20 Wege zu einem Optimum und darüber hinaus

JOACHIM JÄGER, SAARBRÜCKEN UND HANS SCHUPP, SAARBRÜCKEN

***Zusammenfassung**: Der Beitrag zeigt am Beispiel einer Optimierungsaufgabe (isoperimetrisches Problem) die didaktischen Möglichkeiten auf, die die Erörterung unterschiedlicher Lösungswege und Variationen der Aufgabenstellung bietet. Damit plädiert der Beitrag für einen Mathematikunterricht, der Mathematik als offene Disziplin erleben lässt, den Unterrichtsgegenstand durch multiple Zugänge erschließt, Raum für eigene Ideen eröffnet und so einem eindimensionalen Lehr-Lern-Konzept entgegenwirkt.*

***Abstract:** Using the example of an optimization problem (isoperimetric problem), the article shows the didactic possibilities offered by the discussion of different solutions and variations of the problem. Thus, the article pleads for a mathematical education, which lets mathematics be experienced as an open discipline, which opens up the subject matter by multiple approaches, opens up space for own ideas and thus counteracts a one-dimensional teaching-learning concept.*

Zur Genese dieses Artikels

Dieser Artikel beruht auf einem Entwurf, den Hans Schupp nicht mehr vollenden konnte. Er starb am 18.05.2021. Vorangegangen war ein erster Entwurf, noch mit dem Titel „10 Wege zu einem Optimum und darüber hinaus", der Ende 2019 entstand. Ich habe mit Hans Schupp, dem ich über mehrere Jahrzehnte sowohl fachlich wie privat freundschaftlich verbunden war, von den ersten Entwürfen an bis zu der letzten Fassung vor seinem Tod über den geplanten Artikel diskutiert. Die jetzige Fassung gibt, insbesondere in den didaktischen Kommentaren, die Überzeugungen und Einsichten von Hans Schupp unverändert wieder. Ihm lagen die Themen Optimieren und Variieren am Herzen, die hier noch einmal im Zentrum stehen. Das grundsätzliche Konzept des Artikels hat Hans Schupp entwickelt. Die Auswahl der im Titel genannten Wege und ihre Ausformulierung war jedoch nicht beendet. Ich habe mich bemüht, auf der Grundlage des vorliegenden Materials und der langen und ausführlichen Diskussionen mit Hans Schupp den Entwurf zu vervollständigen. Das implizierte jedoch eine größere Zahl von Änderungen und Ergänzungen in der Auswahl der Wege, der Beweisführung, der Strukturierung und der Ausformulierung. Ob Hans Schupp den Artikel in der jetzigen Form als Autor gebilligt hätte, ist nicht mehr abschließend zu beurteilen, und das erschwert die Angabe der Autorenschaft. Unabhängig davon, ob die Bearbeitung des Themas nun gelungen ist oder nicht: die Kernaussagen hätten seine Zustimmung und gehen letztlich, insbesondere was die didaktische Einordnung betrifft, auf ihn zurück.

Die theoretischen didaktischen Grundlagen zum Thema „Optimieren", aufgefasst als fundamentale Idee der Mathematik und als Leitlinie für den Mathematikunterricht, hat Hans Schupp in (Schupp, 1992) dargestellt. Das Thema „Variieren" wurde in einem 5jährigen Forschungsprojekt AUGE entwickelt und in der Schulpraxis erprobt. Der Forschungsbericht (Schupp 2002) informiert über das Projekt und gibt weitere Literaturhinweise. Schupp 2006 skizziert noch einmal die Grundgedanken zum „Thema Variieren".

Joachim Jäger

1. Die Fragestellung

Für welche positiven reellen Zahlen x, y mit konstanter Summe $s = x + y$ ist das Produkt $x \cdot y$ maximal? Existiert ein solches Maximum überhaupt?

2. Neun Lösungen

Wir setzen immer $y \le x$ voraus. Das stellt keine Einschränkung dar. Dann ist $y \le s/2 \le x$ und beide Zahlen weichen um den gleichen Betrag v von $s/2$ ab. Entsprechend ist $x = s/2 + v$ und $y = s/2 - v$.

2.1 Erste Lösung

Das Produkt $x \cdot y$ ist wegen

(1) $$x \cdot y = \left(\frac{s}{2} + v\right) \cdot \left(\frac{s}{2} - v\right) = \frac{s^2}{4} - v^2 \le \frac{s^2}{4}$$

nur dann maximal, wenn $v^2 = 0$ ist, d. h., wenn $v = 0$ und somit $x = y = s/2$ ist. Resultat:

Unter allen Paaren positiver reeller Zahlen x, y mit konstanter Summe $s = x + y$ ist das Produkt $x \cdot y$ genau dann maximal, wenn $x = y$ ist.

Zugleich wird hiermit das sog. isoperimetrische Problem im einfachsten Fall gelöst:

Unter allen Rechtecken gleichen Umfangs hat das Quadrat den größten Flächeninhalt.

Denn sind x und y die Seitenlängen des Rechtecks, also sein Umfang $U = 2s$, so ist sein Flächeninhalt $x \cdot y$ maximal, wenn $x = y$ ist.

2.2 Zweite Lösung

Sie begründet Ungleichung (1) algebraisch-geometrisch. Abb.1 zeigt ein großes Quadrat *ABCD* mit der Seitenlänge $s/2$, ein kleines Quadrat *HGCI* mit der Seitenlänge v und zwei kongruente (schraffierte) Rechtecke mit den Seitenlängen v und y. Das Rechteck *AEFJ* hat den Inhalt $x \cdot y$. Von diesem Rechteck trennen wir das schraffierte rechte Rechteck ab und verlagern es in die Position des schraffierten oberen Rechtecks. Dann ist *AEFJ* genauso groß wie das Sechseck *ABGHID*. Dieses besteht aus dem großen Quadrat ohne das kleine Quadrat, hat folglich den Inhalt $s^2/4 - v^2$. Es gilt also Ungleichung (1). Im Grenzfall $v = 0$ verschwinden die beiden schraffierten Rechtecke und das Quadrat *HGCI*, sodass in (1) Gleichheit eintritt.

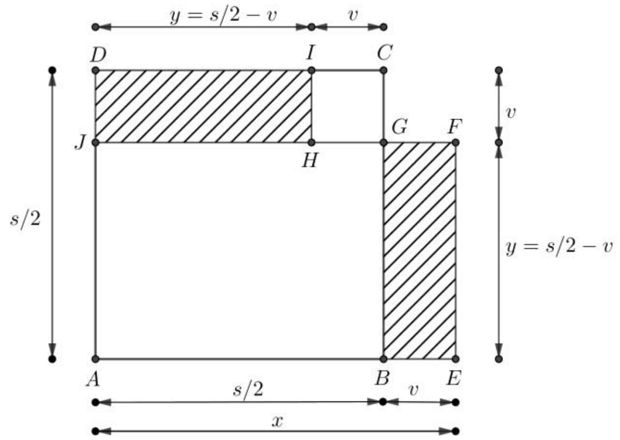

Abb. 1

2.3 Dritte Lösung

Die 2. Lösung können wir auch rein geometrisch interpretieren und so unmittelbar das isoperimetrische Problem lösen. Die in 2.2 beschriebene Verlagerung des Rechtecks *BEFG* erhält nicht nur den Flächeninhalt, sondern auch den Umfang *U*. Das Rechteck *AEFJ* und das Sechseck *ABGHID* haben also gleichen Inhalt und gleichen Umfang *U*. Das Quadrat *ABCD* besitzt ebenso den Umfang *U*, ist aber um den Inhalt des Quadrats *HGCI* größer als das Sechseck und damit als das Ausgangsrechteck *AEFJ*, sofern dieses kein Quadrat ist. Ist *AEFJ* ein Quadrat, also $x = y$, so besteht Gleichheit.

2.4 Vierte Lösung

Abb. 2 zeigt das rechtwinklige Dreieck *ABC* mit Hypotenuse s, den Abschnitten x, y und der zugehörigen Höhe h im Halbkreis. Nach dem Höhensatz ist $x \cdot y = h^2$. Das Produkt $x \cdot y$ ist also maximal, wenn h es ist. Das ist der Fall für $h = s/2$, also $v = 0$ bzw. für $x = y$.

