der vier Studentinnen mit der *Formal Concept Definition* zusammengefasst. Es fällt auf, dass sich Ina von den anderen drei Studentinnen darin unterscheidet, dass sie ε als ein Vergleichsmaß für den Abstand der Folgenglieder zum Grenzwert deutet. Der Term $|a_n - a|$ aus der Definition wird wie oben beschrieben geometrisch als Abstand interpretiert. Die anderen drei Studentinnen nutzen wie oben beschrieben das Bild eines ε-Streifens, der aber nicht explizit mit dem Term $|a_n - a| < \varepsilon$ aus der Definition vernetzt wird. Im Umgang mit ε beschreibt nur Uta, dass ε beliebig ist. Ina und Uta visualisieren in ihren graphischen Darstellungen zunächst ε und erst anschließend den Index n_ε bzw. das Folgenglied a_{n_ε}. Das weist auf ein *reverse thinking* nach Roh (2005) hin (vgl. Abschnitt 3). Die Wahl des Index n_ε stellt sich in beiden Studierendenbearbeitung als eine zentrale Lernhürde dar, worauf in Abschnitt 8.1 und 8.2 genauer eingegangen wurde. In den anderen beiden analysierten Studierendenbearbeitungen von Sina und Verena wird die Abhängigkeit des Index n_ε von ε nicht thematisiert. Die Beziehung zwischen dem Index n_ε und n wird von allen vier Studentinnen richtig wiedergegeben. Die Studentinnen beschreiben, dass im Falle der Konvergenz ab einem Index alle weiteren Folgenglieder einen kleineren Abstand zum Grenzwert haben als ε bzw. alle weiteren Folgenglieder in einer ε-Umgebung um den Grenzwert liegen. Die Beziehung zwischen n_ε und n scheint für die Studierenden also leichter verständlich als die Beziehung von ε und n_ε bzw. die Wahl des Index n_ε.

Abgrenzung zu anderen Praktiken

Von den anderen Praktiken unterscheidet sich die hier beschriebene Praktik vor allem in dem Bezug zur *Formal Concept Definition*. Die anderen Praktiken beschreiben Vernetzungen von mathematischen Sätzen als Teil der *Concept Definition im weiteren Sinne* mit Vorstellungen, graphischen Darstellungen und / oder verwandten Begriffen. Es lassen sich außerdem Unterschiede in der Häufigkeit der beiden Grundvorstellungen (vgl. Greefrath et al., 2016) erkennen in Abhängigkeit davon, ob mit einem mathematischen Satz oder mit der *Formal Concept Definition* argumentiert wird: Beim Sprechen über mathematische Sätze zeigt sich häufig eine Annäherungsvorstellung, aber nie eine Umgebungsvorstellung. Beim Sprechen über die Definition hingehen zeigen sich Annäherungsvorstellung und Umgebungsvorstellung in etwa gleich häufig. Damit unterscheiden sich die Praktiken nicht nur darin, dass die Definition bzw. ein mathematischer Satz verwendet wird, sondern auch darin, welche Grundvorstellung aktiviert wird.

9. Diskussion der Ergebnisse

In der Literatur wird wie in Abschnitt 2.1 beschrieben häufig kritisiert, dass Studierende Aufgaben mithilfe ihres *Concept Images* bearbeiten und die *Formal Concept Definition* dabei nicht verwendet wird (vgl. Vinner, 1983; Vinner, 1991; Edwards & Ward, 2004; Alcock & Simpson, 2004). In der vorliegenden Studie wurde die Verbindung von *Concept Image* und *Concept Definition (im engeren und weiteren Sinne)* von Studierenden beim Bearbeiten von Aufgaben zur Folgenkonvergenz systematisch untersucht, wodurch verschiedene Praktiken der

