Die Schulung des Zahlenblicks bei der Ablösung vom Zählen – eine qualitative Einzelfallstudie zu Beziehungen, Strukturen und Rechnenlernen (BeSteR)

CHARLOTTE RECHTSTEINER, LUDWIGSBURG & MICHAELA SCHEFFKNECHT, ST. GALLEN

Zusammenfassung: *Im Mittelpunkt der Einzelfallstudie stehen die Deutungen und Begriffsentwicklungen eines zählend lösenden Kindes mit teilweise abgespeichertem Basiswissen im Rahmen einer auf der Konzeption der Zahlenblickschulung basierenden Förderung. In der interpretativen Analyse des Förderverlaufs von 13 Fördereinheiten wird der Blick sowohl auf die Entwicklung strategischer Werkzeuge als auch auf das Erkennen und Nutzen von Aufgabenmerkmalen sowie Zahl- und Aufgabenbeziehungen gerichtet. Herausgearbeitet werden konnten zwei Gestaltungsmerkmale, die für die Nutzung von Beziehungen sowohl während als auch nach der Ablösung vom Zählen zentral zu sein scheinen.*

Abstract: *The individual case study focuses on the interpretations and conceptual development of a child who is counting while solving a number problem, partially drawing on her stored basic knowledge. The child's number concepts, notions on operations and strategic means were developed based on a concept designed to foster "Zahlenblick". We analyzed the child's developmental process throughout 13 learning units with an interpretative approach. We aimed understand the child's development of strategic means and her ability to recognize and use the task's characteristics, number patterns and numerical relationships. Two main characteristics seem to be central for the child's ability to use relationships when solving problems.*

1. Einleitung

Die Ablösung vom zählenden Rechnen gilt als *das* zentrale Ziel des Arithmetikunterrichts der ersten Klasse (u. a. Gaidoschik, 2014). Das zählende Lösen ist nicht nur zeitaufwendig und fehleranfällig, sondern provoziert ein einseitiges Verständnis von Zahlen als Ordinalzahlen (Gerster, 2005; Schipper, 2002). Dadurch werden operative Zusammenhänge weder gesehen noch genutzt (Gaidoschik, 2014; Häsel-Weide, 2016). Gelingt die Ablösung vom zählenden Rechnen im Laufe der ersten Klasse nicht, werden sowohl im Rahmen des regulären Unterrichts als auch ergänzend Förderangebote notwendig (Gaidoschik et al., 2021), die diagnosegeleitet am Kind ausgerichtet sind (u. a. Gerster, 2009; Lorenz, 2005). Einigkeit besteht auch darüber, dass bei Kindern mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen die gleichen Lernprozesse angeregt werden müssen wie bei allen Kindern einer Klasse (u. a. Gaidoschik et al., 2021; Lorenz, 2003; Meyerhöfer, 2011). Ungeklärter ist indes, wie genau sich die Ablösung vom zählenden Rechnen vollzieht und wie diese bei Kindern, die bereits im zählenden Rechnen verfestigt sind, systematisch angeregt werden kann.

2. Theoretische Hintergründe

2.1 Ebenen bei der Analyse von Lösungswegen

Um die Kinder bei der Entwicklung ihrer Lösungswege unterstützen zu können, sollten genutzte Denk- und Lösungswege detailliert analysiert werden. Dabei kann zwischen drei Ebenen unterschieden werden: der Ebene der Formen, des Referenzkontextes und der Lösungswerkzeuge (Rathgeb-Schnierer, 2011) (Abb. 1).

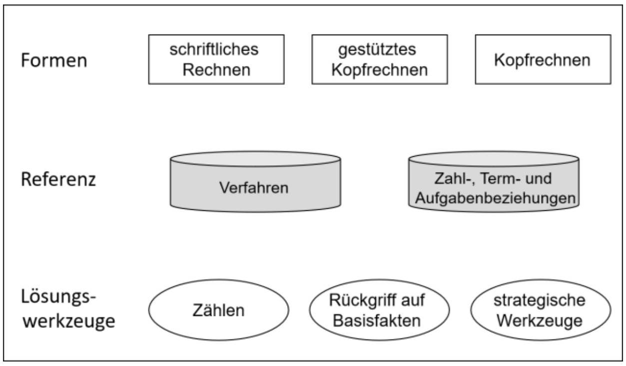

Abb. 1: Ebenen bei der Analyse des Lösungsprozesses (modifiziert nach Rathgeb-Schnierer, 2011, S. 16; Rechtsteiner & Wessolowski, 2021, S. 32)

Auf der Ebene der Formen werden die sichtbaren Lösungswege unterschieden: das schriftliche Rechnen, das gestützte Kopfrechnen und das Kopfrechnen. Die Ebene der Lösungswerkzeuge beschreibt hingegen die Werkzeuge, die auch kombiniert bei Lösen genutzt werden können: das Zählen, den Faktenabruf sowie die strategischen Werkzeuge. Die Ebene der Referenzen fokussiert, worauf sich der/die Lösende stützt – auf Zahl-, Term- und Aufgabenbeziehungen oder auf ein Verfahren. Von einem Verfahren spricht man dann, wenn der genutzte Lösungsweg unabhängig von den jeweiligen Aufgabeneigenschaften eingesetzt wird. Werden hingegen Zahl-, Term- oder Aufgabenbeziehungen (Rechtsteiner-Merz, 2013) erkannt und die damit verbundenen inhärenten Strukturen für die Entwicklung des Lösungswegs genutzt, wird von einer Orientierung an Beziehungen ausgegangen (Rathgeb-Schnierer, 2011).

Bei Kindern mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen lässt sich der Lösungsprozess in der Regel folgendermaßen beschreiben: Auf der Ebene der Lösungswerkzeuge nutzen sie überwiegend das Zählen, können aber vereinzelt auch Fakten abrufen (u. a. Gaidoschik, 2010). Strategische Werkzeuge spielen bei ihnen in der Regel keine Rolle. Im Lösungsprozess stützen sie sich folglich auf ein Verfahren und nutzen keine Zahl-, Term- oder Aufgabenbeziehungen (Rechtsteiner-Merz, 2013; vgl. Kap. 2.2).

2.2 Die Ablösung vom zählenden Rechnen

Das zählende Rechnen (zählende Lösen) wird als ein Hauptmerkmal bei Rechenschwierigkeiten angesehen (u. a. Gaidoschik, 2010; Schipper, 2002). Auf dem Weg zum Rechnen müssen sowohl inhaltliche als auch beziehungsorientierte Herausforderungen überwunden werden.

Zu den *inhaltlichen Herausforderungen* zählen die Entwicklung eines umfassenden Zahlbegriffs sowie eines grundlegenden Verständnisses für die Rechenoperationen (u. a. Gaidoschik et al., 2021; Gerster, 2009; Lorenz, 2005). Umgekehrt bedeutet dies, dass Kinder mit einseitigem Zahl- und Operationsverständnis und ohne strategische Werkzeuge Schwierigkeiten im Lernprozess zeigen und die genannten Herausforderungen für sie zu Stolpersteinen werden, weshalb sie schließlich zählende Lösungswege nutzen müssen, die sich verfestigen (Kaufmann & Wessolowski, 2015; Schipper, 2002).

Mit den *beziehungsorientierten Herausforderungen* wird die Entwicklung eines Blicks für Zahl-, Term- und Aufgabenbeziehungen verbunden (Rechtsteiner-Merz, 2013). Bereits Ellemor-Collins und Wright (2009) kommen zum Schluss, dass die Strukturierung der Zahlen (u. a. Zahleigenschaften erkennen, Zahlen in Beziehung zu anderen Zahlen setzen) eine Brücke zwischen zählenden und nicht zählenden Lösungsstrategien darstellt und damit die Ablösung vom Zählen unterstützt.

Das Zusammenspiel zwischen den inhaltlichen und beziehungsorientierten Herausforderungen lässt sich am Beispiel des Zerlegens im Rahmen der Zahlbegriffsentwicklung verdeutlichen: Zerlegungen können mit Hilfe von Schüttelkästen, Punktebildern o. ä. erzeugt werden. Dabei können Kinder verfahrensorientiert vorgehen und die handelnd generierten Zerlegungen notieren ohne sie im Kontext der zerlegten (An-)zahl oder der anderen Terme zu betrachten (Link & Kuratli Geeler, 2021). Ebenso können sie Zahlenhäuser durch ordinales Vor- oder Rückwärtszählen der Summanden erstellen (Häsel-Weide, 2016). Werden jedoch Beziehungen zwischen den Termen (z. B. durch gegensinniges Verändern) sowie zum Standardterm erkannt, wird der Inhalt Zerlegen mit den beziehungsorientierten Herausforderungen verknüpft. Ebenso lassen sich verfahrensorientierte Lösungswege beim Nutzen strategischer Werkzeuge beobachten (Rechtsteiner-Merz, 2013), wenn unabhängig von den Zahl- und Aufgabenmerkmalen bei der Addition stets der zweite Summand zerlegt wird.

In einer Studie von Rechtsteiner-Merz (2013) mit 20 Kindern, die Schwierigkeiten beim Rechnenlernen zeigten, wurden die Rechenwegsentwicklungen zwischen Mitte Klasse 1 und Anfang Klasse 2 untersucht. Dabei konnten verschiedene Rechnertypen identifiziert werden (Abb. 2). Während die grau hinterlegten Typen eher Anfangs- und Zielstadien repräsentieren, die so auch aus der Literatur bekannt sind, beschreiben die Typen in den weißen Kästchen Zwischentypen, die sich im Laufe des Lernprozesses zeigen (siehe Rechtsteiner-Merz, 2013). Es konnte herausgearbeitet werden, dass die Kinder, die sich vom zählenden Rechnen ablösen (im Schaubild zunehmend rechts), während des Lernprozesses mindestens in einer Phase teilweise (im Schaubild im Oval) oder überwiegend (im Schaubild zunehmend oben) Zahl-, Term- und Aufgabenbeziehungen wahrnehmen und (teilweise auch) nutzen. Außerdem zeigte sich, dass Kindern, die während des gesamten Lernprozesses ausschließlich über substanzielle Garanten und ohne Rückgriff auf Beziehungen argumentieren und also kaum bis keine Beziehungen wahrnehmen, die Ablösung vom zählenden Lösen nicht gelingt (ebd.). Wie bei Rathgeb-Schnierer (2006) wurde darüber hinaus auch in dieser Studie deutlich, dass das Erkennen von Zahl- und Aufgabenmerkmalen allerdings nicht unmittelbar zu deren Nutzen beim Lösen führt (Rechtsteiner-Merz, 2013). Mit anderen Worten, Kinder nehmen bspw. die Nähe zu einer Hilfsaufgabe wahr und beschreiben diese, lösen dann die Aufgabe aber dennoch zählend oder über das Ergänzen zur Zehn, sie greifen dabei also nicht auf das zuvor wahrgenommene und beschriebene Aufgabenmerkmal zurück.

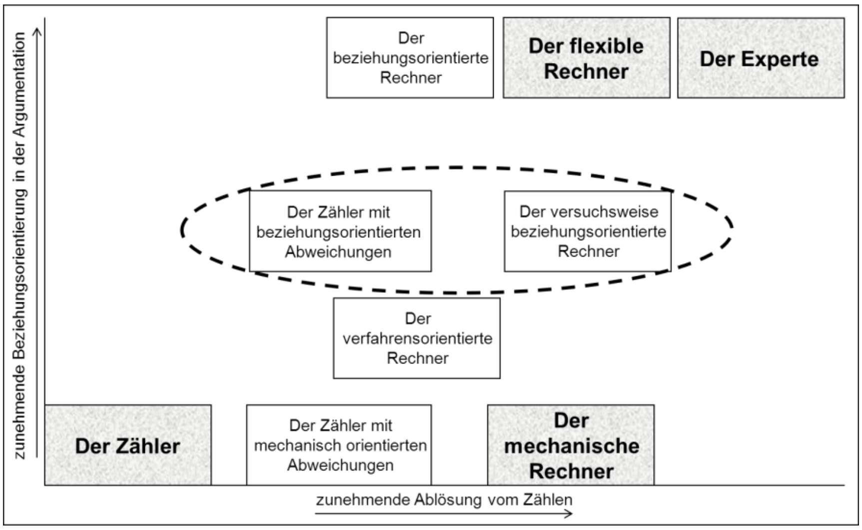

Abb. 2: Typen bei der Ablösung vom zählenden Rechnen (Rechtsteiner-Merz, 2013, S. 243)