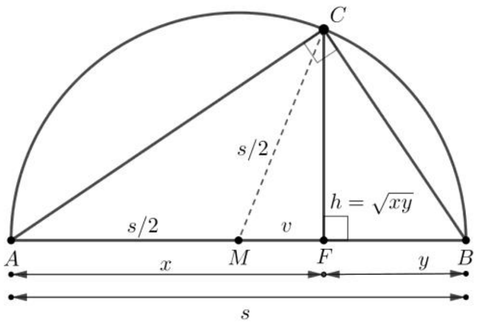

Abb. 2

2.5 Fünfte Lösung

In dem Quadrat *ABCD* in Abb. 3 mit der Seitenlänge $s = x + y$ lassen sich vier Rechtecke mit den Seiten x und y unterbringen. Sie haben sämtlich den Inhalt $x \cdot y$. In der Mitte entsteht das Quadrat *EFGH* mit der Seitenlänge $x - y$. Also gilt

$$4xy + (x - y)^2 = s^2.$$

Bei konstantem s ist daher $x \cdot y$ maximal, wenn $(x - y)^2$ minimal ist, also bei $x = y$. In diesem Fall verschwindet das innere Quadrat.

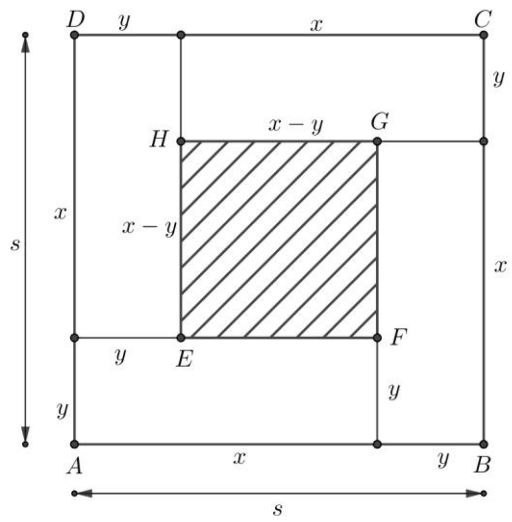

Abb. 3

2.6 Sechste Lösung

Diese Lösung variiert die 5. Lösung. Wir zerschneiden die vier Rechtecke in Abb. 3 jeweils entlang einer Diagonalen in insgesamt 8 rechtwinklige Dreiecke und platzieren diese auf neue Weise in dem großen Quadrat *ABCD* (Abb. 4). Wieder entsteht in der Mitte ein kleines Quadrat, nun aber gegenüber dem in Abb. 3 gedreht, natürlich aber von gleicher Größe wie dieses. Damit erhalten wir das gleiche Ergebnis wie in der 5. Lösung.

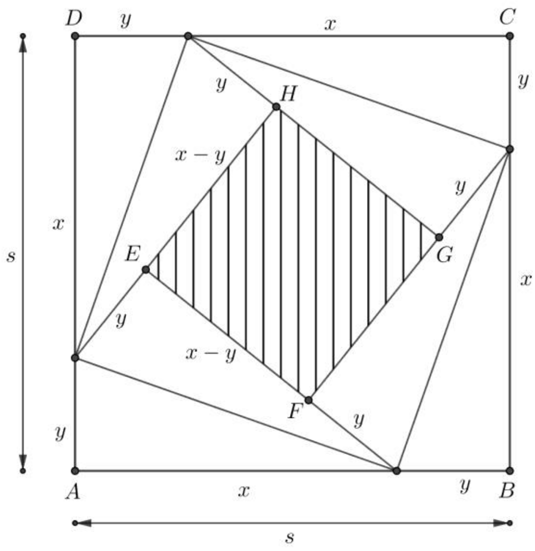

Abb. 4

2.7 Siebte Lösung

Die GA-Ungleichung zwischen dem geometrischen Mittel $\sqrt{x \cdot y}$ und dem arithmetischen Mittel $(x+y)/2$ zweier positiver Zahlen *x* und *y* besagt

(2) $\sqrt{x \cdot y} \le \dfrac{x+y}{2}$ mit Gleichheit nur für $x = y$.

Aus (2) folgt $x \cdot y \le s^2/4$ mit Gleichheit nur für $x = y$. Bei konstantem s ist daher $x \cdot y$ nur für $x = y$ maximal. Die GA-Ungleichung folgt ihrerseits aus der elementaren Ungleichung: $a^2 \ge 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$ mit Gleichheit nur für $a = 0$:

$$0 \le \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 = x + y - 2\sqrt{x \cdot y}\,.$$

2.8 Erster geometrischer Beweis der GA-Ungleichung

In Abbildung 2 erkennen wir: $h \le s/2$. Zusammen mit $h^2 = x \cdot y$, also $h = \sqrt{x \cdot y}$, ergibt dies die GA-Ungleichung so:

$$\sqrt{x \cdot y} = h \le \frac{s}{2} = \frac{x+y}{2}$$

mit Gleichheit nur für $x = y$.

2.9 Zweiter geometrischer Beweis der GA-Ungleichung

Das Quadrat *ABCD* in Abb. 5 hat die Seitenlänge $\sqrt{x}$. Ihm wird das Rechteck *ABFE* mit den Seitenlängen $\sqrt{x}$ und $\sqrt{y}$ und dem Flächeninhalt $\sqrt{x \cdot y}$ einbeschrieben. Dieses Rechteck setzt sich zusammen aus dem rechtwinkligen Dreieck *AGE* mit dem Flächeninhalt $\dfrac{1}{2}\sqrt{y} \cdot \sqrt{y} = \dfrac{y}{2}$ und dem Trapez *ABFG*. Dessen Inhalt ist kleiner als der des Dreiecks *ABC* mit dem Inhalt $\dfrac{1}{2}\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = \dfrac{x}{2}$. Also ist

$$\sqrt{x \cdot y} \le \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{x+y}{2} = \frac{s}{2}$$

mit Gleichheit nur für $x = y$.

Die Differenz zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel von *x* und *y* entspricht hier dem Inhalt des Dreiecks *FCG*.

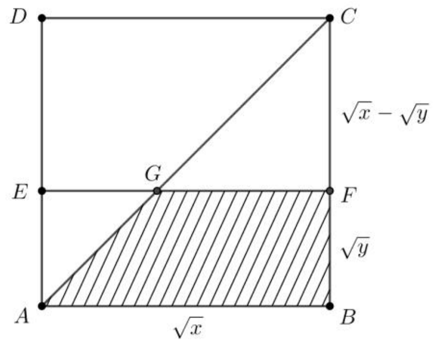

Abb. 5

Dieser Beweis (Bullen 2003) ist einerseits sehr einfach, andererseits weniger naheliegend, da hier *x* und *y* nicht, wie in den vorangegangenen Beweisen, unmittelbar als Seitenlängen auftreten.

2.10 Dritter geometrischer Beweis der GA-Ungleichung

In Abb. 6 ist $x = |AC|$, $y = |AB|$ und *D* ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$: $|AD| = (x+y)/2 = s/2$.

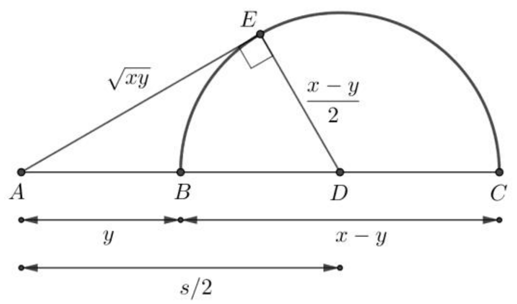

Abb. 6

Nun zeichnen wir einen Halbkreis um *D* durch *B* (und *C*). Sein Radius ist $r = (x-y)/2$. Der Berührpunkt der Tangente durch *A* an den Halbkreis ist *E*. Dann hat das Dreieck *AED* bei *E* einen rechten Winkel und es ist $|DE| = r$. Nach dem Satz des Pythagoras gilt

$$|AE|^2 = |AD|^2 - r^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = x \cdot y,$$

also $|AE| = \sqrt{xy}$ und weiter

$$\sqrt{xy} = |AE| < |AD| = \frac{s}{2} = \frac{x+y}{2},$$

denn die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist größer als jede seiner Katheten. Der Grenzfall $\sqrt{xy} = (x+y)/2$ tritt nur ein, wenn der Kreis zu einem Punkt schrumpft, also Radius 0 hat. Das ist für $x = y$ der Fall.