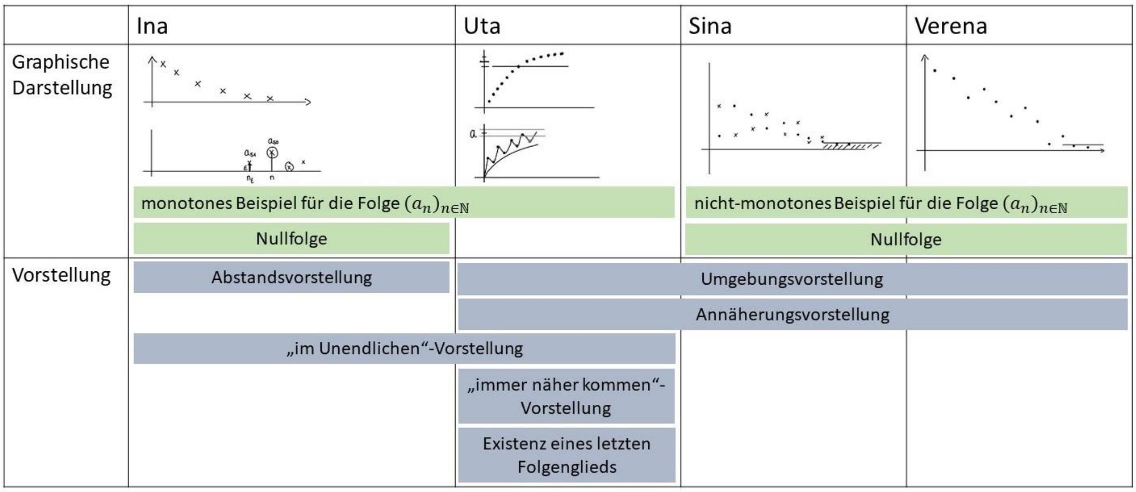

Abb. 12: Vergleich der *Concept Images* der Studentinnen Ina, Uta, Sina und Verena

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$, falls gilt: $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon$

<table>
<tr><th></th><th>Ina</th><th>Uta</th><th>Sina</th><th>Verena</th></tr>
<tr><td rowspan="6">Umgang mit der Definition</td><td>ε als Vergleichsmaß für Abstand von Folgen-glied zum Grenzwert</td><td colspan="3">Bild eines ε-Streifens</td></tr>
<tr><td>Term $|a_n - a| < \varepsilon$ wird geometrisch als Abstand gedeutet, welcher auch visualisiert wird</td><td colspan="3">ε -Streifen wird nicht explizit mit dem Term $|a_n - a| < \varepsilon$ der Definition vernetzt</td></tr>
<tr><td>Im Umgang mit ε bleibt offen, dass ε beliebig ist</td><td>Uta thematisiert, dass ε beliebig ist</td><td colspan="2">Im Umgang mit ε bleibt offen, dass ε beliebig ist</td></tr>
<tr><td colspan="2">Es wird zuerst ε visualisiert und erst anschließend n_ε bzw. a_{n_ε}</td><td colspan="2" rowspan="2">Abhängigkeit des Index n_ε von ε wird nicht thematisiert</td></tr>
<tr><td colspan="2">Wahl des Index n_ε als zentrale Lernhürde</td></tr>
<tr><td colspan="4">Es wird beschrieben, dass für alle $n \geq n_\varepsilon$ gilt, dass alle Folgenglieder a_n in einem ε-Streifen um Grenzwert liegen bzw. einen kleineren Abstand als ε zum Grenzwert haben</td></tr>
</table>

Abb. 13: Vergleich des Umgangs der Studentinnen Ina, Uta, Sina und Verena mit der *Formal Concept Definition*

Aufgabenbearbeitungen identifiziert werden konnten, die auf eine Vernetzung hinweisen. In diesem Artikel wurde die Verbindung von Vorstellungen und graphischen Darstellungen als Teile des *Concept Images* mit der *Formal Concept Definition* qualitativ beschrieben. Mit Bezug zu dem Modell von Vinner (1983; 1991; vgl. Abb. 1-4) kann festgehalten werden, dass der in Abbildung 4 dargestellte Prozess in der vorliegenden Studie mehrfach stattgefunden hat. Durch die Analyse der Transkripte in Abschnitt 8 konnte nicht nur beobachtet werden, dass während der Aufgabenbearbeitung überhaupt eine Verbindung von *Concept Image* und *Formal Concept Definition* stattfindet, sondern auch wie diese Verbindung aussehen kann. Dabei konnten auch die in der Literatur durch z. B. Davis & Vinner (1986), Greefrath et al. (2016) und Ostsieker (2020) beschriebenen Grundvorstellungen und tatsächlichen Vorstellungen der Lernenden zum Grenzwertbegriff um die Abstandsvorstellung und „im Unendlichen"-Vorstellung ergänzt werden (vgl. Abschnitt 3 und 8).