Gray und Tall (1994) beschreiben, dass auf dem Weg zum Rechnen sogenannte „procepts“ entwickelt werden müssen. Dieses Wort setzt sich aus den Begriffen Prozess und Konzept zusammen. Mit *Prozess* fassen die Autoren den arithmetischen Blick auf Aufgaben, der zum Rechnen auffordert. Mit *Konzept* bezeichnen sie den algebraischen Blick auf Aufgaben, der numerische Beziehungen und Strukturen in den Mittelpunkt rückt. Nach Gray (2008) zeigt sich in der Verbindung der Betrachtung eines Terms als Aufforderung zum Rechnen und der Wahrnehmung der Struktur der Schritt zum Rechnenlernen. Auch Häsel-Weide (2016) betont die Wichtigkeit der Strukturorientierung beim Rechenlernen. Bei der Ablösung vom zählenden Rechnen erwies sich bei ihr als entscheidend, dass die Alternativen zum Zählen nicht mechanisch, sondern beziehungsorientiert sind (ebd.). Kinder nehmen „struktur-fokussierende Deutungen von Aufgaben“ (ebd., S. 209) vor, indem sie die Wirkung der Veränderungen der Zahlen einer Aufgabe in den Blick nehmen. Auch Purpura et al. (2016) bezeichnen die Entdeckung der mathematischen Beziehungen als einen der wichtigsten Faktoren, um unbekannte Aufgaben flexibel lösen zu können. Diese Erkenntnisse zum Rechnenlernen von Kindern im schulischen Kontext gehen mit der Forschung zum frühen mathematischen Lernen einher. Verschiedene Studien weisen Zusammenhänge zwischen der Entwicklung numerischer Fähigkeiten und dem Musterverständnis von Kindern auf (u. a. Lüken, 2012; Mulligan et al., 2006; Wijns et al., 2021). In einer Studie von Lüken (2012) wurde deutlich, dass am Ende des Kindergartens in Bezug auf Muster deutliche Unterschiede sichtbar werden. Während „schwache“ (ebd., S. 211) Kinder nur einfache Muster erkannten und sich eher an äußeren Gestaltungsmerkmalen orientierten, verknüpften „starke“ (ebd., S. 212) Kinder numerische und räumliche Strukturen. Winjs et al. (2021) untersuchten in einer Langzeitstudie über drei Jahre hinweg die numerischen und Musterfähigkeiten von Kindergartenkindern. Dabei wiesen die Entwicklung des Zahlbegriffs und der Strukturierungsfähigkeit im Alter zwischen vier und fünf Jahren eine wechselseitige Abhängigkeit auf. Zwischen fünf und sechs Jahren hingegen zeigte sich die Fähigkeit im Umgang mit Mustern als Prädiktor für die numerischen Fähigkeiten, jedoch nicht umgekehrt. Björklund et al. (2021) beobachteten über 2000 Kinder im Alter von vier bis sieben Jahren beim Lösen von Additions- und Subtraktionsaufgaben. Sie betonen, dass Kinder sowohl inhaltliche Herausforderungen (Zahlaspekte, Teil-Ganze-Zerlegungen) als auch die beziehungsorientierten Herausforderungen meistern müssen, indem sie erlernen Aufgaben in Beziehungen zu sehen, um diese lösen zu können (ebd.).

Der aktuelle Forschungsstand macht deutlich, dass für die Ablösung vom zählenden Rechnen beide Herausforderungen gefördert werden müssen: die inhaltliche (mit der Zahlbegriffsentwicklung und dem Verständnis für die Rechenoperationen,) und die beziehungsorientierte.

2.3 Zahlenblick und Zahlenblickschulung

In der Konzeption zur Schulung des Zahlenblicks werden beide Aspekte – die inhaltlichen und beziehungsorientierten Herausforderungen – integriert gefördert (Abb. 3), verbunden mit dem Ziel der Ablösung vom zählenden Rechnen und der Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen (Rechtsteiner-Merz, 2013; Schütte, 2004).

2.3.1 Konzeption der Zahlenblickschulung

Zahlenblick kann als Blick für Beziehungen und Strukturen verstanden werden, wobei Zahl- und Aufgabenmerkmale wahrgenommen und für das aufgabenadäquate Lösen genutzt werden (Rathgeb-Schnierer, 2006; Schütte, 2002, 2008). Dabei kann es sich um Zahl-, Term- oder Aufgabenbeziehungen handeln, womit auch die Deutung der inhärenten Strukturen verbunden ist (Akinwumni & Lüken, 2021). Die Notwendigkeit zur Schulung des Zahlenblicks findet sich bereits bei Menninger (1940). Mit ihr einher geht die Forderung, den Rechendrang der Kinder aufzuhalten und so den Blick auf die Zahl- und Aufgabenmerkmale zu lenken (Höhtker & Selter, 1999; Menninger, 1940). Schütte (2002, 2008) betont dabei die Wichtigkeit, die Aktivitäten von vornherein so zu gestalten, dass diese nicht primär das Lösen, sondern das Erkennen von Zahl- und Aufgabenmerkmalen sowie die damit verbundenen Beziehungen fokussieren.

Dies kann als Grundkonzeption für das arithmetische Lernen in der Grundschule (und darüber hinaus) betrachtet werden (Rechtsteiner-Merz, 2013; Schütte, 2008). Alle Aktivitäten zur Zahlbegriffsentwicklung und zum Rechnenlernen (Entwicklung von Operationsverständnis und von strategischen Werkzeugen) in den verschiedenen Operationen sind demnach so aufgebaut, dass sie den Rechendrang aufhalten und damit verbunden Zahl- (z. B. die Nähe zur Zehn), Term- (z. B. 4 + 3 = 5 + 2) und Aufgabenbeziehungen (betrifft den Vergleich der gesamten Gleichung, z. B. 3 + 3 = 6, dann ist 3 + 4 eins mehr) in den Mittelpunkt rücken.

Wie in Abbildung 3 dargestellt, wird der Rechendrang in einem Wechselspiel aus der Gestaltung der Aktivitäten und der Anregungen zur Reflexion durch andere Kinder oder durch die Lehrkraft aufgehalten.

Die Aktivitäten sind so konzipiert, dass in Verbindung mit dem jeweiligen arithmetischen Inhalt Tätigkeiten zum (strukturierenden) Sehen, Sortieren oder Strukturieren einhergehen (Rechtsteiner-Merz, 2013). Unter *(strukturierendem) Sehen* werden Tätigkeiten verstanden, die das schnelle Wahrnehmen von Anzahlen, Zahl-, Term- und Aufgabenbeziehungen fokussieren. Dabei spielt stets auch das Strukturieren eine Rolle, die Aktivitäten gehen über das reine Hinschauen hinaus. Damit regen solche Aktivitäten zum geschickten, mehrperspektivischen Sehen von Anzahlen, Zahlen, Termen und deren Beziehungen, zum Erkennen von Zusammenhängen sowie zum operativen Verändern von Aufgaben und Termen an (Rechtsteiner, 2020). Bei Aktivitäten, die das *Sortieren* anregen, werden die Kinder aufgefordert, Punktebilder oder Aufgaben nach subjektiven (z. B. „einfach“ und „schwierig“ bzw. nach Schütte (2004) „leicht“ und „schwer“) oder objektiven (z. B. mit und ohne Zehnerübergang) Kriterien zu sortieren (Rathgeb-Schnierer, 2006). Verbunden mit der Tätigkeit des Sortierens rückt das Erkennen von Aufgabenmerkmalen und Beziehungen in den Mittelpunkt. Bei Aktivitäten des *Strukturierens* werden Mengen (Anzahlen), Terme, Aufgaben oder Gleichungen entsprechend ihrer Beziehungen zueinander angeordnet. Aktivitäten des Strukturierens fokussieren damit das Erkennen, Entwickeln und Darstellen von Zahl-, Term- und Aufgabenbeziehungen (Rechtsteiner, 2020).

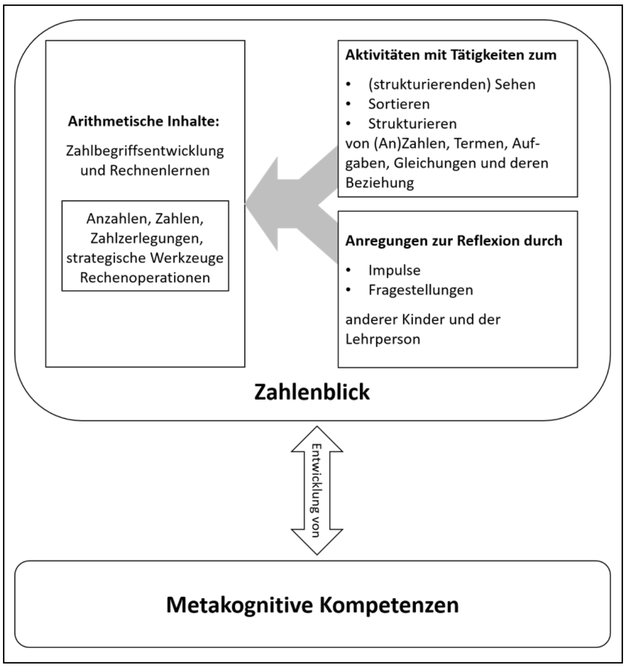

Abb. 3: Modell zur Zahlenblickschulung (modifiziert nach Rechtsteiner-Merz, 2013, S. 103)

Je nachdem, an welcher Stelle im Lernprozess welche Aktivität eingesetzt wird, spielen Anschauungsmittel eine zentrale Rolle bei der Entwicklung, beim Beschreiben und Beweisen von Vorstellungen (u. a. Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner, 2018). Während durch die Tätigkeiten zunächst der Rechendrang aufgeschoben wird, regen die Impulse und Fragestellungen durch die Lehrkraft oder die Mitschüler:innen zum weiteren Nachdenken – auch auf einer algebraischen Metaebene – an.

Neben der Gestaltung der Aktivitäten spielen die Anregungen zur Reflexion durch andere Kinder oder die Lehrkraft eine zentrale Rolle. Durch Impulse und

Fragestellungen wird der Blick auf Zahl-, Term- und Aufgabenbeziehungen und damit die inhärenten Strukturen gelenkt. Während mit Impulsen Aufforderungen, Aussagen, Irritationen etc. verbunden sind, werden unter Fragestellungen konkrete Nachfragen oder Aufforderung zur Begründung verstanden. Die Schulung des Zahlenblicks ist also so konzipiert, dass der Zähl- und Rechendrang durch die Kombination aus der Gestaltung der Aktivitäten und der gezielten Anregung zur Reflexion aufgehalten wird und die Beziehungen in den Blick rücken.

Bezogen auf die Ablösung vom zählenden Rechnen bedeutet dies, dass die Aktivitäten zur Schulung des Zahlenblicks die inhaltlichen Herausforderungen („Arithmetische Inhalte“, Abb. 3) aufgreifen und durch ihre Gestaltung (Tätigkeiten und Anregungen zur Reflexion) gleichzeitig die beziehungsorientierten Herausforderungen adressieren.

2.3.2 Zahlenblick und (flexibles) Rechnen lernen

In verschiedenen Studien zeigte sich, dass die Schulung des Zahlenblicks die Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen bei allen Kindern unterstützt (Heinze et al., 2015; Rathgeb-Schnierer, 2006). In einer Untersuchung zur Rechenwegsentwicklung von Erstklässler:innen mit Schwierigkeiten beim Rechnenlernen (Rechtsteiner-Merz, 2013) erwies sich die Zahlenblickschulung als zentrales Element auf dem Weg zum (flexiblen) Rechnen. Zum einen wurde deutlich, dass dadurch die Ablösung vom zählenden Rechnen unterstützt wird (ebd.), und zum anderen konnten die Kinder, die sich auf Beziehungen stützten, überwiegend flexible Rechenkompetenzen entwickeln (ebd.). In einer Studie von Häsel-Weide (2016) hingegen deuten die Analysen darauf hin, dass Kinder, die zählend lösen, z. B. bei Zahlzerlegungen in Zahlenhäusern zwar eine „struktur-fokussierende Sicht auf Zahlen einnehmen“ (ebd., S. 209), jedoch nicht auf Aufgabenbeziehungen. Die Kinder nahmen zwar das Muster der Veränderung einzelner Zahlen wahr (z. B. Veränderung eines Summanden) und konnten dieses auch folgerichtig fortsetzen, erkannten jedoch nicht die Auswirkung dieser Veränderung, bspw. auf die Summe. Dieses Phänomen zeigte sich auch bei nicht zählend rechnenden Kindern, weshalb Häsel-Weide die Frage stellt, ob zu Beginn der zweiten Klasse eine operative Sicht auf Zusammenhänge noch nicht zu erwarten sei und eher von einer „‘proto-struktur-fokussierenden Deutung‘“ (ebd., S. 210) gesprochen werden müsse. Korten (2020) bezeichnet Strukturorientierung auf zwei Ebenen als zielführendes Gestaltungsmerkmal lernförderlicher Situationen: im Lernprozess in Form von „strukturfokussierenden adressatengerechten Impulsen“ (S. 349) sowie bei der inhaltlichen Fokussierung übergreifender mathematischer Strukturen.

2.4 Gestaltungsmerkmale für die Förderung

Gelingt im Laufe der ersten Klasse die Ablösung vom zählenden Rechnen nicht, wird eine diagnosegeleitete Förderung notwendig (Gaidoschik, 2010; Gaidoschik et al., 2021; Häsel-Weide & Prediger, 2017). Hierfür lassen sich verschiedene Gestaltungsmerkmale herausarbeiten.

Wie in Kapitel 2.2 beschrieben, sind beim Rechnenlernen sowohl arithmetische Inhalte, als auch Zahl-, Term- und Aufgabenbeziehungen (u. a. Häsel-Weide, 2016; Rechtsteiner-Merz, 2013) zu adressieren.

