Beliefs über Beweise(n) im Mathematikunterricht – eine empirische Studie unter Lehramtsstudierenden

KINGA SZŰCS, ERFURT

***Zusammenfassung**: Beweise spielen in der Mathematik eine zentrale Rolle und stellen das typische Instrument mathematischen Tuns dar. Um also ein authentisches Bild von der Mathematik in der Schule zu vermitteln, ist die Auseinandersetzung mit Beweisen im Mathematikunterricht erforderlich. Dennoch verschwanden sie in den letzten Jahren größtenteils aus dem Schulunterricht, was zugleich zur Ausdehnung der Kluft zwischen Schul- und Hochschulmathematik beiträgt und hierdurch – neben weiteren Gründen – zu Schwierigkeiten bei Studierenden führen kann. Letztere zeigen sich u. a. in hohen Abbruchquoten in mathematisch-naturwissenschaftlichen Studiengängen. Erwünscht wäre daher das durchgehende Einbinden von Beweisen in den Mathematikunterricht und hierdurch das Wiederherstellen ihres Stellenwertes im schulischen Kontext. Die Veränderung der Unterrichtspraxis würde begünstigen, wenn die angezielte Neugestaltung des Mathematikunterrichts mit den existenten Beliefs von Mathematiklehrkräften überwiegend im Einklang steht. Um ein Bild von den vorhandenen Beliefs angehender Mathematiklehrkräfte zu ermitteln, wurde eine Befragung unter Lehramtsstudierenden der Mathematik verschiedener Schulformen durchgeführt. Die Befunde lassen einerseits eine dürftige Erfahrungslage mit Beweisen in der Schule vermuten, sie zeigen aber anderseits ein vielversprechendes Gesamtbild der einschlägigen Beliefs, die es hinsichtlich des Ziels der Einbindung von Beweisen in den Mathematikunterricht an einigen Stellen zu ergänzen und zu modifizieren gilt.*

***Abstract:** Proofs play a central role in mathematics and are the characteristic tool for pursuing it. Thus, to convey an authentic view on mathematics in school, it is necessary facing proofs in mathematics classrooms. Nevertheless, they have largely disappeared from school curricula in recent years, which at the same time contributes to widening the gap between school and university mathematics and – among other reasons – can lead to difficulties for students. The latter is reflected, among other things, in high dropout rates in mathematics and science degree programs. Therefore, permanent integrating proofs into mathematics classrooms and re-establishing their reputation in school would be welcome. However, it would facilitate altering classroom practices if desired redesigning of mathematics in school fits with existing beliefs of mathematics teachers related to proofs. For getting a picture of pre-service teachers´ relevant experiences and existing beliefs, a questionnaire has been carried out. The data let suspect fragmentary and needy experiences with proofs in school on the one hand, but also promising overall picture of related beliefs on the other hand, which still should be slightly completed and modified to achieve the set aim to embedding of proofs in mathematics classrooms.*

1. Einleitung

Mathematik hat verschiedene Gesichter: Sie ist einerseits ein Werkzeug, ein Hilfsmittel zur Beschreibung und Lösung praktischer Probleme in vielen Lebensbereichen; andererseits eine systematisch aufgebaute Theorie; überdies ist sie ein Forschungs- und Problemlösefeld sowie ein Spielraum für Gedankenexperimente und eine besondere Sprache bestehend aus den für sie typischen Zeichen und weiteren Kommunikationsmitteln (Wittmann, 2021, S. 66; vgl. auch Loos & Ziegler, 2015). Fokussiert man Mathematik als zusammenhängende Theorie, so spielen Beweise eine zentrale Rolle, da sie eines der wichtigsten Mittel der Erkenntnisgewinnung und -sicherung darstellen (Hanna & Barbeau, 2008, S. 345; Jahnke & Ufer, 2015, S. 332). Eigentlich gilt noch mehr: Das, was die Mathematik zu einer *Wissenschaft* macht, sind eben die Beweise (Mac Lane, 1997, S. 150), weil sie einerseits eine strenge, deduktive Strukturierung der Inhalte ermöglichen und andererseits neues Wissen generieren. So spricht Heintz (2000, S. 14, 210) Beweisen in der Mathematik eine identitätskonstitutive Rolle zu und formuliert in diesem Zusammenhang, die Mathematik definiere sich über den Beweis. Rav (1999, S. 6) und Ziegler (2008, S. 409) behaupten, Beweise seien das Herzstück der Mathematik, der Königsweg, um analytische Mittel zu erschaffen und Entwicklung innerhalb der Disziplin anzuregen. Diese zentrale Rolle der Beweise in der Mathematik als zusammenhängende Theorie bestätigt auch der Blick in die Geschichte der Mathematik: In der vorgriechischen Mathematik, die als eine Summe von empirischen Kenntnissen zur Lösung praktischer Aufgaben gekennzeichnet werden kann, existierte der Begriff Beweis nicht. Die Erkenntnisse hatten keine Allgemeingültigkeit und es wurde auch nicht versucht, einen Beweis für die Sätze zu liefern (vgl. Szabó, 2004, S. 50). Die Mathematik ist erst bei den Pythagoreern im 6. Jh. v. Ch. im antiken Griechenland zu einer Wissenschaft geworden, und zwar dadurch, „dass sie sich […] mit der bloss empirischen

Erfahrung der Tatsachen nicht begnügte, sondern erkannte, dass meistens die alleroffenbarsten Tatsachen selbst des Beweises bedürftig sind." (Szabó, 2004, S. 60)

Dieser unbestritten hohe Stellenwert der Beweise innerhalb der Mathematik soll nach Meinung einiger Wissenschaftler:innen mit einer vergleichsweise hohen Bedeutung von Beweisen im Mathematikunterricht einhergehen (Hanna & Jahnke, 1996, S. 877; Brunner, 2014, S. 2; Stylianides, Bieda & Morselli, 2016, S. 315), aber aktuell werden Beweise in der Schule – bis auf wenige Ausnahmen – kaum thematisiert (Brunner, 2014, S. 2). Auf eine starke Diskrepanz zwischen Anforderungen und Realität bezogen auf Beweise im Mathematikunterricht verweisen auch Nagel und Reiss (2016, S. 304). Zudem lässt die Forderung im Maßnahmenkatalog der DMV, GDM und MNU nach exemplarischer Konkretisierung der Bildungsstandards zu Begründungs- und Beweisstrategien (Köpf, Götze, Eichler & Heckmann, 2019, S. 2) ebenfalls auf einen Nachholbedarf bei der Thematisierung von Beweisen in der Schule schließen.

Das weitgehende Verschwinden der Beweise aus dem Schulunterricht in den letzten Jahren führte dazu, dass in der Schule ein nur zum Teil authentisches Bild von der Mathematik vermittelt wurde und bis heute wird (Szűcs, 2020, S. 85). Für die authentische Vermittlung von Mathematik ist nämlich – neben der Thematisierung authentischer Inhalte in realen oder realistischen Kontexten sowie einer authentischen Begegnung und Auseinandersetzung der Lernenden mit der Mathematik (Lutz-Westphal, 2006, S. 4) – das Kennenlernen und Aneignen der für die Mathematik spezifischen Arbeitsweisen von besonderer Bedeutung (Lutz-Westphal, 2008, S. 500), zu denen Beweise als typisches Instrument mathematischen Tuns gehören (Leuders, 2017, S. 27 vgl. auch Jahnke & Ufer, 2015, S. 332). In der Schule wird Mathematik mit Fokus auf die Lösung praktischer Aufgaben vermittelt, wobei Beweise eher eine „dekorative" Funktion haben, während an der Hochschule die theoretische Organisation des mathematischen Inhalts und die Begründung des Wissens sowie die Vorstellung von Beweisen im Mittelpunkt stehen (Gueudet et al., 2016, S. 19f.). Somit wird in der Schule die für die Mathematik typische Sicherung des Wissens durch Axiome, Sätze und Beweise ausgeklammert, während an der Hochschule das Entstehen mathematischer Fragestellungen verborgen bleibt. Diese unterschiedliche Schwerpunktsetzung kann sogar dazu führen, dass Studierende keinen Zusammenhang außer dem Wort „Mathematik" zwischen Mathematik in der Schule und Mathematik an der Hochschule erkennen (Witzke, 2015, S. 305). Demnach wird auch klar, dass das Verschwinden der Beweise aus der Schule – neben anderen ungünstigen Faktoren wie die Reduktion der Stundenzahlen oder die unterschiedliche Rolle und Bedeutung digitaler Hilfsmittel –, zu einer inhaltlichen Kluft zwischen Schul- und Hochschulmathematik beitrug (Nagel & Reiss, 2016, S. 301), was auch zu hohen Abbruchquoten in mathematisch-naturwissenschaftlichen Studiengängen (Heublein & Schmelzer, 2018) führt und Maßnahmen wie Brückenkurse, Tutorien, Camps notwendig macht.

Um ein vollständigeres Bild von der Mathematik mit Beweisen als Mittel der Erkenntnisgewinnung und -sicherung in der Schule aufzubauen, sollte der Mathematikunterricht diese als Pflichtbestandteil (wieder) enthalten (vgl. Wittmann, 2021), da hierbei eine Orientierung an der Wissenschaft Mathematik geboten ist (Heinze, 2004, S. 150). Daher wird in der vorliegenden Arbeit die Forderung an die Mathematikdidaktik formuliert, als eines ihrer langfristigen Ziele Beweise wieder als unerlässlichen Bestandteil der Schulmathematik zu artikulieren und unterstützend durch Maßnahmen in der Lehreraus- und -fortbildung das Wiederaufgreifen und Weiterentwickeln von einschlägigen didaktischen Konzepten in Kombination mit der Entwicklung von Unterrichtsmaterialen zu Beweisen zu befördern.

Damit der vorher formulierten Forderung gerecht werden kann, müssen die Voraussetzungen für die Veränderung der Unterrichtspraxis überprüft werden. Wichtig ist hierbei, dass mathematikdidaktisches Handeln nicht nur durch bewusst eingesetzte fachliche sowie methodische, didaktische und pädagogische Inhalte und Fähigkeiten beeinflusst wird, sondern auch durch unbewusst wirkende Einstellungen und Bilder, sogenannte Beliefs über die Mathematik und den Mathematikunterricht (Törner & Grigutsch, 1994, vgl. auch Hiebert & Gruws, 2007; Törner, 2015). (Eine ausführliche Auseinandersetzung mit dem Begriff Belief sowie eine Definition desselben erfolgt im Abschnitt 2.3.) Die Beliefs von Mathematiklehrkräften üben vermutlich auch auf den Erfolg schulischer Lehr- und Lernprozesse in der Mathematik Einfluss aus (Besser, Leiss & Schütze, 2017). Als eine wichtige Voraussetzung für das Gelingen von Implementationsmaßnahmen für den langfristigen, erfolgreichen Einzug der erwünschten Inhalte und fachspezifischen Arbeitsweisen in den Mathematikunterricht gilt, dass Letztere nicht nur auf der Wissensebene erarbeitet und von Seiten der Lehrerschaft erfolgreich rezipiert werden, sondern auch mit den Beliefs der Lehrenden über Mathematik und Mathematikunterricht weitgehend kompatibel sind (Tenorth et al., 2010, S. 47, vgl. auch Skott, 2015b, S. 17). Dass Beliefs für das Gelingen von Reformbestrebungen im Mathematikunterricht eine Voraussetzung bilden, hat der Misserfolg der sogenannten Problemlöse-Reform gezeigt. Diese Reform in den späten

1980er Jahren in den USA scheiterte vor allem, weil die Lehrkräfte über „inadäquate“ und „unpassende“ Beliefs verfügten, einerseits bezogen auf die Mathematik im Allgemeinen, andererseits aber auch bezogen auf das Problemlösen, auf Mathematiktreiben sowie auf die Fähigkeiten der Lernenden im Speziellen (Rösken, Pepin & Törner, 2011, S. 451). Somit bedarf eine erfolgreiche Umsetzung des zuvor skizzierten Anliegens der Wiederherstellung des Stellenwertes von Beweisen im Mathematikunterricht nicht einfach die Formulierung einer Forderung, sondern auch die Anknüpfung an die vorhandenen Beliefs über Beweise(n) sowie – falls notwendig – die Herausbildung entsprechender Beliefs. Auch wenn Beliefs in gewisser Hinsicht robust und nur schwer veränderbar sind (z. B. Sowder, 2007; Törner, 2002), können sie langfristig durch die Sammlung neuer Eindrücke und Erfahrungen (Stylianides, Biede, Morselli, 2016; Zhang & Morselli, 2016) – zumindest zum Teil (Erens, 2017) – modifiziert werden (Buehl & Beck, 2015). Beispielsweise haben Mathematiklehrkräfte, die an einem Projekt zur Erweiterung ihres didaktischen Wissens und zur Etablierung einer verständnisfördernden Unterrichtspraxis im Bereich der Algebra teilnahmen, entweder basierend auf dem neu erworbenen didaktischen Wissen oder auf neuen unterrichtspraktischen Erfahrungen ihre Beliefs über das Lernen der Algebra verändert, vor allem, wenn sie überzeugt waren, dass die Schwierigkeiten der Lernenden durch den Unterricht – zum Beispiel durch irrelevante oder angsterregende Aufgaben – verursacht werden (Wilkie, 2019).

Die Beliefs von Lehramtsstudierenden der Mathematik beeinflussen nicht nur ihre aktuelle Leistung im Studium, sondern wirken sich auch auf ihr zukünftiges pädagogisch-didaktisches Handeln aus. (Pajares, 1992, S. 328). In einem ersten Schritt[1] der hier präsentierten Studie ging es daher darum, die Beliefs von Lehramtsstudierenden der Mathematik zu Beweisen als Produkte bzw. zum Beweisen als mathematische Tätigkeit zu untersuchen.

2. Theoretischer Hintergrund

Nachfolgend wird auf den Begriff Beweis und seine Funktionen in der Mathematik sowie im Mathematikunterricht eingegangen. Anschließend werden das Wesen von Beliefs und deren Rolle beim pädagogisch-didaktischen Handeln sowohl allgemein im Unterricht als auch speziell im Mathematikunterricht betrachtet. Zum Schluss werden empirische Forschungsbefunde mit Bezug zum Zusammenhang zwischen Beliefs und Beweisen thematisiert.

2.1 Beweise in der Mathematik

2.1.1 Der wissenschaftliche Beweisbegriff

Ein mathematischer Beweis ist die deduktive Herleitung einer Aussage (die durch den Beweis ein Satz wird), wobei nur Axiome, Definitionen und bereits bewiesene Sätze unter Beachtung der logischen Schlussregeln verwendet werden können. Eine solche Aussage besteht aus zwei Teilen, nämlich aus der Voraussetzung (diese bleibt eventuell unausgesprochen) und aus der Behauptung. Der Beweis zeigt auf, wie – auf einem möglichst kurzen, effektiven Weg – die Behauptung aus der Voraussetzung bzw. aus den Voraussetzungen folgt (Brunner, 2014, S. 7). Allerdings stellt dieses Bild eines Beweises selbst für die Mathematik als Wissenschaft ein Ideal dar. Vollständige Strenge kann nicht erreicht werden und ist somit auch nicht wünschenswert, dennoch wird bei wissenschaftlich publizierten Beweisen Lückenlosigkeit, Vollständigkeit und Minimalität angestrebt sowie eine formale Sprache und eine stark formalisierte Struktur verwendet (Weigand et al., 2018, S. 22).

2.1.2 Funktionen von Beweisen

Es herrscht Konsens in der einschlägigen Literatur, dass Beweise über eine Verifikationsfunktion und eine Erklärungsfunktion verfügen (Brunner, 2014, S. 13). Unter der Verifikationsfunktion wird verstanden, dass ein Beweis mit dem Ziel der Überzeugung – entweder sich selbst oder andere – beziehungsweise der Ausräumung von Skepsis geführt wird (de Villiers, 1990, S. 17). Beweise dienen aber auch dem Verstehen, sie ermöglichen Einsicht, warum eine Aussage gilt (Hersh, 1993, S. 397). Es ist bekannt, dass Mathematiker:innen solche Beweise präferieren bzw. anstreben, die neben der Verifizierung auch ihr Bedürfnis nach Erklärung des Warums befriedigen (Reid & Knipping, 2010, S. 75).

Zusätzlich werden in der Literatur in Anlehnung an de Villiers (1990) oft drei weitere Funktionen, nämlich die Entdeckungsfunktion, die Kommunikationsfunktion und die Systematisierungsfunktion zitiert. Mit der Entdeckungsfunktion ist die deduktive Entdeckung neuer Zusammenhänge z. B. durch Verallgemeinerung oder durch deduktive Analyse der gegebenen Bedingungen/Eigenschaften einer gegebenen Figur gemeint. Dies bedeutet, dass durch die Auseinandersetzung mit Beweisen neues Wissen generiert wird. Unter der Kommunikationsfunktion wird verstanden, dass Begriffsinhalte, aber auch Kriterien eines akzeptierbaren Arguments in sozialer Interaktion ausgehandelt werden, diese spiegeln sich im Beweis ebenfalls wider. Der Beweis dient somit als Mittel des Diskurses in der mathematischen Community. Die Systematisierungsfunktion bezieht sich auf die Herstellung von Zusammenhängen zwischen diversen mathematischen Inhalten, so vor allem auf die Identifizierung von zirkulären Argumenten, Vereinheitlichung und Vereinfachung mathematischer Theorien sowie die Anwendung der Inhalte sowohl innerhalb als auch außerhalb der Mathematik (vgl. de Villiers, 1990; Reid & Knipping, 2010; Brunner, 2014; Jahnke & Ufer, 2015).

Auch wenn zahlreiche weitere Funktionen identifiziert worden sind – de Villiers (1990) spricht von der ästhetischen und der selbstverwirklichenden Funktion; es sind aber beispielsweise auch die konstruierende, die explorative sowie die inkorporierende Funktion bekannt (Hanna, 2005, S. 141) –, gelten die oben beschriebenen fünf Funktionen als die bedeutendsten und darunter die Verifizierungs- und die Erklärungsfunktion als Hauptfunktionen der Beweise (Brunner, 2014, S. 13-15). In der vorliegenden Studie werden unter den Funktionen von Beweisen diese fünf Funktionen verstanden.

2.2 Beweise im Mathematikunterricht

2.2.1 Der schulische Beweisbegriff

Da der Mathematikunterricht aus lernpsychologischen und pädagogischen Gründen nicht axiomatisch-deduktiv aufgebaut werden kann, bleibt „vom Beweisen […] dann der Anspruch übrig, dass Aussagen auf Gründe zurückgeführt werden sollen" (Jahnke & Ufer, 2015, S. 333). Hierbei können Aussagen, die nicht zwangsläufig Axiome sind, beziehungsweise deren Gültigkeit nicht durch Beweise bereits gezeigt worden ist, die aber trotz dessen als richtig angesehen werden, für den Beweis als Gründe herangezogen werden. Die Menge der als richtig angesehenen Aussagen zusammen mit den als zulässig anerkannten Schlussweisen bezeichnen Fischer und Malle (1985) als Argumentationsbasis und den derart entstandenen Beweis als Beweis bezüglich dieser Argumentationsbasis. Die Schüler:innen bauen ein Netz von Sätzen auf, die voneinander abhängen und dessen Gültigkeit zum Teil durch Beweise gesichert ist, dessen Anfänge allerdings nicht durch Axiome und Grundbegriffe gelegt wurden. Man spricht von einem sogenannten lokalen Ordnen der mathematischen Inhalte (Freudenthal, 1977). Eine andere Stelle, wo im Mathematikunterricht von der formalen Führung von axiomatisch-deduktiv aufgebauten Beweisen abgewichen werden kann und soll, ist die formal-symbolische Darstellung der Beweise. Wittmann und Müller (1988) halten sogar „eine formalistische Beweisauffassung für die Entwicklung eines für den jeweiligen sozialen Kontext angemessenen Beweisverständnisses [für hinderlich]" und fordern demzufolge „eine Loslösung von formalen, deduktiv durchorganisierten Darstellungen der für die Schule relevanten elementarmathematischen Darstellungen". Somit gilt, dass in der Unterrichtspraxis Herleitungen auch ohne Rückgriff auf eine axiomatische Basis und ohne formales Notieren als Beweise gelten können (Ufer, Heinze, Kuntze & Rudolph-Albert, 2009, S. 32).

In diesem Sinne wird in der vorliegenden Arbeit der Beweisbegriff weiter als der wissenschaftliche Beweisbegriff (2.1.1) aufgefasst. In Anlehnung an Dawkins und Weber (2017, S. 132) wird unter einem Beweis das Ergebnis eines Prozesses verstanden, welcher folgende vier Eigenschaften aufweist: (a) Er beruht auf deduktiven Schritten und nicht auf empirischen Verallgemeinerungen, (b) zumindest für ältere Lernende ist der Beweis bezogen auf einen bestimmten mathematischen Begriff unter Rückgriff auf dessen festgelegte Definition oder auf andere Fakten sowie Sätze, die aus der Definition folgen, formuliert (lokales Ordnen), (c) der Beweis geht über die Beschreibung des Beweisprozesses hinaus und es ist erkennbar, wie die deduktiven Argumente aufzeigen, dass die gezogenen Schlussfolgerungen aus den akzeptierten Voraussetzungen notwendigerweise folgen und (d) die Regeln der Schlussfolgerungen sind diejenigen, die auch Mathematiker:innen als allgemeingültig akzeptieren. Somit werden deduktive Schritte, die von den Voraussetzungen zu der Schlussfolgerung im Sinne der Logik führen und hierdurch die mathematischen Inhalte lokal ordnen, als Kern eines Beweises angesehen. Diese Definition schließt das globale Ordnen sowie die formale Darstellung der deduktiven Schritte mit ein, verlangt aber weder das globale Ordnen noch die formale Abfassung der deduktiven Schritte zwangsläufig.

2.2.2 Funktionen von Beweisen in der Schule

Trotz des Faktes, dass Beweise verschiedene Funktionen in der Fachwissenschaft Mathematik erfüllen (2.1.2), werden Beweise im Mathematikunterricht vorrangig mit dem Ziel der Verifikation vermittelt (Reid & Knipping, 2010, S, 79). Der Umgang mit dieser Funktion in der Schule ist in der Literatur viel diskutiert, da Lernende einerseits die Gültigkeit mathematischer Sätze oft auch ohne Beweise akzeptieren, andererseits in anderen Fällen Sätze auch mit Beweisen bezweifeln, wenn diese für sie nicht plausibel erscheinen (Brunner, 2014; Reid & Knipping, 2010). Viele, so Hanna (1990, 2000), Mariotti (2006), Meyer und Prediger (2009), Brunner (2014) und andere plädieren dafür, dass die größte Aufmerksamkeit im Mathematikunterricht der Erklärungsfunktion bei der Vermittlung von Beweisen geschenkt werden soll, weil hierdurch das Beweisen für die Lernenden zu einer sinnstiftenden Aktivität werden kann (Hanna & Jahnke, 1996, S. 878).

Auch die kommunikative Funktion sollte im Unterricht eine besondere Rolle spielen (Reid & Knipping, 2010, S. 81). Diese kann vermittelt werden, indem im Mathematikunterricht Lernende untereinander die Kriterien für die Akzeptanz der Begründung eines Beweisschrittes sowie eines Beweises aushandeln (de Villiers, 1990). De Villiers (1990) deklariert allerdings, dass die Systematisierungsfunktion in der Schule erst bei Fortgeschrittenen eine Rolle spielen soll. Hierdurch wird das erworbene mathematische Wissen in eine sinnvolle Struktur gebracht und kann somit besser gespeichert werden.

Insgesamt gilt, dass die Explikation verschiedener Funktionen von Beweisen einen möglichen Zugang zur Motivation von Beweisen im Mathematikunterricht bieten kann (Jahnke & Ufer, 2015, S. 342).

2.2.3 Zum Stellenwert von Beweisen in der Schule

In der Bundesrepublik Deutschland formulieren die Bildungsstandards im Fach Mathematik bundeseinheitliche Anforderungen an den Mathematikunterricht. Die einschlägigen Dokumente (KMK, 2004a, 2004b, 2012) beschreiben die allgemeine Kompetenz „Mathematisch argumentieren“ auf jeder Ebene der schulischen Ausbildung als eine zentrale mathematische Tätigkeit, die Beweise einschließt (Reiss & Heinze, 2005, S. 185-186). Somit kann einerseits von einem hohen Stellenwert der Kompetenz „Mathematisch argumentieren“ gesprochen werden. Andererseits wird in diesen Dokumenten die besondere Rolle, die Beweisen in der Mathematik zukommt (1.), nicht verdeutlicht und auch der Unterschied zwischen Beweisen als deduktive, nach Regeln der Logik geführte Argumentation (2.1.1 und 2.2.1) und anderen Formen der Argumentation (wie z. B. induktives oder reduktives Schließen) nicht herausgearbeitet. Beispielsweise kann bereits in der Primarstufe im Rahmen der Teilkompetenz „Begründungen suchen und nachvollziehen“ (KMK, 2004a, S. 8) ein operativer Beweis dafür gegeben werden, dass die Summe zweier ungerader Zahlen stets eine gerade ist (vgl. Platz, Niehaus & Winter, 2018), das Finden eines (operativen) Beweises wird aber weder explizit gefordert noch die Tragweite solcher Beweise für das spätere Mathematiklernen betont. Auch in den Bildungsstandards für die Sekundarstufe I (KMK, 2004b) ist eine ähnliche Verwischung der Grenzen zwischen Beweisen und anderen Formen der Argumentation zu verzeichnen: Hier werden Beweise im Rahmen der Teilkompetenz „mathematische Argumentationen entwickeln (wie Erläuterungen, Begründungen, Beweise)“ (S. 8) als eine mögliche Form der Argumentation zwar angegeben, sie werden aber weder explizit definiert noch klar von Erläuterungen und Begründungen abgegrenzt. Zudem ist kritisch zu betrachten, dass in den Bildungsstandards für die Sekundarstufe II (KMK, 2012) Beweise und andere Formen der Argumentation nach formalen und nicht nach inhaltlichen Kriterien unterschieden werden: „Das Spektrum reicht dabei von einfachen Plausibilitätsargumenten über inhaltlich-anschauliche Begründungen bis zu formalen Beweisen.“ (S. 14). Implizit kann man dieser Textstelle entnehmen, dass inhaltlich-anschauliche, also operative Beweise nicht als Beweise gelten, was der obigen Definition (2.2.1) widerspricht. Dass gerade in diesem Bereich Nachholbedarf besteht, bestätigt auch die in der Einleitung (1.) bereits angesprochene Forderung nach exemplarischer Konkretisierung der Bildungsstandards zu Begründungs- und Beweisstrategien (Köpf, Götze, Eichler & Heckmann, 2019, S. 2). Somit kann man zusammenfassend feststellen, dass trotz des hohen Stellenwerts der Kompetenz „Mathematisch argumentieren“ der Beweisbegriff sowie dessen Stellenwert innerhalb dieser Kompetenz nach wie vor unklar bzw. ungenau sind.