Es stellt sich die Frage, welchen Nutzen die Kenntnis solcher Praktiken für die Lehre haben kann. Da das Bearbeiten von Übungsaufgaben einen großen Anteil am Mathematiklernen an der Hochschule hat, kann das Wissen über die Praktiken für Dozierende z. B. für die Planung von Übungen, die Konzeption von Übungsblättern, für die Diagnostik und die Förderung von Studierenden hilfreich sein.

10. Fazit: Limitationen und Ausblick

Mit dem vorliegenden Artikel konnte die Frage beantwortet werden, welche Praktiken, die auf eine Vernetzung von *Concept Image* und *Concept Definition (im engeren und weiteren Sinne)* hinweisen, in Aufgabenbearbeitungen zur Folgenkonvergenz von Mathematiklehramtsstudierenden identifiziert werden können. Durch eine qualitative Studie konnten die in Abbildung 6 dargestellten Praktiken identifiziert werden, wobei die Praktik *Vernetzung der Definition mit Vorstellungen und graphischen Darstellungen* durch die Analyse der Bearbeitungen von Ina und Uta in diesem Artikel qualitativ beschrieben wurde. Als eine Grenze der vorliegenden Studie ist zu nennen, dass die Vernetzungen von *Concept Image* und *Concept Definition (im engeren oder weiteren Sinne)* nur für die Folgenkonvergenz, also ein begrenztes Themengebiet der Analysis, untersucht wurden. Hinzu kommt eine Begrenzung durch die vier eingesetzten Aufgaben. Es ist zu prüfen, inwiefern die Praktiken abhängig von den Aufgaben und den Lehrveranstaltungen sind, die die Studierenden besuchen.

Als eine weitere methodische Grenze der Prozessmatrizen ist außerdem zu beachten, dass durch diese Darstellung Informationen verloren gehen. Es wurde z. B. nicht codiert, ob eine Aufgabenbearbeitung richtig oder falsch ist, da zunächst der Fokus auf einer Beschreibung des Zusammenspiels von *Concept Image* und *Concept Definition (im engeren oder weiteren Sinne)* liegt und nicht auf einer fachlichen Bewertung. Aufgrund der methodischen Grenze der Analyse der Prozessmatrizen wurden ausgewählte Transkripte anschließend mit einem interpretativen Verfahren in Anlehnung an die Objektive Hermeneutik ausgewertet.

Inwiefern eine der identifizierten Praktiken zu einer erfolgreicheren Aufgabenbearbeitung führt als eine andere, könnte in anknüpfenden Forschungsarbeiten untersucht werden. Dann könnte diskutiert werden, ob Praktiken, die zu erfolgreichen Aufgabenbearbeitungen führen, als Strategien gefördert werden sollten. Es könnten außerdem Bearbeitungen zu anderen Aufgaben und anderen Themengebieten untersucht werden, um weitere Praktiken zu identifizieren. Auch die Entwicklung von Praktiken im Laufe des Studiums ist sicherlich interessant: Verfügen Studierende am Ende ihres Studiums über eine größere Anzahl von Praktiken oder über erfolgreichere Praktiken als Studierende zu Beginn des Studiums? Aus einer solchen Untersuchung könnten Ideen für eine Förderung von Studierenden im Mathematikstudium abgeleitet werden.

Literatur

Alcock, L., Simpson, A. (2004). Convergence of sequences and series: Interactions between visual reasoning and the learner's beliefs about their own role. *Educational Studies in Mathematics 57*, 1–32. https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000047051.07646.92

Bender, P. (1991). Fehlvorstellungen und Fehlverständnisse bei Folgen und Grenzwerten. *Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht, 44*(4), 238–243.

Beretz, A.-K., Lengnink, K. & Claudia von Aufschnaiter. (2017). Diagnostische Kompetenz gezielt fördern – Videoeinsatz im Lehramtsstudium Mathematik und Physik. In C. Selter, S. Hußmann, C. Hößle, C. Knipping, K. Lengnink & J. Michaelis (Hrsg.), *Diagnose und Förderung heterogener Lerngruppen: Theorien, Konzepte und Beispiele aus der MINT-Lehrerbildung* (S. 149–168). Waxmann.

Davis, R. B. & Vinner, S. (1986). The Notion of Limit: Some Seemingly Unavoidable Misconception Stages. *The Journal of Mathematical Behavior, 5*(1), 281–303.