Durch Anschauungsmittel wird dabei zunächst die enaktive Auseinandersetzung als Grundlage für die anschließende Entwicklung mentaler Vorstellungen, deren Beschreibungen und Reflexion angeregt, wodurch Strukturen verinnerlicht werden können (u. a. Lorenz, 2011). Dafür sind Lehr- und Lernsituationen notwendig, in denen Deutungen und Ideen von entdeckten Zusammenhängen argumentativ entwickelt werden können (Häsel-Weide, 2016; Korten, 2020). Die Aktivitäten sind so zu gestalten, dass sie zum aktiv-entdeckenden Lernen sowie zur Entwicklung eigener Lösungswege anregen (u. a. Lorenz, 2003; Scherer, 1999).

Wie oben beschrieben erweisen sich neben der Aktivität auch „‘strukturfokussierende adressatengerechte Impulse‘“ (Korten, 2020, S. 351) als zentrales Gestaltungsmerkmal für lernförderliche Situationen, was das Zusammenspiel der beiden Aspekte – Aktivität und Impulse – hervorhebt. In der Studie von Purpura et al. (2016) wird auch die Bedeutung von Impulsen für das flexible Rechnen hervorgehoben. Nur die Gruppe der Kinder in der ersten Klasse, bei denen beim Rechnenlernen der Blick durch explizite Fragen und Hinweise gezielt auf Regelmäßigkeiten gelenkt wurde, konnte ihr Wissen auf neue, noch unbekannte Aufgaben mit dem gleichen Aufgabenmerkmal übertragen. Dieses Ergebnis wird bestätigt durch Studien zur Zahlenblickschulung (u. a. Rechtsteiner-Merz, 2013).

Wie verschiedene Untersuchungen zeigen, kann Förderung auf der Grundlage der o. g. Gestaltungsmerkmale sowohl im Rahmen des Regelunterrichts als auch ergänzend dazu erfolgen. Häsel-Weide (2016) beobachtete die Rechenentwicklung bei kooperierenden heterogenen Tandems von jeweils einem Kind, das zählend löste und einem mit deutlich besseren Leistungen in Mathematik innerhalb des regulären Unterrichts. Dabei zeigte sich, dass in diesem Setting mit Hilfe gezielt struktur-fokussierender Lernangebote das Erkennen und Nutzen von Strukturen angebahnt werden kann. Auch Götze (2019) untersuchte in einer Fallstudie zwei heterogene Tandems (bestehend aus jeweils einem Kind mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen und einem mit durchschnittlichen mathematischen Kompetenzen) bzgl. der Entwicklung multiplikativer Vorstellungen. Sie kam zu dem Ergebnis, dass auch Kinder mit Schwierigkeiten beim Mathematiklernen in interaktiven Settings grundlegende Vorstellungen entwickeln können. Auch in der Untersuchung von Korten (2020) konnten im Kontext beziehungsorientierter Aktivitäten lernförderliche kooperative Momente beschrieben werden, in denen sowohl Kinder mit als auch ohne sonderpädagogischem Unterstützungsbedarf in der gemeinsamen Auseinandersetzung beim Mathematiklernen ihrem Niveau entsprechend voranschreiten konnten. Stöckli (2019) untersuchte die Wirksamkeit einer verstehensorientierten unterrichtsintegrierten Mathematikförderung in der dritten Klasse mit dem Schwerpunkt auf zentralen arithmetischen Inhalten. Dabei konnten für Kinder mit unterdurchschnittlichen Mathematikleistungen keine signifikanten Vorteile festgestellt werden. Dies führte sie zu der Annahme, dass Kinder mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen eine stärkere Differenzierung und Passung zwischen dem Lernangebot und den individuellen Voraussetzungen benötigen als dies in der beschriebenen Studie gegeben war, sowie eventuell eine zusätzliche Förderung in Kleingruppen (ebd.). Parallelen zu diesen Vermutungen zeigen sich auch in der Studie von Moser Opitz et al. (2018), in der ersichtlich wurde, dass Kinder, bei denen das Zählen verfestigt ist, in der zweiten Klasse weniger von einer unterrichtsintegrierten Förderung profitieren, als leistungsstärkere Mitschüler:innen. Einerseits lässt sich also ableiten, dass eine kooperative Förderung innerhalb des regulären Unterrichts Potenzial für die Entwicklung von Beziehungsorientierung und zentralen arithmetischen Inhalten bietet. Gleichzeitig deuten Studien auch darauf hin, dass für Kinder, die verfestigt zählend lösen, auch zusätzliche Angebote förderlich sein können (Gaidoschik et al., 2021).

2.5 Forschungsinteresse

Die aktuelle Forschung verdeutlicht, dass beim Rechnenlernen sowohl inhaltliche als auch beziehungsorientierte Herausforderungen eine zentrale Rolle spielen. Konsens besteht auch darüber, dass Impulse, die den Blick auf Beziehungen lenken, als lernförderlich angesehen werden. Die Schulung des Zahlenblicks stellt eine Konzeption für die Ablösung vom zählenden Rechnen und für die Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen dar. Die Merkmale „guter" Förderung entsprechen jenen eines guten Mathematikunterrichts. Wie im Rahmen einer ergänzenden Förderung die Ablösung vom Zählen (vor dem Hintergrund der oben genannten Grundsätze) und damit verbunden die Entwicklung der Lösungswerkzeuge verläuft, welche Rolle das Erkennen und Nutzen von Zahl- und Aufgabenmerkmalen und -beziehungen dabei spielt und welche Gestaltungsmerkmale sich daraus ableiten lassen, soll in dieser Studie betrachtet und weiter ausdifferenziert werden. Daraus ergeben sich folgende Forschungsfragen:

Welches situative Potenzial zeigen Anregungen zum Erkennen und Nutzen von Zahl- und Aufgabenmerkmalen und -beziehungen (Referenzebene – strukturorientierte Herausforderungen) und zum Lösen von Aufgaben mit strategischen Werkzeugen (Ebene der Lösungswerkzeuge – inhaltliche Herausforderungen) bei einem Kind mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen während einer kontinuierlichen diagnosegeleiteten Förderung mit Hilfe der Zahlenblickschulung? Welche Hürden lassen sich rekonstruieren?

Lassen sich Gestaltungsmerkmale für die Förderung ableiten, wenn ja, welche?

3. Methodisches Vorgehen

3.1. Datenerhebung

Im Verlauf von fünf Monaten wurden 13 Fördereinheiten durchgeführt. Davon wurden zehn videographiert (inklusive Diagnostik) und analysiert.

3.1.1 Vorstellung Emi

Emi war Drittklässlerin und zeigte zu Beginn der Förderung massive Probleme im Mathematikunterricht, weshalb sie zunehmend unter Angst sowie an psychosomatischen Symptomen litt. Die Situation war für die Familie sehr belastend. In der Fördereinheit 1 (FÖ 1) wurde eine prozessbezogene Diagnostik im Zahlenraum 100 (ZR 100) in Anlehnung an Kaufmann & Wessolowski (2015) durchgeführt. Dabei zeigte Emi ein einseitiges Zahl- und Operationsverständnis, löste Aufgaben in der Regel zählend, im ZR 10 teilweise auch durch Basisfaktenabruf.

3.1.2 Aktivitäten zur Zahlenblickschulung im Rahmen der Förderung

Die durch eine der Autorinnen durchgeführte Förderung orientierte sich an den inhaltlichen und strukturorientierten Herausforderungen (vgl. Kap. 2.2) und wurde mit Hilfe von Aktivitäten zur Zahlenblickschulung durchgeführt. Zunächst wurde an der Zahlbegriffsentwicklung und anschließend am Verständnis für die Rechenoperationen gearbeitet, jeweils mit dem Fokus auf Beziehungen. In dem hier vorgestellten Teil ging es um die Entwicklung strategischer Werkzeuge in Verbindung mit dem Erkennen und Nutzen der Merkmale und Beziehungen (vgl. Kap. 2). Im Rahmen der rekonstruierten Fördereinheiten fokussieren wir im Zuge der besseren Vergleichbarkeit auf Aktivitäten zum Sortieren von Additions- oder Subtraktionstermen, die im Folgenden in die Theorie zur Zahlenblickschulung eingeordnet (vgl. Kap. 2.3.1) und in Kapitel 4 detailliert analysiert.

Aufgaben sortieren: Aktivitäten zum Sortieren lassen sich in vier Phasen gliedern (Rechtsteiner & Rathgeb-Schnierer, 2020): (1) Sortierung begründen, (2) Lösungsweg entwickeln, (3) Finden weiterer Aufgaben sowie Entwickeln einer allgemeinen Beschreibung und Begründung, (4) weitere Aufgaben erfinden.

(1) Sortierung begründen: In der ersten Phase werden die Kinder angeregt, die Aufgabenkarten – ohne sie zu lösen – bspw. den Kategorien „zähle ich“, „habe ich einen Trick“, „weiß ich auswendig“ zuzuordnen. Daran schließt sich ein Gespräch zur Begründung der Sortierung an. Das Kind wird gefragt, warum die jeweiligen Aufgaben auswendig gekonnt, mit Hilfe eines „Tricks“ (strategischen Werkzeugs) gerechnet werden können oder noch gezählt werden müssen. Dabei lassen sich innerhalb der Spalten in der Regel weitere Gruppierungen vornehmen. Ziel dieser Phase ist es, den Blick auf die Zahl- und Aufgabenmerkmale zu lenken und dabei auch Aufgabenschwierigkeiten zu diskutieren.

(2) Lösungsweg entwickeln: Zunächst werden zu den bereits auswendig gekonnten Aufgaben die Lösungen genannt und ggf. bereits gekonnte „Tricks“ diskutiert. Ausgehend davon wird nun ein neuer Lösungsweg entwickelt und untersucht, ob eine bereits auswendig gewusste Aufgabe beim Lösen einer noch zu zählenden helfen kann.

(3) Finden weiterer Aufgaben: Nachdem auf diesem Weg ein neues strategisches Werkzeug entwickelt werden konnte, wird geprüft, ob sich weitere Aufgaben mit dem gleichen Aufgabenmerkmal in der Kategorie „zähle ich“ befinden, die mit Hilfe des gleichen strategischen Werkzeugs gelöst werden können. Ziel dieser Phase ist es, ausgehend von einzelnen Aufgabenbeziehungen allgemeine Merkmale herauszuarbeiten und die Aufgaben entsprechend auf algebraischer Ebene zu gruppieren.

(4) Aufgaben erfinden: Die Kinder werden angeregt, Aufgaben mit dem gleichen Merkmal zu erfinden und zu notieren. Damit wird von der eher rezeptiven Gruppierungsphase in die aktive Findungsphase übergegangen.

Diese Aktivität mit ihren vier Phasen ist dem Sortieren zuzuordnen. Durch die Gruppierungsprozesse innerhalb einer Spalte bzw. zwischen den Spalten werden ebenso wie beim Erfinden von weiteren Aufgaben auch strukturierende Tätigkeiten vorgenommen. Diagnostisch kann im Rahmen dieser Aktivität festgestellt werden, über welches Zahlverständnis das Kind verfügt, welche strategischen Werkzeuge es kennt und welches Operationsverständnis es hat. Ebenso werden Begründungen zu Zahl- und Aufgabenmerkmalen und den Beziehungen sichtbar (Termbeziehungen spielen beim Sortieren von Aufgaben keine Rolle). Dabei lässt sich erkennen, ob ein Transfer bereits bekannter strategischer Werkzeuge auf weitere Aufgaben oder einen erweiterten Zahlenraum möglich ist. Ausgehend davon werden die weiteren Förderschritte angebahnt. In allen Phasen kann das Anschauungsmittel (z. B. der Abaco) zur Klärung und zum Beweisen der angesprochenen Beziehungen eingesetzt werden. Vernetzungen zwischen den Repräsentationsebenen werden so ermöglicht und sichtbar.

In den analysierten Fördereinheiten wurde nach der Zahlbegriffsentwicklung im ZR 20 zunächst das Sortieren in „zähle ich“, „hab‘ ich einen Trick“, „weiß ich auswendig“ (Kap. 4) angeregt; im höheren ZR 100 nach objektiven („bleibt im Zehner“, „trifft den Zehner“ und „geht über den Zehner“) und subjektiven (nach Schütte (2004) in „leicht“ und „schwer“) Kriterien.

3.2 Methodologie

Um Deutungen von Kindern rekonstruieren zu können, eignen sich die Methoden der interpretativen Forschung (Jungwirth, 2014). Im Mathematikunterricht handelt es sich dabei um eine „forschungsmethodisch kontrollierte und theoretisch ausgewiesene Rekonstruktion eines sich entwickelnden

Unterrichtsprozesses“ (Krummheuer, 2004). Laut Jungwirth (2003) befasst sich die interpretative Mathematik „etwa mit Vorstellungen von mathematischen Begriffen oder Aufgabenlösungen, [...] sowie insbesondere mit den Lehr- und Lernprozessen selbst, also mit fachbezogenen unterrichtlichen Interaktionen [...]“ (ebd., S 190).

3.2.1 Interaktionistische Perspektive

Die Interaktionstheorie sieht in der Interaktion mit anderen die Grundlage für das Lernen (Schütte, Jung & Krummheuer, 2021). Mathematiklernen wird verstanden als „ein wechselseitig bezugnehmender Prozess von *Außen* […] und *Innen*.“ (ebd., S. 527). Durch mathematische Interaktionsprozesse ergibt sich die Möglichkeit, an der Aushandlung und Bedeutungskonstruktion teilzunehmen und dabei durch einen gemeinsamen Entwicklungsprozess über die eigenen Fähigkeiten hinauszugehen. Die Auswertung der Daten unter interaktionistischer Perspektive erfolgt mithilfe der Interaktionsanalyse (u. a. Brandt & Krummheuer, 2000; Krummheuer & Naujok, 1999).