Wegen des oben skizzierten, aktuell unklaren Stellenwertes von Beweisen in der Schule und der zahlreichen Schwierigkeiten, die sich im Laufe der letzten Jahrzehnte im Zusammenhang mit der Thematisierung von Beweisen im Mathematikunterricht gezeigt haben (darauf kann aus Platzgründen hier nicht einzeln eingegangen werden, es sei aber auf die Arbeiten von Reiss & Heinze, 2005; Reid & Knipping, 2010; Jahnke & Ufer, 2015; Sill, 2019 verwiesen), ist aktuell festzustellen, dass Beweise in der Schule kaum thematisiert werden (Brunner, 2014, S. 2.), in der Schule unterbetont sind (Vollstedt, Heinze, Gojdka & Rach, 2014, S. 47) und daher ihr Stellenwert in der Schule als niedrig einzuschätzen ist.

2.3 Beliefs als unbewusste Treiber des (pädagogischen) Handelns

Seit mindestens fünf Jahrzehnten sind Beliefs als wesentliche Komponenten beim pädagogisch-didaktischen Handeln von Lehrkräften Gegenstand der empirischen Bildungsforschung und der pädagogischen Psychologie (Philipp, 2007, S. 263-265; Thompson, 1992, S. 129). Sie rückten in das Blickfeld der Forschung vor allem durch die in der Philosophie wurzelnde Annahme, der beste Indikator für das Verhalten und für die Entscheidungen im Leben eines Individuums seien seine Beliefs (Pajares, 1992, S. 307). Dabei sind die Bezeichnungen weder im Englischen noch im Deutschen einheitlich: Im Englischen verwendet man häufig Begriffe wie „attitudes, values, judgments, axioms, opinions, ideology, perceptions, conceptions, conceptual systems, preconceptions, dispositions, implicit theories, explicit theories, personal theories, internal mental processes, action strategies,… “ (Calderhead, 1996, S. 719, vgl. auch Mason, 2004; Parajes, 1992), im Deutschen sind sowohl in pädagogischen als auch in fachdidaktischen

Arbeiten – neben dem übernommenen Belief – Begriffe wie Einstellungen, Vorstellungen, Haltungen, Auffassungen und Überzeugungen sowie individuelle Annahmen, Erwartungen und Verständnis aufzufinden. Der Begriff Belief ist in der pädagogischen Literatur sehr populär (Philipp, 2007, S. 259), und zwar dermaßen, dass viele Autor:innen auf eine einschlägige Definition verzichten, weil sie vermuten, die Leserschaft weiß, was ein Belief ist (Thompson, 1992, S. 129). Zudem existiert eine Vielzahl an eher vagen Definitionen. Mit den Worten von Parajes (1992, S. 309): „Educational psychology does not always accord its constructs such precision, and so defining beliefs is at best a game of player's choice." Trotz dieser Fülle an Definitionen wird sowohl im pädagogischen als auch im mathematikdidaktischen Kontext (Philipp, 2007, S. 265; Goldin, Rösken & Törner, 2009, S. 2) der Mangel an einer einheitlichen Definition beklagt. Skott (2015a, S. 5-6) plädiert rückblickend auf jahrzehntelange Beliefsforschung dafür, dass eine explizite Definition gar nicht angestrebt werden soll, da mit ihr keine eindeutige Bedeutungsklärung gewährleistet oder diese auf verschiedene Weise interpretiert werden kann. Zudem ist es seiner Meinung nach schwierig, den konsensualen Kern des Begriffs wiederzugeben und gleichzeitig unerwünschte Aspekte nicht mitzuerfassen. Die Definitionen haben dennoch disziplinübergreifend einen gemeinsamen Kern (Richardson, 1996, S. 103). Beliefs sind vor allem individuell, da sie auf persönlichen Erfahrungen, u. a. als Lernende/r mit Schule, Unterricht und dem Zugang zum Wissen, basieren (Richardson, 1996, S. 105-106). Zudem sind sie – im Gegensatz zu Wissen – nicht epistemisch gesichert, sondern drücken eine These aus, welche das Individuum für wahr hält und aus diesem Grund akzeptiert (Richardson, 1996, S. 103). Hinzu kommt, dass sich Beliefs immer auf einen bestimmten Gegenstand, auf das sogenannte *belief object* beziehen. Dieses kann bereichsspezifisch, aber auch persönlicher, sozialer oder epistemologischer Natur sein (Goldin, Rösken & Törner, 2009, S. 3). In der vorliegenden Arbeit wird der Begriff Belief im Sinne einer sich aus persönlichen Erfahrungen resultierenden individuellen Überzeugung verwendet, welche sich auf ein bestimmtes Objekt richtet. Somit wird vorliegend unter einem Belief eine spezielle Überzeugung verstanden. Nachfolgend wird zwar durchgängig der Begriff Belief verwendet, bei der Beschreibung des Gegenstandes von konkreten Beliefs wird allerdings im Sinne dieser Definition auf den Oberbegriff Überzeugung zurückgegriffen.

Hinsichtlich des Verhältnisses von Beliefs zu anderen Begriffen wie Bewertung und Wissen, ihrer Rolle und verschiedener Funktionen im Unterricht sowie hinsichtlich Fragen der Herkunft, Stabilität und Veränderbarkeit von Beliefs wird an dieser Stelle auf umfangreiche Überblicksartikel aus der pädagogischen Psychologie u. a. von Calderhead (1996), aus der Bildungsforschung u. a. von Pajares (1992) und Richardson (1996) sowie aus der Mathematikdidaktik vor allem von Forgasz und Leder (2008), Philipp (2007) und Thompson (1992) hingewiesen. An dieser Stelle soll – wegen ihrer Relevanz für die in der vorliegenden Arbeit zu präsentierende Studie – nur auf die Struktur von Beliefs eingegangen werden. Parajes (1992, S. 311) verdeutlicht in diesem Zusammenhang, dass die Autoren jeweils unterschiedliche Aspekte hervorheben, abhängig davon, wie sie Beliefs operationalisieren wollen. Somit herrscht auch in diesem Bereich keine Einheitlichkeit in der einschlägigen Literatur. Für die vorliegende Arbeit scheint es in Anlehnung an Rokeach (1989) und Seiffge-Krenke (1974) im Sinne der Dreikomponententheorie[2] geeignet davon auszugehen, dass Beliefs eine kognitive, eine affektive und eine konative Komponente haben. Diese Dreigliederung von Beliefs hat sich in der Literatur bis heute durchgesetzt und wird auch durch empirische Studien belegt (Liljedahl & Hannula, 2016, S. 419), auch wenn Bezeichnungen der Komponenten uneinheitlich verwendet werden. Zudem geht es bei der Dreikomponententheorie um einen theoretischen Rahmen, der gerade mit Bezug zu Mathematik am meisten verbreitet war und heute Ausgangspunkt für weitere Ausdifferenzierungen ist (Hannula, 2012). Bei dieser Theorie bezieht sich die kognitive Komponente auf subjektives Wissen über das *belief object*, die affektive Komponente auf Emotionen über sowie Bindungen an dieses Objekt; die konative Komponente bezeichnet einerseits konkret beobachtetes Verhalten mit Bezug zum *belief object*, andererseits gewisse Bereitschaften und Tendenzen ein bestimmtes Verhalten auszuüben.

2.4 Beliefs von Mathematiklehrenden

Etwa Anfang der 1980er Jahre fanden Beliefs Einzug in die Mathematikdidaktik (Törner, 2002, S. 104), begründet durch das Scheitern der Problemlöse-Reform in den USA (s. 1.). Bereits 10 Jahre später erschienen Überblicksarbeiten über einschlägige Forschungen wie Thompson (1992), Pehkonen und Törner (1996), Leder, Pehkonen und Törner (1996), seitdem ist die Literaturlandschaft kaum überschaubar geworden (Törner, 2015, S. 216). Dabei werden Beliefs als latenter, nicht direkt beobachtbarer, dafür aber umso wichtiger Faktor bei der Planung, Gestaltung und Bewertung sowie bei der Wahrnehmung und Rezeption (Grigutsch, Raatz & Törner, 1998, S. 4) von mathematischen Lehr- und Lernprozessen betrachtet, die sich aus den Erfahrungen mit Mathematik herausbilden (Törner, 1996; Stoppel, 2019). Selbst mit Bezug zum Mathematikunterricht existieren bis heute verschiedene Definitionen des Beliefsbegriffs, die teilweise kaum übereinstimmen (Furinghetti & Pehkonen, 2002, S. 49), eine aktuelle Übersicht über die einschlägige Diskussion findet man beispielsweise bei Leder (2019).

Auch wenn die Beziehung zwischen Beliefs und Handlungen kontrovers diskutiert wird (vgl. z. B. das Review von zwölf Studien in Liljedahl & Hannula, 2016, S. 430-432), stimmen die meisten Autor:innen überein, dass Beliefs einen Einfluss auf den Mathematikunterricht haben (Ernest, 1991). Törner und Grigutsch (1994, S. 213) vertreten sogar den radikalen Standpunkt, Beliefs würden die Handlungen von Mathematiklehrkräften sowie von Mathematik Lernenden im Mathematikunterricht determinieren. An dieser Behauptung wird auch klar, dass Träger von Beliefs nicht nur die Lehrkräfte, sondern auch die Mathematik Lernenden sind, wobei Lehramtsstudierenden der Mathematik eine besondere Rolle zukommt, da deren Beliefs nicht nur ihren aktuellen Lernprozess der Mathematik, sondern auch deren zukünftigen Mathematikunterricht beeinflussen (Pajares, 1992; S. 328). Neuere Arbeiten (z. B. Zhang & Morselli, 2016) berichten über eine dialektische Beziehung zwischen Beliefs und Handlungen und lehnen einen deterministischen, linearen Zusammenhang ab (S. 12). Sie führen Ungereimtheiten zwischen Beliefs und Handlungen auf weitere Faktoren, wie z. B. den sozialen Kontext im Mathematikunterricht zurück (S. 13). Ein konkretes Beispiel hierfür findet man bei Safrudiannur und Rott (2019), die untersucht haben, wie die Beachtung von Fähigkeiten der Lernenden Diskrepanzen zwischen den mathematikbezogenen Beliefs der Lehrperson sowie ihrer konkret durchgeführten Unterrichtspraxis hervorruft.

Mit Bezug zum Mathematikunterricht kann im Grunde genommen alles, was einen direkten oder indirekten Bezug zur Mathematik hat, als Gegenstand eines Beliefs fungieren (Törner, 2000, S. 501). So können Beliefs die Gesamtheit (z. B. Törner & Grigutsch, 1994; Krey, 2012; Maaß & Ege, 2007) oder bestimmte Teilbereiche der Mathematik (z. B. Statistik (Rolka, Bulmer, 2005), Analysis (Spies & Witzke, 2014)), aber auch ihr Verhältnis zu außermathematischen Bereichen (z. B. ihre Nützlichkeit (Maaß, 2006)) sowie bestimmte Elemente der Mathematik wie z. B. Definitionen oder Beweise (Törner, 2002, S. 108) und diverse Unterrichtsmethoden und Hilfsmittel (z.B. digitale Technologien (Erens & Eichler, 2015)) betreffen. All die genannten Beispiele – und die Reihe lässt sich weiter fortsetzen – können als *belief object* in der Mathematik fungieren. Grigutsch, Raatz und Törner (1998) gehen davon aus, dass die kognitive Komponente von Beliefs bezogen auf die Gesamtheit der Mathematik als komplexe Handlungs- und Erfahrungswelt vier Kategorien von subjektivem Wissen umfasst, und zwar Beliefs

- über die Mathematik als Wissenschaft und als Unterrichtsfach,
- darüber, wie Mathematik gelernt wird bzw. werden soll (Lernen der Mathematik),
- darüber, wie Mathematik gelehrt wird bzw. werden soll (Lehren der Mathematik), sowie
- über sich selbst und andere als diejenigen, die Mathematik betreiben.

Zu jeder dieser Kategorien sind Emotionen (affektive Komponente) vorstellbar, die gemeinsam mit dem subjektiven Wissen zu Verhaltensdispositionen und -intentionen (konative Komponente) führen (Grigutsch, Raatz & Törner, 1998, S. 10).

Die Autoren arbeiten von diesen Kategorien nur zwei etwas detaillierter aus: Sie legen fest, dass die Kategorie „Beliefs über die Mathematik als Wissenschaft und Unterrichtsfach" ein Spektrum von Beliefs umfasst, welches sich auf das Wesen von Mathematik sowie auf das Schul- und Hochschulfach Mathematik, zudem auf die Natur mathematischer Aufgaben und Probleme, auf den Ursprung mathematischen Wissens und auf das Verhältnis zwischen Mathematik und Empirie beziehen (Grigutsch, Raatz & Törner, 1998, S. 9-10). Überdies wird kurz konkretisiert, dass unter „den Beliefs über sich selbst und andere als diejenigen, die Mathematik betreiben“ das Selbstkonzept als Mathematik-Betreiber verstanden werden soll, was unter anderem die Selbsteinschätzung der eigenen Fähigkeiten sowie Kausalattributionen für den eigenen Erfolg und Misserfolg umfasst. In einer weiteren Publikation ordnet Grigutsch (1998) dem Selbstkonzept auch die Lust am Mathematikunterricht, die Selbsteinschätzung der eigenen Leistung sowie die des eigenen Fleißes zu. Einer späteren Arbeit von Törner (2002) kann ergänzend indirekt entnommen werden, wie die Kategorien „Beliefs über das Lernen von Mathematik“ sowie „Beliefs über das Lehren von Mathematik“ zu interpretieren sind. Bezogen auf die „Beliefs über das Lernen von Mathematik“ zeigt er (S. 109-110) Beispiele auf, die sich auf das *Ziel* des Mathematiklernens (z. B. “to obtain »right answers«“), auf *Voraussetzungen* des erfolgreichen Mathematiklernens (z. B. „math requires a good memory“) sowie auf *Eigenschaften von Aufgaben in der Schulmathematik* (es existiert immer eine Lösung, es existiert ein einziger Lösungsweg, Aufgaben sollten in wenigen Schritten lösbar sein etc.) beziehen. Letztere hängen mit der *Erlernbarkeit von Mathematik* zusammen. Überdies werden Beliefs über diejenigen *Personen* formuliert, die erfolgreich Mathematik betreiben können („man are better in math than women“; „only geniuses are capable of discovering and creating mathematics“). Die Kategorie „Beliefs über das Lehren von Mathematik“ umfasst Beliefs, die die *Rolle und Aufgabe der Lehrperson* (z. B. Vermittlung von mathematischen Kenntnissen) sowie *deren Bedeutung für den Lernprozess* (z. B. dass ohne Instruktion kein Mathematiklernen stattfinden kann) betreffen.

In Anlehnung an die Kategorien von Grigutsch, Raatz und Törner (1998) wird in der vorliegenden Arbeit die These vertreten, dass sich diese Kategorien auch Teilbereiche sowie formale Elemente der Mathematik wie Definitionen, Sätze und Beweise einschließen. Hinsichtlich des Schwerpunktes dieser Arbeit, nämlich der Beweise kann also gefolgert werden, dass die einschlägigen Beliefs Überzeugungen

1) über Beweise als Teil der Mathematik als Wissenschaft sowie der Mathematik als Unterrichtsfach,
2) darüber, wie Beweise gelernt werden (sollen),
3) darüber, wie Beweise gelehrt werden (sollen), sowie
4) über sich selbst und andere, die Beweise führen,

umfassen.

Bei der Kategorie 1) geht es demzufolge um ein Spektrum von Beliefs, die sich auf das Wesen, auf den Kern und die Rolle von Beweisen sowohl in der Fachwissenschaft Mathematik als auch in der Schulmathematik beziehen. Die Kategorie 2) umfasst Beliefs über für Lernende plausible Ziele für die erfolgreiche Auseinandersetzung mit Beweisen, über notwendige Voraussetzungen der erfolgreichen Auseinandersetzung mit Beweisen sowie Beliefs über Faktoren, die diese Auseinandersetzung erschweren oder befördern können. Zu der Kategorie 3) gehören Beliefs, die sich auf die Rolle und Aufgaben der Lehrperson beziehen, die sie bei der Vermittlung von Beweisen haben soll, sowie auf Beliefs, die sich auf die Ermöglichung einer erfolgreichen Vermittlung mathematischer Inhalte durch die Auseinandersetzung mit Beweisen im Lehr-Lernprozess beziehen. Die Kategorie 4) umfasst Beliefs über die Selbsteinschätzung der eigenen Fähigkeiten, Leistung, Lust und Fleiß bei der Auseinandersetzung mit Beweisen. Es soll darauf verwiesen werden, dass dieses Modell weitgehend mit der in der ICMI Study 19 publizierten Liste von Beliefs[3] (Cabassut et al., 2012, S. 174), die mit Bezug zu Beweisen entstehen können, übereinstimmt.

2.5 Beliefs über Beweise in der Mathematik

Auch wenn Beweise einen essenziellen Teil der Mathematik darstellen und auch im Mathematikunterricht eine besondere Rolle spielen sollten (Hanna & Jahnke, 1996, S. 877), existieren nur wenige empirische Befunde hinsichtlich Beliefs über Beweise, vor allem bei Lehramtsstudierenden. Grigutsch und Törner (1994) untersuchen nicht einzelne Beliefs bezogen auf die Gesamtheit der Mathematik, sondern deren Interdependenzen untereinander, die sogenannten – nach ihrem Wortgebrauch – mathematischen Weltbilder bei Studierenden der Mathematik und der Chemie. In diesem Zusammenhang haben die Autoren ermittelt, dass die Mehrzahl der Studierenden (88 %) formallogisches Herleiten von Aussagen – sprich formales Beweisen – für die Mathematik notwendig hält. Dennoch wird diesem Aspekt von den Probanden keine ausschließliche, begründende Funktion zugesprochen (Beliefs über Beweise als Teil der Mathematik). Hinzu kommt, dass die Herleitung oder der Beweis einer Formel für die Probanden erst wichtig wird, wenn sie die Erfahrung gemacht haben, Mathematik geht über das in der Klausur Getestete hinaus (Grigutsch & Törner, 1994, S. 231). Differenziert wird das Bild durch den Befund, Studierende halten *inhaltsbezogenes* Denken und Argumentieren überwiegend notwendig für das Betreiben von Mathematik (Beliefs über das Lernen von Beweisen).

Ebenfalls nicht beweisspezifisch, sondern allgemein bezogen auf Argumentieren im Mathematikunterricht haben Ayalon und Naama (2019) acht erfahrene Mathematiklehrkräfte interviewt und anhand der Antworten ein zweidimensionales theoretisches Modell aufgestellt. Dieses Modell umfasst allerdings beides, nämlich Wissen und Belief, und kann als Modell des Argumentationskonzepts bezeichnet werden. Die eine Dimension, die nach den Autorinnen die Kategorien Struktur und Dialog umfasst, kann mit Produkt und Prozess verglichen werden: Strukturelle Aspekte beziehen sich auf Charakteristika einer Argumentation als Produkt, während dialogische Aspekte das Entstehen einer Argumentation in Interaktion betreffen, d. h. Argumentation als einen Prozess wiedergeben. Die Kategorien der anderen Dimension können – auch wenn nicht 1:1 – überwiegend mit den oben aufgestellten Kategorien 1)–4) der Beliefs über Beweise in Verbindung gebracht werden. Dabei entsprechen etwa die Kategorien *What is argumentation?* sowie *Socio-cultural caracteristics* der Kategorie 1) (Wesen bzw. Kern von Beweisen), insbesondere, da Letztere normative Vorgaben für die Akzeptanz von Argumentation umfassen. Zudem entspricht die Kategorie *Task characteristics* sowie zum Teil die Kategorie *Students characteristics* der Kategorie 2) (Beliefs über das Lernen von Beweisen). Die Kategorie *Teaching strategies* kann mit der Kategorie 3) (Beliefs über das Lehren von Beweisen) verglichen werden. Überdies können einige Teilaspekte der Kategorie *Students characteristics*, wie Selbstvertrauen beim Argumentieren mit der Kategorie 4) (Beliefs über sich selbst und andere, die Beweise führen) in Verbindung gebracht werden.

In einer qualitativen Studie mit zehn italienischen Probanden ermitteln Furinghetti und Morselli (2011), welchen Stellenwert Lehrkräfte Beweisen in ihrer eigenen Unterrichtspraxis beimessen bzw. welche Beliefs ihre einschlägigen pädagogisch-didaktischen Entscheidungen beeinflussen. Sie identifizieren zwei verschiedene Herangehensweisen an Beweise: Einige Lehrpersonen thematisieren Beweise, weil sie Sätze verifizieren und mathematisches Wissen systematisieren (Beliefs über Beweise als Teil der Mathematik), andere aus der Überzeugung, Beweise tragen zum Verständnis der mathematischen Inhalte bei (Beliefs über das Lernen von Beweisen). Überdies wurde versucht, Gründe für Diskrepanzen zwischen Beliefs mit Bezug zu Beweisen und der konkreten Unterrichtspraxis der interviewten Probanden herauszuarbeiten. Die Autorinnen fanden (S. 593), dass hierbei neben dem sozialen Kontext (was im Einklang mit den Befunden von Zhang und Morselli (2016) steht) weitere, sogenannte leitende Beliefs, die den Beliefs über Beweise übergeordnet sind und sich auf die Mathematik oder auf das Lernen und Lehren von Mathematik beziehen (2.4), eine Rolle spielen.

Beliefs mit Bezug zu Beweisen von Lehramtsstudierenden der Mathematik werden explizit in den Beiträgen von Schwarz et al. (2008) sowie Kempen (2017) thematisiert. Schwarz et al. (2008) untersuchen das mathematische und das didaktische Wissen sowie einschlägige Beliefs über Beweise von angehenden Lehrkräften der Sekundarstufe I in drei verschiedenen Ländern (Deutschland, Australien und Hongkong). Unter Letzteren haben die Autor:innen die Affinität der Probanden verstanden, in ihrer zukünftigen Unterrichtspraxis Beweise zu thematisieren (Beliefs über das Lehren von Beweisen). Auch wenn in allen drei Ländern eine starke Affinität der Probanden hierzu zu verzeichnen ist, unterscheiden sich die Begründungen: Während die deutschen Lehramtsstudierenden Beweise in der Sekundarstufe I für wichtig halten, weil hierdurch die Lernenden – so die Überzeugung der Probanden – die eigenen Argumentationsfähigkeiten entwickeln können (Beliefs über das Lernen von Beweisen), bevorzugen Studierende aus Australien und Hongkong auf dieser Bildungsstufe formale Beweise, und zwar aus dem Grund, ein Verständnis für mathematische Sätze und für die Mathematik als deduktives System zu entwickeln (Beliefs über Beweise als Teil der Mathematik). Zudem formulieren deutsche Probanden Bedenken bezogen auf die Unterrichtbarkeit von Beweisen und weisen auf mögliche Schwierigkeiten seitens der Lernenden hin (Beliefs über das Lernen von Beweisen). Die Ergebnisse relativiert der Fakt, dass die Untersuchung inhaltlich in einem Teilgebiet der Geometrie stattfand, d. h. der Bezugspunkt der Angaben der Probanden ein aus der Schulgeometrie ausgewählter Beweis war. Kempen (2017) vergleicht in seiner Dissertation unter anderem die Beliefs von Lehramtsstudierenden der Mathematik im ersten Fachsemester zu Beginn des Studiums und nach dem Besuch einer Lehrveranstaltung zur „Einführung in die Kultur der Mathematik“. Er thematisiert einerseits Beliefs zum Beweisen in der Schule, die die Relevanz von Beweisen für verschiedene Schulformen und Schultypen, mögliche Gründe für die Ablehnung von Beweisen in der Schule sowie die Eignung generischer Beweise für den Einsatz im Mathematikunterricht umfassen (Beliefs über das Lernen von Beweisen), andererseits Beliefs zum Beweisen, die motivationale Aspekte zum Beweisen sowie die sogenannte Beweisaffinität – die subjektive Zuneigung einer Person zum Konstrukt Beweis (S. 102) einschließen (Beliefs über sich selbst und andere, die Beweise führen). Insgesamt konnte festgestellt werden (S. 299), dass die Studierenden sowohl zu Beginn des Studiums als auch gegen Ende des ersten Semesters Beweise eher für die Sekundarstufe II und die Schulformen Gymnasium bzw. Realschule geeignet halten. Die Beliefs verändern sich sogar durch das Studium in die Richtung, dass die Studierenden im Mathematikunterricht Berechnungen bzw. Anwendungsaufgaben gegenüber Beweisen bevorzugen und die Relevanz von Beweisen für die Schule gegen Ende des ersten Semesters geringer eingeschätzt wird als zu Beginn. Zudem ist eine Veränderung der Beliefs zum Beweisen durch das Studium zu verzeichnen, die auf eine Hinwendung zu denselben schließen lassen. Sowohl die Items, die sich auf motivationale Aspekte zum Beweisen, als auch diejenigen, die sich auf die Beweisaffinität beziehen, wurden gegen Ende des Semesters insgesamt höher bewertet als zu Beginn desselben. Letztere Befunde sind nach Meinung der Autorin der vorliegenden Arbeit allerdings mit Vorsicht zu betrachten, da die Daten eine Verzerrung aufgrund von sozialer Erwünschtheit nahelegen.

Zudem wird in der ICMI Study 19 (Hanna & de Villiers, 2012) über zahlreiche, zum Teil mit relativ wenigen Probanden durchgeführte empirische Studien berichtet (Cabassut et al., 2012, S. 176–181). Die reviewten Befunde legen nahe, dass weder angehende oder praktizierende Lehrkräfte noch Lernende über ausreichende Kenntnisse im Bereich der Beweise verfügen (S. 175-176, 179–180). Während (angehenden) Lehrkräften vor allem die Erkenntnis ungültiger Argumente Schwierigkeiten bereitet (S. 176), fällt es den Lernenden schwer, die Notwendigkeit eines Beweises einzusehen (S. 179–180). Letztere akzeptieren überdies oft empirische oder induktive Argumente als Beweise und halten deduktive

Herleitungen in vielen Fällen nicht für überzeugend (S. 180). Sogar diejenigen Lernenden, die fähig sind, gültige deduktive Argumente aufzubringen und in eine deduktive Kette zu fügen, haben schließlich Probleme den Beweis formal aufzuschreiben (S. 181). Lehrkräfte sind sich zwar der verifizierenden und der erklärenden Funktion von Beweisen in der Mathematik bewusst, die Wichtigkeit anderer Funktionen sind ihnen aber oft nicht geläufig (S. 177) (Beliefs über Beweise in der Mathematik als Wissenschaft). Hinzu kommt, dass sie Beweise in der Schule für keinen zentralen Inhalt halten (S. 177), bzw. nur für leistungsstarke Klassen oder für Lernende, die ein mathematiknahes Fach studieren wollen (S. 177) (Beliefs über Beweise in der Mathematik als Unterrichtsfach). Die meisten Lehrkräfte sind auch davon überzeugt, dass sich nur die Elementargeometrie eignet, Beweise zu unterrichten (S. 177–178). (Angehende) Lehrkräfte sind im Allgemeinen keine selbstbewusste Beweisführende, sie neigen dazu sich auf Autoritäten, anstatt ihre eigenen Beweisfähigkeiten zu berufen (S. 178) (Beliefs über sich selbst, der Beweise führt).