Dubinsky, E. & Yiparaki, O. (2000). On student understanding of AE and EA quantification. *Research in Collegiate Mathematics, IV*, 239–289.

Edwards, B. S. & Ward, M. B. (2004). Surprises from mathematics education research: Student (mis)use of mathematical definitions. *The American Mathematical Monthly, 111*(5), 411–424. https://doi.org/10.2307/4145268

Erath, K. (2017). Mathematisch diskurisve Praktiken des Erklärens: *Rekonstruktion von Unterrichtsgesprächen in unterschiedlichen Mikrokulturen*. Springer.

Frischemeier, D., Panse, A. & Pecher, T. (2016). Schwierigkeiten von Studienanfängern bei der Bearbeitung mathematischer Übungsaufgaben - Erfahrungen aus den Mathematik-Lernzentren der Universität Paderborn. In A. Hoppenbrock, R. Biehler, R. Hochmuth & H.-G. Rück (Hrsg.), *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase* (S. 229–241). Springer.

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V. & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-48877-5

Hahn, S. & Prediger, S. (2008). Bestand und Änderung — Ein Beitrag zur Didaktischen Rekonstruktion der Analysis. *Journal für Mathematik-Didaktik, 29*(3), 163–198. https://doi.org/10.1007/BF03339061

Kleemann, F., Krähnke, U. & Matuschek, I. (2013). *Interpretative Sozialforschung: Eine Einführung in die Praxis des Interpretierens*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-531-93448-8

Klinger, M. (2019). Grundvorstellungen versus Concept Image? Gemeinsamkeiten und Unterschiede beider Theorien am Beispiel des Funktionsbegriffs. In A. Büchter, M. Glade, R. Herold-Bladius, M. Klinger, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.), *Vielfältige Zugänge zum Mathematikunterricht* (S. 61–75). Springer Fachmedien Wiesbaden.

Landis, J. R. & Koch, G. G. (1977). The Measurement of Observer Agreement for Categorical Data. *Biometrics, 33*(1), 159–174. https://doi.org/10.2307/2529310

Mayring, P. (2015). *Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen und Techniken* (12., überarb. Aufl.). Beltz. http://ebooks.ciando.com/book/index.cfm/bok_id/1875625

Oevermann, U., Allert, T., Konau, E. & Krambeck, J. (1979). Die Methodologie einer „objektiven Hermeneutik" und ihre allgemeine forschungslogische Bedeutung in den Sozialwissenschaften. In H.-G. Soeffner (Hrsg.), *Interpretative Verfahren in den Sozial- und Textwissenschaften*. Metzler.

Ostsieker, L. (2020). *Lernumgebungen für Studierende zur Nacherfindung des Konvergenzbegriffs*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-27194-7

Rädiker, S. & Kuckartz, U. (2019). *Analyse qualitativer Daten mit MAXQDA*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-22095-2

Reckwitz, A. (2003). Grundelemente einer Theorie sozialer Praktiken: Eine sozialtheoreitsche Perspektive. *Zeitschrift für Soziologie, 32*(4), 282–301. https://doi.org/10.1515/9783839409176-004

Roh, K. H. (2005). *College students' intuitive understanding of the concept of limit and their level of reverse thinking*. Dissertation, The Ohio State University.

Roos, A.-K. (2020). *Mathematisches Begriffsverständnis im Übergang Schule–Universität*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-29524-0

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151–169. https://doi.org/10.1007/BF00305619

Utsch, N. (2023). Vorstellungen von Lehramtsstudierenden zur Konvergenz von Folgen und Teilfolgen. In J. Härterich, M. Kallweit, K. Rolka & T. Skill (Hrsg.), (S. 274–288). WTM. https://doi.org/10.37626/GA9783959872645.0

Utsch, N. & Lengnink, K. (in Druck). Prozesspfade zur Analyse des Zusammenspiels von Concept Image und Concept Definition in Studierendenbearbeitungen zur Folgenkonvergenz. In C. Bescherer & M. Zimmermann (Hrsg.), *Beiträge zum gleichnamigen Symposium am 15. & 16. November 2019 an der PH Ludwigsburg*.

Viholainen, A. (2008). Incoherence of a concept image and erroneous conclusions in the case of differentiability. *The Mathematics Enthusiast* 5(2-3), 231-248. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1104

Vinner, S. (1983). Concept Definition, Concept Image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14*(3), 293–305.

Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. In D. Tall (Hrsg.), *Mathematics Education Library: Bd. 11. Advanced Mathematical Thinking* (S. 65–81). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_5

Weigand, H.-G. (2018). *Begriffslernen und Begriffslehren. In: Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I. Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-56217-8_5

Anschrift der Verfasserin

Nina Utsch
Justus-Liebig-Universität Gießen
Institut für Didaktik der Mathematik
Karl-Glöckner-Straße 21c

Anhang

Anhang 1: Aufgabe 3 der Studie

Aufgabe 3

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a. Es gilt: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, ...)$.

Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die durch das Vertauschen je zweier Folgenglieder der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entsteht. Dabei wird a_1 mit a_2 getauscht, a_3 mit a_4 getauscht, a_5 mit a_6 getauscht und so weiter. Es entsteht die Folge: $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, ...) = (a_2, a_1, a_4, a_3, a_6, a_5, ...)$.

Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kann also folgendermaßen definiert werden:

$$b_n = \begin{cases} a_{n+1} & \text{falls } n \textit{ ungerade} \\ a_{n-1} & \text{falls } n \textit{ gerade} \end{cases}$$

Prüfen Sie, ob $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert. Beweisen Sie Ihre Vermutung.

Lösungsvorschlag:

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert laut Aufgabenstellung gegen den Grenzwert a. Das bedeutet, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein Index $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n \geq n_\varepsilon$ der Abstand der Folgenglieder zum Grenzwert a kleiner als ε ist, also $|a_n - a| < \varepsilon$. Um die Konvergenz der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu beweisen, können die folgenden zwei Fälle betrachtet werden:

Für alle ungeraden n mit $n \geq n_\varepsilon$ gilt:

$|b_n - a| = |a_{n+1} - a| < \varepsilon$, da $n + 1 \geq n_\varepsilon$

Sei $n_\varepsilon{}^* = n_\varepsilon + 1$. Für alle geraden n mit $n \geq n_\varepsilon{}^*$ gilt:

$|b_n - a| = |a_{n-1} - a| < \varepsilon$, da $n - 1 \geq n_\varepsilon{}^* - 1 = n_\varepsilon$.

Es wurde gezeigt, dass zu jedem beliebigen $\varepsilon > 0$ ab einer bestimmten Zahl $n_\varepsilon{}^* = n_\varepsilon + 1$ alle weiteren Folgenglieder der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ um weniger als ε vom Grenzwert a abweichen.

Anhang 2: Prozessmatrix von Ina zu Aufgabe 3

Prozessmatrix von Ina zu Aufgabe 3

Oberkategorie	Kategorie	Unterkategorie	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
Kategorien ohne Bezug zu Concept Image und Concept Definition	Lesen und Verstehen der Aufgabe		1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	Äußerung über Unsicherheiten, Gefühle, Kompetenzerleben		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
	Unterbricht Bearbeitung		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Erste Äußerung einer Entscheidung		0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Hilfekarte		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Lesen im Skript		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Concept Image	Vorstellungen	Annäherungsvorstellung	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		Umgebungsvorstellung	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		Objektvorstellung	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		Grenzwert als Schranke	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		Existenz eines letzten Folgenglieds	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		Grenzwert darf nicht angenommen werden	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		"Nach jedem Punkt immer weiter annähern"-Vorstellung	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		"im Unendlichen"-Vorstellung	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		Abstandsvorstellung	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0
		Nutzen von mentalen Bildern	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Verwandter Begriff	Suche nach verwandtem Begriff	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		Nennen eines verwandten Begriffs	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
	Beispiele und Gegenbeispiele	Suche nach Beispiel/Gegenbeispiel	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		Nennen eines Beispiels/Gegenbeispiels	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Eigenschaften des Begriffs	Suche nach Eigenschaft	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		Nennen der Eigenschaft	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Nichtsymbolische Darstellungen	Graphische Darstellung	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
		Numerische Darstellung	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	Begriffs-verwendung	Anwendungen	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		Bekannte Aufgabe	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Concept Definition im weiteren Sinne	Schriftliche Darstellung mit Quantoren, Symbolen, alg. Ausdrücken	Symbole im Kontext eines narrativen Textes	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		Algebraischer Term, Gleichung, Ungleichung	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		Für Folgen typische Schreibweise	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		Betragsstriche	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		Quantoren	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Mathematische Sätze	Frage zu oder Suche nach einem Satz	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		Nennen eines Satzes	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Formale Definition verwandter Begriffe		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Concept Definition im engeren Sinne	Umgang mit Formal Concept Definition	Frage zur Definition	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		Nachschlagen der FCD	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		Nennen eines einzelnen formalen Elementes der FCD	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		Nennen oder Erklären (von Teilen) der FCD	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0
		Diagrammatisches Schließen mit Bezug zur FCD	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0