3.2.2 Epistemologische Perspektive

Wie Steinbring (u. a. 2000) betont, benötigt mathematisches Wissen Zeichen- oder Symbolsysteme, mit denen das Wissen erfasst und kodiert werden kann. Die Bedeutungen von solchen Zeichen oder Symbolen müssen von den Kindern in passenden Referenzkontexten hergestellt werden. Indem Wissen weiterentwickelt wird, werden auch die Interpretationen der Zeichensysteme und dazugehörenden Referenzkontexten angepasst und verallgemeinert, was die Konstruktion neuer Bedeutungen ermöglicht. Den Zusammenhang zwischen den Zeichen, dem Referenzkontext und dem Begriff und den wechselseitigen Beziehungen zwischen den Bereichen lässt sich im epistemologischen Dreieck festhalten (ebd.).

3.3. Datenaufbereitung und -auswahl

Die zehn videographierten Fördereinheiten wurden transkribiert und sequenziert.

Im ersten Lesedurchgang wurden die Transkripte in Sequenzen eingeteilt (Jungwirth, 2003). In diesem Schritt sind die „Sinnabschnitte“ (ebd., S. 193) noch grob und orientieren sich an der Abgeschlossenheit der jeweiligen Aktivität mit den begleitenden Impulsen. In der Regel entsprechen die Sequenzen einer Aktivität. Falls es innerhalb einer Aktivität zu einer mathematikdidaktisch relevanten Veränderung kommt, wird eine neue Sequenz eröffnet. Jede Sequenz wird allgemein (bzgl. Aktivität, Phase etc.) und konkret (bzgl. Aufgaben, Rollen etc.) beschrieben.

3.4 Datenauswertung

Im Sinne der interpretativen Unterrichtsforschung wird eine zweischrittige Analyse als Kombination eines interaktionistischen und epistemologischen Zugangs (Häsel-Weide, 2016; Korten, 2020) durchgeführt. In der Datenanalyse ergänzen sich die beiden Perspektiven, wodurch Schlüsse und Zusammenhänge möglich werden (Korten, 2020).

3.4.1 Datenauswertung aus interaktionistischer Perspektive

Die ersten zwei Schritte der Interaktionsanalyse *Gliederung* und *allgemeine Beschreibung* sind in Kapitel 3.3 beschrieben. Die anschließende *Erzeugung alternativer Interpretationen zu den einzelnen Äußerungen* und die *Turn-by-Turn Analyse* wurden in einem interpretativen Tandem mit weiteren externen Gesprächen zur Rückversicherung durchgeführt. Dabei wurden die sich daraus abgeleiteten Annahmen festgehalten. Diese beiden Analyseschritte wurden analog zu Korten (2020) mit der epistemologischen Analyse kombiniert (vgl. Kap. 3.4.2). Die sich anschließende zusammenfassende Interpretation erfolgte mit Fokus auf die Forschungsfragen. Diese Analyse wurde um komparative Elemente ergänzt, wobei Interpretationen aus verschiedenen Fördereinheiten verglichen wurden, um eine theoretische Sättigung zu erreichen (Kap. 4.5) (Brandt & Krummheuer, 2000).

3.4.2 Datenauswertung aus epistemologischer Perspektive

Die Analyse in Anlehnung an das epistemologische Dreieck ermöglicht es im Hinblick auf die Forschungsfragen, die Deutungsentwicklung und Begriffsbildung auf beiden Ebenen – der Referenzen (strukturorientierte Herausforderungen) und der Lösungswerkzeuge (inhaltliche Herausforderungen) – zu rekonstruieren. Die Ebene des Zeichens wird zusätzlich zu visualisierten und/oder artikulierten Symbolen in Aufgabenstellungen ähnlich wie bei Korten (2020) um Impulse erweitert, die die Fokussierung eines Zeichens auslösen. Der Referenzkontext wird analog zu Häsel-Weide (2016) interpretiert, die auf der Lösungsebene zwischen ordinaler und kardinaler Sichtweise und dadurch zwischen einem eher zählenden und einem eher struktur-fokussierenden Kontext unterscheidet.

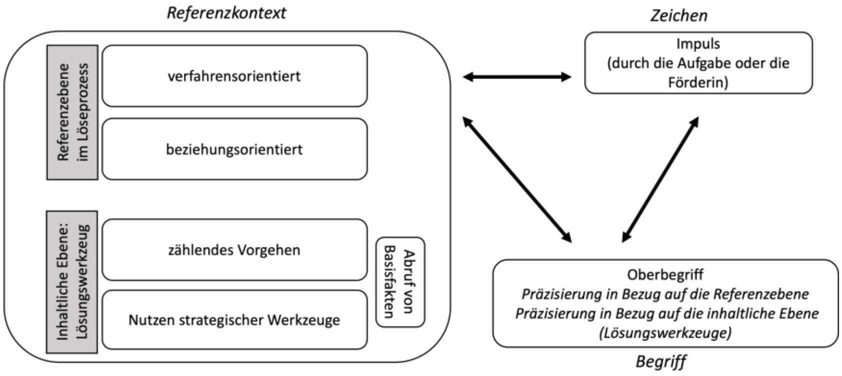

Abb. 4: Adaptiertes epistemologisches Dreieck für Aktivitäten zum „Sortieren“

Diese Gliederung des Referenzkontextes wird in vorliegender Studie aufgegriffen und vor dem Hintergrund der Theorie zur Beschreibung der Ebenen im Lösungsprozess (vgl. Kap. 2.1) weiter ausdifferenziert (s. u.). Die Konstruktionen neuer Bedeutungen werden durch Aussagen von Emi gestützt und die Interpretationen von diesen aus mathematikdidaktischer Perspektive im Dreieck benannt. Dabei geht es im Wesentlichen um die „*Konkretisierung* und *Präzisierung* der begrifflichen Beziehung [...] als Regulativ der Beziehung zwischen Referenzkontext und Zeichen“ (Schülke, 2013, S. 107, Hervorhebung im Original), wodurch Um-, Neudeutungen und das Einnehmen von neuen Sichtweisen erkennbar werden. Von besonderem Interesse sind dabei u. a. Momente, die auf Veränderungen des Referenzkontextes hindeuten, sowie Momente, in denen der Referenzkontext von Emi zum Zeichen wird, was auf eine vertiefende Auseinandersetzung mit dem mathematischen Inhalt, dessen Durchdringung sowie auf einen Wechsel von der Verfahrens- zur Beziehungsorientierung hinweist (Korten, 2020). Laut Korten (ebd.) ist auch dann von einer Weiterentwicklung individueller Zugänge und Lösungsprozesse auszugehen, wenn das Zeichen konstant bleibt, sich aber der Referenzkontext und der Begriff ändern.

Konkret ist diese Vorgehensweise und die damit einhergehende Darstellung exemplarisch in Abbildung 4 am Beispiel der Aktivität „Sortieren“ (vgl. Kap. 3.1.2), veranschaulicht: Als *Zeichen* werden hier mathematische Symbole verstanden oder Impulse und Fragestellungen, die Hinweise auf mathematische Symbole beinhalten. Der *Referenzkontext* gliedert sich analog zum Analysemodell der Lösungsprozesse (Kap. 2.1) und der Theorie zum Rechnenlernen (Kap. 2.2) in zwei Teile: die inhaltliche Ebene und die Referenzebene, was auch den inhaltlichen und beziehungsorientierten Herausforderungen entspricht. Während auf der inhaltlichen Ebene bei dieser Aktivität die Lösungswerkzeuge (Zählstrategien, Abruf von Basisfakten und/ oder strategische Werkzeuge) im Mittelpunkt stehen, greift die Referenzebene analog zu Abb. 1 die Frage nach der Verfahrens- bzw. Beziehungsorientierung auf (Abb. 4). Während das Zählen stets als verfahrensorientiert angesehen wird, kann das Nutzen eines strategischen Werkzeugs auf der Referenzebene sowohl dem verfahrens- als auch beziehungsorientierten Vorgehen zugeordnet werden, je nachdem ob sich die/der Lösende auf Zahl-, Aufgabenmerkmale und -beziehungen stützt, oder verfahrensorientiert und unabhängig von ggf. erkannten Merkmalen vorgeht. Da das Abrufen von Basisfakten isoliert, in Kombination mit zählendem Vorgehen oder mit dem Nutzen strategischer Werkzeuge vorkommen kann, ist dieser Begriff seitlich mittig positioniert und wird je nach Auftauchen allein betrachtet oder in Kombination mit dem jeweilig anderen Lösungswerkzeug gruppiert. Ist in der Auswertung eine eindeutige Zuordnung möglich, wird diese mit Emis Aussage begründet (kursive Darstellung) und der entsprechende Rahmen fett markiert. Die *Begriffsentwicklung* leitet sich aus dem Zusammenspiel des Zeichens und des Referenzkontextes ab. Der Oberbegriff wird im entsprechenden Feld festgehalten. Die Konkretisierung und Präzisierung der begrifflichen Beziehung in Bezug auf die Referenzebene und die inhaltliche Ebene wird unterhalb des Oberbegriffs kursiv dargestellt und im Text detaillierter ausgeführt. Die *wechselseitigen Beziehungen* zwischen dem Zeichen, dem Referenzkontext und dem Begriff sind durch Doppelpfeile verdeutlicht.

4. Rekonstruktion und Interpretation

In Kapitel 4 wird die Datenauswertung exemplarisch an einer Sequenz dargestellt. Eine erste Orientierung bietet die Einbettung dieser sowohl in den Förderverlauf als auch in die konkrete Fördereinheit. Die interpretative Rekonstruktion der Sequenz ermöglicht detaillierte Einblicke in die Beziehungsorientierung von Emi sowie in die von ihr eingesetzten Lösungswerkzeuge und lässt sich mit weiteren Sequenzen vergleichen und kontrastieren.

4.1 Einordnung der ausgewerteten Sequenz in den Förderverlauf

Über den gesamten Förderzeitraum hinweg wurden die in Kapitel 2.2 aufgeführten inhaltlichen Herausforderungen mit Hilfe unterschiedlicher reichhaltiger Aktivitäten thematisiert und in der Analyse rekonstruiert. Vor dem Hintergrund der Diagnostik wurde zunächst eine umfassende Zahlbegriffsentwicklung angeregt. Dabei spielte die Entwicklung kardinaler Vorstellungen mithilfe zahlreicher materialgestützter Aktivitäten eine zentrale Rolle zum Aufbau mentaler Vorstellungen von (An-)Zahlen durch Erfassen, Darstellen, Strukturieren und Zerlegen. Ausgehend von Würfel- und Fingerbildern wurden strukturierte Punktebilder in Block- und Reihendarstellung im Zehner- und Zwanzigerfeld eingesetzt und genutzt.

In allen für diesen Artikel analysierten Sequenzen steht die Aktivität „Sortieren“ (Phasen (1) bis (4)) im Mittelpunkt. Die Aktivität Sortieren in „zähle ich“, „habe ich einen Trick“ und „weiß ich auswendig“ wurde in der FÖ 5 eingeführt, in der Aufgaben im ZR 10 sortiert und teilweise gruppiert wurden. Es zeigte sich, dass Emi die meisten Aufgaben bis Zehn automatisiert hatte. In der im Folgenden beschriebenen Sequenz aus FÖ 6 werden zum ersten Mal Aufgaben im ZR 20 sortiert (Anhang II). Da sich die Aktivität „Sortieren“ (nach unterschiedlichen Kriterien) wie ein roter Faden durch alle folgenden Förderbausteine zieht (auch im erweiterten ZR 100 gegen Ende des Erhebungszeitraums), lässt sich entlang dieser eine systematische Analyse der Rechenentwicklung vornehmen .

4.2 Sequenzierung und Einordnung der Sequenz in die Fördereinheit

Die Sequenzierung der FÖ 6 erfolgt unter den in Kapitel 3.3 aufgeführten Kriterien und mündet in die im Anhang I dargestellte Aufteilung in die Sequenzen 1 bis 7. Ersichtlich ist, dass es sich um eine Schnittstelle von der Entwicklung des Zahlbegriffs zur Entwicklung der Rechenoperationen in Bezug auf strategische Werkzeuge handelt, auf die sich der Schwerpunkt ab Sequenz 4 verlagert. In Sequenz 6 steht nun also die Aktivität zum Sortieren im Mittelpunkt. Sie beginnt mit dem Wechsel von Phase (2) *Lösungsweg entwickeln,* mündet in Phase (3) *Finden weiterer Aufgaben* (Anhang II) und endet mit dem Abschließen von Phase (4) *Aufgaben erfinden* (vgl. Kap. 3.1.2).

Einordnung der Sequenz in die Förderung: In der hier beschriebenen Sequenz aus FÖ 6 werden zum ersten Mal Aufgaben im ZR 20 sortiert.