Insgesamt zeigt sich, dass, auch wenn Beliefs im Mathematikunterricht eine wichtige Rolle spielen und auch in der Mathematikdidaktik seit mehreren Jahrzehnten zentraler Gegenstand der Forschung sind, empirische Studien zu Beliefs über Beweise entweder implizit bleiben – da sie nicht direkt, sondern bei der Beforschung allgemeinerer Aspekte wie Beliefs zu Mathematik (Grigutsch & Törner, 1994) oder Argumentieren (Ayalon & Naama, 2019) angesprochen werden – oder größtenteils bei erfahrenen Lehrkräften (Furinghetti & Morselli, 2011; Mehrheit der in der ICMI Study 19 reviewten Artikel) ermittelt werden. Die wenigen Arbeiten (Schwarz et al., 2008; Kempen, 2017; ein kleiner Teil der in der ICMI Study 19 reviewten Beiträge), die sich mit den Beliefs über Beweise bei Lehramtsstudierenden der Mathematik beschäftigen, können noch kein umfassendes Bild hierzu geben. Mit der vorliegenden Arbeit wird das Ziel verfolgt, einen Beitrag zur Füllung dieser Forschungslücke, nämlich des Mangels an empirischen Studien, die explizit die Ermittlung von Beliefs über Beweise bei Lehramtsstudierenden der Mathematik erzielen, zu leisten.

3. Forschungsfragen

Im Zusammenhang mit Beliefs identifiziert Lerman (2001, S. 35) zwei Hauptrichtungen in der einschlägigen Forschung: In Arbeiten, die einen eher statischen Blick auf Beliefs werfen, geht es um die Analyse und Klassifikation von zu einem Zeitpunkt vorhandenen Beliefs, während es in Arbeiten, die die Beliefs aus einem dynamischen Blickwinkel betrachten, um die Beschreibung von zeitlichen Veränderungen von Beliefs geht. Die vorliegende Arbeit versteht sich als eine der ersten Gruppe und fokussiert die Beschreibung der bei Lehramtsstudierenden der Mathematik vorhandenen Beliefs über Beweise. Da sich Beliefs auf der Grundlage von Erfahrungen herausbilden (2.3, 2.4) und Beliefs mit Bezug zu Beweisen Überzeugungen aus vier verschiedenen Kategorien umfassen (2.4), sind folgende Fragen hierbei leitend:

1) Welche Erfahrungen haben Lehramtsstudierende der Mathematik in der Schule sowie im Rahmen ihrer Hochschulausbildung mit Beweisen gemacht?
2) Welche Beliefs besitzen sie über den Kern eines Beweises a) in der Mathematik als Wissenschaft sowie b) in der Mathematik als Unterrichtsfach?
3) Welche Beliefs haben sie bezogen auf das Lernen von Beweisen?
4) Über welche Beliefs verfügen sie im Hinblick auf das Lehren von Beweisen?

Hierbei spiegelt Forschungsfrage 1) die besondere Bedeutung von Erfahrungen wider, die Forschungsfrage 2) entspricht Kategorie 1) (2.4), die Forschungsfrage 4) der Kategorie 3) (2.4) der Beliefs über Beweise. Forschungsfrage 3) umfasst Beliefs, die sich auf das Lernen von Beweisen (Kategorie 2) (2.4)) sowie auf sich selbst und andere, die Beweise führen (Kategorie 4) (2.4)) beziehen.

Bezogen auf Erfahrungen interessieren nicht nur quantitative (Umfang der thematisierten Beweise und Beweisarten), sondern auch qualitative Aspekte (konkrete Beweise und Beweisarten, Unterrichtsführung bei der Vermittlung von Beweisen, Relevanz für die Leistungsmessung). Hinsichtlich des Kerns eines Beweises sind bedeutungstragende Elemente einer Definition des Beweisbegriffs (2.2.1), die Rolle des Formalismus (2.2.1) sowie die Funktionen eines Beweises von Relevanz (2.2.2). Im Hinblick auf Beliefs über das Lernen von Beweisen werden neben Überzeugungen über plausible Ziele und einschlägige Schwierigkeiten sowie Hürden auch Überwindungsmöglichkeiten und günstige Voraussetzungen fokussiert (2.4). Überdies werden im Zusammenhang mit Beliefs über das Lehren von Beweisen Überzeugungen bezogen auf fachliche, organisatorische sowie didaktische Vorteile und eventuelle Hürden in den Mittelpunkt gestellt (2.4).

4. Methodisches Vorgehen

Da Beliefs nicht direkt beobachtet werden können, müssen sie daraus abgeleitet werden, was Lernende oder Lehrkräfte sagen, tun oder beabsichtigen (Pajares, 1992, S. 314; Leder, 2019, S. 19). In der einschlägigen Forschung etablierten sich daher zwei Richtungen: während sich qualitative Methoden (Interviews, offene Befragungen, Beobachtungen) bei einer kleinen Anzahl an Probanden für die Theoriebildung eignen, sind gelenkte Befragungen vor allem mit Hilfe von Likert-Skalen für die Überprüfung der entwickelten Theorien bei einer größeren Anzahl an Probanden günstig (Philipp, 2007, S. 268). Befragungen mit Likert-Skalen stehen allerdings in jüngster Zeit in der Kritik, da sie einerseits ohne konkreten schulischen Kontext auskommen und andererseits die Beantwortung der Fragen entlang sozialer Erwünschtheit begünstigen (Safrudiannur & Rott, 2020, S. 2). In der vorliegenden Arbeit werden dennoch die Ergebnisse einer Fragebogenerhebung mit Items überwiegend vom Likert-Typ (Anhang 4) präsentiert, da die Bereitstellung von schulischen Kontexten durch die alternative rank-then-rate-Methode (Safrudiannur & Rott, 2020) für Lehramtsstudierende erst neulich etabliert wird (Safrudiannur, Belke & Rott, 2022). Die Problematik der sozialen Erwünschtheit bleibt dennoch bestehen und muss bei der Interpretation der erhobenen Daten beachtet werden. Die Items des Fragebogens wurden in einem langjährigen Prozess, der qualitative und quantitative Schritte umfasste, entwickelt. Nachfolgend wird kurz auf die Entwicklung des Fragebogens eingegangen, Berichte über Zwischenergebnisse sind bei Szűcs und Traxl (2020) sowie bei Traxl (2019) nachzulesen.

4.1 Entwicklung eines geeigneten Messinstruments

Um zunächst Hypothesen bezogen auf Erfahrungen und Beliefs von Lehramtsstudierenden der Mathematik im Zusammenhang mit Beweisen zu generieren, wurde eine einschlägige Befragung mit acht offenen Fragen (Anhang 1) im Wintersemester 2017/18 an der Friedrich-Schiller-Universität (FSU) Jena durchgeführt. Die Fragen betrafen Erfahrungen mit Beweisen sowohl während der Schullaufbahn als auch im Rahmen der Hochschulausbildung, aber auch Stellungnahmen zur verbindlichen Verankerung von Beweisen in curricularen Dokumenten sowie Vorstellungen vom zukünftigen Unterricht. Die 48 anonym und freiwillig ausgefüllten Antwortbögen bildeten den für die Untersuchung relevanten und an der FSU Jena vorzufindenden Teil der Studierendenschaft gut ab, da sowohl Lehramt Gymnasium als auch Lehramt Regelschule (Bezeichnung für Realschule in Thüringen) sowie erstes bis neuntes Fachsemester unter ihnen vertreten ist. Beweise sollten zwar in jeder Schulform und auf jeder Stufe der schulischen Ausbildung thematisiert werden (Reiss & Heinze, 2005), sie sind aber vor allem für das Gymnasium und die Realschule relevant. Somit eignet sich diese Stichprobe besonders, eine breite Übersicht über mögliche Beliefs zu erhalten und hierdurch ein geeignetes Messinstrument zu entwickeln. Die freien Äußerungen wurden mit Hilfe der Qualitativen Inhaltsanalyse (Mayring, 2010) strukturiert und zu insgesamt 73 Kategorien zusammengefasst. Diese Methode wurde ausgewählt, da sie einerseits eine induktive Kategorienbildung ermöglicht, andererseits die Strukturierung und systematische Bearbeitung von umfangreichem Datenmaterial bietet (Mayring, 2002). Anhang 2 gewährt einen Einblick in den Prozess der Kategorienerstellung. Den abstrahierten Kategorien liegt jeweils eine Hypothese zu Grunde. Sie können einer der oben formulierten Forschungsfragen 1) bis 4) zugeordnet werden. Zu jeder Kategorie können verschiedene Items formuliert werden, entweder im Sinne der zu Grunde liegenden Hypothese oder im entgegengesetzten Sinn. Diese in Anlehnung an den sogenannten Prototypenansatz (Bühner, 2021, S 42f) durchgeführte Vorgehensweise ermöglicht, dass beim Vorhandensein eines theoretischen Gerüsts (2.) insbesondere diejenigen Items in den Fragebogen aufgenommen werden, die die Zielgruppe als relevant erachtet, wodurch die Validität der Skalen gesteigert werden kann (vgl. Pospeschill, 2010, S 43).

Eine erste Pilotierung ausgewählter Items erfolgte im Rahmen der Arbeit von Traxl (2019). Auch wenn im Fokus seiner Arbeit die Veränderungen der Beliefs über Beweise bei Lehramtsstudierenden der Mathematik im Laufe ihrer universitären Ausbildung standen, zeigte eine Korrelationsanalyse hinsichtlich der ausgewählten 24 Items – die 13 Kategorien und alle vier Forschungsfragen abdecken –, dass ähnliche Items korrelieren oder stark korrelieren, während eher kontroverse Items negativ korrelieren (Traxl, 2019, S. 43–44). Somit kann – zumindest bezogen auf diese Auswahl an Items – von einer Validität des erstellten Messinstruments ausgegangen werden. Zudem konnten aus freien Äußerungen der Probanden weitere drei Kategorien hinsichtlich des Lernens von Beweisen abstrahiert werden, diese wurden dem bereits vorhandenen Kategoriensystem von 73 Kategorien hinzugefügt.

Wegen des bereits beträchtlichen Umfangs erfolgte anschließend eine Revidierung des Kategoriensystems, indem nochmals die Reduktionsschritte der Qualitativen Inhaltsanalyse, nämlich die Bündelung und die Konstruktion/Integration (Mayring, 2010, S. 71 f.) angewandt wurden. Diese Schritte werden an je einem konkreten Beispiel verdeutlicht (Tabelle 1): Zwei inhaltlich ähnliche Kategorien, die sich auf die Funktion von Beweisen als Mittel zur Verdeutlichung mathematischer Inhalte und dessen Verständnis bezogen, wurden zu einer Kategorie (Verständnisfunktion) zusammengefasst. Zwei inhaltlich gegensätzliche Kategorien, die das vermutete Bezugsobjekt von Beweisen – Definitionen sowie mathematische Aussagen – benennen, wurden ebenfalls zu einer Kategorie (Bezug von Beweisen) zusammengefügt. Durch diese und analoge Schritte konnte das

Kategoriensystem auf 56 Kategorien reduziert werden. Überdies erfolgte ein Abgleich des Kategoriensystems mit der einschlägigen Literatur, so mit Aner, Bendrien, Broder und Kraft (1979), Brunner (2014), de Villers (1990), Fischer und Malle (1984), Leppig (1979), Stein (1988), Ufer, Heinze, Kuntze und Rudolph-Albert (2009), Walsch (1972) und Winter (1983). Einerseits konnten etwa 85 % der induktiv entwickelten Kategorien auch aus der Literatur abgeleitet werden, andererseits wurden weitere, noch nicht vorhandene Kategorien induziert. Ein Beispiel hierfür ist die Kategorie „Beweise haben eine Kommunikationsfunktion“, auf die zwar aus Studierendenäußerungen nicht, allerdings aus der Arbeit von de Villiers (1990) geschlossen werden konnte. Letztendlich entstand ein Kategoriensystem von 63 Kategorien (Anhang 3). 7 Kategorien bezogen sich auf Erfahrungen mit Beweisen, 17 Kategorien bezogen sich auf Beliefs über Beweise als Teil der Mathematik, 19 Kategorien bezogen sich auf Beliefs über das Lernen von Beweisen sowie 20 Kategorien auf Beliefs über das Lehren von Beweisen. Im Anschluss daran wurde ein digitaler Fragebogen entwickelt, der neben persönlichen Daten, die sich allesamt auf das Studium beziehen, dem Kategoriensystem entsprechend 7 nominale Items hinsichtlich der Erfahrungen mit Beweisen sowie jeweils zweimal 17/19/20 Items vom Likert-Typ hinsichtlich der Beliefs über Beweise als Teil der Mathematik/ über das Lernen von Beweisen / über das Lehren von Beweisen beinhaltet. Mit anderen Worten: Zu jeder Kategorie, die sich nicht auf Erfahrungen bezieht, wurden zwei Items entwickelt, damit die Messgenauigkeit der erhobenen Daten in Anlehnung an das Modell der Split-Half-Reliabilität beurteilt werden kann (Moosbrugger & Kelava, 2020, S. 322).

Eine zweite Pilotierung aller Items erfolgte im Oktober 2020 unter 20 freiwilligen Lehramtsstudierenden der Mathematik der Universität Erfurt (Studierende des Lehramts an Regelschulen, Förderschulen und Grundschulen). Diese war insbesondere notwendig, da das Kategoriensystem seit der Arbeit von Traxl (2019) an mehreren Stellen überarbeitet wurde. Ziel dieser zweiten Datenerhebung vor der Hauptuntersuchung war, zu überprüfen, ob die erstellten Fragen verständlich sind bzw. ob korrespondierende Items von den Probanden ähnlich beantwortet werden. Die quantitative Auswertung der Ergebnisse ergab, dass inhaltlich ähnliche Items einer Kategorie überwiegend positiv, während inhaltlich kontroverse Items einer Kategorie überwiegend negativ zusammenhängen, auch wenn der Zusammenhang zwischen ihnen oft nicht stark war, was aus der geringen Stichprobengröße und der daraus resultierenden starken Auswirkung von Ausreißern folgt. Wegen der geringen Stichprobengröße und der hohen Anzahl der unbeantworteten Items können die ermittelten Ergebnisse nur als Orientierung für die tatsächliche Korrelation der Items dienen. In fünf Fällen wurden geringfügige Formulierungsänderungen durchgeführt, um inhaltliche Akzente noch stärker zu betonen, da entweder keine Korrelation oder eine Korrelation wider Erwarten zwischen den Items festgestellt wurde.

So wurde beispielsweise das Item „Eine Berechnung ohne Begründung kann nicht als Beweis gelten.“ in „Ein Beweis ist eine Begründung, keine Berechnung.“ geändert. Grund hierfür war, dass die erste Variante des Items leicht positiv mit dem Item „Ein Beweis ist eine Berechnung.“ korrelierte, obwohl sie als Gegensätze gemeint waren und eine starke negative Korrelation erwartet wurde. Die endgültige Version des vollständigen Fragebogens ist im Anhang 4 zu finden.

Hierbei wurden Items, die inhaltlich zusammenhängen, z. B. die sich auf Beliefs über Beweise als Teil der Mathematik beziehen, auf zwei verschiedenen Seiten präsentiert. Auf der einen Seite wurde das jeweilige erste Item der entsprechenden Kategorien angegeben, während auf der darauffolgenden Seite das jeweilige zweite Item der entsprechenden Kategorien präsentiert wurde.

Reduktionsschritt	**Generalisierung**	**Ankerbeispiele**	**Hypothese**	**Kategorie**
Bündelung	Verdeutlichung von mathematischen Inhalten	„Es sind Beweise, die einem den Inhalt von Aussagen, Sätzen, Definitionen verdeutlichen.“	Beweise haben eine Verständnisfunktion.	Verständnisfunktion
	Beweise im Allgemeinen haben eine Verständnisfunktion.	„Für einen Beweis wird Transferwissen gefragt; außerdem sorgt ein Beweis für ein tieferes Verständnis der zu beweisenden Aussage.“		
Konstruktion/ Integration	Beweise beziehen sich auf eine mathematische Aussage.	„Die Richtigkeit einer Aussage/eines Satzes formal zu zeigen.“	Beweise beziehen sich auf eine (mathematische) Aussage.	Bezug von Beweisen
	Beweise beziehen sich auf eine Definition.	„Ein Mittel mathematische Definitionen zu zeigen.“		

Tab.1: Beispiele für die Durchführung der Reduktionsschritte Bündelung und Konstruktion/Integration

Durch dieses Vorgehen wurde erreicht, dass korrespondierende Items räumlich – und somit geringfügig auch zeitlich – voneinander getrennt präsentiert wurden. Zudem wurde die Präsentation der Items innerhalb einer Seite randomisiert, wodurch die Erhaltung der Aufmerksamkeit während der Bearbeitung beabsichtigt war.

4.2 Datenerhebung

Die Hauptuntersuchung erfolgte ausschließlich digital im Zeitraum von November 2020 bis März 2021. Um eine möglichst große Stichprobe erreichen zu können, wurden Kolleg:innen an insgesamt 15 Universitäten in verschiedenen deutschen Bundesländern sowie im deutschsprachigen Ausland darum gebeten, ihre Studierenden auf den Fragebogen aufmerksam zu machen.

Die Bearbeitung des Fragebogens erfolgte freiwillig und anonym, Fragen zu überspringen oder die Bearbeitung abzubrechen war jederzeit möglich. Es liegen 208 Datensätze vor, von denen 123 vollständig sind. Hiervon wurden 190 (105 vollständig) von Lehramtsstudierenden der Mathematik ausgefüllt. Die restlichen 18 Datensätze, die von Studierenden der Mathematik ohne Lehramtsbezug bzw. anderer, mathematiknaher Wissenschaften stammen, werden in der vorliegenden Arbeit nicht beachtet, weil der Fokus auf den Beliefs von angehenden Mathematiklehrkräften liegt.

Erhoben wurden einerseits persönliche Angaben, die sich auf das angestrebte Lehramt (Abb. 1), auf das Fachsemester sowie auf den Standort der Hochschule (Abb. 2) bezogen und auf einem Selbstbericht mit Hilfe von nominalen Skalen beruhten. Andererseits wurden Erfahrungen – ebenfalls mit Hilfe von nominalen Skalen – erfasst, die konkrete Beweise, Beweisverfahren, einschlägige Unterrichtsgestaltung und Prüfungsrelevanz von Beweisen in der eigenen Schulzeit sowie im Rahmen der Hochschulausbildung kennengelernte Beweisverfahren und Beweisstrategien umfassten. Zudem wurden Beliefs über Beweise als Teil der Mathematik/ über das Lernen von Beweisen / über das Lehren von Beweisen mit Hilfe von ordinalen Skalen (Items vom Likert-Typ auf einer 4-Punkte-Antwortskala) erhoben.

4.3 Auswertung der Daten

Bei den erhobenen nominalen Daten (Angaben bezüglich des Studiums sowie Erfahrungen mit Beweisen, Anhang 4) wurden die jeweiligen relativen Häufigkeiten sowie der Modalwert bestimmt.

Da die Abstufungen der Antwortkategorien von Ratingskalen ordinal- und nicht metrisch skaliert sind (Pospeschill, 2010, S. 57), wurde keine Faktorenanalyse durchgeführt, sondern es wurde ein mehrschrittiges Verfahren entwickelt, das die Ermittlung von Tendenzen anhand der relativen Häufigkeiten ermöglicht. Es wurde somit bei den erhobenen ordinalen Daten (also bei den Daten vom Likert-Typ) folgendermaßen vorgegangen: Da jede Kategorie mit zwei Items abgefragt wurde, wurden zunächst die absoluten Häufigkeiten der einzelnen Antwortmöglichkeiten addiert, wobei bei inhaltlich gegensätzlich ausgerichteten Items die entgegengesetzte Reihenfolge der Antwortmöglichkeiten beachtet wurde. Dieses Vorgehen wird an einem Beispiel verdeutlicht. Die Kategorie „Verifizierungsfunktion“ wurde mit den inhaltlich korrelierenden Items „Beweise dienen der Verifizierung einer Aussage.“ (Item 1) sowie „Beweise zeigen die Gültigkeit einer mathematischen Aussage.“ (Item 2) abgefragt. Tabelle 2 zeigt die relevanten absoluten Häufigkeiten sowie deren Summe. Die einzelnen Items wurden von einer unterschiedlichen Anzahl an Probanden beantwortet, was nicht nur für dieses Beispiel, sondern für den gesamten Datensatz gilt. Um die Kategorien miteinander vergleichen zu können, wurden anschließend die relativen Häufigkeiten ermittelt, indem die jeweilige Summe der Probanden der einzelnen Items – im konkreten Beispiel 230 – als Grundgesamtheit galt.

Verifizierung	gar nicht	eher nicht	eher zu	voll zu	Σ
Item 1	3	3	45	55	106
Item 2	1	2	21	100	124
Summe	4	5	66	155	230
rel. Häufigkeit	0,0174	0,0213	0,2870	0,6739	

Tab. 2: Beispiel für die Bestimmung der relativen Häufigkeiten einer Kategorie

Um Tendenzen, d. h. die Stärke der Zustimmung zu den einzelnen Aussagen (vgl. Schwarz et al., 2008, S. 809) zu ermitteln, wurden anschließend die relativen Häufigkeiten miteinander verglichen, indem zuerst im Sinne einer Clusterbildung diejenigen Kategorien zu einer Gruppe zusammengefasst wurden, bei denen die höchste relative Häufigkeit in die gleiche Antwortmöglichkeit – z. B. „stimme voll zu“ – fällt. Danach wurde die jeweils andere, in die gleiche Richtung zeigende Antwortmöglichkeit – z. B. zur Antwort „stimme voll zu“ die Antwort „stimme eher zu“ – bzw. seine relative Häufigkeit hinzugenommen. Anhand der Summen wurde innerhalb jeder Gruppe eine Reihenfolge der Kategorien festgestellt. Bei Gleichheit der Summen war der größere Wert der größten relativen Häufigkeiten maßgebend.

Bei dem konkreten Beispiel bleibend: Die Kategorie „Verifizierungsfunktion“ wurde der Gruppe der Kategorien zugeordnet, bei denen die Antwort „stimme voll zu“ am häufigsten vorkommt, da die relative Häufigkeit dieser Antwort mit 0,6739 der höchste Wert unter den hierbei vorkommenden relativen

Häufigkeiten ist. Zusammen mit der relativen Häufigkeit von 0,287 der Antwort „stimme eher zu“ wurde dieser Kategorie der Wert 0,9609 zugeordnet. Durch dieses Vorgehen wurde erreicht, dass Zustimmungen und Ablehnungen zwar additiv, allerdings unter Berücksichtigung der Stärke der Zustimmung bzw. Ablehnung betrachtet wurden. Würden beispielsweise die Antworten „ich stimme voll zu“ und „ich stimme eher zu“ bei einer Kategorie jeweils die relativen Häufigkeiten 35 % und 25 % bzw. bei einer anderen Kategorie 25 % und 35 % erhalten, wären die Kategorien anderen Gruppen zugeordnet. Würden dieselben Antworten bei einer Kategorie 35 % und 25 % bzw. bei einer anderen Kategorie 34 % und 27 % bekommen, so würde letztere Kategorie – da die Summe der relativen Häufigkeiten höher ist – vorangestellt in der Reihenfolge. Zum Schluss: Die relativen Häufigkeiten 35% und 25 % bzw. 34 % und 26 % würden dazu führen, dass die erste Kategorie – die Summen sind zwar gleich, aber die größte relative Häufigkeit (35 %) ist größer als bei der anderen Kategorie (34 %) – in der Reihenfolge weiter vorne stehen würde.

5. Ergebnisse

5.1 Charakteristika der Stichprobe

Die Probanden bilden einen überwiegenden Teil der Lehramtsausbildung in Mathematik ab, da sie zu etwa je einem Drittel Lehramt Mathematik an Gymnasien bzw. an Real-, Regel- Mittelschulen etc. (zusammengefasst als Lehramt in der Sekundarstufe I) studieren und etwa ihre Hälfte Grundschullehramt anstrebt. Auch das Lehramt an Förderschulen ist mit rund 6 % vertreten (Abb. 1). Wegen diverser Möglichkeiten des Ergänzungs-, Vertiefungs- und Erweiterungsstudiums war bei der Erhebung dieser Daten eine Mehrfachnennung erlaubt.

Zudem wird das Lehramtsstudium durch die Stichprobe auch longitudinal gut abgebildet: Etwa 37 % studieren im ersten Studienjahr (1.-2.Fachsemester) und zählen somit als Studienanfänger; knapp 44 % studieren im 3.-6. Fachsemester und somit entweder im Bachelor oder in der ersten Hälfte eines Staatsexamensstudiums; 15 % im 7.-10. Fachsemester und somit entweder im Master oder in der zweiten Hälfte eines Staatsexamensstudiums. Rund 4 % gaben an, bereits mehr als 10 Fachsemester studiert zu haben. Diese Unterscheidung scheint sinnvoll, da sie über den zeitlichen Umfang des Fachstudiums und somit auch über die zeitliche Nähe/Entfernung der Eindrücke aus der Schule Auskunft gibt, was maßgebend bei der Herausbildung von Beliefs ist. Eine reine Unterscheidung zwischen Bachelor- Master- und Staatsexamensstudium würde hierüber nicht informieren.

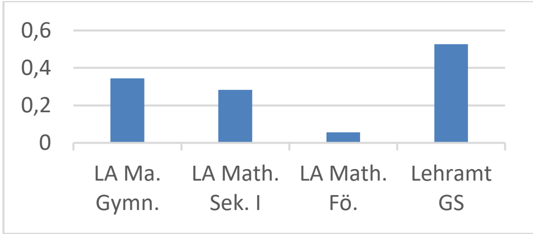

Abb. 1: Anteil der Probanden nach Stufe des angestrebten Lehramts (Mehrfachnennung möglich) in der Gesamtstichprobe

Regional gesehen ist die Stichprobe jedoch nicht repräsentativ: Nur sechs Bundesländer (Bayern, Brandenburg, Niedersachsen, Nordrhein-Westfalen, Rheinland-Pfalz und Thüringen) sind vertreten, darunter die neuen Bundesländer mit etwa 64 %, überdies ist das deutschsprachige Ausland mit knapp 20 % vertreten (Abb. 2).