2.11 Achte Lösung

Wir suchen bei festem *s* das Maximum von

$$x \cdot y = x \cdot (s - x) = -x^2 + s \cdot x.$$

Dazu definieren wir die Funktion

$$f\colon]0, s[\to \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + s \cdot x.$$

Abb. 7 zeigt den Graph.

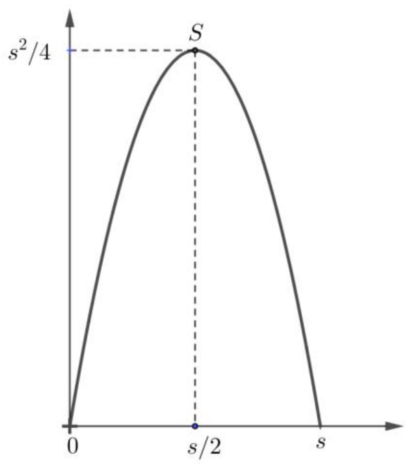

Abb. 7

Die Ableitung von *f* ist $f'(x) = -2x + s$. Es gilt $f'(s/2) = 0$; $f'(x) > 0$, wenn $-2x + s > 0$, d. h. wenn $x < s/2$ ist, entsprechend $f'(x) < 0$, wenn $x > s/2$ ist. Daher wächst *f* in dem Intervall $]0, s/2]$ streng monoton und fällt in $[s/2, s[$ streng monoton. Also besitzt *f* in $x = s/2$ das absolute Maximum, und für $x \neq s/2$ ist $x \cdot y = f(x) < s^2/4$. Also ist $x \cdot y$ maximal für $x = y = s/2$ und das Maximum ist $s^2/4$.

In der Schulmathematik wird gewöhnlich bei Extremwertaufgaben mit den Nullstellen der ersten Ableitung und dem Vorzeichen der zweiten Ableitung argumentiert. Das ist jedoch lediglich eine verkappte Monotonieargumentation, die zudem zunächst nur lokale Extremwerte liefert und in der Regel eine weitere Argumentation erfordert. Vielfach ist eine direkte Monotonieuntersuchung mit dem Vorzeichen der ersten Ableitung einfacher.

Zur Lösung von Extremwertaufgaben wie dieser gibt es wesentlich einfachere Mittel als Differenzialrechnung, wie die nächste Lösung zeigt.

2.12 Neunte Lösung

Für die Funktion *f* aus der 8. Lösung gilt:

$$f(x) = -x^2 + s \cdot x = -\left(\frac{s}{2} - x\right)^2 + \frac{s^2}{4} \leq \frac{s^2}{4}.$$

Wieder gilt: Gleichheit gilt nur für $x = s/2$. Also ist *f* an dieser Stelle maximal mit dem Maximum $s^2/4$.

Falls die Eigenschaften einer quadratischen Parabel bereits auf andere Weise erarbeitet wurden, ist auch folgende Argumentation möglich: Der Graph von *f* ist eine quadratische Parabel mit den Nullstellen $x = 0$ und $x = s$. Ihr Scheitelpunkt *S* liegt dann genau in der Mitte zwischen $x = 0$ und $x = s$, also bei $x = s/2$. Da die Parabel nach unten geöffnet ist, liegt im Scheitelpunkt das Maximum von *f*. Daher ist $f(s/2) = s^2/4$ maximal.

2.13 Kommentar

Viele klassische Schulbuchaufgaben erlauben mehrere Lösungswege. Leider werden sie im Mathematikunterricht nur selten benutzt. Meist dominiert derjenige Weg, der im vorangegangenen Unterricht erarbeitet wurde.

Welcher didaktischen Möglichkeiten man sich dabei vergibt, zeigt Neubrand (2006, S.162-177) auf beeindruckende Weise, sowohl allgemein als auch anhand mehrerer Beispiele.

- Mathematik ist eine offene Disziplin. Wegevielfalt macht das besonders deutlich. Mit jedem Weg gewinnt die Aufgabe an Tiefe. Das mathematische Curriculum darf keinen Turmcharakter annehmen, sondern muss sich zu einem Raum mit vielen wechselseitigen Bezügen entwickeln, in dem sinnvolle Prozesse geschehen. Bei unserem Beispiel besticht, dass die möglichen Wege recht unterschiedlich verlaufen und aus ganz verschiedenen Bereichen (arithmetischer, algebraischer, geometrischer oder infinitesimaler Art) stammen.
- In jedem Falle bieten sie die Möglichkeit, in zuvor erlernte Gebiete zurückzukehren und die dortigen Einsichten aktiv zu nutzen. Sie geben über bloße Reaktionen hinaus Gelegenheit zu verstehendem Lernen und kreativer Leistung.

- Multiple Lösungswege ermöglichen differenzierte Vorschläge und führen zu einer Strukturierung des Unterrichts, die deutlich über das eindimensionale Lehr-Lern-Konzept hinausgeht und insbesondere auch das individuelle Selbstvertrauen der Lerner stärken kann. Dass einfache Beweise auch für junge Lerner machbar und zumutbar sind, zeigt sich insbesondere gerade dann, wenn sie auf mehrere Weise geschehen können und keineswegs immer des genialen Einfalls bedürfen. Hinzu kommt, dass die zu beweisende Vermutung ganz nahe liegt und zunächst auf induktive Weise erreicht werden kann.

Zum Einstieg empfiehlt es sich, anhand eines Zahlenbeispiel (Zwei Zahlen haben die Summe 12. Welches Produkt können sie haben? Welches ist das größtmögliche? Warum?) in das Problem einzusteigen und es dann allgemein anzulegen ($x + y = 12$ und sodann $x + y = s$).

Welcher Weg zunächst dominiert, hängt wahrscheinlich von den Inhalten des vorausgegangenen Unterrichts, vielleicht aber auch von ersten Lösungsideen ab. Man bedenke, dass dieses kleine Problem eventuell den ersten Optimierungsversuch der Lerngruppe darstellt (Schupp, 1992, 2006).

Von Lehrerseite her hilft die u.U. mehrfach gestellte Frage „Geht es auch noch anders, ganz anders?“ und helfen geeignete Hinweise auf bereits bekannte Inhaltsbereiche, z. B. auf binomische Formeln, auf quadratische Gleichungen oder auf die pythagoreische Satzgruppe weiter.

Selbstverständlich können nicht alle o.a. Wege mit derselben Lerngruppe beschritten werden, insbesondere dann nicht, wenn die benötigten Mittel noch nicht vorhanden sind oder unmittelbar erworben werden können. Wohl aber müssen die aufkommenden Ideen korrekt ausgebaut, schriftlich fixiert und schließlich auch verglichen werden („Welcher Beweis gefällt Euch am besten?“ „Warum?“). Das erfordert einige Mühe und kostet Zeit, führt aber auch zu wichtigen Einsichten (noch einmal sei Neubrand erwähnt), die in der Diskussion über die Frage „Hat sich der Aufwand gelohnt?“ geäußert werden können und sich mit negativen Stellungnahmen (z. B. “Ein Beweis genügt doch!“) oder falschen Auffassungen (z. B. „Was ist jetzt eigentlich richtig?“) auseinandersetzen müssen.

Die erwähnte Heterogenität der Mittel sowie ihre unterschiedliche mathematische Wertigkeit erlauben es durchaus, die Aufgabe im Curriculum mehrfach, mit wachsender Anzahl der Sicherungswege einzusetzen. Sie lässt sich mit elementaren Mitteln in der S1 behandeln und in der SII wiederholen sowie ausbauen. Lösungswege kann man umformen, abändern und übertragen. Das kann man auch mit der Fragestellung selbst.

3. Variation durch Dualisieren

Wir vertauschen die Rollen von "Summe" und "Produkt" und fragen z. B.: Was kann man über die Summe zweier positiver Zahlen sagen, deren Produkt gleich 12 ist?

Beispiele: $1+12=13$; $2+6=8$; $3+4=7$; $\sqrt{12}+\sqrt{12}=4\sqrt{3}\approx 6{,}8$; $6+2=8$ usw.

Wir vermuten

Unter allen Paaren x, y positiver reeller Zahlen mit konstantem Produkt $p = x \cdot y$ ist die Summe $s = x + y$ genau dann minimal, wenn $x = y$ ist.