Einordnung der Sequenz in die Fördereinheit: In der FÖ 6 werden zunächst zwei Aktivitäten zur Zahlbegriffsentwicklung mit Würfelbildern und zur mentalen Vorstellung von Punktebildern in der Blockdarstellung durchgeführt. Daran schließt sich die Aktivität zum Sortieren an. Die Sequenz 6 beginnt nach dem Sortieren der Kärtchen in die Kategorien „weiß ich auswendig“ „muss ich zählen“, „kenne ich einen Trick“ und dem Gruppieren innerhalb der Kategorie „weiß ich auswendig“ nach den von Emi benannten Aufgabenmerkmalen „Verdopplungsaufgaben“ und „Verliebte Zahlen“ (Zerlegungen der Zehn) (Phase (1)). Zu Beginn der Sequenz 6 liegen die von Emi sortierten Termkärtchen auf dem Tisch (Anhang II, links). Alle Kärtchen wurden in Sequenz 4 von Emi ursprünglich den Kategorien „weiß ich auswendig“ oder „muss ich zählen“ zugeordnet. Beim schnellen Nennen der Ergebnisse ihrer automatisierten Aufgaben fiel ihr auf, dass sie die Aufgaben 12 + 6 und 13 + 3 nicht abrief, sondern mit Hilfe einer Analogie löste. Daher wurden diese in Sequenz 5 der Kategorie „kenne ich einen Trick“ zugeordnet.

Allgemeine Beschreibung der Sequenz: Die Sequenz 6 fokussiert die Aktivität zum Sortieren (ZR 20), mit den Phasen (3) *Finden weiterer Aufgaben* und (4) *Aufgaben erfinden*. Ziel dieser Sequenz ist es, auf der Basis der individuellen Lernvoraussetzungen strategische Werkzeuge zu entwickeln. Konkret wird Emi aufgefordert in der Kategorie „muss ich zählen“ nach Termen zu schauen, die sich von den bereits automatisierten Aufgaben ableiten lassen.

Konkrete Beschreibung der Sequenz: Nach dem Sortieren der Termkarten und der vorgenommenen Gruppierung in die Kategorie „weiß ich auswendig“ (Sequenz 5) werden in Sequenz 6 nun die Aufgaben der Kategorie „muss ich zählen“ in den Blick genommen. Die Positionen der Kärtchen am Beginn der Sequenz illustriert die linke Abbildung in Anhang II. Emi stellt fest, dass sie die hier zugeordnete Aufgabe 3 + 2 „eigentlich wusste". Die Förderin schlägt vor, nach einer Aufgabe zu suchen, die sie auswendig weiß und die ihr bei 3 + 2 helfen kann. Emi nennt die Aufgabe 3 + 3. Nach weiterem Nachfragen der Förderin, wie ihr diese helfen könne, beschreibt Emi die Beziehung zwischen den Aufgaben 3 + 2 und 3 + 3 und nutzt diese nach weiteren Impulsen als (3 + 3) – 1 beim Lösen. Das Kärtchen mit der Aufgabe 3 + 2 wird zur Kategorie „kenne ich einen Trick" verschoben, sodass es sich auf der gleichen Höhe befindet, wie das Kärtchen 3 + 3 in der Kategorie „weiß ich auswendig". Der von Emi entwickelte Lösungsweg wird von der Förderin aufgegriffen und weiterverfolgt. Nach verschiedenen Impulsen identifiziert Emi die Aufgaben 7 + 8 und 9 + 8 als mögliche Nachbarn einer Verdopplungsaufgabe und leitet die Ergebnisse von diesen ab. Anschließend wird Emi aufgefordert, nach den gemeinsamen Eigenschaften der Aufgaben zu suchen, die mithilfe der Verdopplungen gelöst werden können.

4.3 Interpretative Rekonstruktion

Im Folgenden werden die einzelnen Szenen (Sz.) der Sequenz 6 aus interaktionistischer und epistemologischer Perspektive rekonstruiert und interpretiert. Die Transkripte zu den Sz. I-VI und die entsprechenden epistemologische Dreiecke befinden sich in Anhang III.

Szene I: Der Ausschnitt beginnt damit, dass Emi nach dem Impuls der Förderin die Aufgabe 3 + 3 als eine Aufgabe identifiziert, die ihr bei der Aufgabe 3 + 2 helfen kann (Turn 2). Nach der Warum-Frage der Förderin begründet Emi, indem sie die Differenz zwischen den zweiten Summanden bei den Aufgaben 3 + 2 und 3 + 3 mit ihrer Auswirkung auf die Summe beschreibt (Turn 6). Es könnte sein, dass Emi probiert, mit der Äußerung „deswegen muss das Ergebnis auch eins mehr ähm sein oder eins weniger" (Turn 6), das strategische Werkzeug der Nachbaraufgabe bereits allgemein zu beschreiben. Nach weiteren Impulsen der Förderin (Turn 7, 9) wird deutlich, dass Emi die Beziehung jedoch aufgabenspezifisch betrachtet (Turn 10).

In der epistemologischen Analyse des Ausschnitts (Anhang III, Sz. I, Dreieck links) wird zuerst der Impuls der Förderin in Turn 5 fokussiert, der Emis Blick auf die Beziehungen lenkt. Sie stützt sich daraufhin auf die Beziehung zwischen den zweiten Summanden der Aufgaben 3 + 2 und 3 + 3 und nutzt diese für die Auswirkung dieser Veränderung auf die Summe (Turn 6). Emi erkennt die Aufgabenbeziehung und nutzt diese. Mit dem nächsten Impuls in Turn 7 macht die Förderin den Referenzkontext von Emi zum Zeichen, indem sie eine Präzisierung der möglicherweise allgemeinen Beschreibung von Aufgabenbeziehungen aus Turn 6 gezielt auf die Aufgabe 3 + 2 bezieht (Anhang IV, Szene I, Dreieck rechts). Emi stützt sich wiederum auf die Struktur, und nennt nicht das Ergebnis, sondern thematisiert die Beziehung der Ergebnisse der Aufgaben 3 + 3 und 3 + 2 (Turn 8). Auf der inhaltlichen Ebene kann ihr Vorgehen als Beschreibung eines strategischen Werkzeugs angesehen werden, da sie die Aufgaben 3 + 3 und 3 + 2 als „gleich, nur eins weniger" bezeichnet (Turn 10), wodurch sie die Nachbarschaftsbeziehung dieser Aufgaben beschreibt.

Szene II: In Turn 11 wird Emi nach dem Ergebnis der Aufgabe 3 + 2 gefragt, was ein neues Zeichen darstellt (Anhang IV, Szene II, Dreieck links). Daraufhin wendet sich ihr Blick ab, fixiert einen Punkt und zögert, was den Eindruck vermittelt, dass sie verbunden mit dieser Frage die beziehungsorientierte Perspektive verlässt und versucht, das Ergebnis verfahrensorientiert zählend zu ermitteln (Turn 12). Ein Grund für das zählende Vorgehen könnte die stereotype Verknüpfung von Lösungsfindung mit dem Zählen sein, sofern das Ergebnis nicht abgerufen werden kann. Bevor Emi dieses zählend ermittelt hat, erhält sie von der Förderin den Impuls zu überlegen, wie viel 3 + 3 ist (Turn 13, Anhang IV, Szene II, Dreieck rechts), was einem neuen Zeichen entspricht und den zuvor von Emi entwickelten Zusammenhang (Turn 6) aufgreift. Dieser Impuls wird von ihr aufgegriffen, sie nennt das richtige Ergebnis und nutzt dieses ohne weiteren Impuls selbständig, um Aufgabe 3 + 2 abzuleiten (Turn 14). An dieser Stelle zeigt sich – nachdem die bereits bekannte Aufgabe 3 + 3 von der Förderin als Zeichen aufgegriffen wurde – ein Wechsel von der Verfahrensorientierung, in Kombination mit Zählen, zur Beziehungsorientierung, verbunden mit dem Nutzen der Hilfsaufgabe. Dieses Zeichen fokussiert eine bereits abgespeicherte Basisaufgabe und damit den zuvor von Emi formulierten Zusammenhang zu dieser. An dieser Stelle gelingt es ihr, diesen Zusammenhang wieder eigenständig aufzugreifen und das vorherige Zeichen 3 + 2 in Beziehung zu dem von der Förderin genannten Zeichen 3 + 3 zu setzen. Der Gesprächsverlauf macht die Begriffsentwicklung von Emi beim Lösen dieser Aufgabe deutlich: Während bisher mit der Ergebnisbestimmung das Zählen verbunden war, nutzt sie nun vor dem Hintergrund der erkannten Aufgabenbeziehung das strategische Werkzeug der Nachbaraufgabe. Die Förderin bezeichnet Emis Vorgehen als einen „perfekten Trick“, mit dem man viele Aufgaben rechnen könne. Sie fordert Emi nun auf, nach weiteren Termkarten in der Kategorie „muss ich zählen“ zu suchen, die sie mithilfe einer bereits automatisierten Aufgabe lösen könnte (Turn 15). Ohne weitere Impulse gelingt es Emi zunächst nicht, analoge Nachbaraufgaben zu finden (Turn 16, 18). Der Grund dafür könnte sein, dass sie ausschließlich die Aufgaben der Spalte „muss ich zählen“ betrachtet und dadurch die Beziehungen zwischen diesen und den von ihr bereits abgespeicherten Aufgaben nicht erkennt. Eine andere Deutung ist, dass sie die Aufforderung, „Aufgaben in der Nähe zu suchen“ (Turn 15, 17) als lokale Nähe bei den gelegten Kärtchen versteht. Nicht zuletzt könnte es sein, dass Emi zu diesem Zeitpunkt nur ein einseitiges Verständnis für Nachbaraufgaben hat und sie z. B. davon ausgeht, dass immer der zweite Summand um eins geändert werden muss und deswegen keinen entsprechenden Term identifizieren kann. Der für die singuläre Aufgabe 3 + 2 entwickelte Begriff der Nachbarschaftsbeziehung zu einer bereits automatisierten Aufgabe kann zu diesem Zeitpunkt nicht auf weitere Aufgabenpaare übertragen werden. An dieser Stelle lässt sich im epistemologischen Dreieck ohne weitere Äußerungen von Emi keine Zuordnung bzgl. der Verfahrens- oder Beziehungsorientierung und der Lösungswerkzeuge machen.

Szene III: Die Frage der Förderin, ob Emi die Aufgaben 6 + 6 und 7 + 7 abrufen kann (Turn 23, 25), führt trotz eingelegter Denkpause von 12 Sekunden nach Turn 24 zu keiner Aktivierung der beziehungsorientierten Referenzebene. Das abgespeicherte Basiswissen von Emi wird an dieser Stelle nicht in Verbindung zu den Aufgaben der Kategorie „muss ich zählen“ gebracht. Erst der Impuls der Förderin „Dann würde ich jetzt noch einmal genau hinschauen.“ (Turn 27, Anhang IV, Szene III, Dreieck links), ermöglicht Emi das Identifizieren der Aufgabe 7 + 8 als Nachbar einer bereits abgespeicherten Verdopplungsaufgabe (Turn 28). Das vorausgehende AAH von Emi im gleichen Turn deutet auf ein produktives Moment im Lernprozess hin, in dem etwas Neues entdeckt oder verstanden wurde. Es scheint, dass Emi nun die Beziehungen zwischen zwei Termen wahrnimmt. Inwieweit sie diese zum Rechnen nutzen kann, ist zu diesem Zeitpunkt nicht zu erkennen. Mit ihrem nächsten Impuls „Wie meinst du das?“ in Turn 29 macht die Förderin Emis Referenzkontext aus Turn 28 zum neuen Zeichen. Emi verbalisiert die entdeckte Beziehung und bezieht sich dabei auf die Sieben und die Acht, indem sie sieben als „eins weniger“ als acht beschreibt (Turn 30, Anhang IV, Szene III, Dreieck rechts). Unklar bleibt, ob sich Emi bei ihrer Begründung auf die Beziehung zwischen 7 + 8 und 7 + 7, auf die Beziehung zwischen 7 + 8 und 8 + 8, oder auf die Beziehung der Summanden innerhalb der Aufgabe 7 + 8 bezieht. Möglich ist auch, dass sie lediglich die ordinale Beziehung der Zahlen 7 und 8 thematisiert, ohne dass sie die Aufgabenbeziehung wahrnimmt. Daher lässt sich an dieser Stelle auch nicht sagen, ob sie verfahrensorientiert argumentiert oder sich auf die erkannte Struktur bezieht. Ähnlich wie in Sz. 2, fokussiert die Förderin mit dem nächsten Impuls die abgespeicherte Aufgabe 7 + 7 (Turn 31). Emi nennt das korrekte Ergebnis, nutzt dieses aber nicht eigenständig um das Ergebnis der Aufgabe 7 + 8 abzuleiten. Das geschieht erst nach der Frage bzgl. der Aufgabe 7 + 8 in Turn 33. Es zeigt sich erneut, dass das Erkennen der Beziehung zwischen zwei Termen nicht automatisch zu deren Nutzen beim Rechnen führt. In Turn 34 leitet Emi schließlich das Ergebnis ab, jedoch in der falschen Adaptionsrichtung. Dies könnte mit einem einseitigen Verständnis des strategischen Werkzeugs und einem verfahrensorientierten Vorgehen zusammenhängen, analog zum zuvor genutzten Lösungsweg bei 3 + 3 und 3 + 2. Ein anderer Grund für den Adaptionsfehler könnte sein, dass Emi die Beziehung zwischen den Aufgaben 7 + 8 und 8 + 8 entdeckt hat, die Frage der Förderin aber auf die Beziehung zwischen 7 + 8 und 7 + 7 fokussiert. Den Fehler in der Adaptionsrichtung korrigiert Emi nach der Warum-Frage der Förderin direkt eigenständig (Turn 35, 36). Die vielen von Emi schnell hintereinander gesprochenen „Nein“ (Turn 36) lassen vermuten, dass sie nicht zählend gelöst oder einen anderen Lösungsweg genutzt hat, sondern das zuvor genannte Ergebnis 13 schnell als falsch erkennt. Damit lässt sich festhalten, dass Emi das Abrufen von Faktenwissen in Kombination mit dem strategischen Werkzeug der Nachbaraufgabe nutzte und das Ergebnis 15 mit der Beziehung „eins mehr“ zwischen den Aufgaben 7 + 7 und 7 + 8 erklärt (Turn 38).