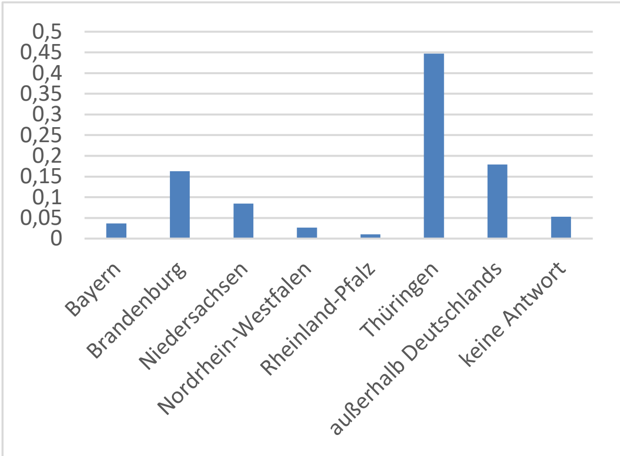

Abb. 2: Verteilung der Standorte der Probanden in der Gesamtstichprobe

5.2 Erfahrungen mit Beweisen

44 % der Befragten gaben an, in der Schule Beweise geführt zu haben. *Hiervon* haben 75 % laut Selbstbericht den direkten Beweis, 60 % die Widerlegung durch ein Gegenbeispiel, 42 % den indirekten Beweis und 24 % die vollständige Induktion kennengelernt. Die hohen Werte sollten nicht täuschen: Bezogen auf die Gesamtheit *aller* Probanden geht es um die Kenntnis dieser Beweisverfahren der Reihe nach von 33 %, 27 %, 19 % und 11 % der Antwortenden. Eine Differenzierung der Befunde nach der Schulart des angestrebten Lehramts – Primar- vs. Sekundarstufe (Hierzu wurden diejenigen Probanden, die das Lehramt an Grundschulen oder Förderschulen angegeben haben, als Lehramt in der Primarstufe, und diejenigen, die das Lehramt an Gymnasien oder in der Sekundarstufe I angegeben haben, als Lehramt in der Sekundarstufe zusammengefasst. Hierdurch konnte auch eine Dopplung vermieden werden, sodass die Grundgesamtheit in zwei disjunkte Teilmengen aufgeteilt wurde.) – verdeutlichte einerseits, dass es keinen Unterschied in der Stichprobe bezogen auf die

Führung von Beweisen in der Schule gibt (Primarstufe: 44,6 %, Sekundarstufe: 44 %). Es ergab sich andererseits, dass zwar die Beweisverfahren direkter Beweis und vollständige Induktion einem geringfügig höheren Anteil der Probanden aus der Schule bekannt war, die das Lehramt in der Primarstufe anstreben, als den Probanden, die das Lehramt in der Sekundarstufe erwerben möchten, aber insgesamt auch bezüglich dieses Merkmals keine nennenswerten Unterschiede in der Stichprobe gibt (Abb. 3).

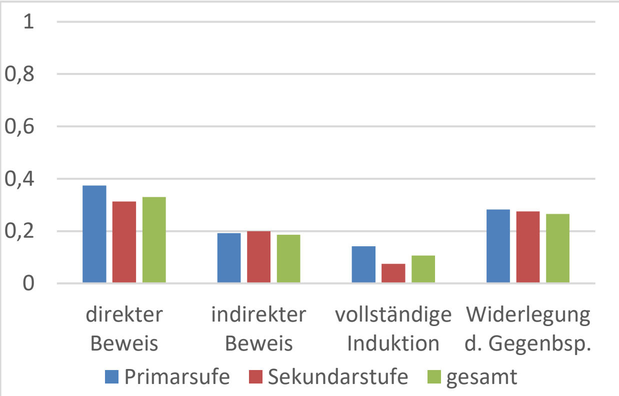

Abb. 3: Bekanntheitsgrad von Beweisverfahren aus der Schule nach der Schulart des angestrebten Lehramts sowie in der Gesamtstichprobe

Vielsagend ist zudem die Tatsache, dass ein knappes Drittel der Antwortgebenden (14 % der Gesamtstichprobe) nur ein Beweisverfahren als aus der Schule bekannt angegeben hat, alle vier Beweisverfahren kennen laut Selbstbericht nur 13 % (6 % der Gesamtstichprobe) aus der Schule. Bezüglich der Schulart des angestrebten Lehramts konnten keine erwähnenswerten Unterschiede ermittelt werden.

Laut Brunner (2014, S. 2) bildet der Beweis zum Satz von Pythagoras eine Ausnahme und stellt einen Beweis dar, der doch in der Schule thematisiert wird. Erwartungsgemäß ist dieser Beweis den meisten antwortenden Probanden (64 %) aus der Schule bekannt, dies entspricht 28 % der Gesamtstichprobe (Abb. 4).

Weitere Beweise zu vorgegebenen Sätzen wurden insgesamt mit einer Bekanntschaft zwischen 10 % und 50 % angegeben (Abb. 4), was einen Anteil der Gesamtstichprobe zwischen 4 % und 22 % bedeutet. Jeweils einmal wurde zudem der Höhensatz, die Größe des Gegenwinkels sowie die Parität zweier ungerader Zahlen als solche Sätze erwähnt, deren Beweis aus der Schule bekannt ist.

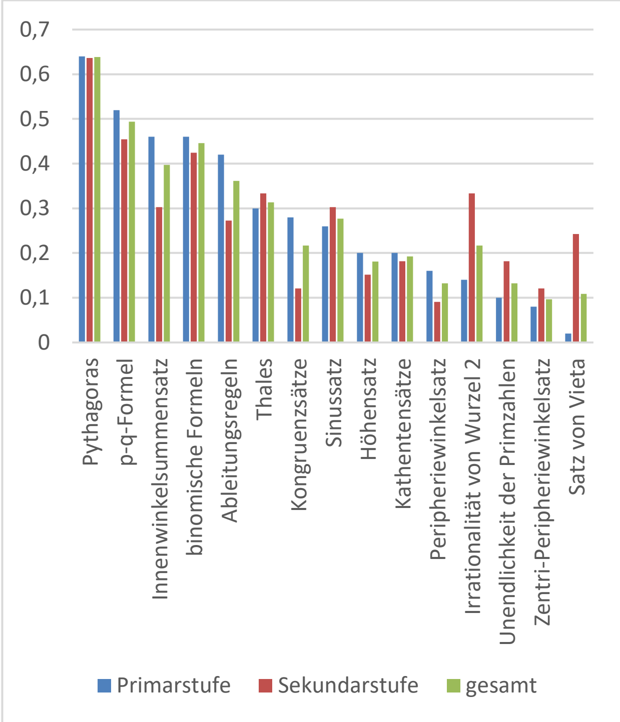

Abb. 4: Bekanntheitsgrad der als aus der Schule bekannt angegebenen Beweise zu konkreten Sätzen nach der Schulart des angestrebten Lehramts sowie in der Gesamtstichprobe (Mehrfachnennung möglich)

Einige Beweise, so der zum Innenwinkelsummensatz, zu den Ableitungsregeln und zu den Kongruenzsätzen scheinen einem höheren Anteil der Antwort gebenden Probanden bekannt, die das Lehramt in der Primarstufe anstreben, als denen, die das Lehramt in der Sekundarstufe erwerben möchten. Dafür geben Letztere zu einem jeweils höheren Anteil an, den Beweis zur Irrationalität von Wurzel aus 2, zur Unendlichkeit der Anzahl der Primzahlen sowie zum Satz von Viéta aus der Schule zu kennen. Betrachtet man quantitativ den Anteil der Anzahl der bekannten Beweise zu den vorgegebenen konkreten Sätzen, so lassen sich wiederum nach der Schulart des angestrebten Lehramts nur geringfügige Unterschiede zugunsten der Befragten, die das Lehramt in der Sekundarstufe anstreben, ermitteln. Wie bereits thematisiert, geben die Probanden überwiegend an, keine Beweise in der Schule geführt zu haben (47 % bzw. 56 %, Abb. 5). Unter denjenigen, die davon berichten, in der Schule Beweise geführt zu haben, dominiert die Kenntnis von Beweisen zu insgesamt 1-5 Sätzen der Schulmathematik, hier ist der Anteil der Probanden, die das Lehramt in der Sekundarstufe anstreben, etwas höher (29,3 %) als der der Probanden, die das Lehramt in der Primarstufe anstreben (22,3 %) (Abb. 5). Ansonsten sind keine Unterschiede unter den Befragten festzustellen, die angeben, in der Schule Beweise geführt zu haben.

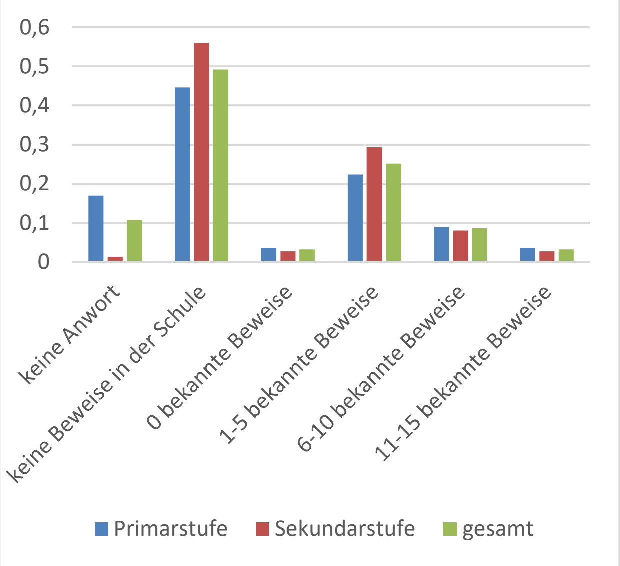

Abb. 5: Anteil der Anzahl der aus der Schule bekannten konkreten Beweise nach der Schulart des angestrebten Lehramts sowie in der Gesamtstichprobe

Was die einschlägige Unterrichtsgestaltung betrifft, dominiert laut Selbstbericht das Vorführen durch die Lehrperson (49 %), eventuell im Unterrichtsgespräch mit der Schülerschaft (22 %), nur wenige gaben an, die Beweise überwiegend allein (2 %) oder in Kleingruppen (4 %) selbst geführt zu haben. Hinzu kommt, dass die Beweise nur bei 8 % der Probanden (4 % der Gesamtstichprobe) überwiegend und bei weiteren 33 % in Ausnahmefällen (14 % der Gesamtstichprobe) in der Schule prüfungsrelevant waren.

Anders verhält es sich mit den Erfahrungen bezogen auf Beweise an der Hochschule. Von den 79 % *aller* Befragten, die sich hierzu geäußert haben, sind die Beweisverfahren direkter Beweis, indirekter Beweis, Wiederlegung durch Gegenbeispiel und vollständige Induktion der Reihe nach 87 %, 83 %, 78 % und 75 % der Probanden aus dem Studium bekannt. Diese Daten entsprechen der Reihe nach 69 %, 66 %, 62 % und 59 % der Gesamtstichprobe. Im Gegensatz zu den Erfahrungen aus der Schule (Abb. 3) zeigen sich hier deutliche Unterschiede unter den Probanden entlang des angestrebten Lehramts: Während von den Probanden, die das Lehramt in der Primarstufe anstreben, der Reihe nach 58 %, 50 %, 43 % und 43 % angaben, die genannten Beweisverfahren im Studium kennengelernt zu haben, berichtet jeweils ein deutlich höherer Anteil – 93 %, 93 %, 93 % und 86 % – der Probanden, die das Lehramt in der Sekundarstufe anstreben, von einer entsprechenden Erfahrung an der Hochschule (Abb. 6).

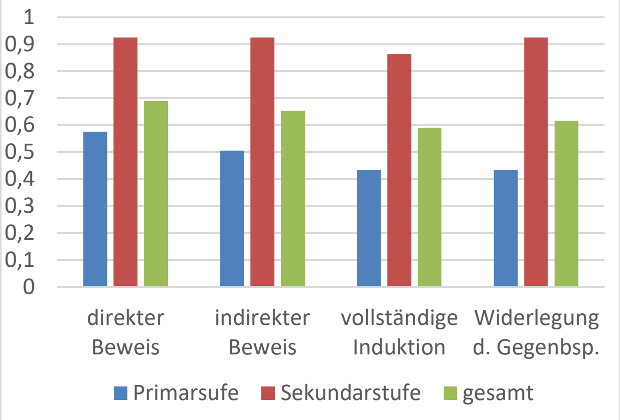

Abb. 6: Bekanntheitsgrad von Beweisverfahren aus dem Studium nach der Schulart des angestrebten Lehramts sowie in der Gesamtstichprobe

Die Unterschiede zwischen den zwei Probandengruppen – Anstreben des Lehramts in der Primar- vs. der Sekundarstufe – werden noch deutlicher, wenn man die Anzahl der aus dem Studium bekannten Beweisverfahren vergleicht (Abb. 7): Unter den Probanden, die das Lehramt in der Sekundarstufe anstreben, ist die Bekanntschaft aller vier Beweisverfahren aus dem Studium hoch (85 % aller Antwort gebenden Probanden, die das Lehramt in der Sekundarstufe anstreben), während der entsprechende Anteil bei Probanden, die das Lehramt in der Primarstufe anstreben, 31 % beträgt.

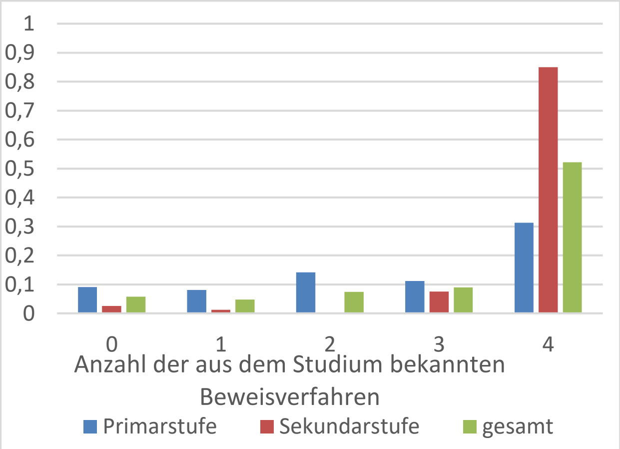

Abb. 7: Anteil der Anzahl der aus dem Studium bekannten Beweisverfahren nach der Schulart des angestrebten Lehramts sowie in der Gesamtstichprobe

71 % aller Befragten äußerten sich überdies zu den heuristischen Strategien, die sie im Zusammenhang mit Beweisen im Studium kennengelernt haben. Der Mehrheit von ihnen sind die Fallunterscheidung (78 % der Antwortenden, 55 % der Gesamtstichprobe), die Zerlegung in Teilbeweise (72 % der Antwortenden, 51 % der Gesamtstichprobe) und das Rückwärtsarbeiten (54 %, 39 % der Gesamtstichprobe) als einschlägige Strategien geläufig, etwa einem Drittel (37 % der Antwortenden, 26 % der Gesamtstichprobe) auch die Analogiebildung. Gravierende Unterschiede zeigen sich allerdings zwischen

den beiden Stichprobengruppen bei jeder vorgegebenen heuristischen Strategie zugunsten derjenigen Probanden, die das Lehramt in der Sekundarstufe anstreben (Abb. 8). Besonders deutlich wird dieser Unterschied bei der Strategie der Fallunterscheidung, welche 94 % der Probanden, die das Lehramt in der Sekundarstufe anstreben und lediglich 30 % der Probanden, die das Lehramt in der Primarstufe anstreben, als aus dem Studium bekannt angegeben haben (Abb. 8).

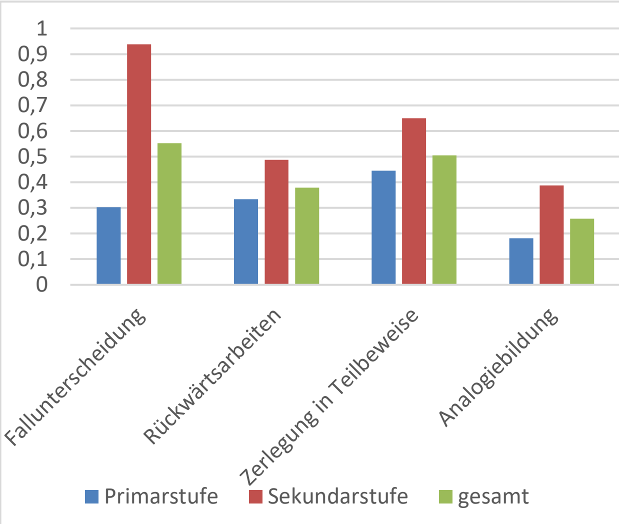

Abb. 8: Bekanntheitsgrad von heuristischen Strategien mit Bezug zum Beweisen aus dem Studium nach der Schulart des angestrebten Lehramts sowie in der Gesamtstichprobe

Bezogen auf die Anzahl der aus dem Studium bekannten heuristischen Strategien mit Bezug zum Beweisen kann festgehalten werden, dass rund ein Viertel der Antwortgebenden nur eine heuristische Strategie, 20 % der Antwortenden allerdings sogar alle vier genannten Strategien kennen. Während unter den Probanden, die das Lehramt in der Primarstufe anstreben, die Bekanntheit von 1-2 heuristischen Strategien dominiert, geben diejenigen Probanden an, die das Lehramt in der Sekundarstufe anstreben, überwiegend 2-4 heuristische Strategien zu kennen (Abb. 9).

Insgesamt zeigt sich, dass die Probanden – unabhängig vom angestrebten Lehramt – über eine mangel- bzw. lückenhafte Erfahrungslage mit Beweisen aus ihrer Schulzeit berichten. Wenn überhaupt, sind sie während ihrer Schulausbildung nur mit einigen wenigen konkreten Beweisen und demzufolge mit einigen wenigen Beweisverfahren in Berührung gekommen. Ausgeprägte Erfahrungen mit Beweisen haben die Probanden im Laufe ihrer Hochschulausbildung gemacht, diese Erfahrungen scheinen umfangreicher zugunsten der Probanden auszufallen, die das Lehramt in der Sekundarstufe anstreben.

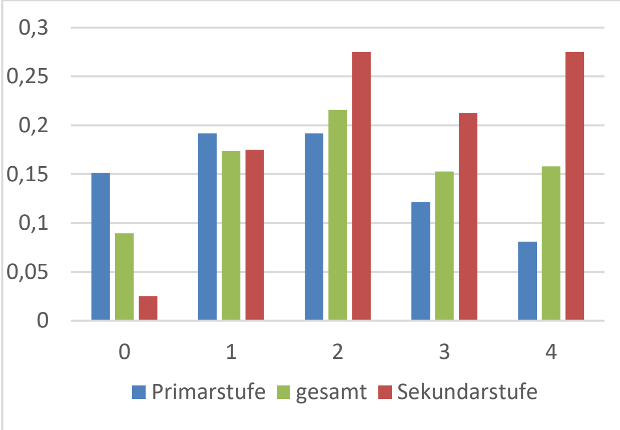

Abb. 9: Anteil der Anzahl der aus dem Studium bekannten heuristischen Strategien mit Bezug zum Beweisen nach der Schulart des angestrebten Lehramts sowie in der Gesamtstichprobe

5.3 Beliefs über Beweise als Teil der Mathematik

Bezogen auf Beliefs über Beweise als Teil der Mathematik konnten drei Gruppen an Kategorien identifiziert werden: Kategorien, denen die überwiegende Mehrheit der Probanden voll zugestimmt hat (Abb. 10), Kategorien, denen überwiegend eher zugestimmt worden ist (Abb. 11) sowie Kategorien, die überwiegend eher abgelehnt worden sind (Abb. 12). Es soll angemerkt werden, dass die Abbildungen 10-26 die erhobenen Daten nicht nur numerisch enthalten, sondern diese jeweils auch durch Balken darstellen (eine Zellenbreite entspricht 1), um Tendenzen zu verdeutlichen. Die Daten werden bezüglich der Gesamtstichprobe nachfolgend vollumfassend präsentiert. Zudem wird auf Daten bezogen auf die oben definierten Teilstichproben (5.2) in Abhängigkeit vom von den Probanden angestrebten Lehramts eingegangen, wenn sich diese in der Haupttendenz (d. h. in der Summe der Abstimmungen bzw. Ablehnungen) deutlich voneinander unterschieden. Dies bedeutet eine *relative* Abweichung um mindestens 10 %.

Die Probanden sind von der Verifizierungs-, der Erklärungs- und der Verallgemeinerungsfunktion (Teil der Entdeckungsfunktion) von Beweisen voll überzeugt und wissen, dass sich Beweise auf Axiome, Begriffe und bereits bewiesene Sätze unter der Beachtung der Regeln der logischen Schlussfolgerung stützen. Unsicherheit ist aber bei der Kategorie „Begründungsart“ zu verzeichnen. Die Probanden waren nur zu 60 % überzeugt, dass Beweise deduktives, und nicht induktives Schließen darstellen (Abb. 10, letzte Zeile). Bei diesen Kategorien zeigten sich kaum nennenswerte Unterschiede zwischen Studierenden der Primar- bzw. der Sekundarstufe. Bezogen auf die Kategorie Stützung konnte dennoch eine stärkere Zustimmung (83 %) bei Probanden festgestellt werden, die das Lehramt in der Sekundarstufe anstreben, als bei denen (75 %), die das Lehramt in der Primarstufe erwerben möchten.

Kategorie	Gar nicht	Eher nicht	Eher zu	Voll zu	Summe Zustimmung	N
Verifizierungs-funktion	0,0174	0,0217	0,287	0,6739	0,9609	230
Logik	0,0045	0,0402	0,3795	0,5759	0,9554	224
Erklärfunktion	0,0386	0,1373	0,3863	0,4378	0,824	233
Stützung	0,0357	0,1696	0,3482	0,4464	0,7946	224
Verallge-meinerung	0,0749	0,1674	0,3436	0,4141	0,7577	227
Begründungs-arten	0,2193	0,1765	0,2246	0,3797	0,6043	187

Abb. 10: Kategoriengruppe „volle Zustimmung“ bei Beliefs über Beweise als Teil der Mathematik

Eher überzeugt, aber nicht voll überzeugt sind die Probanden davon, dass Beweise den Kern der Mathematik bilden, formal zu verfassen sind und zur Generierung neuen Wissens (als weiterer Teil der Entdeckungsfunktion) beitragen können. Weiterhin noch Zustimmung, aber mit zunehmender Unsicherheit ist der Reihe nach bezüglich der Kommunikations- und der Systematisierungsfunktion, des Bezugs eines Beweises (mathematische Aussage oder eine Definition) sowie des Zusammenhangs mit dem entsprechenden Satz zu verzeichnen (Abb. 11).

Kategorie	Gar nicht	Eher nicht	Eher zu	Voll zu	Summe Zustimmung	N
Teil der Mathematik	0,0536	0,125	0,4375	0,3839	0,8214	224
Formalismus	0,0362	0,181	0,4661	0,3167	0,7828	221
Entdeckung von Neuem	0,0415	0,2258	0,4286	0,3041	0,7327	217
Kommunikations-funktion	0,0995	0,2559	0,4171	0,2275	0,6445	211
Systematisierungs-funktion	0,0783	0,2949	0,4332	0,1935	0,6267	217
Bezug	0,1378	0,2844	0,36	0,2178	0,5778	225
Satzfindung	0,1863	0,2794	0,402	0,1324	0,5343	204

Abb. 11: Kategoriengruppe „eher Zustimmung“ bei Beliefs über Beweise als Teil der Mathematik

Davon, dass Beweise sich auf mathematische Aussagen beziehen und einen wesentlichen Teil der Mathematik bilden, sowie dass sie ein wichtiges Mittel und gleichzeitig wichtiger Gegenstand der Kommunikation innerhalb der mathematischen Community sind, sind jeweils ca. 10 % mehr Studierende des Lehramts für die Sekundarstufe als die für die Primarstufe überzeugt (Abb. 12, Zeile 1-6). Dahingegen stimmte ein jeweils (um 7,5 % – 11 %) höherer Anteil der Studierenden der Primarstufe als der der Sekundarstufe dafür, dass durch Beweise neues mathematisches Wissen entdeckt werden kann sowie, dass Beweise den Satz bzw. den Weg zur Findung des Satzes darstellen (Abb. 12, Zeile 7-10).

Kategorie	Gar nicht	Eher nicht	Eher zu	Voll zu	Summe Zustimmung	N
Teil der Mathematik	0,0660	0,1604	0,4906	0,2830	0,7736	106
	0,0424	0,0932	0,3898	0,4746	0,8644	118
Bezug	0,1509	0,3208	0,4057	0,1226	0,5283	106
	0,2101	0,2521	0,3193	0,3025	0,6218	119
Kommunikations-funktion	0,1458	0,2604	0,4792	0,1146	0,5938	96
	0,0609	0,2522	0,3652	0,3217	0,6870	115
Entdeckung von Neuem	0,0297	0,1980	0,5347	0,2376	0,7723	101
	0,0517	0,2500	0,3362	0,3621	0,6983	116
Satzfindung	0,1461	0,2584	0,4944	0,1011	0,5955	89
	0,2174	0,2957	0,3304	0,1565	0,4870	115

Abb. 12: Unterschiede zwischen Primar- (gelb) und Sekundarstufe (grün) in der Kategoriengruppe „eher Zustimmung“ bei Beliefs über Beweise als Teil der Mathematik

Eher abgelehnt wurden typische Fehlvorstellungen, nämlich dass ein Beweis eine Berechnung wäre bzw. dass es hierbei um die Beschreibung eines Lösungsweges geht. Unsicherheit (Ablehnung und Zustimmung beide um die 50 %) ist bezogen auf die auszuführende Art der Begründung (Deduktion oder Induktion) und auf die Richtung der Beweisführung (von der Voraussetzung zur Behauptung oder umgekehrt) festzustellen (Abb. 13).

Kategorie	Gar nicht	Eher nicht	Eher zu	Voll zu	Summe Ablehnung	N
Berechnung	0,3664	0,4095	0,181	0,0431	0,7759	232
Lösungsweg	0,2133	0,3644	0,3644	0,0578	0,5778	225
Deduktion	0,1474	0,3947	0,3316	0,1263	0,5421	190
Richtung der Beweisführung	0,1268	0,3099	0,2817	0,2817	0,4366	213

Abb. 13: Kategoriengruppe „eher Ablehnung“ bei Beliefs über Beweise als Teil der Mathematik

Die detaillierte Analyse dieser Kategoriengruppe zeigt allerdings deutliche Unterschiede entlang des von den Probanden angestrebten Lehramts. Sowohl die Fehlvorstellung, ein Beweis wäre eine Berechnung, als auch die Fehlvorstellung, dass ein Beweis die Beschreibung eines Lösungswegs darstellt, wurden von anteilig deutlich (um ca. 18-26 %) mehr Probanden abgelehnt, die das Lehramt in der Sekundarstufe anstreben, als von denen, die das Lehramt in der Primarstufe anstreben (Abb. 14, Zeile 1-4). Mit anderen Worten verfügen über diese Fehlvorstellungen mehr Probanden, die das Lehramt in der Primarstufe anstreben, als Probanden, die das Lehramt in der Sekundarstufe erwerben möchten. Überdies war ein größerer Anteil (ca. 50 %) der Probanden der Sekundarstufe davon überzeugt, dass Beweise deduktiv sind, als der entsprechende Anteil (40 %) der Probanden der Primarstufe (Abb. 14, Zeile 5-6). Hinzu kommt, dass ein ebenfalls gravierend größerer Anteil (über 55 %) der Probanden der Primarstufe ablehnen, dass Beweise von der Voraussetzung zur Behauptung führen und haben somit eine Fehlvorstellung bezogen auf Beweise, während der entsprechende Anteil unter den Probanden, die das Lehramt in der Sekundarstufe anstreben, nur 33 % beträgt (Abb. 14, Zeile 7-8).