Es erscheint angebracht, sich beim Beweis auf bereits benutzte Hilfen zu beziehen.

3.1 Erste Lösung

Nach der GA-Ungleichung gilt

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{x \cdot y} = \sqrt{p},$$

d. h. $x + y \geq 2\sqrt{p}$. Gleichheit gilt nur für $x = y$. Die minimale Summe ist demnach $2\sqrt{p}$. Sie wird nur erreicht für $x = y = \sqrt{p}$.

In der GA-Ungleichung kommt die Dualisierung besonders deutlich zum Ausdruck: Man kann die Ungleichung nämlich in zwei Richtungen lesen: Hält man die Summe $s = x + y$ fest, so zeigt die GA-Ungleichung, dass das Produkt $x \cdot y$ maximal ist, wenn $x = y$ ist. Das Maximum ist dann $s^2/4$. Hält man dagegen das Produkt $p = x \cdot y$ fest, so ist die Summe $x + y$ minimal, wenn $x = y$ ist. Das Minimum ist dann $2\sqrt{p}$.

In diesem Sinne sind auch das isoperimetrische Problem "größter Flächeninhalt eines Rechtecks bei konstantem Umfang" und das Problem "kleinster Umfang eines Rechtecks bei konstantem Flächeninhalt" dual zueinander und entsprechen den beiden Betrachtungsweisen der GA-Ungleichung.

3.2 Zweite Lösung

Diese Lösung dualisiert den Weg in 2.4. Wir betrachten noch einmal Abb. 2. Dieses Mal ist $x \cdot y$ und damit $h = \sqrt{x \cdot y}$ fest vorgegeben. Mit dieser Einschränkung sind *x* und *y* und damit die Punkte *A* und

B in Abb. 2 variabel. Der Radius $r = (x + y)/2$ des durch *A* und *B* festgelegten Halbkreises ist daher auch variabel, aber in jedem Fall ist $r \geq h$. Die Summe $2r = x + y$ ist folglich minimal, wenn $r = h$ ist. Das ist nur dann der Fall, wenn die Punkte *M* und *F* in Abb. 2 zusammenfallen, wenn also $x = y$ ist.

3.3 Dritte Lösung

Wir geben $p > 0$ vor. Wegen $x \cdot y = p$ ist $y = p/x$. Nun suchen wir das Minimum von $x + y = x + p/x$ mit Hilfe der Funktion

$$s\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}, s(x) = x + \frac{p}{x}.$$

Sie entsteht durch additive Überlagerung der Funktionen $f, g\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ mit $f(x) = x$ und $g(x) = p/x$. Abb. 8 zeigt die Graphen der Funktionen *f*, *g* und *s*.

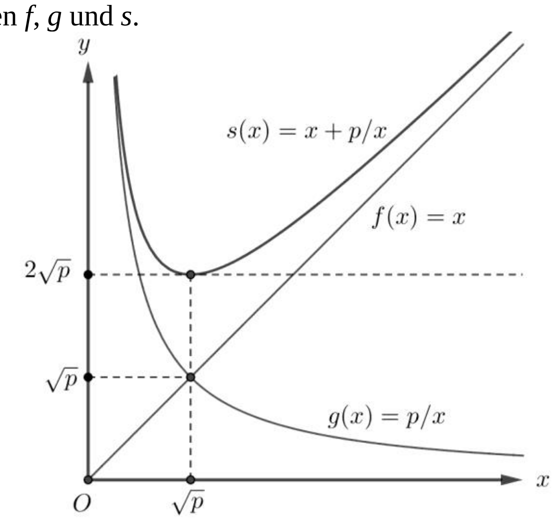

Abb. 8

Aus der GA-Ungleichung folgt wie zuvor

$$s(x) = x + \frac{p}{x} = 2 \cdot \frac{1}{2}\left(x + \frac{p}{x}\right) \geq 2 \cdot \sqrt{x \cdot \frac{p}{x}} = 2 \cdot \sqrt{p}$$

mit Gleichheit nur im Fall $x = p/x$ bzw. $f(x) = g(x)$. Das absolute Minimum von *s* wird daher nur im Fall $x = p/x$, also bei $x = \sqrt{p}$ erreicht. Dort ist $y = p/x = \sqrt{p}$, also $x = y$, und das Minimum ist $2\sqrt{p}$.

In Abb. 8 wird deutlich, dass das Minimum an der Stelle liegt, an der die Graphen von *f* und *g* sich schneiden. Dort ist ja $f(x) = g(x)$. Das Minimum und der Schnittpunkt haben damit gleiche Abszisse. Daraus erschließt sich die Lage des zum Minimum gehörenden Punktes des Graphen von *s*.

Die hier vorgestellte Argumentation bewährt sich allgemein bei der Optimierung von Funktionen des Typs $f(x) = a \cdot x + b/x + c$ (Jäger & Schupp 2013).

3.4 Vierte Lösung

Wir bleiben bei der Funktion *s* aus der dritten Lösung, argumentieren aber nun mit Differenzialrechnung. Wegen $s'(x) = 1 - p/x^2$ gilt:

$$s'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{p}{x^2} > 0 \Leftrightarrow 1 > \frac{p}{x^2} \Leftrightarrow x^2 > p \Leftrightarrow x > \sqrt{p}.$$

Entsprechend ist $s'(x) < 0 \Leftrightarrow x < \sqrt{p}$; und weiter $s'\left(\sqrt{p}\right) = 0$. Also fällt *s* streng monoton im Intervall $\left]0, \sqrt{p}\right]$ und wächst streng monoton im Intervall $\left[\sqrt{p}, \infty\right[$. Daher besitzt *s* das absolute Minimum an der Stelle $x = \sqrt{p}$. Wie in der 3. Lösung ist dann $x = y$ und $s\left(\sqrt{p}\right) = 2\sqrt{p}$ das Minimum.

Theoretisch aufwändiger ist die Argumentation mit der zweiten Ableitung, da nur indirekt auf das Monotonieverhalten von *s* geschlossen wird: Wegen

$$s''(x) = \frac{2p}{x^3} > 0 \text{ für } x > 0$$

fällt s' in $\mathbb{R}_{>0}$ streng monoton. Zusammen mit $s'\left(\sqrt{p}\right) = 0$ folgt daraus $s'(x) < 0$ für $x < \sqrt{p}$ und $s'(x) > 0$ für $x > \sqrt{p}$. Daher fällt *s* streng monoton in $\left]0, \sqrt{p}\right]$ und wächst streng monoton in $\left[\sqrt{p}, \infty\right[$. Also besitzt *s* an der Stelle $x_0 = \sqrt{p}$ das absolute Minimum.

Benutzt man nur $s'\left(\sqrt{p}\right) = 0$ und $s''\left(\sqrt{p}\right) > 0$, so garantiert dies zunächst nur ein lokales Minimum an der Stelle $x_0 = \sqrt{p}$. Der Beweis, dass an dieser Stelle sogar das absolute Minimum liegt, ist dann vergleichsweise anspruchsvoll.

Bei der analytischen Lösung ist die besondere Lage des Minimums in Bezug auf den Schnittpunkt der Graphen von *f* und *g* in Abb. 8 nicht offenkundig und weniger einsichtig als bei der Argumentation mit der GA-Ungleichung.

4. Variation durch Verallgemeinern

Für welche positiven reellen Zahlen x, y, z mit konstanter Summe $s = x + y + z$ ist das Produkt $x \cdot y \cdot z$ maximal? Gibt es überhaupt ein Maximum?

Experimente mit konkreten Zahlen wie oben im Fall zweier Zahlen führen zu der Vermutung:

Unter allen Tripeln x, y, z positiver reeller Zahlen mit konstanter Summe s hat nur dasjenige mit $x = y = z$ *das größte Produkt* $x \cdot y \cdot z$.

Mit $s = x + y + z$ ist im Fall der Gleichheit

$$x = y = z = \frac{s}{3} = \frac{x+y+z}{3},$$

also das arithmetische Mittel *A* der drei Zahlen. Die Vermutung besagt also:

$$x \cdot y \cdot z \le \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$$

oder äquivalent:

$$(3) \qquad \sqrt[3]{x \cdot y \cdot z} \le \frac{x+y+z}{3}$$

mit Gleichheit nur für $x = y = z$.