Aus epistemologischer Sicht bestätigt sich an dieser Stelle die Annahme einer Erweiterung in der Begriffsbildung der Nachbaraufgabe bei Verdopplungen. Die Beziehung zwischen einer automatisierten Verdopplung und einer Aufgabe in der Nähe wird hier bei einem weiteren Aufgabenpaar wahrgenommen. Dieses neue Aufgabenpaar (7 + 7 und 7 + 8) unterscheidet sich in seinen Eigenschaften von dem vorherigen (3 + 2 und 3 + 3) durch die Adaptionsrichtung beim Ableiten des Ergebnisses. Der Prozess der Begriffserweiterung wird von Emi selbst gesteuert, indem der weitere Sequenzverlauf an ihre Sortierung der Termkärtchen und an die von ihr erkannten Beziehungen anknüpft.

Szene IV: Emi wird aufgefordert, unter den vorliegenden Aufgaben in der Kategorie „muss ich zählen" nach weiteren Aufgaben zu suchen, die die gleiche Beziehung aufweisen (Phase (3)). Sie nennt 9 + 8 und beschreibt sie als Nachbaraufgabe von 9 + 9 (Turn 46). Emi erklärt den Lösungsweg korrekt, nennt dann zunächst auch das korrekte Ergebnis 17, verbessert sich aber sofort und sagt 18. Auf Nachfrage, welches Ergebnis richtig sei, gibt sie 17 an und begründet, dass 9 + 8 eins weniger als 9 + 9 sein müsse (Turn 52). Der Grund für die Nennung des falschen Ergebnisses könnte darin liegen, dass sie nicht mehr sicher ist, bei welchem Ergebnis es sich um das der Verdopplung und bei welchem um das der Nachbaraufgabe handelt. Möglich ist auch, dass sie zwar die Aufgabenbeziehung erkennt und diese beschreiben kann, im Lösungsprozess selbst dann jedoch unsicher ist. Eine andere Möglichkeit wäre, dass sie Konzentrationsprobleme zeigt, da es sich bereits um einen fortgeschrittenen Zeitpunkt in der FÖ handelt (ca. nach 40 Min. der FÖ). Auffallend ist, die im Vergleich zu den Sz. 2 und 3 ähnliche Interaktionsstruktur. Emi beschreibt die entdeckte Beziehung zwischen den beiden Termen (3 + 2 und 3 + 3, 7 + 8 und 7 + 7, 9 + 8 und 9 + 9) ohne vorerst das Ergebnis zu nennen. Die Förderin fragt nach dem Ergebnis der bereits abgespeicherten Verdopplungsaufgabe und erst anschließend nach dem Ergebnis der abzuleitenden Nachbaraufgabe. Ohne die Zwischenimpulse der Förderin beschreibt Emi nur die Beziehungen. Obwohl sie diese erkennt und beschreiben sowie die Basisfakten der Nachbaraufgaben abrufen kann, zeigt sie in der Lösungssituation selbst noch Unsicherheiten (Turn 34, 48). Auf Nachfrage, ob sie noch weitere Aufgaben der Kategorie „muss ich zählen" mithilfe der Nachbaraufgabe lösen könne, nennt sie die Aufgabe 6 + 7 und beschreibt als Lösungsweg (6 + 6) + 1. Die Interaktionsstruktur ändert sich nun im Vergleich zum vorherigen Abschnitt. Emi nennt jetzt nach der Nachbaraufgabe 6 + 7 selbständig die bekannte Aufgabe 6 + 6, auf die sie sich bei der Ableitung bezieht. Aus epistemologischer Sicht zeigt sich auf der Begriffsebene an dieser Stelle die Erweiterung des singulären Verständnisses der Nachbaraufgabe als $x + x$ und $x + (x-1)$. Emi nutzt das strategische Werkzeug nun zunehmend flexibler, indem sowohl die Position des veränderten Summanden als $(x – 1) + x$, als auch die Adaptionsrichtung als $x + (x + 1)$ variiert.

Szene V: Emi wird nach einer Beschreibung für ein allgemeines Aufgabenmerkmal gefragt (Turn 73), die sie als neues Zeichen nutzt. Sie scheint sich bei ihrer Formulierung in Turn 80 am Unterschied des ersten Summanden einer Verdopplung und ihrer Nachbaraufgabe zu orientieren. Dabei ist unklar, ob sie unverstanden eine Regel ableitet und die Beziehung „eins mehr oder weniger" nur auf den ersten Summanden bezieht. Aus epistemologischer Sicht kann an dieser Stelle noch keine Aussage bzgl. des Referenzkontextes gemacht werden. Im Turn 81 wird ihre vorherige Aussage als neues Zeichen aufgegriffen, welches sie weiterführt (Turn 82). Erst jetzt wird deutlich, dass Emi die beiden Summanden einer Rechnung vergleicht und in Beziehung setzt. Auf die Aufforderung, den „Trick" allgemein zu erklären, formuliert Emi ein allgemeines Merkmal, gestützt durch das Beispiel 3 + 2. Damit gelingt ihr an dieser Stelle eine beziehungsorientierte allgemeine Sichtweise. Der Begriff der Nachbaraufgabe wird durch das Einnehmen einer Metaperspektive um das genannte Aufgabenmerkmal erweitert (Anhang IV, Sz. V, Dreieck links).

Szene VI: Abschließend wird Emi aufgefordert, eigene, neue Aufgaben zu erfinden, die mit Hilfe des gleichen strategischen Werkzeugs gelöst werden könnten (Phase (4)). Sie nennt 5 + 6, 1 + 2 und 8 + 9. Es zeigt sich, dass es Emi nach der eigenen Formulierung eines allgemeinen Aufgabenmerkmals gelingt, Beziehungen wahrzunehmen, die von ihr in vorherigen Szenen nicht erkannt werden konnten. Zu diesem Zeitpunkt in der Fördersequenz gelingt es Emi laut ihrer Sortierung, alle Nachbaraufgaben von Verdopplungen im ZR 20 mit Hilfe des strategischen Werkzeugs abzuleiten (kenne ich einen Trick) oder in einzelnen Fällen abzurufen (weiß ich auswendig) (vgl. Anhang II, rechts).

4.4 Zusammenfassende Rekonstruktion der Sequenz

Ausgehend von Emis Sortierung (Anhang III, links) werden nicht zählende Lösungswege gesucht, mithilfe derer Aufgaben der Kategorie „muss ich zählen" abgeleitet werden können. Solche Lösungswege werden nicht von der Förderin vorgegeben, sondern im Gespräch von Emi an den von ihr wahrgenommenen Aufgabenbeziehungen entwickelt. Dies wird zunächst an der Aufgabe 3 + 2 sichtbar, die Emi in

Bezug zur Aufgabe 3 + 3 setzt (*Sz. I/II*). Damit diese wahrgenommene Beziehung auch zum Bestimmen des Ergebnisses genutzt werden kann und Emi nicht erneut auf Zählstrategien zurückgreift, ist erneut eine Fokussierung auf die Beziehung nötig.

Der in der Interaktion entwickelte „Trick", abgespeichertes Basiswissen zu nutzen, um das Ergebnis weiterer Aufgaben in der Nähe abzuleiten, wird von der Förderin zum neuen Zeichen gemacht (*Sz. III*/*IV*). Emi kann jedoch erst nach dem Hinweis auf die von ihr bereits abgespeicherten und vorliegenden Verdopplungsaufgaben weitere Aufgaben mit dem zuvor beschriebenen Aufgabenmerkmal bestimmen, nämlich 7 + 8 und 9 + 8. Dabei macht sie bei der Aufgabe 7 + 8 einen Fehler in der Adaptionsrichtung, den sie nach der „Warum"-Frage der Förderin eigenständig korrigiert.

In der *Sz. V* gelingt es Emi, ein Merkmal für Aufgaben, die mithilfe von Verdopplungen gelöst werden können, zu formulieren. In der folgenden *Sz. VI* kann sie ihre allgemeine Formulierung auch nutzen, um weitere Aufgaben mit den gleichen Eigenschaften zu erfinden.

4.5 Interpretation mit Fokus auf Beziehungen und strategische Werkzeuge

Die Analysen lassen aus epistemologischer Sicht schlussfolgern, dass sich die Begriffsvorstellung von Emi weiterentwickelt hat. Zu Beginn der Szene sortiert sie die Aufgaben ausschließlich in Zählen und Faktenabruf. Ausgehend von der Aufgabe 3 + 2 gelingt ein erster Schritt zum Erkennen von Aufgabenbeziehungen und zur Entwicklung eines strategischen Werkzeugs. Im Lösungsprozess nutzt sie die erkannten Beziehungen allerdings zunächst nicht und greift wiederum auf verfahrensorientierte Zählstrategien zurück, was schließlich von der Förderin unterbrochen wird. Deutlich wird auch, dass ihr das Erkennen der Aufgabenbeziehungen bei weiteren analogen Aufgaben zunächst nicht gelingt und damit verbunden auch die Übertragung des strategischen Werkzeugs nicht. Erst nach weiteren Impulsen greift sie die Zusammenhänge auf und überträgt sie auf andere Aufgaben. Als lernförderliche Impulse erweisen sich unter anderem solche, die Emis Referenzkontext zum neuen Zeichen in der Interaktion machen, sodass sie diesen auf einer Metaperspektive weiter entwickeln kann. Auch Impulse, die den Zähldrang hemmen und eine Rückbindung an die bereits automatisierten Aufgaben bieten, unterstützen den Lernprozess. Dadurch gelingt es ihr, die zuvor beschriebenen Beziehungen für das Rechnen zu nutzen. Am Ende schafft Emi eine allgemeine Beschreibung, die sie für das Generieren weiterer Aufgaben mit dem gleichen Merkmal heranziehen kann. Zu beobachten ist, wie sich eine zunehmende Verschiebung von der Verfahrensorientierung zur Beziehungsorientierung ergibt. Damit einher geht auch die zunehmende Nutzung des entwickelten strategischen Werkzeugs und dessen Übertragung auf weitere Aufgaben mit dem gleichen Merkmal sowie die Beschreibung einer Verallgemeinerung. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass sich Emi in dieser Szene bei Aufgaben mit dem Merkmal der Fastverdopplung im ZR 20 von einer Zählerin zur Rechnerin entwickelt, die Beziehungen erkennt und nutzt (vgl. Kap. 2.2, Abb. 2). Offen bleibt jedoch, ob Emi diese auch in weiteren Fördereinheiten eigenständig nutzen und auf das nicht zählende Lösungswerkzeug zurückgreifen kann oder ob sie dafür erneut Unterstützung benötigt.

4.6 Vergleich und Kontrastierung mit weiteren Sequenzen

Ausgehend von den Auswertungen der Sequenz 6 werden die Interpretationen und Rekonstruktionen unter drei verschiedenen Fokussen – *Nutzen von Aufgabenmerkmalen und -beziehungen, Entwicklung strategischer Werkzeuge, eigenständige vs. angeregte Erweiterung* – innerhalb der Sequenz und mit Sequenzen anderer FÖ verglichen. Dadurch ist es möglich, Ähnlichkeiten und Kontrastierungen herauszuarbeiten und Deutungsentwicklungen im Förderprozess zu rekonstruieren (Brandt & Krummheuer, 2000). Alle verglichenen Sequenzen wurden analog zur Auswertung der Sequenz 6 interpretiert und rekonstruiert.

Fokus Nutzen von Aufgabenmerkmalen und -beziehungen: Wie in Kapitel 4.3 beschrieben, zeigt sich in der *FÖ 6* (*Sz. I*), dass Emi zwar die Nachbarschaftsbeziehung zwischen den Aufgaben 3 + 2 und 3 + 3 erkennt und beschreibt, beim Lösen aber nicht nutzt, sondern auf das Zählen zurückgreift. Das deutet auf eine isolierte Beziehungsorientierung bzgl. des Erkennens hin, die aber in Verbindung mit der Frage nach dem Ergebnis wieder verlassen und stattdessen das Lösen verfahrensorientiert mit Zählen gleichsetzt wird. Es findet hier also ein Wechsel zwischen dem beziehungsorientierten Erkennen und dem verfahrensorientierten Nutzen statt. Szenen, in denen die wahrgenommenen Beziehungen für das Rechnen nicht genutzt werden, konnten auch in weiteren FÖ rekonstruiert werden: In FÖ 9 erkennt Emi die Nachbarschaftsbeziehung zwischen den

Aufgaben 7 + 9 und 10 + 7 und beschreibt sie. Für das Rechnen nutzt sie diese aber nicht, sondern ermittelt das Ergebnis mithilfe des Ergänzens zur Zehn. Auch wenn jetzt gerechnet wird, nutzt sie ähnlich wie in FÖ 6 ein verfahrensorientiertes Vorgehen, indem sie unabhängig von den erkannten und beschriebenen Aufgabenmerkmalen und -beziehungen agiert. In späteren FÖ (ab FÖ 11) arbeitet Emi im ZR 100. Bei der Addition zweistelliger Summanden löst sie alle Aufgaben nicht zählend und zerlegt unabhängig von den erkannten Aufgabenmerkmalen stets beide Summanden in Zehner und Einer, was als verfahrensorientiert gedeutet werden kann. Innerhalb der entstandenen Teilaufgaben rechnet Emi aber wiederum beziehungsorientiert, indem sie beim Addieren der Einer Zahl- und Aufgabenbeziehungen erkennt und verschiedene strategische Werkzeuge nutzt.