Kategorie	Gar nicht	Eher nicht	Eher zu	Voll zu	Summe Ablehnung	N
Berechnung	0,1964	0,4464	0,2946	0,0625	0,6429	112
	0,5250	0,3750	0,0750	0,0250	0,9000	120
Lösungsweg	0,1284	0,3578	0,4679	0,0459	0,4862	109
	0,2931	0,3707	0,2672	0,0690	0,6638	116
Deduktion	0,0864	0,5185	0,3210	0,0741	0,6049	81
	0,1927	0,3028	0,3394	0,1651	0,4954	109
Richtung der Beweisführung	0,1881	0,3663	0,2475	0,1980	0,5545	101
	0,0714	0,2589	0,3125	0,3571	0,3304	112

Abb. 14: Unterschiede zwischen Primar- (gelb) und Sekundarstufe (grün) in der Kategoriengruppe „eher Ablehnung" bei Beliefs über Beweise als Teil der Mathematik

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die Beliefs der Probanden über Beweise als Teil der Mathematik durch Merkmale und Funktionen des wissenschaftlichen Beweisbegriffs geprägt sind (2.1.1). Diese Beliefs sind in einigen Zügen – so mit Bezug zur Stützung eines Beweises, zur Rolle von Beweisen in der Mathematik, zur Kommunikationsfunktion von Beweisen, zur Deduktion sowie zum Bezug eines Beweises (Satz) – stärker bei Probanden ausgeprägt, die das Lehramt in der Sekundarstufe anstreben, als bei denen, die das Lehramt in der Primarstufe erwerben möchten. Bei Letzteren sind auch einige Fehlvorstellungen zu verzeichnen, zudem sind sie eher von der Entdeckungsfunktion von Beweisen überzeugt als Probanden, die das Lehramt in der Sekundarstufe anstreben.

5.4 Beliefs über das Lernen von Beweisen

Bezogen auf Beliefs über das Lernen von Beweisen konnten die analogen drei Gruppen an Kategorien identifiziert werden wie vorher.

Die Probanden sind überwiegend voll davon überzeugt, dass ein Austausch unter Lernenden die Beweiskompetenz fördert und dass an der Hochschule institutionelle Hilfe in diesem Bereich von Nöten ist. Deutliche Schwierigkeiten werden bei der Findung der Beweisidee und beim formalen Aufschreiben des Beweises gesehen, zudem wird eine hohe Gefahr vermutet, dass Beweise in der Schule nur auswendig gelernt werden bzw. dass die Lernenden in einer Prüfungssituation mit einer Beweisaufgabe überfordert sind (Abb. 15).

Kategorie	Gar nicht	Eher nicht	Eher zu	Voll zu	Summe Zustimmung	N
Austausch	0,0099	0,0891	0,4455	0,4554	0,901	202
Prüfungssituation	0,0201	0,0854	0,392	0,5025	0,8945	199
Institutionelle Hilfe	0,0317	0,0847	0,4339	0,4497	0,8836	189
Beweisidee	0,0347	0,104	0,3366	0,5248	0,8614	202
Auswendiglernen	0,045	0,14	0,33	0,485	0,815	200
Formalismus	0,0145	0,1836	0,3527	0,4493	0,8019	207

Abb. 15: Kategoriengruppe „volle Zustimmung" bei Beliefs über das Lernen von Beweisen

Nennenswerte Unterschiede in der Stichprobe entlang des angestrebten Lehramts konnten in zwei Fällen beobachtet werden: Knapp 8 % mehr Probanden, die das Lehramt in der Primarstufe anstreben als die, die das Lehramt in der Sekundarstufe erwerben möchten, sind davon überzeugt, dass Lernende in einer Prüfungssituation mit Beweisaufgaben überfordert sind. Zudem wünschen sich 10 % mehr Probanden, die das Lehramt in der Primarstufe anstreben, institutionelle Hilfe beim Beweisen im Studium, als Probanden, die das Lehramt in der Sekundarstufe erwerben möchten (Abb. 16).

Kategorie	Gar nicht	Eher nicht	Eher zu	Voll zu	Summe Zustimmung	N
Prüfungssituation	0	0,0645	0,3871	0,5484	0,9355	93
	0,0377	0,1038	0,3962	0,4623	0,8585	106
institutionelle Hilfe	0	0,0602	0,5542	0,3855	0,9398	83
	0,0566	0,1038	0,3396	0,5000	0,8396	106

Abb. 16: Unterschiede zwischen Primar- (gelb) und Sekundarstufe (grün) in der Kategoriengruppe „volle Zustimmung" bei Beliefs über das Lernen von Beweisen

Eher überzeugt sind die Probanden davon, dass es den Lernenden schwerfällt, aus der Voraussetzung logisch richtige Schlussfolgerungen zu ziehen, den zu beweisenden Satz zu finden bzw. die Notwendigkeit eines Beweises einzusehen. Sie erleben allerdings durch die Beweise, dass die Mathematik eine objektive Wissenschaft ist, und lernen das logische Denken. Mehr als drei Viertel der Probanden stimmte dafür, dass Lernende und Lehrende wegen ihrer unterschiedlicher Argumentationsbasis (2.2.1) aneinander vorbeireden, wenn es um Beweise geht (eine Erläuterung des Begriffs Argumentationsbasis wurde den Probanden zur Verfügung gestellt, vgl. Anhang 4). Auch wenn Beweise die Kreativität nach Meinung der Probanden fördern können, fällt es ihnen nach eigener Angabe schwer, Behauptung und Voraussetzung auseinander zu halten bzw. die Gültigkeit eines Beweises einzusehen. Für Lernende ist zudem eher die Plausibilität von Aussagen als das Vorliegen eines einschlägigen Beweises von Relevanz (Abb. 17).

Kategorie	Gar nicht	Eher nicht	Eher zu	Voll zu	Summe Zustimmung	N
Logische Schlussfolgerung	0,0101	0,1156	0,5276	0,3467	0,8744	199
Objektivität	0,0313	0,099	0,5208	0,349	0,8698	192
logisches Denken	0,0421	0,1449	0,4533	0,3598	0,8131	214
Satzfindung	0,0693	0,1238	0,4653	0,3416	0,8069	202
Beweis-notwendigkeit	0,0534	0,1505	0,4369	0,3592	0,7961	206
Argumentations-basis	0,0256	0,2103	0,5538	0,2103	0,7641	195
Kreativität	0,0784	0,1667	0,4069	0,348	0,7549	204
Beweisstruktur	0,0995	0,1891	0,4726	0,2388	0,7114	201
Plausibilität	0,0851	0,2181	0,4734	0,2234	0,6968	188
Gültigkeit	0,078	0,3122	0,3805	0,2293	0,6098	205

Abb. 17: Kategoriengruppe „eher Zustimmung" bei Beliefs über das Lernen von Beweisen

Dass Lernende Schwierigkeiten haben, den zu beweisenden Satz zu finden sowie die Notwendigkeit eines Beweises einzusehen, befürchtete ein deutlich (um 8-12 %) höherer Anteil der Probanden, die das Lehramt in der Primarstufe anstreben, als der entsprechende Anteil der Probanden, die das Lehramt in der

Sekundarstufe erwerben möchten (Abb. 18, Zeile 1-4). Dahingegen ist ein bedeutsam (um 16 %) größerer Anteil der Probanden, die das Lehramt in der Sekundarstufe anstreben, davon überzeugt, dass Beweise die Kreativität der Lernenden fördern können (Abb. 18, Zeile 5-6).

Kategorie	Gar nicht	Eher nicht	Eher zu	Voll zu	Summe Zustimmung	N
Satzfindung	0,0319	0,1170	0,4894	0,3617	0,8511	94
	0,1019	0,1296	0,4444	0,3241	0,7685	108
Beweis-notwendigkeit	0,0313	0,1042	0,4896	0,3750	0,8646	96
	0,0727	0,1909	0,3909	0,3455	0,7364	110
Kreativität	0,0851	0,2447	0,4574	0,2128	0,6702	94
	0,0727	0,1000	0,3636	0,4636	0,8273	110

Abb. 18: Unterschiede zwischen Primar- (gelb) und Sekundarstufe (grün) in der Kategoriengruppe „eher Zustimmung" bei Beliefs über das Lernen von Beweisen

Eher abgelehnt wurde insgesamt, dass Beweise die Lernmotivation fördern bzw. für andere mathematische Tätigkeiten nützlich wären (Abb. 19). Allerdings ist die Ablehnung bezogen auf die Förderung der Lernmotivation unter den Probanden, die das Lehramt in der Primarstufe anstreben, um ca. 12 % größer als unter den Probanden, die das Lehramt für die Sekundarstufe studieren (Abb. 20, Zeile 1-2).

Kategorie	Gar nicht	Eher nicht	Eher zu	Voll zu	Summe Ablehnung	N
Lernmotivation	0,4028	0,4265	0,1422	0,0284	0,8294	211
Transferleistung	0,2683	0,4341	0,2098	0,0878	0,7024	205
Nur Universität	0,2312	0,3116	0,2814	0,1759	0,5427	199

Abb. 19: Kategoriengruppe „eher Ablehnung" bei Beliefs über das Lernen von Beweisen

Zudem lehnen insgesamt 54 % der Befragten ab, dass Beweise nur an der Universität und in der Schule nicht thematisiert werden (Abb. 19). Diese Ablehnung ist deutlich (um etwa 11 %) größer unter Probanden, die das Lehramt in der Primarstufe anstreben (Abb. 20, Zeile 3-4.)

Kategorie	Gar nicht	Eher nicht	Eher zu	Voll zu	Summe Ablehnung	N
Lernmotivation	0,4554	0,4356	0,1089	0,0000	0,8911	101
	0,3545	0,4182	0,1727	0,0545	0,7727	110
nur Universität	0,2111	0,3889	0,2444	0,1556	0,6000	90
	0,2477	0,2477	0,3119	0,1927	0,4954	109

Abb. 20: Unterschiede zwischen Primar- (gelb) und Sekundarstufe (grün) in der Kategoriengruppe „eher Ablehnung" bei Beliefs über das Lernen von Beweisen

Insgesamt zeigt sich, dass die Probanden denjenigen Schwierigkeiten aus Lernendensicht zustimmen, die bereits aus bisherigen Studien bekannt sind. Einige dieser Schwierigkeiten – so die Schwierigkeit der Satzfindung und der Einsicht der Beweisnotwendigkeit – sind bei Probanden, die das Lehramt in der Primarstufe anstreben, stärker zu verzeichnen als bei Probanden, die das Lehramt in der Sekundarstufe erwerben möchten. Trotz der Zustimmung zu diesen Schwierigkeiten sowie zur Ablehnung der Förderung der Lernmotivation durch Beweise verorten vor allem Erstere Beweise in der Schule und heben positive Effekte wie die Förderung der Kreativität durch Beweise hervor.

5.5 Beliefs über das Lehren von Beweisen

Hinsichtlich der Beliefs über das Lehren von Beweisen konnten vier Gruppen an Kategorien identifiziert werden. Die detaillierte inhaltliche Analyse der Gruppen zeigte allerdings, dass die Grenzen der präsentierten Methode erreicht wurden, da sie nicht immer die Haupttendenz erfasst bzw. nicht in jedem Fall eine Haupttendenz vorliegt.

Überwiegend voll zugestimmt haben die Probanden, dass in der Schule der Beweis zum Satz des Pythagoras unterrichtet werden soll, dass Beweise auf das Studium vorbereiten bzw. ein authentisches Bild von der Mathematik vermitteln und aus diesem Grund in der Schule thematisiert werden sollen. Dennoch sollen sie in schulischen Prüfungen nicht abgefragt werden (Abb. 21).

Kategorie	Gar nicht	Eher nicht	Eher zu	Voll zu	Summe Zustimmung	N
Pythagoras	0,034	0,0728	0,3058	0,5874	0,8932	206
Studiums-vorbereitung	0,0619	0,1649	0,3866	0,3866	0,7732	194
Bild von der Mathematik	0,0508	0,1777	0,3553	0,4162	0,7716	197
Prüfung	0,09	0,21	0,31	0,39	0,7	200

Abb. 21: Kategoriengruppe „volle Zustimmung" bei Beliefs über das Lehren von Beweisen

Vor allem bei der Vorbereitung auf das Studium sowie bei der Vermittlung eines authentischen Bildes von der Mathematik gibt es von Seiten der Probanden, die das Lehramt in der Sekundarstufe anstreben, bemerkenswert (um 8 % bzw. 11 %) mehr Zustimmung als von Seiten der Studierenden des Lehramts in der Primarstufe (Abb. 22). Hier soll darauf verwiesen werden, dass die Beliefs der Probanden über Beweise als Teil der Mathematik durch den wissenschaftlichen Beweisbegriff geprägt ist (5.3) und diese Prägung verstärkt bei Probanden zu verzeichnen war, die das Lehramt in der Sekundarstufe anstreben, als bei Probanden, die das Lehramt in der Primarstufe erwerben möchten.

Kategorie	Gar nicht	Eher nicht	Eher zu	Voll zu	Summe Zustimmung	N
Studiums-vorbereitung	0,0674	0,2022	0,4270	0,3034	0,7303	89
	0,0571	0,1333	0,3524	0,4571	0,8095	105
Bild von der Mathematik	0,0444	0,2444	0,3889	0,3222	0,7111	90
	0,0561	0,1215	0,3271	0,4953	0,8224	107

Abb. 22: Unterschiede zwischen Primar- (gelb) und Sekundarstufe (grün) in der Kategoriengruppe „volle Zustimmung" bei Beliefs über das Lehren von Beweisen

Größtenteils eher überzeugt sind die Probanden, dass Beweise und Problemlösen stark zusammenhängen und Erstere aus diesem Grund in der Schule vermittelt werden sollen, dennoch sollen nur einfache, kurze Beweise in der Schule vorkommen. Die

Lehrperson soll die Beweisnotwendigkeit vermitteln und Beweise allen Lernenden zugänglich machen, und zwar auch ohne axiomatische Grundlegung unter Rückgriff auf Begriffe und Aussagen, deren Gültigkeit aus der Anschauung heraus begründet wird. Es soll auf verschiedene Beweisstrategien und Beweisarten eingegangen werden, mit dem Ziel der Verständnisförderung. Weiterhin eher Zustimmung, aber mit sinkender Tendenz ist bezogen auf die Möglichkeit zu verzeichnen, neue Begriffe während des Beweisprozesses einzuführen sowie bezogen auf denkbare historische Bezüge. Kontroverse Beliefs sind hinsichtlich des Fokus des Mathematikunterrichts (Anwendungen vs. Theorie), einheitlicher oder differenzierter Angebote im Bereich der Beweise bzw. der Weckung des Interesses an der Mathematik durch Beweise zu erkennen (Abb. 23).

Kategorie	Gar nicht	Eher nicht	Eher zu	Voll zu	Summe Zustimmung	N
Problemlösen	0,045	0,11	0,49	0,355	0,845	200
Auswahl der Beweise	0,035	0,13	0,425	0,41	0,835	200
Beweis-notwendigkeit	0,0299	0,1592	0,4876	0,3234	0,8109	201
Zugänglichkeit	0,0493	0,1478	0,4286	0,3744	0,803	203
Stützung	0,0552	0,1472	0,4233	0,3742	0,7975	163
Beweisstrategien	0,0597	0,1791	0,4378	0,3234	0,7612	201
Verständnis-förderung	0,0878	0,2	0,4634	0,2488	0,7122	205
Beweisarten	0,1256	0,196	0,3869	0,2915	0,6784	199
Begriffsbildung	0,0785	0,288	0,4607	0,1728	0,6335	191
Historische Bezüge	0,1111	0,2929	0,3333	0,2626	0,596	198
Anwenden	0,1503	0,3109	0,3368	0,2021	0,5389	193
Differenzierung	0,1269	0,3553	0,3959	0,1218	0,5178	197
Interesse wecken	0,2624	0,2525	0,3663	0,1188	0,4851	202

Abb. 23: Kategoriengruppe „eher Zustimmung“ bei Beliefs über das Lehren von Beweisen

Deutliche Unterschiede in der Stichprobe entlang des angestrebten Lehramts konnten in dieser Kategoriengruppe bezogen auf vier Kategorien ermittelt werden: Probanden, die das Lehramt in der Primarstufe anstreben, waren zu einem deutlich höheren Anteil davon überzeugt, dass beim Beweisen neue Begriffe gebildet werden können, als Probanden, die das Lehramt in der Sekundarstufe anstreben (Abb. 24, Zeile 1-2). Dahingegen stimmte ein gravierend höherer Anteil Letzterer dafür, dass Beweise das Interesse an der Mathematik wecken können (Abb. 24, Zeile 7-8), wodurch die entsprechende obige Aussage differenzierter betrachtet werden kann: Während Probanden, die das Lehramt in der Primarstufe anstreben, eher dagegen sind, dass Beweise zur Weckung des Interesses an der Mathematik beitragen können, sind Probanden, die das Lehramt in der Sekundarstufe anstreben, eher dafür. Überdies stimmte ein jeweils um 7-8 % höherer Anteil Letzterer dafür, dass Beweise der Verständnisförderung dienen bzw. dass Beweise historische Bezüge ermöglichen (Abb. 24, Zeile 3-6).

Kategorie	Gar nicht	Eher nicht	Eher zu	Voll zu	Summe Zustimmung	N
Begriffsbildung	0,0682	0,2045	0,5568	0,1705	0,7273	88
	0,0874	0,3592	0,3786	0,1748	0,5534	103
Verständnis-förderung	0,1134	0,2165	0,4330	0,2371	0,6701	97
	0,0648	0,1852	0,4907	0,2593	0,7500	108
Historische Bezüge	0,1333	0,3111	0,3444	0,2111	0,5556	90
	0,0926	0,2778	0,3241	0,3056	0,6296	108
Interesse wecken	0,3684	0,2421	0,3263	0,0632	0,3895	95
	0,1682	0,2617	0,4019	0,1682	0,5701	107

Abb. 24: Unterschiede zwischen Primar- (gelb) und Sekundarstufe (grün) in der Kategoriengruppe „eher Zustimmung“ bei Beliefs über das Lehren von Beweisen

Es wird eher abgelehnt, dass Beweise in der Schule formal aufgeschrieben werden sollen (Abb. 25), die detaillierte Analyse zeigte, dass diese Ablehnung bei Probanden, die das Lehramt in der Primarstufe anstreben, um ca. 9 % höher ausfällt (66 % vs. 57 %). Im Sinne der präsentierten Methode gehört auch der Zeitaufwand zu den eher abgelehnten Kategorien (wegen der größten relativen Häufigkeit von über 30 % bei „stimme eher nicht zu“), dieser Kategorie wird aber von den Probanden offensichtlich eher zugestimmt (Abb. 25). Beweise sollen also trotz des Zeitaufwands in der Schule thematisiert werden. Hier erkennt man, dass die gewählte Methode nicht in jedem Fall die Haupttendenz der Antworten erfasst.

Kategorie	Gar nicht	Eher nicht	Eher zu	Voll zu	Summe Ablehnung	N
Formalismus	0,2081	0,4061	0,2437	0,1421	0,6142	197
Zeitaufwand	0,1073	0,3073	0,2976	0,2878	0,4146	205

Abb. 25: Kategoriengruppe „eher Ablehnung“ bei Beliefs über das Lehren von Beweisen

Ähnliches ist bei der Kategorie „Erziehung zum mündigen Bürger“ zu erkennen: Laut der Methode gehört diese Kategorie zu den voll abgelehnten Kategorien, allerdings sind Zustimmungen und Ablehnungen etwa gleich (Abb. 26). Aus diesem Grund wurde die Kategoriengruppe „ausgewogene Ablehnung und Zustimmung“ genannt. Die detaillierte Analyse der Stichprobe lieferte allerdings, dass diese Kategorie von den Probanden, die das Lehramt in der Primarstufe anstreben, eher abgelehnt wird (42 % Zustimmung), während sie von Probanden, die das Lehramt in der Sekundarstufe anstreben, eher vertreten wird (54 % Zustimmung).

Kategorie	Gar nicht	Eher nicht	Eher zu	Voll zu	Summe Ablehnung	N
Mündige Bürger	0,3057	0,2124	0,3005	0,1813	0,5181	193

Abb. 26: Kategoriengruppe „ausgewogene Ablehnung und Zustimmung“ bei Beliefs über das Lehren von Beweisen

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass die Probanden unabhängig vom angestrebten Lehramt von vielen Vorteilen von der Vermittlung von Beweisen in der Schule überzeugt sind und diese – auch wenn unter Einschränkungen – auch als angehende Lehrpersonen in der Schule verorten. Dennoch zeigt sich ein ausgewogenes Meinungsbild, wenn es um die Gegenüberstellung von Theorie und

Anwendung der Mathematik in der Schule bzw. um die Bereitstellung differenzierender Angebote für Lernende mit Bezug zu Beweisen geht. Probanden, die das Lehramt in der Primarstufe anstreben, sehen eher das Potenzial, durch Beweise neue Begriffe einzuführen; während Probanden, die das Lehramt in der Sekundarstufe erwerben möchten, stärker die Möglichkeit der Verständnisförderung, der Vermittlung von historischen Bezügen und der Weckung des Interesses an der Mathematik betonen.

6. Auswertung der Ergebnisse

6.1 Ergebnisse mit Bezug zu Erfahrungen mit Beweisen

Auch wenn die vorliegenden Ergebnisse hinsichtlich der Erfahrungen mit Beweisen im Mathematikunterricht (Forschungsfrage 1) auf individueller Wahrnehmung und Selbstbericht hierüber beruhen, zeichnet sich ein Bild, das mit einschlägigen Forschungsbefunden im Einklang steht und aus didaktischer Sicht ernüchternd ist. Die Daten legen nahe, dass mehr als die Hälfte der Probanden (56 %) unabhängig vom angestrebten Lehramt glaubt, gar keine Beweise in ihrem Mathematikunterricht geführt zu haben, was mit den Behauptungen von Brunner (2014, S. 2) vereinbar ist. Nur zum Teil ist der Befund jedoch mit den Ergebnissen von Kempen (2017, S. 245) zu vergleichen: In jener Stichprobe behaupteten 29 % bzw. 13 % der Probanden in der Sekundarstufe I bzw. in der Sekundarstufe II keine Beweise kennengelernt zu haben. Unklar blieb allerdings, wie groß die Schnittmenge der betroffenen Studierenden ist, sprich, wie groß der Anteil derjenigen Probanden ist, die weder in der Sekundarstufe I noch in der Sekundarstufe II Beweise kennengelernt haben. Rein mathematisch gesehen kann dieser Wert höchstens 13 % betragen, was deutlich unter dem in der vorliegenden Studie ermittelten Wert (56 %) liegt.

Nur etwa jeder dritte kennt das Beweisverfahren direkter Beweis, weitere Beweisverfahren sind aus der Schule noch weniger Studierenden geläufig (5.2). Ein etwas größerer Anteil (14 %) der Probanden, die das Lehramt in der Primarstufe anstreben, gab an, das Beweisverfahren vollständige Induktion aus der Schule gekannt zu haben als der entsprechende Anteil (7 %) der Probanden, die das Lehramt in der Sekundarstufe anstreben, weitere nennenswerte Unterschiede konnten aber nicht ermittelt werden. Etwa ein Drittel der Studierenden (30 %) kennt insgesamt mehr als ein Beweisverfahren aus der Schule, die restlichen 70 % entweder kein oder nur ein Beweisverfahren. Dieser Befund ist umso mehr verwunderlich, da die Widerlegung einer Aussage durch ein Gegenbeispiel als Beweistechnik von Meyer und Prediger (2009) schon vor mehr als einem Jahrzehnt für die erfolgreiche Umsetzung der Bildungsstandards forderten. Somit wäre zu erwarten, dass die Mehrheit der Probanden mindestens zwei Beweisverfahren (direkten Beweis und Widerlegung durch Gegenbeispiel) kennt. Inhaltlich gesehen dominiert der Beweis zum Satz des Pythagoras (vgl. Brunner, 2014, S. 2; Kempen, 2017, S. 245), den aber auch nur 28 % der Gesamtstichprobe als bekannt angegeben haben. Zudem gibt es eine Reihe von ca. 20 weiteren Beweisen aus der Schulmathematik, die einem geringen Anteil der Studierenden (1-22 %) bekannt zu sein scheint, diese Befunde sind sowohl inhaltlich als auch bezüglich des Bekanntschaftsgrades mit denen von Kempen (2017, S. 245-246) vergleichbar. Von einer flächendeckenden Kenntnis kann daher nicht ausgegangen werden. Bei der Interpretation dieser Daten soll zudem berücksichtigt werden, dass die Probanden eventuell nicht zwischen der Kenntnis des Satzes und der dessen Beweises unterschieden hatten, sodass die tatsächliche Kenntnis der einschlägigen Beweise noch niedriger liegen kann. Insgesamt kann nicht über eine Beweiskultur in der Schule gesprochen werden, auf die im Rahmen einer Hochschulausbildung zurückgegriffen werden könnte, zumal kaum Probanden berichteten, Beweise in der Schule tatsächlich selbst, also in Eigenregie geführt zu haben. Dieser bedürftigen, lückenhaften Erfahrungslage steht eine deutlich facettenreichere und ausdifferenziertere Beweiskultur an der Hochschule gegenüber, wo der überwiegende Teil der Probanden mehrere verschiedene Beweisverfahren sowie beweisbezogene heuristische Strategien kennengelernt hat. Bezüglich der Erfahrungen mit Beweisen im Rahmen des Studiums konnten zudem deutliche Unterschiede zugunsten der Probanden festgestellt werden, die das Lehramt in der Sekundarstufe anstreben: Diese Probanden berichteten über mehr aus dem Studium bekannte Beweisverfahren sowie im Studium kennengelernte heuristische Strategien zum Beweisen als Probanden, die das Lehramt in der Primarstufe erwerben möchten. Darüber hinaus hat ein jeweils höherer Anteil der Probanden, die das Lehramt in der Sekundarstufe anstreben, im Vergleich zu Probanden, die das Lehramt in der Primarstufe erwerben möchten, die einzelnen Beweisstrategien sowie die einzelnen heuristischen Strategien zum Beweisen als aus dem Studium bekannt angegeben. Insgesamt lässt sich feststellen, dass Lehramtsstudierende der Mathematik Erfahrungen mit Beweisen hauptsächlich im Rahmen ihres Studiums machen. Es soll hervorgehoben werden, dass sich die ermittelten Beliefs über Beweise als Teil der Mathematik sowie über das Lehren und Lernen von Beweisen auf dieser Grundlage an Erfahrungen herausgebildet haben und nur im Zusammenhang mit ihnen interpretiert werden können.