Das ist wieder die Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel (GA-Ungleichung), nun im Falle dreier Zahlen. Links steht das geometrische, rechts das arithmetische Mittel von *x*, *y* und *z*.

4.1 Erster Lösung für 3 Zahlen

Nachdem wir wissen, dass man ein Produkt von zwei verschiedenen Zahlen vergrößert, wenn man sie durch ihr arithmetisches Mittel ersetzt, könnten wir auch hier eine Ersetzung mit dem arithmetischen Mittel versuchen; falls $x \ne y$ sein sollte, etwa so:

$$x' = y' = \frac{x+y}{2}; \; z' = z.$$

Das vergrößert das Produkt bei Erhalt der Summe:

$$x' \cdot y' \cdot z' = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \cdot z > x \cdot y \cdot z.$$

Allerdings heißt das nur: ein Tripel *x*, *y*, *z*, in dem nicht alle drei Zahlen gleich sind, kann nicht maximales Produkt haben. *Falls* es also überhaupt ein maximales Produkt gibt, kommt nur $x = y = z$ in Frage. *Ob* es aber ein maximales Produkt gibt, ist damit nicht entschieden, auch wenn es naheliegt.

Ein berühmtes Gegenbeispiel: Bei der Suche nach der größten natürlichen Zahl scheiden alle Zahlen oberhalb 1 aus, weil sie durch Quadrieren vergrößert werden könnten. Demnach wäre 1 die größte natürliche Zahl. Es gibt aber keine. Das Argument zeigt nur: Wenn es eine größte natürliche Zahl gibt, dann ist es die 1.

Ersetzt man wiederholt zwei verschiedene der drei Zahlen durch ihr arithmetisches Mittel, so wird zwar ihr wechselseitiger Abstand mit wachsender Schrittzahl kleiner und geht im Grenzfall gegen 0. Das nachzuweisen ist aber aufwändig (Jäger, 2021). Alternativ kann man die Existenz des Maximums mit mehr Theorie beweisen (Stetige reellwertige Funktionen auf einer kompakten Menge haben ein Maximum). Das überschreitet aber den Rahmen der Schulmathematik (Bullen, 2003, S. 85). McLaurin (1729), dem der erste allgemeine Beweis der GA-Ungleichung zugeschrieben wird, hat mit der fortgesetzten Ersetzung von zwei verschiedenen Zahlen durch ihr arithmetisches Mittel argumentiert, jedoch den Nachweis der Existenz des Optimums noch nicht für notwendig erachtet.

Viel geschickter ist es, schrittweise die Zahlen durch ihr arithmetisches Mittel $A = s/3$ zu ersetzen: Wenn alle drei Zahlen schon gleich *A* sind, sind wir fertig. Sonst ist eine der Zahlen < *A*, eine andere > *A*. Wir können $x < A$ und $z > A$ annehmen. Nun ersetzen wir *x* durch *A*, behalten *y* bei und passen *z* so an, dass die Summe *s* erhalten bleibt. Das neue Tripel ist dann: $x' = A$, $y' = y$, $z' = x + z - A$. Der Übergang von *x*, *y*, *z* zu *x′*, *y′*, *z′* vergrößert dann das Produkt, denn

$$\begin{aligned} & x'y'z' = Ayz' > xyz \Leftrightarrow Az' > xz \\ & \Leftrightarrow Az' - xz > 0 \Leftrightarrow A\left(x + z - A\right) - xz > 0 \\ & \Leftrightarrow A(x - A) - z(x - A) = (x - A)(A - z) > 0. \end{aligned}$$

Das ist wegen $x < A < z$ richtig.

Falls nach diesem Schritt noch nicht alle drei Zahlen gleich sein sollten, muss $y' \ne z'$ sein. Dann ersetzen wir *y′* und *z′* durch ihr arithmetisches Mittel und vergrößern damit wieder das Produkt. Das arithmetische Mittel muss dann aber *A* selbst sein, weil ja die Summe erhalten bleibt. Das heißt: $x \cdot y \cdot z \le A^3$ und Gleichheit gilt nur, wenn $x = y = z$ ist.

4.2 Zweite Lösung für 3 Zahlen

In unserem Tripel *x*, *y*, *z* ersetzen wir zunächst *x* und *y* durch ihr arithmetisches Mittel und erhalten gemäß der GA-Ungleichung für zwei Zahlen

$$x \cdot y \cdot z \le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \cdot z = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \cdot \left(s - (x+y)\right).$$

Mit $t = \frac{x+y}{2}$ ist also $x \cdot y \cdot z \le t^2 \cdot z = t^2\left(s - 2t\right)$. Wegen $x + y < s$ muss $0 < t < s/2$ sein. Wie groß $t^2 \cdot \left(s - 2t\right)$ werden kann, lässt sich wie gewohnt analytisch bestimmen. Dazu definieren wir die Funktion

$$f\colon \left]0, \frac{s}{2}\right[\to \mathbb{R}, f(t) = t^2 \cdot (s - 2t).$$

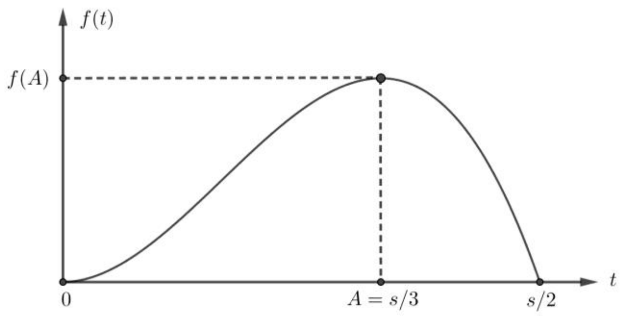

Abb. 9

Es ist $A = s/3 < s/2$. Nun gilt

$$f'(t) = 2t \cdot (s - 3t) = 6t \cdot (A - t),$$

weswegen $f'(t) > 0$ für $0 < t < A$, $f'(t) < 0$ für $A < t < s/2$ und $f'(A) = 0$ ist. Daher wächst f streng monoton bis A, fällt streng monoton ab A und besitzt somit in A (und nur dort) das absolute Maximum. Also gilt

$$x \cdot y \cdot z \le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \cdot (s - (x+y)) = f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$
$$\le f(A) = A^2 \cdot (s - 2A) = A^3.$$

Gleichheit gilt nur, wenn beide Ungleichungen Gleichungen sind. Ist die linke Ungleichung eine Gleichung, so ist $x = y$. Weil f nur für $t = A$ absolut maximal ist, gilt $f(t) < f(A)$ für alle $t \ne A$ und $f(t) = f(A)$ nur für $t = A$. Geht die rechte Ungleichung in die Gleichung

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(A)$$

über, so muss $(x+y)/2 = A$ sein. Zusammen mit $x = y$ folgt zunächst $x = y = A$ und damit auch $z = 3A - (x+y) = 3x - 2x = x = A$.

Das beweist (3) in der Form $x \cdot y \cdot z \le A^3$ mit Gleichheit nur im Fall $x = y = z = A$.

4.3 Sechs geometrische Varianten

Wir untersuchen Quader mit den Kantenlängen x, y und z. Das Volumen ist $V = x \cdot y \cdot z$, die Oberfläche $F = 2 \cdot (xy + xz + yz)$ und die Kantensumme $4 \cdot (x + y + z)$.

(a) *Welcher unter allen Quadern mit gleicher Kantensumme hat das größte Volumen?*

Dazu dual:

(b) *Welcher unter allen Quadern mit gleichem Volumen hat die kleinste Kantensumme?*

Die Antwort ist in beiden Fällen: der Würfel. Das folgt beide Male sofort aus der GA-Ungleichung (3) für die die drei Zahlen x, y und z.

(c) *Welcher unter allen Quadern mit konstantem Volumen hat die kleinste Oberfläche?*

Dazu dual:

(d) *Welcher unter allen Quadern mit konstanter Oberfläche hat das größte Volumen?*

Die Antwort ist auch hier: der Würfel. Denn die GA-Ungleichung (3) sagt, jedoch mit xy, yz und xz anstelle von x, y und z

$$V^{2/3} = (x \cdot y \cdot z)^{2/3} = \sqrt[3]{xy \cdot yz \cdot xz} \le \frac{xy + yz + xz}{3} = \frac{F}{6},$$

wobei Gleichheit nur für $xy = yz = xz$ gilt, d. h. für $x = y = z$. Ist V konstant, so ist F minimal im Gleichheitsfall; ist F konstant, so ist V maximal im Gleichheitsfall.