Zusammenfassend zeigt sich, dass sie die erkannten Nachbarschaftsbeziehungen nicht immer zum Lösen nutzt. Während sie in FÖ 6 stattdessen auf das Zählen zurückgreift, agiert sie in FÖ 9 rechnend, nutzt jedoch verfahrensorientiert das Ergänzen zur Zehn. Im Unterschied zu Förderbeginn rechnet Emi nach der Ablösung vom Zählen im ZR 20 flexibel und nutzt die erkannten Aufgabenmerkmale und -beziehungen auf der Referenzebene für das Rechnen mit unterschiedlichen strategischen Werkzeugen auf der inhaltlichen Ebene. Im ZR 100 spielt für sie das Zählen gegen Ende der Förderung keine Rolle mehr, allerdings gelingt es ihr hier trotz der Wahrnehmung von Aufgabenunterschieden und -merkmalen nicht immer, diese eigenständig zu nutzen.

Fokus Entwicklung strategischer Werkzeuge: Da Emis erster Zugang zum rechnenden Lösen die Nachbaraufgabe war, wurde zunächst dieser Fokus eingenommen und in späteren komparativen Analysen auf weitere strategische Werkzeuge übertragen.

Das strategische Werkzeug der Nachbaraufgabe wird von Emi in der FÖ 5 eigenständig bei der Aufgabe 6 + 3 als (5 + 3) + 1 genutzt. In der FÖ 6 (*Sz. I*) nutzt sie es im Rahmen der Aktivität zum Sortieren (Phase (2)) ebenfalls, diesmal jedoch als Hilfsaufgabe zu einer Verdopplung. Zunächst sieht sie die Beziehung nur singulär zwischen den Aufgaben 3 + 2 und 3 + 3. Erst mithilfe der Impulse der Förderin im weiteren Verlauf der Aktivität (Phase (3)) kann sie dieses Werkzeug auf weitere Aufgaben übertragen (7 + 8 als (7 + 7) + 1, 9 + 8 als (9 + 9) – 1, 6 + 7 als (6 + 6) + 1). Dabei deutet und nutzt Emi vorerst nur Beziehungen zwischen Verdopplungsaufgaben und ihren Nachbarn, bei denen sich einer der Summanden um eins unterscheidet. In der FÖ 7 nutzt sie beim Ableiten von Aufgaben (Phase (2)) eigenständig die Nachbarschaftsbeziehung zwischen der abgespeicherten Aufgabe 3 + 5 und 3 + 6 sowie bei 7 + 6 zur Verdopplung 6 + 6. In der folgenden Phase (3) findet sie zunächst den Bezug zwischen 6 + 4 und 6 + 3 nicht eigenständig. Erst nachdem die Förderin durch lautes Denken die bereits gewusste Aufgabe 6 + 4 zum neuen Zeichen macht, entdeckt Emi die Nachbarschaftsbeziehung der Aufgaben und nutzt sie auch direkt zum Lösen. Dass sie diese neu erkannte Beziehung zwischen einer Zerlegung der Zehn und ihrer Nachbaraufgabe nun eigenständig zum Rechnen nutzen kann, zeigt sich in der FÖ 8. Emi macht deutlich, dass sie die Ergebnisse der Aufgaben 6 + 2 und 7 + 2 zwar auswendig kann, beschreibt aber unaufgefordert auch mögliche Lösungswege mit Beziehung zur Zerlegung der Zehn als (6 + 4) – 2 und (7 + 3) – 1. Im Unterschied zum bisherigen Förderverlauf erkennt sie nun auch Nachbarschaftsbeziehungen mit +/– 2. Dies zeigt sich auch in weiteren Fördereinheiten (z. B. FÖ 12: 5 + 7 als (7 + 7) – 2). In der FÖ 9 thematisiert Emi zum ersten Mal im Förderverlauf spontan mehrere wahrgenommene Beziehungen einer Aufgabe in Bezug zu verschiedenen bereits automatisierten, indem sie 7 + 6 in Beziehung zu 7 + 7 und zu 6 + 6 setzt und schließlich über 6 + 6 ableitet. Im weiteren Verlauf der Förderstunde nimmt sie auch die Beziehung zwischen den Aufgaben 7 + 9 und 10 + 7 wahr, nutzt diese dann jedoch nicht für das Rechnen (vgl. Fokus Nutzen von Aufgabenmerkmalen und -beziehungen).

Wie die Szenen zeigen, wird im Förderverlauf ein zunehmend flexibleres Nutzen von Nachbarschaftsbeziehungen sichtbar. Während zu Beginn nur Nachbarschaftsbeziehungen zu Aufgaben 5 + x/x + 5 im ZR 10 und zu Verdopplungsaufgaben im ZR 20 wahrgenommen und genutzt werden, gelingt Emi im Folgenden eine Erweiterung der Nachbarschaftsbeziehungen zu Zerlegungen der Zehn. Thematisierte sie in früheren Fördereinheiten immer genau eine Ableitungsmöglichkeit, zeigt sie im weiteren Förderverlauf eine flexiblere Wahrnehmung und nennt eigenständig verschiedene Ableitungsmöglichkeiten. Auch die erkannten Beziehungen verändern sich: Während sich diese in den früheren FÖ auf Aufgabenpaare beschränken, bei denen sich ein Summand nur um eins unterscheidet, kann Emi im späteren Förderabschnitt auch Aufgabenpaare mit größerem Unterschied in Beziehung setzen. Die wachsende Flexibilität beim Erkennen und Nutzen von

Nachbarschaftsbeziehungen lässt sich zusammenfassend auf drei Aspekte beziehen: verschiedene Aufgabenmerkmale, verschiedene Perspektiven auf mögliche Beziehungen sowie die Erweiterung der erkannten Aufgabenbeziehungen.

Fokus eigenständige vs. angeregte Erweiterung: In den *Sz. II/III* der FÖ 6 wurde ersichtlich, dass es Emi nicht eigenständig gelingt, ein erkanntes und genutztes Aufgabenmerkmal und die damit einhergehende Aufgabenbeziehung auf weitere Aufgaben zu übertragen. Erst nach Impulsen der Förderin, mit denen das bereits abgespeicherte Basiswissen (6 + 6, 7 + 7) zum neuen Zeichen gemacht wird, kann sie die strukturgleichen Beziehungen erkennen, nutzen und schließlich auch allgemein beschreiben. In der FÖ 7 greift sie die Nachbarschaftsbeziehungen zu Verdopplungen selbstständig auf und nutzt diese zum Rechnen. Weitere Nachbarschaftsbeziehungen zu Aufgaben, die von ihr als „leicht“ bezeichnet wurden (Zerlegungen der Zehn) werden zunächst noch nicht wahrgenommen. Ähnlich wie in FÖ 6 gelingt es Emi, eine Beziehung zwischen 6 + 3 und 6 + 4 erst dann wahrzunehmen, zu beschreiben und zu nutzen, nachdem von der Förderin die von Emi bereits automatisierten Zehnerzerlegungen zum neuen Zeichen gemacht werden. In der folgenden Fördereinheit nutzt Emi sowohl die Nachbarschaftsbeziehungen zu Verdopplungen als auch zu den Zerlegungen der Zehn eigenständig.

Wie im Kapitel 4.2 rekonstruiert, zeigt sich in der FÖ 6 *(Sz. V)*, dass Emi nach der eigenständigen Formulierung eines allgemeinen Merkmals zu Verdopplungen als Nachbaraufgaben weitere passende Aufgaben mit dem gleichen Merkmal erfinden kann. Durch die Anregung, eine allgemeine Beschreibung des Aufgabenmerkmals zu formulieren, gelingt ihr schließlich auch hier die Übertragung auf weitere Aufgabenpaare. Dies zeigt sich u. a. auch in der Rekonstruktion der FÖ 11. Hier wird Emi aufgefordert, Additionsaufgaben mit zweistelligen Summanden den Kategorien „leicht“ oder „schwer“ zuzuordnen. Nach dem Sortieren und Begründen der Sortierung (Phase (1)) werden Lösungswege für die Aufgaben der Kategorie „schwer“ entwickelt (Phase (2)). Als sie alle Aufgaben durch Zerlegen beider Summanden in Zehner und Einer nach und nach verfahrensorientiert lösen will, wird sie durch die Förderin unterbrochen. Die Aufgabe 34 + 29 wird zusammen mit der beziehungsorientierten Anregung, nach einem einfachen Nachbarn zu suchen, zu einem neuen Zeichen. Daraufhin nimmt Emi die Beziehung zwischen der für sie schwierigen Aufgabe 34 + 29 und der für sie einfacheren Aufgabe 33 + 30 wahr und beschreibt verallgemeinernd, dass die Ergebnisse von 34 + 29 und 33 + 30 gleich sein müssen, „weil man hat die Zahlen ja nicht größer oder kleiner gemacht, man hat sie nur ähm umgestellt.“ (FÖ 11, 54:35). Nach dem Einwand der Förderin, dass man die 34 doch kleiner gemacht hat, kann Emi begründen, dass das Ergebnis trotzdem gleichbleibend sein muss, weil „das war ja dann in der anderen Zahl mit drin“ (FÖ 11, 54:48). Emis Beschreibung deutet auf die Vorstellung des gegensinnigen Veränderns hin. Diese wurde schon in der FÖ 7 im ZR 20 zuerst materialgestützt (9 + 3) und danach in der Vorstellung (Beschreibung des Anschauungsmittels bei 9 + 7) entwickelt und von Emi bei weiteren Aufgaben genutzt. In FÖ 11 zeigt sich nun, dass Emi das gegensinnige Verändern zwar nicht eigenständig auf den ZR 100 übertragen kann und die Nähe eines zweistelligen Summanden zum nächsten Zehner nicht unmittelbar wahrnimmt, diese Vorstellung aus dem ZR 20 jedoch rekonstruieren und anschließend wieder nutzen kann. In der folgenden Phase wird sie aufgefordert, weitere Aufgaben im ZR 100 zu erfinden, die mit dem gleichen strategischen Werkzeug gerechnet werden können. Sie nennt zu diesem Zeitpunkt zunächst ausschließlich Aufgaben, bei denen der zweite Summand eine Nähe zu einer Zehnerzahl aufweist (36+39, 65+29). Erst nachdem diese Beziehung zum Zeichen gemacht wird und sie das strategische Werkzeug allgemein beschreiben und begründen soll, erkennt sie, dass die Position des Summanden nicht relevant ist und begründet dies, indem sie sich auf die Gesamtmenge bezieht („weil es immer noch die gleiche Menge ist“ (FÖ 11, 58:37)). Im Anschluss daran erfindet sie analoge Aufgaben wie 29 + 57 und 49 + 48 eigenständig und löst sie mit Hilfe des gegensinnigen Veränderns.

In den Vergleichen und Kontrastierungen verschiedener Fördersequenzen wird ersichtlich, dass Emi ohne unterstützende Impulse Schwierigkeiten hat, ein strategisches Werkzeug auf Aufgaben mit veränderten Eigenschaften zu übertragen. Sie scheint im ZR 20 die Nähe der Neun zur Zehn als singuläres Merkmal zu deuten und kann dieses nicht auf zweistellige Summanden mit Neun im Einer übertragen. Im ZR 100 zeigt sich wiederum eine erste singuläre Sichtweise eines Aufgabenmerkmals in Bezug auf die Position des Summanden (beim gegensinnigen Verändern), was die Möglichkeiten des Nutzens des strategischen Werkzeugs bei variierten Aufgaben einschränkt. Zusammenfassend wird deutlich, dass für die Ausdifferenzierung und Erweiterung solcher singulärer Sichtweisen Situationen unterstützend sind, in denen auf der Basis automatisierter Fakten zuvor erkannte Beziehungen bzw. eine von Emi entwickelte allgemeine Beschreibung dieser aufgegriffen und zum neuen Zeichen gemacht werden.

5. Ergebnisse und Diskussion

Vor dem Hintergrund der komparativen Analysen (Kap. 4.5), der Sequenzen im Förderverlauf, der entsprechenden Begriffsentwicklungen von Emi und der interpretierten Fokusse lassen sich Zusammenhänge zum Erkennen und Nutzen von Beziehungen auf der Referenzebene (strukturorientierte Herausforderung) mit der Entwicklung strategischer Werkzeuge auf der inhaltlichen Ebene (inhaltliche Herausforderungen) formulieren. Damit verbunden können auch zwei Gestaltungsmerkmale für die Förderung bei der Ablösung vom Zählen abgeleitet werden.