6.2 Ergebnisse mit Bezug zu Beliefs über Beweise als Teil der Mathematik

Die Befunde bezogen auf Beliefs über Beweise als Teil der Mathematik (Forschungsfrage 2a) spiegeln den in der Fachwissenschaft vorherrschenden Beweisbegriff sowie seine primären Funktionen wider (2.2.1 und 2.2.2). Da weitere Funktionen, wie die Entdeckungs- (73 %), Kommunikations- (64 %) und Systematisierungsfunktion (63 %) den antwortgebenden Probanden weniger bewusst sind – dieser Befund steht mit denen über Beliefs von Lehrkräften bezogen auf Beweise im Einklang (Hanna & de Villiers, 2012, S. 177) –, sollte eine stärkere Betonung derselben im Rahmen der fachlichen und der fachdidaktischen Ausbildung gerade im Hinblick auf die zukünftige Unterrichtspraxis erfolgen. Generell sind deutliche Unsicherheiten bezüglich der Unterscheidung zwischen Deduktion und Induktion – was mit den in der ICMI Study 19 reviewten Ergebnissen über Beliefs von Lernenden bezogen auf Beweise übereinstimmt (Hanna & de Villers, 2012, S. 180) –, des Bezugs eines Beweises (Wird eine mathematische Aussage oder eine Definition bewiesen?), der Richtung der Beweisführung (von der Voraussetzung zur Behauptung oder umgekehrt) sowie des Zusammenhangs zwischen Satz und Beweis (Ist der Beweis die knappe Darstellung des Satzes oder etwas Anderes?) zu verzeichnen (vgl. Jahnke & Ufer, 2015). Die Gründe für diese Befunde sind vielfältig, scheinen jedoch allgemeiner Natur zu sein. Ein möglicher Grund kann die Präsentation von Beweisen an der Hochschule darstellen. Auch wenn die systematische empirische Untersuchung der Lehrpraxis im Hochschulbereich noch aussteht, gibt es bereits erste Ansätze hierzu (Speer, Smith & Horvath, 2010). Wissen über den Bezug des Beweises, über die Richtung der Beweisführung, über die Unterscheidung zwischen Induktion und Deduktion setzt Reflexion über Beweisprozesse voraus. Fukawa-Conelly, Weber und Mejía-Ramos (2017) fanden in diesem Zusammenhang einerseits heraus, dass informelle Informationen, die über den tatsächlichen formalen Beweis hinausgehen, in Mathematikvorlesungen von Dozierenden nur mündlich bereitgestellt werden. Diese Informationen werden andererseits von den Studierenden weder festgehalten noch gespeichert. Da die genannten Unsicherheiten – Beweise als deduktive Argumentationen, Bezug eines Beweises, Richtung der Beweisführung sowie der Zusammenhang zwischen Satz und Beweis – vor allem bei Probanden, die das Lehramt in der Primarstufe anstreben, festgestellt werden konnten (5.3) und für diesen Teil der Stichprobe die starke Zustimmung zur Entdeckung von neuem mathematischem Wissen sowie Fehlvorstellungen wie ein Beweis wäre eine Berechnung bzw. ein Lösungsweg charakteristisch sind (5.3), kann ein weiterer Grund für die vorliegenden Befunde darin gesehen werden, dass diese Probanden primär das Entstehen der Mathematik fokussieren (1.). Sie übertragen Merkmale der mathematischen Entstehungsprozesse wie Berechnen, Entdecken, Aufschreiben von Lösungswegen etc. auf Beweise.

6.3 Ergebnisse mit Bezug zu Beliefs über das Lernen von Beweisen

Die vorliegenden Ergebnisse im Zusammenhang mit Beliefs über das Lernen von Beweisen (Forschungsfrage 3) stehen mit bisherigen empirischen Befunden im Einklang (2.5). Etwas überraschend, aber gleichzeitig erfreulich ist die Tatsache, dass die Probanden eher davon überzeugt sind, Beweise können die Kreativität der Lernenden fördern. Dies gilt für die Gesamtstichprobe (75 %), aber besonders für die Probanden, die das Lehramt in der Sekundarstufe anstreben (83 %). Trotz der eindeutigen Überzeugung von verschiedenen Vorteilen der Thematisierung von Beweisen in der Schule – wie Förderung des logischen Denkens und der Kreativität sowie Erleben der Mathematik als eine objektive Wissenschaft (vgl. 5.4) – äußern sich die Befragten etwa zur Hälfte (46 %) dagegen. Grund hierfür können einerseits die mangelnden bzw. lückenhaften eigenen schulischen Erfahrungen sein. Sowohl Studierende des Lehramts in der Primarstufe als auch die des Lehramts in der Sekundarstufe berichten nämlich zum einen über mangelnde – 56 % der Gesamtstichprobe, aber auch beider Teilstichproben gab an, keine Erfahrung mit Beweisen in der Schule gemacht zu haben (5.2) –, zum anderen über lückenhafte Erfahrungen mit Beweisen in der eigenen Schulzeit, was verschiedene Beweisverfahren bzw. konkrete Beweise betrifft (5.2). Es wird daher vermutet, dass die Befragten trotz der Überzeugung von Vorteilen des Lernens von Beweisen eventuell keine konkrete Vorstellung haben, wie Beweise auf sinnvolle Art und Weise in der Schule thematisiert werden können (vgl. Sill, 2019, S. 213). Andererseits kann dieser Befund auf die subjektive Bewertung und Gewichtung von möglichen und auch in anderen Studien belegten Schwierigkeiten zurückgeführt werden. Hierbei ist an etwa Schwierigkeiten bei der logischen Schlussfolgerung, bei der Unterscheidung zwischen Behauptung und Voraussetzung, beim Finden des zu beweisenden Satzes, bei der Einsicht der Gültigkeit einer vorliegenden Argumentation etc. zu denken (Reid & Knipping, 2010). Davon, dass Lernende in diesen Bereichen Schwierigkeiten haben können, sind die Befragten überwiegend überzeugt, vor allem Befragte, die das Lehramt in der Primarstufe anstreben (5.4).

Bemerkenswert ist überdies, dass Probanden, die das Lehramt in der Primarstufe anstreben, zu einem höheren Anteil (60 %) ablehnen, dass Beweise nur an der Universität thematisiert werden sollen, im Gegensatz zu Probanden, die das Lehramt in der Sekundarstufe anstreben (49 %). Da die aus der Schule mitgebrachten Erfahrungen beinahe identisch sind bzw. die Probanden von ähnlichen Erfahrungen berichtet haben (5.2), kann ein Grund für diesen Unterschied in der Ablehnung in den unterschiedlichen Erfahrungen im Rahmen der universitären Ausbildung gesehen werden. Probanden, die das Lehramt in der Sekundarstufe anstreben, berichteten über mehr Beweisverfahren und mehr heuristische Strategien, die sie an der Hochschule kennengelernt haben, als Probanden, die das Lehramt in der Primarstufe anstreben (5.2). Auch der Bekanntheitsgrad der einzelnen Beweisverfahren und -strategien lag bei Ersteren deutlich höher als bei Letzteren (5.2). Somit kann vermutet werden, dass für Probanden, die das Lehramt in der Sekundarstufe anstreben, die Erfahrungen an der Hochschule dominanter und präsenter sind als für Probanden, die das Lehramt in der Primarstufe anstreben. Folglich verorten Erstere Beweise eher in der universitären als in der schulischen Ausbildung.

6.4 Ergebnisse mit Bezug zu Beliefs über das Lehren von Beweisen

Die Befunde hinsichtlich der Beliefs über das Lehren von Beweisen (Forschungsfrage 4) stehen an mehreren Stellen zu Beliefs über das Lernen von Beweisen im Widerspruch. Während beispielsweise einer möglichen Transferleistung von Beweisen die Probanden aus Lernendensicht eher nicht zugestimmt haben (5.4), sehen sie als angehende Lehrkräfte einen starken Zusammenhang zwischen Problemlösen und Beweisen (5.5), also doch die Möglichkeit einer Transferleistung. Hierbei soll darauf verweisen werden, dass diese beiden verschiedenen Sichtweisen (Lernenden- bzw. Lehrendensicht) durch Erläuterungen bzw. Formulierung der Items (Anhang 4) explizit verdeutlicht wurden. Weitere Diskrepanzen sind im Widerspruch zu erkennen, dass die Probanden aus der Lehrersicht eindeutig die Vorteile von Beweisen z. B. in der Vorbereitung auf das Studium, in der Vermittlung eines authentischen Bildes von der Mathematik (vgl. Lutz-Westphal, 2008), in der Förderung des Verständnisses sehen (z. B. Hanna, 2000), was mit den bei Lehrkräften ermittelten Befunden von Furinghetti und Morselli (2011) im Einklang steht. Dennoch spricht sich aus Lernendensicht etwa die Hälfte der Probanden gegen die Thematisierung von Beweisen in der Schule aus. Merkwürdig ist hierbei, dass gerade Studierende des Lehramts in der Sekundarstufe, die die genannten Vorteile von Beweisen in der Schule aus der Lernendensicht verstärkt wahrnehmen (5.5), sich zu einem höheren Anteil gegen die Thematisierung von Beweisen in der Schule aus Lehrendensicht aussprechen als Studierende des Lehramts in der Primarstufe. Ebenfalls widersprüchlich ist der Befund, dass Beweise einerseits allen zugänglich gemacht werden sollen, andererseits die einschlägigen Angebote aber nicht unbedingt differenziert erfolgen und eher nur knappe, kurze, einfache Beweise eingebunden werden sollen (5.5). Hier spiegelt sich ein ähnliches Bild über Beliefs bezogen auf das Lehren von Beweisen wider, welches sich mit den Beliefs von Lehrkräften in der ICMI Study vereinbaren lässt (Hanna & de Villiers, 2012, S. 177-178). Dieser Aussage steht wiederum die Überzeugung von der Vermittlung diverser Beweisarten und -strategien gegenüber (5.5). Auch hier kann eine Beziehung zur mangel- und lückenhaften Erfahrungslage aus der eigenen Schulzeit vermutet werden (5.2).

Die Probanden verwenden zudem intuitiv richtig die Kriterien, die sich auf erwünschte Abweichungen vom wissenschaftlichen Beweisbegriff im schulischen Kontext beziehen (2.2.1). Diese Befunde können mit Beliefs über den Kern eines Beweises in der Mathematik als Unterrichtsfach (Forschungsfrage 2b) in Verbindung gebracht werden. So äußern sie sich eher ablehnend, wenn es um das formale Aufschreiben von Beweisen in der Schule geht, und eher zustimmend, wenn von einer Abkehr von der axiomatischen Grundlegung in der Schule und der Begründung von Aussagen aus der Anschauung heraus die Rede ist (5.5). Die Ablehnung des formalen Verfassens von Beweisen in der Schule ist bei Probanden, die das Lehramt in der Primarstufe anstreben, stärker als bei Probanden, die das Lehramt in der Sekundarstufe anstreben. Diese Beliefs sind nicht nur mit einem schulischen Beweisbegriff (2.2.1) vereinbar, sondern entsprechen auch den didaktischen Empfehlungen, die eine Vielfalt an Begründungsarten von generischen Beispielen über Begründungen mit allgemeinem Bild hin zu formalen Beweisen mit vollständiger Induktion als Beweis in der Schule gelten lassen (Meyer & Prediger, 2009, S. 2). Zudem kann Formalismus offensichtlich erst in der Sekundarstufe eine Rolle spielen.

6.5 Diskussion der Testgütekriterien

Nachfolgend soll auf die Erfüllung der Testgütekriterien Objektivität, Reliabilität und Validität eingegangen werden.

Die Objektivität soll sicherstellen, dass die Ergebnisse eines Tests zwischen verschiedenen Probanden vergleichbar sind, sie wird in Durchführungs- Auswertungs- und Interpretationsobjektivität unterteilt (Pospeschill, 2010, S. 18). Dadurch, dass die in der vorliegenden Studie präsentierten Daten mit Hilfe eines digitalen Fragebogens erhoben worden sind, sind Störvariablen durch einen Testleiter eliminiert worden. Somit gewährleistet diese Vorgehensweise eine hohe Durchführungsobjektivität. Die Antworten der Probanden wurden durch den Computer und nicht durch eine auswertende Person quantifiziert, sodass auch von einer hohen Auswertungsobjektivität gesprochen werden kann. Die Ergebnisse wurden als numerische Werte präsentiert, welche unter Rückgriff auf ein ausführlich beschriebenes, auf objektiven Berechnungen basierendes Verfahren ermittelt bzw. zu Gruppen zusammengefasst worden sind, sodass auch eine hohe Interpretationsobjektivität sichergestellt ist.

Zur Überprüfung der Reliabilität wurde eine Reliabilitätsanalyse wie folgt durchgeführt: Zuerst wurde die Korrelation der Itempaare, die zu einer Kategorie gehören, unter Rückgriff auf den Rangkorrelationskoeffizient nach Spearman bestimmt, um im Sinne der Split-Half-Reliabilität aus der Korrelation der Itempaare auf die Reliabilität schließen zu können. Anschließend wurden diejenigen Itempaare, die inhaltlich zusammenhängen, zu einer Gruppe von Itempaaren zusammengefasst und für diese wurde ein gemeinsamer Korrelationskoeffizient durch Durchschnittsbildung ermittelt. Darauf basierend wurde – unter Beachtung der Anzahl der zusammengefassten Itempaare (Cortina, 1993) – das Reliabilitätsmaß Cronbachs Alpha bestimmt (Anhang 5). Die ermittelten Werte liegen alle über 0,5, somit kann von einer hinreichenden Reliabilität ausgegangen werden. Die Werte von Cronbachs Alpha liegen sogar überwiegend über 0,7 (in einigen Fällen über 0,8), sodass die Gruppen von Itempaaren als angemessen reliabel betrachtet werden können (Moosbrugger & Kelava, 2020, S 331).

Die Validität eines Tests drückt aus, inwieweit die ermittelten Testwerte tatsächlich auf die in einer Studie beabsichtigte Art und Weise interpretiert werden dürfen. Sie wird aktuell einem fachgeschichtlichen Wandel unterzogen (Moosbrugger & Kaleva, 2020, S 530). In der aktuellen Forschung geht man davon aus, dass es die Validität eines Tests als Eigenschaft desselben nicht gibt, vielmehr soll die Validität in einem mehrschrittigen Prozess überprüft und in einer abschließenden Bewertung argumentativ beurteilt werden (Moosbrugger & Kaleva, 2020, S 535). Im Validierungsprozess bezogen auf die vorliegende Studie können folgende Feststellungen getroffen werden: Die in der Stichprobe erhobenen Daten werden vor allem als Indikatoren für zukünftiges methodisch-didaktisches Handeln der Gesamtheit angehender Mathematiklehrkräfte interpretiert. Diese Interpretation basiert auf drei Grundannahmen: Zum einen, dass Beliefs das methodisch-didaktische Handeln beeinflussen (2.4), zum anderen, dass die erhobenen Daten als Indikatoren für die Beliefs der Probanden mit Bezug zu Beweisen gelten können und zum Schluss, dass die Beliefs der Stichprobe stellvertretend für die Beliefs der Gesamtheit stehen können. Auf diese Grundannahmen wird nachfolgend einzeln eingegangen. Einerseits muss beachtet werden, dass in der aktuellen Forschung keine lineare Beziehung zwischen Handeln und Beliefs und somit kein direkter Einfluss der Beliefs auf das Handeln angenommen, sondern ein dialektisches Verhältnis zwischen Handeln und Beliefs vermutet wird (2.4). Es wird zudem davon ausgegangen, dass neben Beliefs auch weitere Faktoren das methodisch-didaktische Handeln beeinflussen. Somit kann aus den erhobenen Daten nur auf eine mögliche Tendenz des zukünftigen methodisch-didaktischen Handelns geschlossen werden, was in der vorliegenden Studie weitestgehend Berücksichtigung fand. Andererseits muss überprüft werden, inwieweit die erhobenen Daten die Beliefs der Probanden mit Bezug zu Beweisen messen. Da die Kategorien des Tests im Sinne des Prototypenansatzes induktive und deduktive Schritte kombinierend entwickelt worden sind (4.1), kann davon ausgegangen werden, dass weder Konstruktunterrepräsentation noch konstruktirrelevante Varianz (Moosbrugger & Kaleva, 2020, S 537) vorliegt, d.h. der Test misst umfassend und nur die Beliefs mit Bezug zu Beweisen. Sicherlich kann jedoch kritisch gesehen werden, dass die Kategorien nur mit jeweils zwei Items abgefragt worden sind. Für anschließende Forschung bietet es sich an, entweder die Kategorien als einzelne Konstrukte zu betrachten und diese jeweils mit mehr als zwei Items wiederzugeben oder mehrere Kategorien zu einem Konstrukt zusammenzufassen – so wie dies bei der Reliabilitätsprüfung angedeutet wurde. Zum Schluss soll noch darauf eingegangen werden, dass die Stichprobe in vielerlei Hinsicht nicht repräsentativ für die Gesamtheit der angehenden Mathematiklehrkräfte ist, was nachfolgend ausführlich thematisiert wird (6.6). Dennoch liegt eine hohe Anzahl an Daten von Probanden vor, die zur zu untersuchenden Population gehören. Diese Daten können somit als Orientierung für die in der Population vorliegenden möglichen Tendenzen dienen, können aber mit diesen nicht gleichgesetzt werden. Insgesamt kann von einer – unter den genannten Einschränkungen – validen Testwertinterpretation gesprochen werden.

6.6 Limitationen der Arbeit

Es soll nochmals hervorgehoben werden, dass die ermittelten Informationen über Erfahrungen mit Beweisen in der Schule auf freiwilligem Selbstbericht beruhen. Diese Angaben geben aus einer subjektiven Perspektive über solche Erfahrungen indirekt Auskunft, die teilweise mehrere Jahre zurückliegen. Überdies soll bei der Beurteilung der Daten Beachtung finden, dass – auch wenn Ehrlichkeit bei der Beantwortung vorausgesetzt werden kann – es im

Dunkeln bleibt, inwieweit die Probanden der von ihnen vermuteten sozialen Erwünschtheit gerecht werden wollten. Zudem soll ebenfalls beachtet werden, dass die Stichprobe eine positive Auswahl der Studierendenschaft darstellt: In der Stichprobe sind die Selbstberichte nur derjenigen Studierenden erfasst worden, die ihr Studium nicht abgebrochen haben und bereit waren an der Befragung teilzunehmen. Die tatsächlichen Erfahrungen können also von den ermittelten durchaus abweichen. Direkte Informationen über eine tatsächliche Thematisierung von Beweisen in der Unterrichtspraxis könnten durch Unterrichtsbeobachtungen gewonnen werden.

Die ermittelten Informationen über Beliefs zum Beweisbegriff sowie zum Lernen und Lehren von Beweisen spiegeln persönliche Überzeugungen wider, auch hier kann nicht ausgeschlossen werden, dass die Probanden den Fragebogen gemäß selbst vermuteten Erwartungen ausgefüllt haben. Diese Beliefs geben aber keine Information darüber, welche konkreten Beweise die Probanden als Beweise akzeptieren bzw. zu welchen Sätzen sie in der Lage sind einen passenden Beweis selbstständig zu führen. Um diese Fragen zu beantworten, sind weitere Studien zur Ermittlung der Beweisakzeptanz (wie in etwa Ufer, Heinze, Kuntze & Rudolph-Albert, 2009; Sommerhoff, Ufer & Kollar, 2016; Kempen, 2018; Szűcs, 2021) sowie der Beweiskompetenz (wie in etwa Ostsieker & Biehler, 2012; Krieger & Winter, 2015) notwendig.

Die Stichprobe der Untersuchung ist regional gesehen – leider – nicht repräsentativ, da die knappe Hälfte der Probanden im Bundesland Thüringen studiert. Zudem kann die Stichprobengröße kritisch betrachtet werden: Es liegen insgesamt 190 Antwortbögen, davon 105 vollständige vor. Auch in den vollständigen Antwortbögen kommt es vor, dass manche Items mit „keine Angabe“ beantwortet bzw. übersprungen worden sind. Da jede Kategorie mit zwei Items abgefragt worden ist, liegen zu jeder Kategorie jeweils 180-230 Antworten vor, wie man dies auch den Abbildungen 10-26 entnehmen kann. Um allerdings über eine repräsentative Normierungsstichprobe reden zu können, ist eine Mindeststichprobengröße von 300 Probanden erforderlich (Pospeschill, 2010, S. 29), was in der vorliegenden Studie nicht erreicht wurde.

Die Ergebnisse lassen an einigen Stellen eine unterschiedliche Beurteilung von Beweisen bei Probanden, die das Lehramt in der Primarstufe anstreben, vermuten, als bei Probanden, die das Lehramt in der Sekundarstufe erwerben möchten. Ein möglicher Grund hierfür kann darin gesehen werden, dass Studierende Beweise überwiegend in der Sekundarstufe II sowie in den Schulformen Gymnasium und Realschule verorten (Kempen, 2017). Es bietet sich an, den Einfluss des angestrebten Lehramts auf die Beliefs zu untersuchen, hierzu ist allerdings eine Erhöhung der Stichprobengröße – beispielsweise durch Wiederholung der Befragung – erforderlich. Letztere würde auch ermöglichen, Semestereffekte – sprich den Einfluss der im Studium verbrachten Zeit auf die Beliefs – zu ermitteln. Hierdurch könnte auch überprüft werden, inwieweit die Studierenden im Laufe des Studiums die Lehrerrolle immer mehr annehmen und sich ihre Beliefs denen von Lehrkräften (2.5) annähern.

Resümee

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass Lehramtsstudierende der Mathematik eher lücken- und mangelhafte Erfahrungen aus der Schule bezüglich Beweise mitzubringen glauben. Somit bilden sich ihre einschlägigen Beliefs vermutlich überwiegend auf der Grundlage von Erfahrungen aus, die sie im Rahmen ihres Studiums mit Beweisen machen (Sill, 2019). Dadurch sind ihre Beliefs von Beweisen als Teil der Mathematik durch den wissenschaftlichen Beweisbegriff und dessen primären Funktionen geprägt. Dennoch konnten im schulischen Kontext sinnvolle und erwünschte Abweichungen hiervon bei den Beliefs der Probanden ermittelt werden. Erwünscht wäre die stärkere Betonung weiterer Funktionen, so der Entdeckungs-, der Kommunikations- und der Systematisierungsfunktion in der Ausbildung der Mathematiklehrkräfte. Sowohl aus Lernenden- als auch aus Lehrendensicht sind die Probanden von vielen verschiedenen Vorteilen der Thematisierung von Beweisen in der Schule überzeugt, worauf in einem zukünftigen Mathematikunterricht, in dem Beweise verbindlich vermittelt werden, gut aufgebaut werden kann. Dennoch spricht sich etwa die Hälfte der Probanden gegen die Thematisierung von Beweisen in der Schule aus und die Mehrheit – unabhängig vom angestrebten Lehramt – kann sich nur kurze, einfache Beweise in der Schule vorstellen (5.5). Ein denkbarer Grund hierfür kann in den mangelnden und lückenhaften schulischen Erfahrungen gesehen werden, auf die aus den Antworten der Probanden ebenfalls unabhängig von dem von ihnen angestrebten Lehramt geschlossen werden kann (5.2). Wünschenswert wäre somit die Einbindung von weiteren, komplexeren und gleichzeitig differenzierenden Angeboten in der fachdidaktischen Ausbildung der Mathematiklehrkräfte, aber auch von methodischen Möglichkeiten der Vermittlung von Beweisen in der Schule, um Schwierigkeiten auf der Lernendenseite entgegenzuwirken. Zudem sollte die anhand der Daten vermutete bedürftige Erfahrungslage auch bei der Gestaltung der fachwissenschaftlichen Lehrveranstaltungen in der Hochschulausbildung Beachtung finden, indem beispielsweise schulrelevante Beweise exemplarisch thematisiert werden.

Die Befunde bestätigen den in der einschlägigen Literatur bereits angedeuteten Widerspruch zwischen der Bedeutung von Beweisen in der Mathematik als Fachwissenschaft und in der Schule. Diese Befundlage wirft zudem die Frage auf, welche Rolle Beweise zukünftig (wieder) im Mathematikunterricht einnehmen können bzw. sollten, um einerseits bei den Lernenden ein authentisches Bild von der Mathematik aufzubauen, in der das Beweisen als zentrale mathematische Tätigkeit gilt, und anderseits eine Brücke zwischen Schul- und Hochschulmathematik zu schlagen. Wenn diese normative Frage durch die Mathematikdidaktik beantwortet wird, bedarf es didaktisch-methodischer Konzepte zur Implementierung von Beweisen in den Mathematikunterricht.

Anmerkungen

[1] In einem weiteren Schritt werden Mathematiklehrkräfte befragt. Die Befragung mittels eines digitalen Fragebogens läuft seit August 2022.

[2] Die Dreikomponententheorie besagt, dass Beliefs – wie oben beschrieben – gegenüber jedem Belief-Objekt jeweils eine kognitive, affektive und eine konative Komponente haben. Diese drei Komponenten bilden ein interdependentes System und beeinflussen einander gegenseitig. Beispielsweise zieht eine Veränderung der Kognition eine Veränderung der einschlägigen Gefühle und Handlungsbereitschaften nach sich. Beliefs beeinflussen direktiv, selektiv und konsistent das Denken des Individuums (vgl. Seiffge-Krenke, 1974, S. 103f).

[3] Die Liste von Beliefs mit Bezug zu in der ICMI Study 19 (Cabassut et al., 2012, S. 174) umfasst „beliefs about the nature and role of proofs in mathematics“, „beliefs about the role of proof in school mathematics“, diese entsprechen der Kategorie 1) der vorliegenden Arbeit; zudem „beliefs about diffculties in proving“, welche etwa der Kategorie 2) der vorliegenden Arbeit nahekommen; „beliefs about how proof should be taught“ entsprechen der Kategorie 3) und „beliefs about oneself as mathematical thinker in the context of proof“ korrespondieren mit der Kategorie 4 der vorliegenden Arbeit.

Danksagung

Hiermit möchte ich meinen Dank an alle Kolleg:innen aussprechen, die Studierende auf den Fragebogen aufmerksam gemacht haben sowie an alle, die diesen ausgefüllt haben. Mein besonderer Dank gilt meinen Kolleginnen in Erfurt, die durch ihre konstruktiven Rückmeldungen zur Erstellung des Fragebogens aktiv beigetragen haben. Ich danke zudem den gutachtenden Personen und insbesondere dem Herausgeber für die hilfreichen und konstruktiven Kommentare.