Anhang 3: Transkriptausschnitte von der Bearbeitung der Aufgabe 3 von Ina

Codier-einheit	Zeit (MM:SS)	Äußerung
8	06:27	Also dass es vielleicht am Anfang. Also das ist ja so, dass es am Anfang noch extremere Ausschläge gibt. Also dass man hier wirklich den Unterschied zwischen den Folgegliedern hier (zeigt in Abb. 9 paarweise auf die Folgenglieder, die in b n getauscht wurden) extrem erkennt, aber im Unendlichen würde ich jetzt sagen, dass es beides gegen a konvergiert
9	06:48	weil der Abstand immer kleiner wird und dieses Springen zwischen den beiden Folgegliedern hier nicht mehr so ausschlaggebend ist (zeigt in Abb. 9 paarweise auf die Folgenglieder, die in b n getauscht wurden) und der Grenzwert trotzdem dann am Ende a wäre. Ja, das würde ich jetzt erst mal dazu sagen.
…	…	…
13	07:54	Oder was sich jetzt hier als Problem herausstellt ist, dass jetzt, wenn ich mir die Definition anschaue (nimmt Kurzskript) und das jetzt mal aufmale (zeichnet Koordinatensystem in Abb. 10) und das hier jetzt so ist (zeichnet Punkte) und es immer ein Folgeglied gibt, das da hinten dran einen größeren Abstand zum Grenzwert hat, passt das ja nicht mehr mit der Definition von der Konvergenz (zeigt mit Finger auf Definition im Skript) überein.
…	…	…
17	08:57	Weil an sich würde ich sagen, es konvergiert gegen den gleichen Grenzwert, aber wenn ich mir die Definition anschaue und noch einmal genauer überlege, finde ich ja ein n Epsilon für das ich ein n finde, was dann einen kleineren Abstand hat zu dem Grenzwert als Epsilon aber ja nicht für jedes n, weil hier (zeigt auf Definition) ist ja auch
18	09:19	(liest vor) es gibt ein n Epsilon für das alle weiteren Folgeglieder einen kleineren Abstand als diesen Mindestabstand haben.
19	09:27	Deswegen würde ich jetzt sagen, konvergiert die Folge doch nicht, weil das einfach ein Widerspruch hierzu (zeigt auf Definition im Skript) wäre meiner Meinung nach jetzt, wenn ich ein n finde, was einen was keinen kleineren Abstand hat als Epsilon.
20	09:49	Also dafür würde jetzt gelten, wenn das jetzt zum Beispiel mein a fünfzig ist und das hier ist mein a einundfünfzig (schreibt a 50 und a51 an die Folgenglieder in Abb. 10), also die sind ja vertauscht, eigentlich ist das hier ja hinten dran, dann würde ja jetzt gelten, dass hier der Abstand Epsilon ist (schreibt „ε" an die vertikale Linie zwischen Folgenglied und x-Achse in Abb. 10).
21	10:06	(schreibt) Aber der Abstand von a fünfzig zu a ist größer als Epsilon als der Abstand zu a einundfünfzig zu a, der ist kleiner als Epsilon. Und dann wäre jetzt hier ein Widerspruch (malt Blitz in Abb. 10)