Auch das isoperimetrische Problem für Dreiecke wird durch die GA-Ungleichung gelöst:

(e) *Welches unter allen Dreiecken gleichen Umfangs hat den größten Flächeninhalt?*

Und dazu dual:

(f) *Welches unter allen Dreiecken gleichen Flächeninhalts hat den kleinsten Umfang?*

Die Vermutung ist beide Male: das gleichseitige Dreieck.

Hier hilft die Heron-Formel für den Inhalt eines Dreiecks: Dessen Seitenlängen seien a, b und c. Sein Umfang ist dann $U = a + b + c$; es sei $t = U/2$. Dann berechnet sich der Flächeninhalt F des Dreiecks nach der Heron-Formel so:

(4) $$F = \sqrt{t \cdot (t-a) \cdot (t-b) \cdot (t-c)}.$$

Wir setzen $x = t - a$, $y = t - b$, $z = t - c$. Das sind positive Zahlen, denn in einem Dreieck ist die Summe zweier Seiten immer größer als die dritte. Nun gilt nach der GA-Ungleichung

$$F = \sqrt{t} \cdot \sqrt{x \cdot y \cdot z} \le \sqrt{t} \cdot \frac{x+y+z}{3}$$
$$= \sqrt{t} \cdot \frac{3t - (a+b+c)}{3} = \frac{1}{6\sqrt{2}} U^{3/2}.$$

Ist U konstant, so ist F maximal, wenn $x = y = z$ ist, wenn also $a = b = c$ ist. Ist F konstant so ist U in dem gleichen Fall minimal. Das bestätigt unsere Vermutung.

4.4 Der allgemeine Fall: 1. Beweis

Beide Vorgehensweisen aus 4.1 und 4.2 können wir verallgemeinern.

Unter allen n-Tupeln $x_1, \cdots, x_n$ positiver reeller Zahlen mit konstanter Summe s_n hat nur dasjenige maximales Produkt p_n, für das $x_1 = \cdots = x_n$ ist.

Und hierzu dual:

Unter allen n-Tupeln $x_1, \cdots, x_n$ positiver reeller Zahlen mit konstantem Produkt p_n hat nur dasjenige minimale Summe s_n, für das $x_1 = \cdots = x_n$ ist.

Beide Aussagen entsprechen wieder zwei Sichtweisen auf die Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel. Für positive reelle Zahlen $x_1, ..., x_n$ setzen wir $s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ und $p_n = x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n$. Das geometrische Mittel ist $G_n = \sqrt[n]{p_n}$, das arithmetische Mittel $A_n = s_n / n$. Dann besagt die allgemeine GA-Ungleichung:

(5) $G_n \le A_n$ mit Gleichheit nur im Fall $x_1 = \cdots = x_n$

oder äquivalent

(6) $p_n \le A_n^n$ mit Gleichheit nur für $x_1 = \cdots = x_n$.

Hieraus folgen wie zuvor unsere beiden, zueinander dualen Behauptungen.

Wir beweisen (5) zunächst mit der Methode aus 4.1. Die Idee dazu können wir aus dem Fall $n = 3$ übernehmen: Sind die Zahlen $x_1, x_2, \cdots, x_n$ alle gleich, sind wir fertig. Sind sie es nicht, so gibt es ein x_i mit $x_i < A_n$ und ein x_j mit $x_j > A_n$. In unserem *n*-Tupel ersetzen wir nun x_i durch $x_i' = A_n$ und x_j durch $x_j' = x_i + x_j - A_n$. Die restlichen Werte behalten wir bei. Dabei ändert sich die Summe nicht aber das Produkt wächst. Dazu müssen wir nur $x_i \cdot x_j < x_i' \cdot x_j' = A_n \cdot x_j'$ bestätigen. Wie im Fall dreier Zahlen gilt wegen $x_i < A_n < x_j$

$$\begin{aligned} A_n \cdot x_j' - x_i \cdot x_j &= A_n \cdot \left(x_i + x_j - A_n\right) - x_i \cdot x_j \\ &= \left(A_n - x_i\right) \cdot \left(x_j - A_n\right) > 0. \end{aligned}$$

Führen wir diesen Ersetzungsschritt wiederholt durch, so werden unter Beibehaltung der Summe die Zahlen schrittweise durch A_n ersetzt, wobei jedes Mal das Produkt wächst. Nach höchstens $n-1$ Schritten sind alle Werte gleich A_n und ihr Produkt ist A_n^n. Formal präzise lässt sich das mit vollständiger Induktion formulieren.

4.5 Der allgemeine Fall: 2. Beweis

Wir beweisen (6) nun analog zu 4.2 mit vollständiger Induktion.

Für $n = 2$ und $n = 3$ haben wir das schon getan. Nun zeigen wir, dass aus der Gültigkeit von (6) für *n* die für $n+1$ folgt, d.h. dass $p_{n+1} \le A_{n+1}^{n+1}$ ist und Gleichheit nur gilt, wenn alle x_i gleich sind. Aus der Induktionsvoraussetzung $p_n \le A_n^n$ folgt nach Multiplikation mit x_{n+1}

$$\begin{aligned} p_{n+1} = p_n \cdot x_{n+1} \le A_n^n \cdot x_{n+1} &= A_n^n \cdot \left(s_{n+1} - s_n\right) \\ &= A_n^n \cdot \left(s_{n+1} - n \cdot A_n\right). \end{aligned}$$

Dabei ist $s_{n+1} - n \cdot A_n = x_{n+1} > 0$. Es genügt also nachzuweisen, dass

$$A_n^n \cdot \left(s_{n+1} - n \cdot A_n\right) \le A_{n+1}^{n+1}$$

ist. Hierzu definieren wir die Funktion

$$f\colon \left]0, \frac{s_{n+1}}{n}\right[\to \mathbb{R}_{>0}, f(t) = t^n \cdot (s_{n+1} - n \cdot t).$$

Wegen $A_{n+1} = \frac{s_{n+1}}{n+1} < \frac{s_{n+1}}{n}$ liegt A_{n+1} im Definitionsbereich von *f*. Nun ist zu zeigen:

$$f\left(A_n\right) \le A_{n+1}^{n+1}.$$

Es gilt

$$f\left(A_{n+1}\right) = A_{n+1}^n \cdot \left(s_{n+1} - n \cdot A_{n+1}\right) = A_{n+1}^{n+1}$$

und wie wir oben gesehen haben $p_{n+1} \le f\left(A_n\right)$.

Wenn wir zeigen können, dass *f* nur für $t = A_{n+1}$ absolut maximal ist, folgt daraus wie gewünscht

$$p_{n+1} \le f\left(A_n\right) \le f\left(A_{n+1}\right) = A_{n+1}^{n+1}.$$

Wir bestimmen nun das absolute Maximum von *f* mit den üblichen analytischen Methoden.

$$\begin{aligned} f'(t) &= n \cdot t^{n-1} \cdot \left(s_{n+1} - (n+1) \cdot t\right) \\ &= n \cdot (n+1) \cdot t^{n-1} \cdot \left(A_{n+1} - t\right). \end{aligned}$$

Daher ist $f'(t) > 0$ für $t < A_{n+1}$, $f'\left(A_{n+1}\right) = 0$ und $f'(t) < 0$ für $t > A_{n+1}$. Also wächst *f* streng monoton im Intervall $\left]0, A_{n+1}\right]$, fällt streng monoton im

Intervall $\left[A_{n+1}, \frac{s_{n+1}}{n} \right[$ und hat daher in $t = A_{n+1}$ (und nur dort!) das absolute Maximum. Damit ist die Ungleichung bewiesen.

Gleichheit liegt nur vor, wenn beide Ungleichungen

$$p_{n+1} \le f\left(A_n\right) \le f\left(A_{n+1}\right) = A_{n+1}^{n+1}$$

Gleichungen sind. Nach der Induktionsvoraussetzung gilt die Ungleichung $p_{n+1} \le f\left(A_n\right)$ nur für $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = A_n$, während die Ungleichung $f\left(A_{n+1}\right) = A_{n+1}^{n+1}$ nur gilt für $A_n = A_{n+1}$ gilt, da A_{n+1} die einzige Stelle ist, an der das Maximum vorliegt. Dann folgt

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (n+1) \cdot A_{n+1} - n \cdot A_n \\ &= (n+1) \cdot A_n - n \cdot A_n = A_n \end{aligned}$$

also $x_1 = x_2 = \cdots = x_n == x_{n+1} = A_n = A_{n+1}$.