Literatur

Aner, B., Bendrien, M., Brode, R. & Kraft, E. (1979). Beweisen im Mathematikunterricht. Nur ein kognitives Problem? In W. Dörfler & R. Fischer (Hrsg.), *Beweisen im Mathematikunterricht. Vorträge des 2. Internationalen Symposiums für „Didaktik der Mathematik“ von 26.9. bis 29.9. 1978 in Klagenfurt* (S. 19–28). Wien: Hölder-Pichler-Tempsky, Stuttgart: Teubner.

Ayalon, M. & Naama, S. (2019). Emergent model for teachers´ conceptions of argumentation for mathematics teaching. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen & M. Veldhuis (Hrsg.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 3839-3846). Utrecht: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Besser, M., Leiss, D. & Schütze, B. (2017). Wirkung von Lehrerfortbildungen auf Überzeugungen von Lehrkräften zu lernförderlichem Assessment im Fach Mathematik. *Mathematica Didactica, 40*(1), 1–17.

Bosch, M., Fonseca, C., & Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques,24*(2–3), 205–250. zitiert in Gueudet, G., Bosch, M., Disessa, A., Kwon, O.N., & Verchaffel L. (2016). *Transition on mathematics education.* ICME-13 topical surveys (S. 20). Springer Open.

Buehl, M. M. & Beck, J. S. (2015). The Relationsship between Teachers´ Beliefs and Teachers´Practices. In H. Fives & M. G. Gill (Hrsg.*), International Handbook of Research on Teachers´ Beliefs* (S. 66–84). New York & London: Routledge.

Brunner, E. (2014). *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen. Grundlagen, Befunde und Konzepte.* Berlin & Heidelberg: Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-642-41864-8

Bühner, M. (2021). *Einführung in die Test- und Fragebogenkonstruktion.* München: Pearson.

Cabassut, R., Conner, A., İşçimen, F. A., Furinghetti, F., Jahnke, H. N. & Morselli, F. (2012). Coneptions of Proof – In Research and Teaching. In G. Hanna & M. de Villiers (Hrsg.), *Proof and Proving in Mathematics Education. The 19th ICMI Study* (S. 169–190). Dordrecht, Heidelberg, London & New York: Springer.

Cortina, J. M (1993). What is Coefficient Alpha? An Examination on Theory and Applications. *Journal of Applied Psychology 78*(1), 98–104.

Dawkins, P.C. & Weber, K. (2017). Values and norms of proof for mathematicians and students. *Educational Studies in Mathematics 95*(2), 123–142.

de Villiers, M. (1990). The Role and Function of Proof in Mathematics. *Pythagoras, 24*, 17–24.

Erens, R. (2017). Entwicklung von Beliefs von Lehrkräften. In U. Kortenkamp & A. Kuzle (Hrsg.), Beträge zum Mathematikunterricht 2017 (S. 1097–1100). Münster: WTM-Verlag.

Erens, R. & Eichler, A. (2015). Überzeugungen von Lehrkräften zum Technologie-Einsatz im Analysisunterricht. In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015* (S. 272–275). Münster: WTM-Verlag.

Ernest, P. (1991). The Impact of Beliefs on the Teaching of Mathematics. In P. Ernest (Hrsg.), *Mathematics Teaching. The State of Art* (S. 249–254). New York: The Falmer Press.

Fischer, R. & Malle, G. (1984). *Mensch und Mathematik. Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln*. Mannheim, Wien & Zürich: Wissenschaftsverlag.

Forgasz, H. J. & Leder, G. C. (2008). Beliefs about Mathematics and Mathematics Teaching. In P. Sullivan & T. Wood (Hrsg.), *Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and Teaching Development* (S. 173–192). Rotterdam: Sense Publishers.

Freudenthal, H. (1977). *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Band 1. Stuttgart: Klett Verlag.

Fukawa-Conelly, T., Weber, K. & Ramos, J. P. M. (2017). Informal Content and Student Note-Taking in Advanced Mathematics Classes. *Journal for Research in Mathematics Education 48*(5), 567-579.

Furinghetti, F. & Morselli, F. (2011). Beliefs and beyond: hows and whys in the teaching of proof. *ZDM – Mathematics Education, 43*, 587–599.

Furinghetti, F. & Pehkonen, E. (2002). Rethinking characterizations of beliefs. In G. C. Leder & G. Törner (Hrsg.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (S. 39–58). Dordrecht: Kluwer.

Goldin, G., Rösken, B. & Törner, G. (2009). Beliefs – no longer a hidden variable in mathematical teaching and learning processes. In J. Maaß & W. Schlöglmann (Hrsg.), *Beliefs and Attitudes in Mathematics Education: New Research Results* (S. 1–18). Rotterdam: Sense Publishers.

Grigutsch, S. (1998). Über das Selbstkonzept von Schülern als Mathematik-Lerner: Entwicklungen, Wechselwirkungen und Einflußfaktoren in der Lust-, Fleiß- und Leistungseinschätzung. In M. Neubrand (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 1998. Vorträge auf der 32. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 2. bis 6. März 1998 in München* (S. 240–243). Hildesheim: Franzbecker.

Grigutsch, S., Raatz, U. & Törner, G. (1998). Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. *Journal für Mathematikdidaktik, 19*(1), 3–45.

Gueudet, G., Bosch, M., Disessa, A., Kwon, O.N. & Verchaffel L. (2016). *Transition on mathematics education.* ICME-13 topical surveys. Springer Open.

Hanna, G. (1990). Some Pedagogical Aspects of Proof. *Interchange, 21*(1), 6–13.

Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics. 44*, 5-23.

Hanna, G. (2005). A Brief Overview of Proof, Explanation, Exploration and Modelling. In Henn, H.-W. & Kaiser, G. (Hrsg.), *Mathematikunterricht im Spannungsfeld von Evolution und Evaluation: Festschrift für Werner Blum* (S. 139-151). Hildesheim: Div-Verlag Franzbecker.

Hanna, G. & Barbeau, E. (2008). Proofs as bearers of mathematical knowledge. *ZDM – Mathematics Education, 40*, 345–353.

Hanna, G. & de Villiers, M. (Hrsg.) (2012). *Proof and Proving in Mathematics Education. The 19th ICMI Study.* Dordrecht, Heidelberg, London & New York: Springer.

Hanna, G. & Jahnke, H. N. (1996). Proof and Proving. In A. J. Bishop et al. (Hrsg.), *International Handbook of Mathematics Education* (S. 877–908). Niederlande: Kluwer Academic Publishers.

Hannula, M. S. (2012). Exploring new dimensions of mathematics-related affect: embodied and social theories. *Research in Mathematics Education, 14*(2), 131–161.

Heinze, A. (2004). Schülerprobleme beim Lösen von geometrischen Beweisaufgaben – eine Interviewstudie. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 36*(5), 150–161.

Heintz, B. (2000). *Die Innenwelt der Mathematik. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin*. Wien & New York: Springer Verlag.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics, 24*(2), 389-399.

Heublein, U. & Schmelzer, R. (2018). Die Entwicklung der Studienabbruchquoten an den deutschen Hochschulen. Berechnungen auf Basis des Absolventenjahrgangs 2016. Abgerufen von https://idw-online.de/en/attachmentdata66127.pdf

Jahnke, H. N. & Ufer, S. (2015). Argumentieren und Beweisen. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 331–355). Berlin & Heidelberg: Springer Spektrum Verlag.

Kempen, L. (2017). *Begründen und Beweisen im Übergang von der Schule zur Hochschule. Theoretische Begründung, Weiterentwicklung und wissenschaftliche Evaluation einer universitären Erstsemesterveranstaltung unter der Perspektive der doppelten Diskontinuität.* Dissertation. Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik der Universität Paderborn.

Kempen, L. (2018). How Do Pre-service Teachers Rate the Conviction, Verification and Explanatory Power of Different Kinds of Proofs? In A. J. Stylianides & G. Harel (Hrsg,), *Advances in Mathematics Education Research on Proof and Proving. An International Perspective.* ICME-13 Monographs (S. 225–237). Springer International Publishing.

KMK (2004a). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004.* München: Wolters Kluwer.

KMK (2004b). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. Beschluss vom 04.12.2003.* München: Wolters Kluwer.

KMK (2012): *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Beschluss vom 18.10.2012.* München: Wolters Kluwer.

Koepf, W., Götze, F., Eichler, A., & Heckmann, G. (2019). Mathematik: 19 Maßnahmen für einen konstruktiven Übergang Schule – Hochschule. https://www.mathematik.de/images/Presse/Presseinformationen/Massnahmenkatalog_DMV_GDM_MNU.pdf (15.02.2022)

Krey, O. (2012). *Zur Rolle der Mathematik in der Physik. Wissenschaftstheoretische Aspekte und Vorstellungen Physiklernender*. Berlin: Logos-Verlag.

Krieger, M. & Winter, K. (2015). Mathematische Beweiskompetenzen Studierender diagnostizieren und fördern – eine Bestandsaufnahme. In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2015 (S. 508–511). Münster: WTM-Verlag.

Leder, G. C., Pehkonen, E. & Törner. G. (Hrsg.) (1996). *Mathematical Beliefs – a hidden variable?.* Dordrecht: Kluwer.

Leder, G. C. (2019). Mathematics-Related Beliefs and Affect. In M. S: Hannula et al. (Hrsg.), *Affect and Mathematics Education. Fresh Perspectives on Motivation, Engagement, and Identity.* ICME-13 Monographs (S. 15–35). Springer Open.

Leppig, M. (1979). Anmerkungen zur Beweisfähigkeit von Abiturienten und Studienbewerber. In W. Dörfler & R. Fischer (Hrsg.), *Beweisen im Mathematikunterricht. Vorträge des 2. Internationalen Symposiums für „Didaktik der Mathematik“ von 26.9. bis 29.9. 1978 in Klagenfurt* (S. 297–306). Wien: Hölder-Pichler-Tempsky, Stuttgart: Teubner.

Lerman, S. (2001). A Review of Research Perspectives on Mathematics Teacher Education. In F.-L. Lin & T. J. Cooney (Hrsg.), *Making Sense of Mathematics Teacher Education* (S. 33–52). Dordrecht, Boston & London: Kluwer Academc Publishers.

Leuders, T. (2017) (Hrsg.). Mathematik-Didaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Liljedahl, P. & Hannula, M. S. (2016). Research on Mathematics-Related Affect. Examining the Structures of Affect and Taking the Social Turn. In Á. Gutiérrez, G. C. Leder & P. Boero (Hrsg.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (S. 417–446). Rotterdam: Sense Publishers.

Loos, A. & Ziegler, G. M. (2015). Gesellschaftliche Bedeutung der Mathematik. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 3–17). Berlin & Heidelberg: Springer Spektrum Verlag.

Lutz-Westphal, B. (2006). *Kombinatorische Optimierung – Inhalte und Methoden für einen authentischen Mathematikunterricht.* Berlin: Technische Universität Berlin. Dissertationsschrift.

Lutz-Westphal, B. (2008). Mathematik authentisch lehren. In Vásárhelyi, É. (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht Online. Vorträge auf der 42. Tagung für Didaktik der Mathematik. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 13.03. bis 18.03.2008 in Budapest* (S. 487–500).

Maaß, K. (2006). Bedeutungsdimensionen nützlichkeitsorientierter Beliefs. Ein theoretisches Konzept zu Vorstellungen über die Nützlichkeit von Mathematik und eine erste empirische Annäherung bei Lehramtsstudierenden. *Mathematica Didactica, 29*(2), 114–138.

Maaß, K. & Ege, P. (2007). Mathematik und Mathematikunterricht aus der Sicht von Hauptschülern. *Mathematica Didactica, 30*(2), 53-85.

Mac Lane, S. (1997). Despite Physicists, Proof Is Essential in Mathematics. *Synthese*, 111(2), 147–154.

Mariotti, A.M. (2006). Proof and Proving in Mathematics Education. In *Gutiérrez, A. & Boero, P. (Hrsg.) Handbook of Research on The Psychology of Mathematics Education. Past present and Future* (173–204). Rotterdam & Taipei: Sense Publishers.

Mason, J. (2004). Book Review. Are Beliefs Believable? *Mathematical Thinking and Learning, 6*(3), 343–352.

Mayring, P. (2002). *Einführung in die qualitative Sozialforschung: Eine Anleitung zum qualitativen Denken.* Weinheim & Basel: Beltz.

Mayring, P. (2010). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken*. Weinheim & Basel: Beltz.

Meyer, M. & Prediger, S. (2009). Warum? Argumentieren, Begründen, Beweisen. *Praxis der Mathematik in der Schule, 30*, 1–7.

Nagel, K. & Reiss, K. (2016). Zwischen Schule und Universität: Argumentation in der Mathematik. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 19*, 299–327.

Ostsieker, L. & Biehler, R. (2012). Analyse von Beweisprozessen von Studienanfänger/innen bei der Bearbeitung von Aufgaben zur Konvergenz von Folgen. In M. Ludwig & M. Kleine (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012.* 46*. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 5.3.2012 bis 9.3.2012 in Weingarten* (S. 641–644). Münster: WTM-Verlag.

Pajares, M. F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research, 62*(3), 307–332.

Pehkonen, E. & Törner, G. (1996). Mathematical beliefs and different aspects of their meaning. International Rewievs on Mathematical Education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 28*(4), 101–108.

Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and effect. In F. K. Lester (Hrsg.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (S. 257-315). Charlotte: Information Age.

Platz, M., Niehaus, E. & Winter, K. (2018). Förderung von Argumentationskompetenzen in der Primarstufe mit Hilfe eines elektronischen Beweissystems – Ein erster Ansatz. In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2018 (S. 2097-2098). Münster: WTM-Verlag.

Pospeschill, M. (2010). *Testtheorie, Testkonstruktion, Testevaluation*. München: Ernst Reinhardt.

Rasch, B., Friese, M., Hofmann, W. & Naumann, E. (2010). *Quantitative Methoden. Einführung in die Statistik für Psychologen und Sozialwissenschaftler.* Band 1. Berlin & Heidelberg: Springer.

Rav, Y. (1999). Why do we prove theorems? *Philosophia Mathematica, 7*(1), 5–41.

Reid, D. A. & Knipping, C. (2010). *Proof in Mathematics Education.* Research, Learning and Teaching. Rotterdam, Boston & Taipei: Sense Publishers.

Reiss, K. & Heinze, A. (2005). Argumentieren, Begründen und Beweisen als Ziele des Mathematikunterrichts. In H.-W. Henn (Hrsg.), *Mathematikunterricht im Spannungsfeld von Evolution und Evaluation: Festschrift für Werner Blum* (S. 184–192). Hildesheim: Franzbecker.

Richardson, V. (1996). The role of attitudes and beliefs in learning to teach. In J. Sikula, T. J. Buttery & E. Guyton (Hrsg.), *Handbook of Research on Teacher Education* (S. 102-119). New York: Macmillian.

Rokeach, M. (1989). *Beliefs, attitudes and values: A theory of organization and change*. San Francisco: Jossey-Bass.

Rolka, K. & Bulmer, M. (2005). Picturing Student Beliefs in Statistics. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 37*(5), 412-417.

Rösken, B., Pepin, B. & Törner, G. (2011). Beliefs and beyond: affect and the teaching and learning of mathematics. *ZDM – Mathematics Education, 43,* 451-455.

Safrudiannur, Belke, L. & Rott, B. (2022). A Pseudo-Longitudinal Approach for Investigating Preservice Teachers´ Beliefs During Their University Education. *International Journal of Science and Mathematics Education, 20*, 1099–1122.

Safrudiannur & Rott, B. (2019). Students' abilities on the relationship between beliefs and practices. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen & M. Veldhuis (Hrsg.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics*

Education (S. 3996-4003). Utrecht: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Safrudiannur & Rott, B. (2020). Measuring Teachers´ Beliefs: A Comparison of Three Different Approaches. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 16*(1), em1796. https://doi.org/10.29333/ejmste/110058

Schwarz, B., Leung, I. K. C., Buchholtz, N., Kaiser, G., Stillman, G., Brown, J. & Vale, C. (2008). Future teachers´ professional knowledge on argumentation and proof: a case study from universities in three countries. *ZDM – Mathematics Education, 40*, 791-811.

Seiffge-Krenke, I. (1974). *Probleme und Ergebnisse der Kreativitätsforschung.* Stuttgart: Huber.

Sill, H.-D. (2019). *Grundkurs Mathematikdidaktik*. Paderborn: Verlag Ferdinand Schöningh.

Skott, J. (2015a). Towards a Participatory Approach to ´Beliefs´ in Mathematics Education. In Pepin, B. & Rösken-Winter, B. (Hrsg.), From beliefs to dynamic affect systems in mathematics education. Exploring a mosaic of relationships and interactions (3-23). Cham: Springer https://doi.org/10.1007/978-3-319-06808-4

Skott, J. (2015b). The Promises, Problems, and Prospects of Research on Teachers´ Beliefs. In H. Fives & M. G. Gill (Hrsg.*), International Handbook of Research on Teachers´ Beliefs* (S. 13–30). New York & London: Routledge.

Sommerhoff, D., Ufer, S. & Kollar, I. (2016). Validieren von Beweisen – Probleme von Studierenden und die Rolle von mathematischen und übergreifenden Voraussetzungen. In Institut für Mathematik und Informatik der Pädagogischen Hochschule Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (Bd. 3, S. 1127–1130). Münster: WTM-Verlag.

Sowder, J. (2007). The mathematical education and development of teachers. In F. K. Lester (Ed.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics (pp. 157–224). Charlotte: Information Age Publishing.

Speer, N. M., J. P. III. & Horvath, A. (2010). Collegiate mathematics teaching: An unexamined practice. *Journal of Mathematical Behavior 29*, 99-114.

Spies, S. & Witzke, I. (2014). Bereichsspezifische Auffassungen von Analysis zu Studienbeginn. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1147–1150). Münster: WTM-Verlag.

Stein, M. (1988). Beweisfähigkeiten und Beweisvorstellungen von 11-13jährigen Schülern. *Journal für Mathematikdidaktik, 9*, 31–53.

Stoppel, H.-J. (2019). *Beliefs und selbstreguliertes Lernen. Eine Studie in Projektkursen der Mathematik in der gymnasialen Oberstufe.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Stylianides, A., Bieda, K. N. & Morselli, F. (2016). Proof and Argumentation in Mathematics Education Research. In Á. Gutiérrez, G. C. Leder & P. Boero (Hrsg.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (S. 315–351). Rotterdam: Sense Publishers.

Szabó, Á. (2004). Wie ist die Mathematik zu einer deduktiven Wissenschaft geworden? In. J. Christianidis (Eds.), *Classics in the History of Greek Mathematics* (S. 45-80). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Szűcs, K. (2020). Die Fermat-Zahlen und der Fundamentalsatz der Algebra. CAS-unterstützte Zugänge zum Beweisen in der Hochschulmathematik. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 109*, 84-90.

Szűcs, K. (2021). Beweisakzeptanz von Lehramtsstudierenden der Mathematik Generierung von neuen Hypothesen anhand einer Fallstudie. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 111*, 50-56.

Szűcs, K. & Traxl, L. (2020). Einstellung von Lehramtsstudierenden mathematischen Beweisen gegenüber – Erstellung eines Kategoriensystems. In H.-S. Siller, W. Weigel & J. F. Wörler (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2020 (S. 921–924). Münster: WTM-Verlag.

Tenorth, H.-E., Blum, W., Heinze, A., Peter-Koop, A., Post, M., Selter, Ch., Tippelt, R. & Törner, G. (2010). *Mathematik entlang der Bildungskette. Empfehlungen einer Expertengruppe zur Kompetenzentwicklung und zum Förderbedarf im Lebenslauf.* Bonn: Deutsche Telekom Stiftung.

Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: Asynthesis of the research. In D. A. Grouws (Hrsg.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A Project of the National 17Council of Teachers of Mathematics* (S. 127-146). New York: Macmillan Publishing Company.

Törner, G. (1996). Mathematische Weltbilder von Lehrern. In K.-P., Müller (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 30. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 4. bis 8. März 1996 in Regensburg* (S. 433–436). Hildesheim: Franzbecker.

Törner, G. (2000). Structuring Mathematical Belief Structures – Some Theoretical Considerations on Beliefs, Some Research Questions and Some Phenomenological Observations. In *Fernandez, M. L.* (Ed.), *Proceedings of the 22nd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (October 7 – October 10, 2000) at Tucson (Arizona) (Vol. 2, S. 499-508). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics and Environmental.

Törner, G. (2002). Epistemologische Grundüberzeugungen – verborgene Variablen beim Lehren und Lernen von Mathematik. *Der Mathematikunterricht 48*(4/5), 103-128.

Törner, G. (2015). Verborgene Bedingungs- und Gelingensfaktoren bei Fortbildungsmaßnahmen der Lehrerbildung Mathematik. *Journal für Mathematik-Didaktik, 36* (2), 195–232. doi:10.1007/s13138-015-0078-9.

Törner, G. & Grigutsch, S. (1994). „Mathematische Weltbilder" bei Studienanfängern – eine Erhebung. *Journal für Mathematik-Didaktik, 15*(3/4), 211–251.

Traxl, L. (2019). *Einstellungen von Mathematiklehramtsstudierenden der Mathematik zum Beweisen – Konzeption, Durchführung und Evaluation einer Fallstudie an der Friedrich-Schiller-Universität Jena.* Wissenschaftliche Hausarbeit zur Ersten Staatsprüfung für das Lehramt an Gymnasien. Erfurt: Landesprüfungsamt der Lehrämter des Freistaates Thüringen.

Ufer, S., Heinze, A., Kuntze, S., & Rudolph-Albert, F. (2009). Beweisen und Begründen im Mathematikunterricht. *Journal für Mathematikdidaktik, 30*, 30-54.

Vollstedt, M., Heinze, A., Gojdka, K., & Rach, S. (2014). Framework for examining the transformation of mathematics and mathematics learning in the transition from school to university. In S. Rezat, M. Hattermann, & A.

Peter-Koop (Eds.), *Transformation: A fundamental idea of mathematics education* (pp. 29–50). New York, NY: Springer.

Walsch, W. (1972). *Zum Beweisen im Mathematikunterricht.* Berlin: Volk und Wissen.

Weigand, H.-G., Filler, A., Hölzl, R., Kuntze, S., Ludwig, M., Roth, J., Schmidt-Thieme, B., Wittmann, G. (Hrsg.) (2018). *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I*. Berlin: Springer Spektrum.

Wilkie, K. J. (2019). The challenge of changing teaching: investigating the interplay of external and internal ifluencies during professional learning with secondary mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 22*(1), 95-124.

Winter, H. (1983). Zur Problematik des Beweisbedürfnisses. *Journal für Mathematikdidaktik, 4,* 59-95.

Wittmann, E. C. (2021). Aus der Spur – Zur heutigen Situation im Mathematikunterricht und in der Mathematiklehrerbildung. Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 111, 64-70.

Wittmann, E. C., & Müller, G. (1988). Wann ist ein Beweis ein Beweis? In P. Bender (Hrsg.), *Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis. Festschrift für Heinrich Winter* (S. 237-257). Berlin: Cornelsen.

Witzke, I (2015). Different understanding of mathematics: an epistemological approach to bridge the gap between school and university mathematics. In E. Barbin, U. Th. Jankvist & T. H. Kjeldsen (Eds.), *History and Epistemology in Mathematics Education. Proceedings of the Seventh Summer University* (S. 303-321). Copenhagen: Aarhaus University.

Zhang, Q. & Morselli, F. (2016). Teacher Beliefs. In G. A. Goldin et al. (Eds.), *Attitudes, Beliefs, Motivation and Identity in Mathematics Education. An Overview of the Field and Future Directions* (S. 11-13). ICME-13 Topical Surveys. Springer Open.

Ziegler, G. (2008). Über das Buch der Beweise. Was ist Mathematik? Versuch einer Antwort in vier Thesen. *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, 61*(7), 407-413.

Anschrift der Verfasser

Kinga Szűcs
Universität Erfurt
Erziehungswissenschaftliche Fakultät
Mathematik und Mathematikdidaktik
Nordhäuser Straße 63
99089 Erfurt
kinga.szuecs@uni-erfurt.de

Anhang 1: offene Fragen zur Generierung von Hypothesen

1. Was ist für Sie ein mathematischer Beweis?
2. Welche Beweisverfahren (indirekt, synthetisch… etc.) und welche Beweise sind Ihnen aus Ihrer Schulzeit bekannt? Geben Sie bitte möglichst konkrete Beispiele an.
3. Wie wurden in Ihrer Schulzeit Beweise im Mathematikunterricht behandelt? (Z. B. der Lehrer hat sie an der Tafel gezeigt, man hat sie selbst bewiesen etc.)
4. Welche Beweisverfahren (indirekt, synthetisch… etc.) und welche Beweise haben Sie erst an der Universität kennengelernt? Geben Sie bitte auch möglichst konkrete Beispiele an. (Beweise natürlich nur exemplarisch)
5. Beweise kommen in den Bildungsstandards erst im Anforderungsbereich III in der Sekundarstufe II explizit vor, im aktuellen Thüringer Lehrplan erscheinen sie nur indirekt: Einfache Varianten von Beweisen als Realisation der Entwicklung von mathematischen Argumentationen. Wie stehen Sie dazu? Würden Sie die Beweise im Lehrplan/in den Bildungsstandards verankern? Begründen Sie Ihre Meinung.
6. Entsprechend dem aktuellen Thüringer Lehrplan kommen auch in der Abiturprüfung keine Beweisaufgaben vor. Wie stehen Sie hierzu? Begründen Sie Ihre Meinung.
7. Werden Sie – unabhängig vom Lehrplan und von den Bildungsstandards – in Ihrem zukünftigen Mathematikunterricht Beweise behandeln? Begründen Sie Ihre Meinung.
8. Falls Sie vorhin mit Ja geantwortet haben: Welche Beweise scheinen Ihnen für den Mathematikunterricht besonders geeignet?

Anhang 2: Auszug aus dem Kodierungsprozess zur Erstellung eines Kategoriensystems zu Beliefs über Beweise

Die handschriftlichen Antwortbögen der 48 freiwilligen Probanden wurden durch Abtippen digitalisiert, wobei Rechtschreibfehler korrigiert worden sind. Anschließend erfolgte der Kodierprozess wie folgt: Als Kodiereinheit (kleinste Analyseeinheit) galt jedes klar bedeutungstragende Element im Text, als Kontexteinheit (größte Analyseeinheit) die ganze Antwort auf eine Frage jedes einzelnen Probanden. Als Auswertungseinheit fungierte das ganze Material, also alle 48 Antwortbögen mit je 8 Antworten. Auch wenn nicht jeder Proband alle Fragen beantwortet hat, liegen mindestens 40 Antworten pro Frage vor.