Anhang 4: Prozessmatrix von Uta zu Aufgabe 3

Prozessmatrix von Uta zu Aufgabe 3

Oberkategorie	Kategorie	Unterkategorie	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Kategorien ohne Bezug zu Concept Image und Concept Definition	Lesen und Verstehen der Aufgabe		1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Äußerung über Unsicherheiten, Gefühle, Kompetenzerleben		0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0
	Unterbricht Bearbeitung		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Erste Äußerung einer Entscheidung		0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Hilfekarte		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Lesen im Skript		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Concept Image	Vorstellungen	Annäherungsvorstellung	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
		Umgebungsvorstellung	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		Objektvorstellung	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		Grenzwert als Schranke	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		Existenz eines letzten Folgenglieds	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		Grenzwert darf nicht angenommen werden	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		"Nach jedem Punkt immer weiter annähern"-Vorstellung	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		"im Unendlichen"-Vorstellung	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		Abstandsvorstellung	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		Nutzen von mentalen Bildern	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Verwandter Begriff	Suche nach verwandtem Begriff	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		Nennen eines verwandten Begriffs	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Beispiele und Gegenbeispiele	Suche nach Beispiel/Gegenbeispiel	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		Nennen eines Beispiels/Gegenbeispiels	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Eigenschaften des Begriffs	Suche nach Eigenschaft	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		Nennen der Eigenschaft	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Nichtsymbolische Darstellungen	Graphische Darstellung	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		Numerische Darstellung	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Begriffs-verwendung	Anwendungen	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		Bekannte Aufgabe	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Concept Definition im weiteren Sinne	Schriftliche Darstellung mit Quantoren, Symbolen, alg. Ausdrücken	Symbole im Kontext eines narrativen Textes	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
		Algebraischer Term, Gleichung, Ungleichung	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		Für Folgen typische Schreibweise	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		Betragsstriche	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		Quantoren	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Mathematische Sätze	Frage zu oder Suche nach einem Satz	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		Nennen eines Satzes	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Formale Definition verwandter Begriffe		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Concept Definition im engeren Sinne	Umgang mit Formal Concept Definition	Frage zur Definition	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
		Nachschlagen der FCD	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		Nennen eines einzelnen formalen Elementes der FCD	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		Nennen oder Erklären (von Teilen) der FCD	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
		Diagrammatisches Schließen mit Bezug zur FCD	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Anhang 5: Transkriptausschnitte von der Bearbeitung der Aufgabe 3 von Uta

Codier-einheit	Zeit (MM:SS)	Äußerung
6	16:03	Also gerade hinten raus könnte es das Problem geben, weil du hast ja ein gewisses Epsilon definiert
7	16:09	und wenn du jetzt (unterbricht) also das war ja immer, dass die größeren (unterbricht) naja ist ja egal, also. Wenn nach einer kleineren Zahl noch etwas Größeres kommt, oder so der Fall. Ne es war eher (unterbricht) oder doch, doch. Ne, warte mal. (...) (unverständlich) so ist immer kleiner.
8	16:34	(liest Aufgabenstellung) Genau, von a Vier zu a Drei oder von a Zwei zu a Eins wird es ja wieder ein bisschen größer. Dementsprechend hast du ja ein Knick drin.
9	16:44	Und den dürftest du ja nicht haben, denn du wüsstest ja nach dem n Null musst du ja alle da, also wo immer das so liegt, sind ja alle in diesem Epsilonschlauch-Ding.
10	16:57	Und wenn jetzt das nächste wieder ein bisschen größer ist, dann passt das nicht.
11	17:02	Weil man muss das Epsilon ja beliebig wählen können. (...)
12	17:12	Ok, was machen wir jetzt damit? (...)
13	17:24	Also es nähert sich schon dem Grenzwert an. Dann muss das ja, sind ja die gleichen Glieder dann letztendlich, aber nicht dauerhaft. (...)
…	…	…
18	18:54	Ja also ich versuche mir gerade über dieses Knickmuster, also du hast ja diese minimalen Ecken da drin, in dem (unterbricht) dadurch, dass du die vertauschst, dass es eben nicht so ganz passt.
19	19:05	Also, dass sie sich nicht mehr weiter an (unterbricht) Also nicht nach jedem Punkt immer weiter annähern,
20	19:11	sondern immer dieses ganz leichte Zickzack, was sich aber auch dann immer näher annähert, weil muss es ja.
21	19:16	Es sind immer nur die zwei direkt nebeneinander vertauscht. Und nicht zum Beispiel der Erste und der Letzte oder sowas.
22	19:22	Und ich überlege gerade, also, wie streng die Bedingung war, dass sobald der erste Punkt da drin ist, dass dann alle drin sein müssen. Das ist nämlich das, was ich gerade überlege, weil ich meine, das hätten wir so gesagt gehabt.

Anhang 6:

Durch das Scannen des QR-Codes gelangen Sie zu weiteren Unterlagen der Studie:

https://jlubox.uni-giessen.de/getlink/fi2MikRtkmbJiCdCcwDrmXBL/