4.6 Eine geometrische Variante

Welches unter allen Sehnenvierecken gleichen Umfangs hat den größten Flächeninhalt?

oder dual:

Welches unter allen Sehnenvierecken gleichen Flächeninhalts hat den kleinsten Umfang?

Auch dies ist eine Variante des isoperimetrischen Problems. Wir erwarten: das optimale Viereck ist das Quadrat.

In einem Sehnenviereck mit den Seiten *a*, *b*, *c*, *d* (Abb. 10) ist nach der Formel von Brahmagupta der Flächeninhalt gegeben durch

$$F = \sqrt{(t-a)(t-b)(t-c)(t-d)},$$

wobei $t = (a+b+c+d)/2 = U/2$ der halbe Umfang ist.

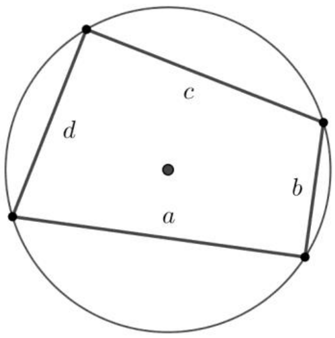

Abb. 10

Nach der GA-Ungleichung, nun für den Fall $n = 4$, haben wir

$$\begin{aligned} F &= \sqrt[4]{(t-a)(t-b)(t-c)(t-d)}^2 \\ &\le \left(\frac{(t-a)+(t-b)+(t-c)+(t-d)}{4} \right)^2 = \frac{t^2}{4} = \frac{U^2}{16}. \end{aligned}$$

Gleichheit gilt nur, wenn

$$t-a = t-b = t-c = t-d$$

ist, wenn also $a = b = c = d$ ist. Dann ist das Viereck ein Quadrat mit der Seitenlänge $t/2 = U/4$. Die obige Ungleichung können wir wieder von beiden Seiten lesen: Ist *U* konstant, so ist *F* maximal im Fall des Quadrats; ist *F* konstant, so ist *U* minimal im Fall des Quadrats.

5. Begriffsvariation im Maximum-Problem

5.1 Konstante Summe, aber Potenz statt Produkt

Für welche positiven reellen Zahlen x, y mit konstanter Summe s ist die Potenz x^y bzw. x^{s-x} maximal? Gibt es überhaupt ein Maximum?

Beispiel: Sei etwa s = 10. Wir rechnen: $1^9 = 1$, $2^8 = 256$, $3^7 = 2187$, $4^6 = 4096$, $5^5 = 3125$, $6^4 = 1296$, $7^3 = 343$, $8^2 = 64$, $9^1 = 9$. Wir sehen das Anschwellen der Werte zur Mitte hin und das Abschwellen zu den beiden Rändern, wissen weiter, dass die Potenzbildung nicht kommutativ ist $\left(3^7 \ne 7^3\right)$ und bemerken schließlich, dass die maximale Potenz, wenn vorhanden, nicht wie noch bei der Summe über die Gleichheit der Partner *x*, *y* erreicht wird ($4^6 > 5^5$). Aber wo dann? Und gibt es sie überhaupt?

Wir untersuchen in Analogie zur infinitesimalen Diskussion der Produktfunktion die Funktion

$$f\colon]0, s[\to \mathbb{R}_{>0}, f(x) = x^{s-x}.$$

Hier kann man mit einem CAS wie GeoGebra experimentieren. Abb. 11 zeigt den Graph von *f* für $s = 1/2$, $s = 1$ und $s = 2$. Wir müssen beachten, dass der Definitionsbereich jeweils *s* als obere Grenze besitzt.

Wir vermuten: Für $s \le 1$ wächst *f* streng monoton und zwar gegen 1, erreicht aber 1 nicht, weil *s* selbst nicht zum Definitionsbereich gehört. In diesem Fall gibt es kein Maximum. Für $s > 1$ wächst anscheinend *f* zunächst bis zu einer gewissen, von *s* abhängigen Stelle x_0 und fällt anschließend. Das hätte zur Folge: *f* besitzt im Punkt x_0 das absolute Maximum.

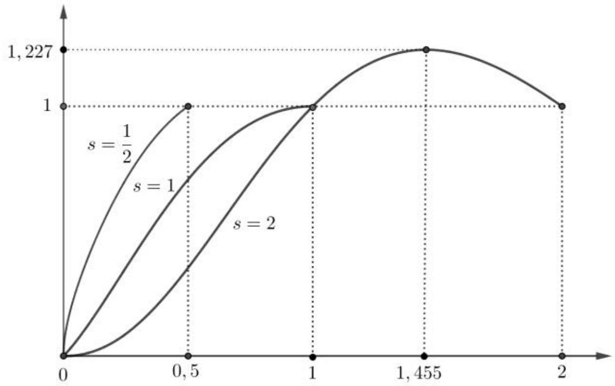

Abb.11

x_0 können wir näherungsweise der Zeichnung entnehmen. Können wir x_0 auch exakt bestimmen? Das Monotonieverhalten können wir vielleicht mit Hilfe des Vorzeichens der ersten Ableitung ermitteln. Hier ist

$$f'(x) = x^{s-x}\left(\frac{s}{x} - 1 - \ln x\right)$$

und damit $f'(x) > 0 \Leftrightarrow s/x - 1 > \ln x$. Diese Ungleichung lässt sich aber nicht elementar lösen. Das gilt auch für die Gleichung $s/x - 1 = \ln x$, deren Lösung den Punkt x_0 angibt, der für ein Maximum in Frage kommt. Allenfalls können wir diese Gleichung für konkrete Werte von *s* näherungsweise numerisch lösen, z. B. mit dem Newton-Verfahren oder mit Hilfe eines CAS.

Wir sehen an diesem Beispiel auch die Problematik einer nur auf eine schematische Betrachtung der Nullstellen von f' und des Vorzeichens von f'' reduzierten Extremwertanalyse. Für $s \le 1$ existiert hier kein Maximum (was wir bisher nicht bewiesen haben). Beachten die Lernenden den Definitionsbereich nicht und berücksichtigen nur den Funktionsterm, würden sie etwa zu folgendem Fehlschluss verleitet: Für $s = 1/2$ ist näherungsweise $f'(0,73) = 0$ und $f''(0,73) \approx -2,48$. Daraus würde dann auf ein (lokales) Maximum geschlossen. Aber 0,73 gehört nicht mehr zum Definitionsbereich! Der Schluss ist also falsch!

Wegen $x, y > 0$ gehören 0 und *s* nicht zu unserem Definitionsbereich. Daher gibt es ja für $0 < s \le 1$ kein Maximum. Würden wir dagegen in der Aufgabenstellung $x = 0$ und $y = 0$ zulassen (jedoch $s > 0$), wäre $[0, s]$ der angemessene Definitionsbereich. Für $s \le 1$ existiert dann das absolute Maximum und zwar an der Stelle $x = s$ mit dem Maximalwert $s^0 = 1$. Dieses Maximum leitet sich aber nicht aus Nullstellen der ersten Ableitung her, sondern etwa so:

Die Ungleichung $f(x) \le 1$, also $x^{s-x} \le 1$, ist äquivalent zu $(s-x) \cdot \ln x \le 0$, weil ln streng monoton wächst und $\ln 1 = 0$ ist. Diese Ungleichung ist aber richtig, weil $s - x \ge 0$ ist für $0 \le x \le s$ und $\ln x \le 0$ ist für $0 < s \le 1$. Also ist $f(s) = 1$ absolut maximal.

Ähnlich könnten wir jetzt auch beweisen, dass bei der Voraussetzung $x, y > 0$ kein Maximum für $0 < s \le 1$ existiert.

5.2 Konstantes Produkt, aber Potenz statt Summe

Noch etwas mutiger fragen wir jetzt:

Für welche positiven reellen Zahlen x, y mit konstantem Produkt p ist die Potenz x^y bzw. $x^{p/x}$ maximal? Gibt es überhaupt ein Maximum?