Die Frage 1 (Was ist für Sie ein mathematischer Beweis? (Anhang 1)) wurde von 45 Probanden beantwortet. Exemplarisch wird gezeigt (Tab. 3), wie die entsprechenden Antworten von Proband 1 und Proband 22 kodiert worden sind.

Proband	Kodiereinheit	Paraphrasierung	Generalisierung/Hypothese	Kategorie
1	„Aus vorausgesetzten oder bereits bewiesenen Aussagen	Vorausgesetzte oder bereits bewiesene Sätze	Beweise stützen auf bereits bewiesene Sätze.	Stützung von Beweisen
	weitere Aussagen	Aussage(n)	Beweise beziehen sich auf eine (mathematische) Aussage.	Bezug von Beweisen
	mithilfe von logischen Schlussfolgerungen	Logische Schlussfolgerungen	Beweise werden unter Beachtung der Regeln der logischen Schlussfolgerung geführt.	Logische Schussfolgerung
	verifizieren.“	Verifizierung	Beweise dienen der Verifizierung.	Verifizierungsfunktion
22	„Einen Nachweis, dass etwas (Regel oder so)	Regeln	Beweise beziehen sich auf eine (mathematische Aussage).	Bezug von Beweisen
	im Allgemeinen und immer gilt.“	allgemeine Gültigkeit	Beweise dienen der Verallgemeinerung.	Verallgemeinerungsfunktion

Tab. 3: Erstellung der Kategorien anhand des Textmaterials: Kodierung der Antworten von Proband 1 und 22 auf die erste Frage

Bei der Generalisierung der Antwort von Proband 22 wurde beachtet, dass (mathematische) Regeln Spezialfälle von Aussagen sind. Da die gleichen Kategorien offensichtlich aus mehreren Textstellen abstrahiert werden können, werden nachfolgend die Ankerbeispiele für zwei derjenigen Kategorien aufgeführt, die in der letzten Spalte der Tabelle 3 zu finden sind (Tab. 4).

Kategorie	Hypothese	Ankerbeispiele
Stützung von Beweisen	Beweise stützen auf Definitionen und bereits bewiesene Sätze.	„Schlüssige Umformung von Termen **unter Benutzung von Definitionen und Sätzen,** um die Richtigkeit einer Aussage zu zeigen.“ (Proband 19)
		„zeigen, dass eine Aussage gilt **aus bekannten Aussagen**“ (Proband 28)
		„Eine mathematische Aussage oder Problem wird **mithilfe von Definitionen und anderen bereits bewiesenen Aussagen** bewiesen.“ (Proband 29)
Verifizierungsfunktion	Beweise dienen der Verifizierung.	„Aus vorausgesetzten oder bereits bewiesenen Aussagen weitere Aussagen mit Hilfe von logischen Schlussfolgerungen zu **verifizieren**.“ (Proband 1)
		„eindeutiger **Nachweis** einer Aussage“ (Proband 2)
		„Die **Richtigkeit** einer Aussage/eines Satzes formal **zu zeigen**.“ (Proband 3)
		„logische Abfolge von Schritten, **um** eine (mathematische) Aussage **für wahr oder falsch zu erklären.**“ (Proband 9)

Tab. 4: Ankerbeispiele für zwei ausgewählte Kategorien

Anhang 3: Das Kategoriensystem

Erfahrungen mit Beweisen (7)	**Beliefs über Beweise als Teil der Mathematik als Wissenschaft (17)**	
Thematisierung von Beweisen	Verifizierungsfunktion	Teil der Mathematik
Beweisverfahren in der Schule	Bezug von Beweisen	Kommunikationsfunktion
Konkrete Beweis in der Schule	logische Schlussfolgerung	Begründungsarten
Unterrichtsgestaltung	Stützung von Beweisen	Berechnung
Prüfungsrelevanz	Verständnisfunktion	Lösungsweg
Beweisverfahren an der Hochschule	Verallgemeinerungsfunktion	Darstellung des Ergebnisses
heuristische Strategien an der Hochschule	Strukturierung	Kette von deduktiven Schlüssen
	Entdeckung von Neuem	Richtung der Beweisführung
	Formalismus	

Beliefs über das Lernen von Beweisen (19)	**Beliefs über das Lehren von Beweisen (20)**
logisches Denken	Bild von der Mathematik
Transferleistung	Studiumsvorbereitung
Kreativität	Einschränkung des Unterrichts
Objektivität	historische Bezüge
Satzfindung	Begriffsbildung
Beweisnotwendigkeit	Problemlösen
Beweisstruktur	Verständnisförderung
Beweisidee	Mündige Bürger
Formalismus	Wecken von Interesse
logische Schlussfolgerungen	Zeitaufwand
Gültigkeit	Zugänglichkeit
Plausibilität	Stützung
Argumentationsbasis	Formalismus
Auswendiglernen	Beweisstrategien
Prüfungssituation	Beweisarten
Lernmotivation	Überprüfbarkeit der Beweiskompetenz
Beweise nur an der Hochschule/ Universität	Anwendung
institutionelle Hilfe	Differenzierung
Austausch	Auswahl der Beweise
	Satz des Pythagoras

Anhang 4: Fragebogen zur Erhebung von Beliefs bezogen auf Beweise

Persönliches	Antwortmöglichkeiten	
Welches Fach studieren Sie derzeit? (Mehrfachnennungen sind möglich)	Lehramt Mathematik für Gymnasien Lehramt Mathematik für die Sekundarstufe I Lehramt Mathematik für Förderschulen Lehramt für Grundschule Mathematik ohne Lehramtsbezug (Mathematik Diplom, Bachelor oder Master) Andere, mathematiknahe Wissenschaft (Informatik, Wirtschaftsmathematik, Versicherungsmathematik, Ingenieurwissenschaften...) Sonstiges	
In welchem Fachsemester studieren Sie derzeit? Addieren Sie bitte alle Fachsemester, die Sie in Mathematik oder in einem mathematikrelevanten Fach verbracht haben. Beachten Sie bitte überdies, wenn Sie in einem Masterstudiengang studieren, auch die im Bachelorstudium verbrachten Fachsemester.	1.-2. 3.-6. 7.-10. mehr als 10	
In welchem Bundesland studieren Sie? Wählen Sie bitte das Bundesland aus, wo sich Ihre Hochschule befindet.	Baden-Württemberg Bayern Berlin Brandenburg Bremen Hamburg Hessen Mecklenburg-Vorpommern Niedersachsen	Nordrhein-Westfalen Rheinland-Pfalz Saarland Sachsen Sachsen-Anhalt Schleswig-Holstein Thüringen Außerhalb Deutschlands

Erfahrungen mit Beweisen	Antwortmöglichkeiten	
Denken Sie kurz an Ihre Schulzeit und an Ihren Mathematikunterricht zurück. Stimmen Sie der folgenden Aussage zu? In der Schule wurden keine Beweise geführt.	Ja Nein	
Sie haben die vorherige Frage mit Nein beantwortet, in Ihrem Mathematikunterricht wurden also Beweise geführt. Die nächsten Fragen beziehen sich darauf, welche Beweise in der Schule wie thematisiert wurden.		
Welche der folgenden Beweisverfahren haben Sie in der Schule kennengelernt? Bitte nur diejenigen Verfahren markieren, die Sie tatsächlich aus der Schule kennen. (Sie können mehrere Antworten angeben.)	Direkter Beweis (Der Satz wird mit Rückgriff auf Bekanntes geradlinig bewiesen.) Indirekter Beweis (Die Annahme, dass eine Aussage nicht gilt, wird zum Widerspruch geführt.) Vollständige Induktion (Ein Satz, der auf einer Teilmenge der natürlichen Zahlen gilt, wird in zwei Schritten gezeigt. Für bestimmte konkrete Startwerte wird die Gültigkeit überprüft. Anschließend wird gezeigt, wenn die Aussage für eine Zahl gilt, dies auch auf die nächstgrößere Zahl aus der Definitionsmenge zutrifft.) Widerlegung einer Aussage durch Gegenbeispiel (Es wird ein Beispiel gefunden oder konstruiert, für welches die Aussage nicht gilt.)	
Zu welchen der folgenden Sätze haben Sie den Beweis in der Schule kennengelernt? Bitte nur diejenigen Sätze angeben, dessen Beweis Sie in der Tat bereits in der Schule kennenlernten. (Sie können mehrere Antworten angeben und die Liste bis zu zwei weiteren Angaben ergänzen.)	Beweis zum Satz des Pythagoras Beweis zum Satz des Thales Beweis zum Innenwinkelsummensatz im Dreieck Beweis der Irrationalität von Wurzel 2 Beweis zu: „Es gibt unendlich viele Primzahlen.“ Beweis der p-q-Formel Beweis zu den Kongruenzsätzen für Dreiecke Beweis zum Satz von Vieta Beweis der binomischen Formeln	Beweis zum Sinussatz Beweis zum Höhensatz Beweis der Kathetensätze Beweis der Ableitungsregeln Beweis zu: „Alle Peripheriewinkel zur gleichen Sehne sind im Kreis gleich groß.“ Beweis zum Zentri-Peripheriewinkelsatz (Der Peripheriewinkel ist halb so groß wie der zur gleichen Sehne gehörende Zentriwinkel.) Anderes Beispiel 1, und zwar: Anderes Beispiel 2, und zwar:

Wie wurde der Mathematikunterricht überwiegend gestaltet, als Beweise thematisiert wurden? (Geben Sie bitte die Möglichkeit an, die am besten die dominierende Unterrichtsform beschreibt.)	Die Lehrperson hat den Beweis an der Tafel hergeleitet. Die Lehrperson hat den Beweis in Diskussion mit der Schülerschaft an der Tafel hergeleitet. Die Lehrperson hat die Lernenden angehalten, den Beweis im Schulbuch nachzulesen und selbst nachzuvollziehen. Die Lernenden haben in Kleingruppen die Beweisidee gefunden und den Beweis aufgeschrieben. Die Lernenden haben allein die Beweisidee gefunden und den Beweis aufgeschrieben.
Waren Beweise Bestandteil in abschließenden Klausuren oder Prüfungen?	Beweise waren überhaupt nicht prüfungsrelevant. Beweise waren in manchen Ausnahmefällen prüfungsrelevant. Beweise waren überwiegend prüfungsrelevant.
In Ihrem Studium haben Sie bestimmt etliche Beweise kennengelernt. Die nächsten Fragen beziehen sich auf die Behandlung von Beweisen an Ihrer Hochschule.	
Welche der folgenden Beweisverfahren haben Sie in Ihrem Studium kennengelernt? Bitte nur diejenigen Verfahren markieren, die Sie tatsächlich aus Ihrem Studium kennen. (Sie können mehrere Antworten angeben.)	Direkter Beweis (Der Satz wird mit Rückgriff auf Bekanntes geradlinig bewiesen.) Indirekter Beweis (Die Annahme, dass eine Aussage nicht gilt, wird zum Widerspruch geführt.) Vollständige Induktion (Ein Satz, der auf einer Teilmenge der natürlichen Zahlen gilt, wird in zwei Schritten gezeigt. Für bestimmte konkrete Startwerte wird die Gültigkeit überprüft. Anschließend wird gezeigt, wenn die Aussage für eine Zahl gilt, dies auch auf die nächstgrößere Zahl aus der Definitionsmenge zutrifft.) Widerlegung einer Aussage durch Gegenbeispiel (Es wird ein Beispiel gefunden oder konstruiert, für welches die Aussage nicht gilt.)
Welche heuristischen Strategien haben Sie im Zusammenhang mit Beweisen in Ihrem Studium kennengelernt? (Heuristische Strategien sind grundsätzliche Vorgehensweisen, die unabhängig von einem Inhalt angewandt werden können.) (Sie können mehrere Antworten angeben.)	Fallunterscheidung Rückwärtsarbeiten Zerlegung in Teilbeweise Analogiebilden Anderes, und zwar:

Beliefs über Beweise als Teil der Mathematik				
Inwieweit stimmen Sie den nachfolgenden Aussagen zu?	**Stimme**			
	gar nicht zu	**eher nicht zu**	**eher zu**	**voll zu**
Beweise dienen der Verifizierung einer Aussage.				
Beweise beziehen sich auf eine mathematische Aussage.				
Beweise werden unter Beachtung der Regeln der logischen Schlussfolgerung geführt.				
Beweise stützen sich auf Definitionen, Axiome und bereits bewiesene Sätze.				
Beweise führen von der Voraussetzung zur Behauptung.				
Beweise dienen dem Verständnis eines mathematischen Sachverhaltes.				
Beweise dienen der Verallgemeinerung.				
Beweise strukturieren das mathematische Wissen.				
Beweise generieren neues Wissen.				
Beweise dienen der Kommunikation.				
Beweise sind formal.				
Beweise machen die Mathematik (oder einen Teil davon) aus.				
Es existieren verschiedene Arten des Begründens. Das deduktive Schließen ist aber die einzige Art, die in der Mathematik als Beweisen akzeptiert wird.				
Ein Beweis ist eine Berechnung.				
Ein Beweis ist die Beschreibung des Lösungsweges.				
Ein Beweis ist eine kurze, abstrakte Darstellung des gefundenen Satzes.				
Ein Beweis ist eine Kette von deduktiven Schlüssen.				

Beliefs über Beweise als Teil der Mathematik

Inwieweit stimmen Sie den nachfolgenden Aussagen zu?	Stimme			
	gar nicht zu	eher nicht zu	eher zu	voll zu
Beweise zeigen die Gültigkeit einer mathematischen Aussage.				
Beweise beziehen sich auf eine mathematische Definition.				
Die Regeln der Logik haben keinen Einfluss auf den Beweisprozess.				
Beweise können auf Alltagserfahrungen stützen.				
Ein Beweis führt von der Behauptung zur Voraussetzung.				
Beweise zeigen, warum eine Aussage gültig ist.				
Beweise zeigen, dass eine Aussage unter bestimmten Umständen immer gilt.				
Beweise vereinfachen und vereinheitlichen mathematische Theorien.				
Während des Beweisens eines Satzes kann man neue Sätze entdecken.				
Ein Satz ist auch ohne Akzeptanz des entsprechenden Beweises durch die mathematische Community gültig.				
Nicht formal aufgeschriebene Beweise sind keine Beweise.				
Beweise sind das Herzstück der Mathematik.				
In der Mathematik ist nur das induktive Schließen als Beweis akzeptiert.				
Ein Beweis ist keine Berechnung, sondern eine Begründung.				
Ein Beweis ist eine Beschreibung, wie der Satz gefunden wurde.				
Ein Beweis ist das Ergebnis des Satzfindungsprozesses in knapper Form. (Der Satzfindungsprozess ist ein - eventuell experimenteller - Prozess, bei dem ein für den Lernenden bisher unbekannter Zusammenhang entdeckt wird.)				
Ein Beweis ist eine Kette von induktiven Schlüssen.				

Bei den nächsten Fragen geht es darum, wie Lernende Beweise im Mathematikunterricht erleben und beurteilen. Beantworten Sie bitte daher die nächsten Fragen aus diesem Blickwinkel.

Beliefs über das Lernen von Beweisen				
Inwieweit stimmen Sie den nachfolgenden Aussagen zu?	**Stimme**			
	gar nicht zu	**eher nicht zu**	**eher zu**	**voll zu**
Beweise fördern das logische Denken der Lernenden.				
Lernende empfinden es oft so, dass Beweise für andere mathematische Tätigkeiten (Berechnen, Konstruieren, Problemlösen...) nützlich sind.				
Beweise fördern die mathematische Kreativität der Lernenden.				
Durch Beweise erlebt man als Lernende/r die Mathematik als eine objektive Wissenschaft.				
Beweise fördern die Lernmotivation.				
Das Finden eines Satzes ist für Lernende eine besondere Anforderung.				
Für Lernende ist es oft schwierig, zu erkennen, dass ein Beweis notwendig ist.				
Das Finden einer passenden Beweisidee ist für Lernende eine besondere Herausforderung.				
Beim Beweisen ist es für Lernende oft schwierig, Behauptung und Voraussetzung auseinander zu halten.				
Beim Beweisen ist es für Lernende oft schwierig, aus den Voraussetzungen die logisch richtigen Schlussfolgerungen zu ziehen.				
Beim Beweisen fällt es den Lernenden oft schwer, den Beweis formal aufzuschreiben.				
Es ist für Lernende oft schwierig, zu entscheiden, ob ein vorliegender Beweis gültig ist.				
Auch wenn ein Beweis vorliegt, kann die Gültigkeit einer Aussage angezweifelt werden, wenn sie nicht plausibel erscheint.				
Lehrpersonen und Lernende argumentieren oft auf unterschiedlichen Argumentationsbasen. (Eine Argumentationsbasis ist die Gesamtheit der Aussagen, die eine Person als richtig ansieht, sowie die Arten des Schließens, die diese Person für zulässig hält.)				
Es besteht die Gefahr, dass Lernende in der Schule Beweise nur auswendig lernen.				
In einer Prüfungssituation sind Lernende mit einer Beweisaufgabe zeitlich überfordert.				
Durch das Studium wird die Meinung verstärkt, dass man sich mit Beweisen nur an der Universität auseinandersetzen soll.				
An der Universität soll das Beweisen für Studierende durch institutionelle Hilfe (Tutorien, Anleitungen oder Ähnliches) unterstützt werden.				

Ein Austausch unter Lernenden trägt zur Förderung der Beweiskompetenz bei.

Beliefs über das Lernen von Beweisen				
Inwieweit stimmen Sie den nachfolgenden Aussagen zu?	**Stimme**			
	gar nicht zu	**eher nicht zu**	**eher zu**	**voll zu**
Durch das Beweisen lernt man logisch zu schlussfolgern.				
Lernende empfinden es oft so, dass Beweise für andere mathematische Tätigkeiten (Berechnen, Konstruieren, Problemlösen...) nicht nützlich sind.				
Beweise schaden der mathematischen Kreativität der Lernenden.				
Durch Beweise kann man aufzeigen, dass eine Aussage unabhängig von einer Autorität gültig ist.				
Beweise können die Lernenden demotivieren.				
Beim Beweisen können die Lernenden den zu beweisenden Satz leicht finden.				
Die Beweisnotwendigkeit einzusehen, fällt den Lernenden leicht.				
Beim Beweisen empfinden Lernende oft, dass die Beweisidee wie ein „Zauber“ entsteht.				
Beim Beweisen wird die Behauptung von Lernenden oft als bereits bewiesen behandelt.				
Beim Beweisen ist es für Lernende oft schwierig, aus den Voraussetzungen die inhaltlich passenden Schlussfolgerungen zu ziehen.				
Beim Beweisen fällt es Lernenden leicht, den Beweis formal aufzuschreiben.				
Bei einem vorgegebenen Beweis können Lernende einfach überprüfen, ob er gültig ist.				
Auch wenn kein Beweis vorliegt, kann an die Gültigkeit einer Aussage geglaubt werden, wenn sie plausibel erscheint.				
Dadurch, dass Lehrpersonen und Lernende unterschiedliche Vorkenntnisse, Vorerfahrungen und Erfahrungen mit logischen Schlussfolgerungen haben, argumentieren sie beim Beweisprozess oft aneinander vorbei.				
Es besteht die Gefahr, dass Lernende in der Schule Beweisen als Rituale der Lehrperson bzw. der Wissenschaft erleben.				
In einer Prüfungssituation sind Lernende mit einer Beweisaufgabe inhaltlich überfordert.				
Durch das Studium wird die Meinung verstärkt, dass Beweise unbedingt in der Schule unterrichtet werden sollen.				
An der Universität lernt man das Beweisen am besten, wenn man sich nicht an institutionelle Hilfe anlehnt.				
Ein Austausch unter Lernenden führt zur Führung von fehlerhaften / unvollständigen Beweisen.				

Bei den nächsten Fragen geht es darum, wie Lehrende Beweise im Mathematikunterricht erleben und beurteilen. Beantworten Sie bitte daher die nächsten Fragen aus diesem Blickwinkel

Beliefs über das Lehren von Beweisen				
Inwieweit stimmen Sie den nachfolgenden Aussagen zu?	**Stimme**			
	gar nicht zu	**eher nicht zu**	**eher zu**	**voll zu**
Beweise in der Schule tragen zu einem authentischen Bild von der Mathematik bei und sollten deswegen in der Schule thematisiert werden.				
Beweise in der Schule bereiten auf das Studium vor und sollen aus diesem Grund vermittelt werden.				
Beweise sollen im Mathematikunterricht thematisiert werden, da sie historische Bezüge ermöglichen.				
Beweise können der Begriffsbildung dienen.				
Beweisen hängt stark mit Problemlösen zusammen.				
Beweise in der Schule dienen der Verständnisförderung.				
Beweise in der Schule dienen der Erziehung zum mündigen Bürger.				
Durch die Thematisierung von Beweisen kann die Lehrperson in der Schule das Interesse der Lernenden wecken.				
Beweise zu thematisieren ist in der Schule sehr zeitaufwendig.				
In der Schule soll die Lehrperson die Notwendigkeit eines Beweises vermitteln.				
Beweise in der Schule sollen allen Lernenden zugänglich gemacht werden.				

In der Schule können beim Beweisen Aussagen verwendet werden, deren Gültigkeit aus der Anschauung heraus begründet sind, da keine axiomatische Basis vorliegt.				
Beweise in der Schule müssen nicht unbedingt formal aufgeschrieben werden.				
In der Schule sollen verschiedene Beweisstrategien vermittelt werden.				
In der Schule sollen verschiedene Beweisarten wie direkter, indirekter Beweis, vollständige Induktion thematisiert werden.				
Da Beweiskompetenz aus der Sicht der Lehrenden schwer überprüfbar ist, sollen keine Beweise in Prüfungen vorkommen.				
In der Schule soll nur die Anwendung des Gelernten fokussiert werden, statt Beweise zu führen.				
Beweise in der Schule sollen differenziert nach Leistung unterrichtet werden.				
In der Schule sollen einfache, kurze, anschauliche Beweise geführt werden.				
In der Schule soll beispielsweise der Satz des Pythagoras bewiesen werden.				

Beliefs über das Lehren von Beweisen				
Inwieweit stimmen Sie den nachfolgenden Aussagen zu?	**Stimme**			
	gar nicht zu	**eher nicht zu**	**eher zu**	**voll zu**
Da in der Schule ein authentisches Bild von der Mathematik vermittelt werden soll, sollen keine Beweise in der Schule thematisiert werden.				
Da die Schule auf das Studium vorbereiten soll, sollen keine Beweise in der Schule thematisiert werden.				
Obwohl Beweise historische Bezüge ermöglichen, sollten sie im Mathematikunterricht nicht thematisiert werden.				
Beim Beweisen kann man keine neuen Begriffe einführen.				
Um die Problemlösekompetenz der Lernenden zu fördern, sollen auch Beweise in der Schule thematisiert werden.				
Durch Beweise können Sachverhalte besser erklärt werden.				
Beweise in der Schule fördern die Kritikfähigkeit der Lernenden.				
Durch die Thematisierung von Beweisen kann man als Lehrperson erreichen, dass Lernende in der Schule Spaß an der Mathematik haben.				
Beweise in der Schule zu thematisieren ist aus Zeitgründen nicht empfehlenswert.				
In der Schule können Beweise vermittelt werden, auch ohne deren Notwendigkeit aufzuzeigen.				
Nur sehr interessierte/begabte Lernende sollen sich mit Beweisen in der Schule auseinandersetzen.				
Da keine axiomatische Basis vorliegt, können in der Schule keine Beweise geführt werden.				
Es ist sehr wichtig, dass Beweis auch in der Schule formal aufgeschrieben werden.				
In der Schule ist es nicht notwendig, auf verschiedene Beweisstrategien einzugehen.				
In der Schule ist es nicht notwendig, auf verschiedene Beweisarten wie direkter Beweis, indirekter Beweis, vollständige Induktion einzugehen.				
Auch wenn die Beweiskompetenz aus der Sicht der Lehrenden schwer überprüfbar ist, sollen Beweise in Prüfungen vorkommen.				
In der Schule soll die mathematische Theorie samt Beweisen fokussiert werden.				
Beweise in der Schule sollen allen Lernenden unabhängig von ihren Leistungen einheitlich angeboten werden.				
In der Schule sollen auch komplexe, herausfordernde Beweise thematisiert werden.				
In der Schule ist es nicht einmal notwendig, den Satz des Pythagoras zu beweisen.				

Anhang 5: Reliabilität von Itempaargruppen in der vorliegenden Studie

Beliefs über Beweise als Teil der Mathematik

Kategoriengruppe (entsprechende Kategorien)	Anzahl der Itempaare	Durchschnittliche Korrelation	Cronbachs Alpha
Kern eines Beweises (Bezug, logische Schlussfolgerung, Stützung, Struktur deduktives Schließen, Kette von ded. Schlüssen)	6	0,1433	0,5009
Funktionen von Beweisen (Verifizierungsfunktion, Erklärfunktion, Verallgemeinerung, Wissensstrukturierung, Wissensgenerierung, Kommunikationsfunktion, Teil der Mathematik)	7	0,3367	0,7804
Formalismus (Formalismus)	1	0,4127	0,5842
Typische Fehlvorstellungen (Beweis als Berechnung, Beweis als Lösungsweg, Beweis als Darstellung des Satzes)	3	0,4062	0,6724

Beliefs über das Lernen von Beweisen

Kategoriengruppe (entsprechende Kategorien)	Anzahl der Itempaare	Durchschnittliche Korrelation	Cronbachs Alpha
Förderung durch Beweise (Förderung des log. Denkens, Transferleistung, Kreativität, Objektivität, Lernmotivation)	5	0,4828	0,8236
Schwierigkeiten der Lernenden mit Beweisen (Satzfindung, Beweisnotwendigkeit, Beweisidee, Beweisstruktur, Logische Schlussfolgerung, Formalismus, Gültigkeit, Plausibilität, Prüfungssituation)	9	0,4259	0,8697
Methodisch-didaktische Umsetzung (Argumentationsbasis, Auswendiglernen, nur Universität, Institutionelle Hilfe, Austausch)	5	0,3602	0,7379

Beliefs über das Lehren von Beweisen

Kategoriengruppe (entsprechende Kategorien)	Anzahl der Itempaare	Durchschnittliche Korrelation	Cronbachs Alpha
Langfristige Ziele bei der Vermittlung von Beweisen (Bild von der Mathematik, Studiumsvorbereitung, Verständnisförderung, mündige Bürger, Interesse wecken)	5	0,4864	0,8256
Zusammenhang der Beweise mit anderen Bereichen (historische Bezüge, Begriffsbildung, Problemlösen, Anwenden)	4	0,4175	0,7414
Axiomatische Grundlegung (Stützung)	1	0,3858	0,5568
Zu vermittelnde Inhalte (Beweisnotwendigkeit, Formalismus, Beweistrategien, Beweisarten, Auswahl der Beweise, Pythagoras)	6	0,4426	0,8265
Methodisch-didaktische Umsetzung (Zeitaufwand, Zugänglichkeit, Differenzierung, Prüfung)	4	0,3789	0,7093