Ein Beispiel: Im Falle $p = 12$ ergeben sich $1^{12} = 1$, $2^6 = 64$, $3^4 = 81$, $4^3 = 36$, $6^2 = 36$, $12^1 = 12$. Natürlich müssen *x* und *p* keine natürlichen Zahlen sein. Die Potenzen steigen zunächst an und fallen dann ab. Wir suchen hier das Maximum der Funktion

$$f: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}, f(x) = x^{p/x},$$

denn *x* kann nun, unabhängig von *p*, eine beliebige positive reelle Zahl sein.

Eine Untersuchung mit einem CAS legt die Vermutung nahe, dass *f* bis zu einer Zahl in der Nähe von 3 monoton steigt und dann fällt und dass diese Zahl nicht von *p* abhängt. Abb. 12 zeigt die Graphen von *f* für $p = 2, 3, 4$.

Wir versuchen erneut, das Maximum über das Monotonieverhalten, und dieses über das Vorzeichen der Ableitung zu bestimmen. Es ist

$$f'(x) = x^{p/x} \cdot \left(\frac{p}{x^2} - \frac{p \cdot \ln x}{x^2}\right) = x^{p/x} \cdot \frac{p}{x^2} \cdot (1 - \ln x).$$

Die ersten beiden Faktoren sind immer positiv, so dass gilt

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow x < e$$

und genauso $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > e$, sowie $f'(e) = 0$. Die Funktion wächst also streng monoton bis zum Punkt $x_0 = e \approx 2,718$ und fällt anschließend streng monoton. Daher besitzt sie an der Stelle $x_0 = e$ das absolute Maximum mit dem Wert $e^{p/e}$. Diese Maximumstelle ist offenbar und erstaunlicherweise unabhängig vom gewählten Produkt *p*. Auch das geometrische Mittel $\sqrt{p}$ der beiden Zahlen x und p/x spielt keine Rolle.

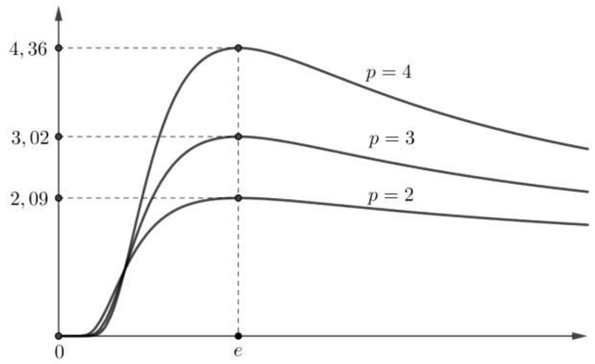

Abb. 12

5.3 Vergebliche Variationen

Zwei Beispiele.

Es ist zwecklos, im Ausgangsproblem statt nach dem „Maximum“ nach dem „Minimum“ zu fragen. Bewegt sich einer der Summanden x, y gegen 0, so auch das Produkt $x \cdot y$, erreicht 0 aber nicht, da der zweite Faktor durch s nach oben beschränkt ist. Es existiert also kein Minimum.

Ähnliches gilt für das duale Problem: Wenn das Produkt konstant ist, so kann dennoch die Summe beliebig groß werden: $s = x + p/x$, denn wenn x sich gegen 0 bewegt, bewegt sich p/x gegen unendlich. Es existiert also kein Maximum.

Ebenso, wenn man „Summe“ durch „Differenz“ ersetzt. Ist $v = y - x$ konstant, also $y = x + v$, erhält man das Produkt $x \cdot (x+v)$, welches wie x jeden Wert größer 0 erreichen kann.

5.4 Kommentar

Es sind hier drei verschiedene Variationsstrategien benutzt worden Wir haben zwei Begriffe des Ausgangsproblem (Summe und Produkt) miteinander vertauscht, wir haben Begriffe abgeändert (Summe gegen Produkt, Produkt bzw. Summe gegen Potenz) und wir haben das Problem dualisiert, erweitert und verallgemeinert.

Es gibt erstaunlich viele solcher Strategien; Schupp (2002) hat sie zusammengefasst und bewertet. Wie schon bei den Lösungswegen wird der Mathematikunterricht ihrer Vielfalt kaum gerecht. Das ist schade, denn ihre aktive Verwendung bringt ganz offensichtliche Vorteile, welche an die der Wegevielfalt erinnern.

- So manche Aufgabe erhält erst durch ihr Variieren ihre wirkliche Bedeutung. Man vergleiche, wie bei der musikalischen Darbietungsform „Thema mit Variationen“ das Thema sich erst durch die Variationen allmählich aufschließt.
- Aufgaben müssen vom Lerner hingenommen werden. Ihre Variation und deren Bearbeitung hingegen setzen ähnlich wie bei der Wegefindung kreative Fähigkeiten frei, motivieren für den jeweiligen Stoff und schaffen Interesse anstelle bloßer Pflicht. Dass man bei der Potentiation auf schulische Grenzen infinitesimaler Art stößt, gehört dazu. Immerhin kann man notfalls numerisch und graphisch vorgehen.
- Notwendiges, aber nicht selten eintöniges Üben wird unterbrochen durch ein Denken, das mathematische Kenntnisse und Einsichten vernetzen kann. Einfache Variationen ermöglichen es, dass auch lernschwächere Schüler zu Erfolgen kommen. Selbst dort, wo oberflächlich naheliegende Variationen eines Problems sich als haltlos erweisen, ist damit eine gewisse Einsicht, eine Umrundung des Sachverhalts verbunden.
- Variieren eines Problems kann Hilfe schaffen bei seiner Lösung. Das gilt insbesondere, wenn man den Kontext wechselt, in dem es zunächst steht.

Insgesamt trägt es dazu bei, Inhalte nicht nur zu übernehmen und einzuüben, sondern auch zu reflektieren. „Denken als Ordnen des Tuns“ (Aebli 1980/81) ist notwendig, gleichermaßen aber auch das Nachdenken als Ordnen des Denkens.

Dass man bei unserer Aufgabe sowohl die Lösungen als auch die Fragen unmittelbar, ja fast naiver Weise abändern kann, macht sie besonders wertvoll.

Literatur

Aebli, H. (1980/81). *Denken, das Ordnen des Tuns*. Stuttgart: Klett-Cotta.

Bulajich, R., Gómez Ortega, J. A. & Valdez Delgado, R. (2009). *Inequalities, A Mathematical Olympiad Approach*. Basel: Birkhäuser.

Bullen, P. S. (2003). Handbook of means and their Inequalities. Dordrecht: Kluwer.

Cvetkovski, Z. (2012). *Inequalities - Theorems, Techniques and Selected Problems*. Heidelberg: Springer.

Jäger, J. (2021). A Note on the McLaurin Proof of the GA-Inequality. *Octogon Mathematical Magazine* 29 (1), 64-67.

Jäger, J. & Schupp, H. (2013). Aufschließende Aufgaben II. In *MU – Der Mathematikunterricht, 59*(2), 16-27.

McLaurin, C. (1729). A second Letter to Martin Folkes, Esq.; concerning the Roots of Equations, with the Demonstration of other Rules in Algebra. *Philosophical Transactions, 36*, 59-96.

Neubrand, M. (2006). Multiple Lösungswege für Aufgaben: Bedeutung für Fach, Lernen, Unterricht und Leistungserfassung. In Blum, W., Drüke-Noe, C., Hartung, R. & Köller, O. (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik* (S.162-111). Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

Schupp, H. (1992). *Optimieren – Extremwertbestimmung im Mathematikunterricht*. Mannheim: B.I. Wissenschaftsverlag.

Schupp, H. (2002). *Thema mit Variationen – Aufgabenvariation im Mathematikunterricht*. Hildesheim: Verlag Franzbecker.

Schupp, H. (2006). Variation von Aufgaben. In W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung, O. Köller (Hrsg.), Bildungsstandards Mathematik (S. 152-161). Cornelsen Verlag Scriptor. URL: https://edoc.hu-berlin.de/bitstream/handle/18452/3776/4.pdf

Anschrift der Verfasser

Die letzte berufliche Adresse von Hans Schupp war:
Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik
Postfach 151150
66041 Saarbrücken

Joachim Jäger
Hochschule für Technik und Wirtschaft des Saarlandes
Fakultät für Wirtschaftswissenschaften
Waldhausweg 14
66123 Saarbrücken
joachim.jaeger@htw-saarland.de
hajo.jaeger@t-online.de