5.1 Erkennen von Beziehungen und deren Nutzen beim Rechnen

Die komparativen Analysen (Kap. 4.5) verdeutlichen, dass das Wahrnehmen und Beschreiben von Aufgabenmerkmalen und Beziehungen nicht automatisch zu deren Nutzen beim Lösen führt. D. h., Emi nimmt ein Aufgabenmerkmal wahr, erläutert die Struktur der Aufgabe detailliert, nutzt diese dann jedoch nicht zum Lösen. Zu Beginn der Förderung weicht sie trotz der Wahrnehmung von Beziehungen beim anschließenden Lösen auf Zählstrategien aus. Nach der vollständigen Ablösung vom Zählen, ab ca. der Mitte des Förderzeitraums, greift sie in diesen Situationen nicht mehr auf Zählstrategien zurück. Stattdessen stützt sie sich – unabhängig von den zuvor erkannten und beschriebenen Aufgabenmerkmalen – auf das „Ergänzen zur Zehn". Dieses Phänomen zeigt sich über den gesamten Förderzeitraum immer dann, wenn Aufgaben mit neuen Merkmalen im Mittelpunkt und damit verbunden neue strategische Werkzeuge entwickelt werden sowie bei der Erweiterung des Zahlenraums bis 100.

Vor der Ablösung vom Zählen wird durch die Frage nach dem Ergebnis, trotz vorheriger Erläuterung der Struktur der Aufgabe (durch Emi), das stereotype Nutzen von Zählstrategien aktiviert, was jeweils gezielt unterbrochen werden muss. Damit gelingt die Änderung vom verfahrens- zum beziehungsorientierten Vorgehen. Durch die Rückbindung an die von Emi zuvor genannten Zahl- und Aufgabenbeziehungen und durch die Unterstützung beim Einstieg in den Lösungsprozess auf der Basis der bereits abgespeicherten Fakten, kann sie auf die zuvor erkannten Beziehungen zurückgreifen und diese zum Rechnen nutzen. Im Förderverlauf wird die Diskrepanz zwischen der Wahrnehmung von Aufgabenmerkmalen und Beziehungen einerseits und dem Nutzen von Zählstrategien andererseits seltener und tritt schließlich nicht mehr auf. Allerdings nutzt Emi auch nach der Ablösung vom Zählen, trotz dem Erkennen von Aufgabenmerkmalen und Beziehungen, einen verfahrensorientierten Lösungsweg, in dem Fall das Ergänzen zur Zehn. Dies geschieht immer in Situationen, in denen Aufgaben mit neuen Merkmalen betrachtet werden sowie bei der Zahlenraumerweiterung bis 100.

Wie in Kapitel 2.2 beschrieben, ist das zählende Lösen für Kinder mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen in der Regel der einzige Lösungsweg und kann als verfestigt angesehen werden (u. a. Gerster & Schultz, 2004; Schipper, 2002). Da sie entweder keine strategischen Werkzeuge kennen oder diese nicht nutzen, gehört das rechnende Lösen nicht zu ihrem Repertoire (u. a. Schipper 2002). Dieses Phänomen scheint in Verbindung mit den beziehungsorientierten Herausforderungen (Kap. 2.2) auf dem Weg zum Rechnen zu stehen. Dass aber das Erkennen von Beziehungen nicht zwangsläufig mit deren Nutzen einhergehen muss, zeigt sich auch bei Rechtsteiner-Merz (2013): Die in Abb. 2 eigekreisten Rechnertypen erkennen teilweise zwar unterschiedliche Zahl- und Aufgabenbeziehungen, greifen jedoch beim Lösen wieder auf ihren Hauptlösungsweg – das Zählen oder das Ergänzen zur Zehn – zurück. Auch Gaidoschik (2010) beschreibt, dass Kinder, die zählend rechnen, auf Nachfrage Zusammenhänge erklären können, diese jedoch nicht zum Rechnen nutzen.

Bauersfeld (1983) geht in seinem Konzept der subjektiven Erfahrungsbereiche (SEB) davon aus, dass Wissen und Erfahrungen „bereichsspezifisch" (ebd., S. 13) sind und Wissen, das innerhalb eines Kontextes erworben wurde und die damit verbundenen Erfahrungen sowie der Sprachgebrauch nicht automatisch in andere Kontexte übertragen werden. Bei Kindern, die das zählende Lösen von Aufgaben verfestigt haben, scheint die Frage nach deren Ergebnis automatisch das „Gedächtnisfach" (ebd., S. 1) „Zählen" zu aktivieren. Mit der Erfahrung Zahl- und Aufgabenbeziehungen wahrzunehmen, zu durchdringen und zu beschreiben scheint sich ein anderer konkurrierender subjektiver Erfahrungsbereich zu entwickeln, von dem zunächst keine „Querverbindungen" (ebd., S. 1) zum Lösen von Aufgaben hergestellt werden.

Wie Korten (2020) konnten auch Ellemor-Collins und Wright (2009) in ihrer Interventionsstudie herausarbeiten, dass bei der Förderung zur Ablösung vom Zählen Impulse lernförderlich sind, die die Strukturierung der Zahlen fokussieren (z. B. Nähe zur Verdopplung oder zur Zehn) ohne einen Lösungsweg vorzugeben. Neben der Strukturorientierung lernförderlicher Impulse betont Korten (2020) deren Bedeutung der Adressatengerechtigkeit. Häsel-Weide (2016) wirft sogar die Frage auf, ob nicht „ein bewussteres Unterbrechen der automatisierend ablaufenden Verknüpfungen von Zahlensätzen und Zählprozeduren notwendig“ (ebd., S. 211) sein könnte.

Die Daten dieser Studie stützen diese Erkenntnisse und belegen außerdem – wie von Häsel-Weide vermutet –, dass neben gezielten Impulsen, die den Blick auf Aufgabenmerkmale und Beziehungen lenken, auch der Lösungsprozess in solchen Situationen gezielt zu unterbrechen ist, um eine Rückbindung an die zuvor bereits erkannten und beschriebenen Beziehungen sowie an den damit verbundenen Lösungsweg zu erreichen. Analog hierzu zeigt sich die Situation auch nach der Ablösung vom Zählen im höheren Zahlenraum bei der Entwicklung merkmalsbezogener Lösungswege. Das spricht dafür, dass die Anregung zur Wahrnehmung und Nutzung von Aufgabenmerkmalen und Beziehungen nicht nur in der Anfangsphase der Ablösung vom Zählen von Bedeutung ist, sondern auch darüber hinaus kontinuierlich angeregt werden sollte. Dabei erweist es sich als unterstützend, nach der Unterbrechung gezielt die vom Kind ursprünglich beschriebenen Zahl- oder Aufgabenbeziehungen aufzugreifen, in den damit verbundenen Lösungsweg einzuleiten und schließlich diesen durch das Kind eigenständig weiterentwickeln zu lassen.

5.2 Von der singulären zur allgemeinen Struktur

Die Rekonstruktionen und Vergleiche verdeutlichen, dass das Erkennen des gleichen Merkmals bei weiteren Aufgaben, ebenso wie das Finden weiterer Aufgaben mit dem gleichen Merkmal nicht selbstverständlich ist. Die Wahrnehmung eines Zahl- oder Aufgabenmerkmals sowie von Zahl- oder Aufgabenbeziehungen und damit verbunden die Entwicklung eines strategischen Werkzeugs findet in den vorliegenden Daten zunächst an einer konkreten (singulären) Aufgabe statt. Die Wahrnehmung des gleichen Aufgabenmerkmals bei weiteren Aufgaben gelingt jedoch nicht. Vielmehr scheint es so zu sein, dass einzelne Zahlkombinationen eine entscheidende Rolle bei der Wahrnehmung von zunächst singulären Aufgabenmerkmalen und Beziehungen spielen und ein vor diesem Hintergrund entwickeltes strategisches Werkzeug daher zunächst nur für diese einzelne Aufgabe tragfähig erscheint. Durch die Anregung, den Blick auf die inhärenten Zahl- und Aufgabenmerkmale zu richten und diese mit den anderen vorliegenden Aufgaben auf einer Metaebene zu vergleichen, gelingt eine Übertragung auf weitere Aufgaben (vgl. Kap. 4.2). Erst davon ausgehend wird es dem Kind schließlich möglich, die algebraische Struktur und damit die allgemeine Ebene des Aufgabenmerkmals zu erkennen, zu beschreiben sowie eine mathematisch analytische Begründung auf seinem Niveau zu formulieren.

Vor dem Hintergrund der Analysen in Kapitel 4.2 sowie der Vergleiche und Kontrastierungen weiterer Sequenzen im Förderverlauf (Kap. 4.5) lässt sich außerdem ableiten, dass auch die im ZR 20 entwickelten Begriffe zunächst überwiegend auf diesen beschränkt bleiben und dass weder das Erkennen der Beziehungen noch das aufgabenadäquate Nutzen der strategischen Werkzeuge selbstverständlich auf den höheren Zahlenraum übertragen werden kann. Vielmehr bedarf es ebenfalls bei der Zahlenraumerweiterung der gezielten Ausdifferenzierung vom singulären Begriff zur allgemeinen Struktur. Das wird z. B. beim Nutzen des strategischen Werkzeugs der Analogie deutlich, welches Emi schon ab den Födereinheiten 6 und 7 selbstständig nutzt und dabei auch ihr Vorgehen beschreiben kann. In der Fördereinheit 8 zeigt sich allerdings, dass Emi diese Beziehung ausschließlich bei Additionsaufgaben mit einem zweistelligen Summanden zwischen 10 und 19 sieht. Ist der zweistellige Summand größer als 20 oder sind beide Summanden zweistellig, erfüllt die Aufgabe nicht „Emis Merkmale“ der Analogie. Dies zeigt sich auch für Aufgaben mit einem dreistelligen Summanden in der FÖ 8.

Häsel-Weide (2016) beschreibt, dass sowohl Kinder, die zählend rechnen, als auch leistungsstärkere, zwar Beziehungen wahrnehmen, diese jedoch überwiegend ordinal deuten. Dieses Vorgehen konnte zu Beginn auch bei Emi beobachtet werden. Sie war dann aber in der Lage, auf die Frage nach der Auswirkung der erkannten Aufgabenbeziehung, diese bezogen auf die Aufgaben 3 + 2 und 3 + 3 zu beschreiben. Die Vergleiche innerhalb dieser Sequenz (vgl. Kap. 4.3) aber auch zwischen weiteren deuten darauf hin, dass Fragen zu Aufgabenmerkmalen und Beziehungen den Übertragungsprozess von der singulären zur generellen Struktur unterstützen.

Björklund et al. (2021) stellen beim Vergleich von Kindern, die in der Lage sind, bereits im Kindergarten Plus- und Minusaufgaben zu rechnen, fest, dass diejenigen Kinder, denen dies gelingt, Beziehungen nutzen. Vor diesem Hintergrund betonen sie die Notwendigkeit, von Anfang an Strategien zu entwickeln, die es Kindern ermöglichen, Aufgaben „in a powerful way“ (ebd., S. 280) in Bezug auf Ordinalität, Kardinalität und Teil-Ganzes-Verständnis zu deuten. Wie die Daten der vorliegenden Studie vermuten lassen, sind hierfür ausgehend von einzelnen Aufgaben die Entwicklung von Aufgabengruppen auf der Basis der jeweiligen Aufgabenmerkmale sowie die Entwicklung zunehmend allgemeiner Beschreibungen der inhärenten Strukturen wichtig.

Im Vergleich zum Konzept der SEB bei Bauersfeld zeigt sich zwar auch hier die Verknüpfung der „Zählwelt“ mit der „Beziehungswelt“, jedoch scheint es in dieser Verknüpfung sehr viel mehr auch um eine Ausdifferenzierung und Erweiterung der neuen „beziehungsorientierten Rechenwelt“ zu gehen. In den vorliegenden Daten konnte herausgearbeitet werden, dass singulär wahrgenommene Aufgabenbeziehungen sich auch innerhalb des gleichen Kontextes nicht automatisch auf weitere Aufgaben mit dem gleichen Aufgabenmerkmal übertragen lassen und hier ebenso Zusammenhänge gezielt entwickelt werden müssen.

Wiederkehrend lassen die Daten darauf schließen, dass die Phasen zum Finden, allgemeinen Beschreiben des Aufgabenmerkmals und zum Erfinden weiterer Aufgaben (vgl. auch Kap. 3.1.2) für das Übertragen eines Aufgabenmerkmals und eines strategischen Werkzeugs auf weitere Aufgaben mit dem gleichen Merkmal innerhalb eines Zahlenraums sowie bei der Übertragung in einen höheren Zahlenraum lernförderlich sind und dem Kind eine Durchdringung der Strukturen ermöglichen.

6. Fazit

Da es sich in der vorliegenden Studie um eine Einzelfallbetrachtung handelt, besteht nicht der Anspruch auf Verallgemeinerbarkeit. Gleichwohl scheint es durch die theoriegeleitete systematische Rekonstruktion gerechtfertigt zu sein, verallgemeinerbare Aspekte abzuleiten (Kelle & Kluge, 1999) und die vorgestellten Ergebnisse vor diesem Hintergrund einzuordnen.

Für die Ablösung vom zählenden Rechnen verdichten die Analysen die Annahme, dass auch in der Förderung von Kindern mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen sowohl die inhaltlichen (u. a Gerster & Schultz, 2004; Schipper, 2002) als auch die beziehungsorientierten Herausforderungen (Häsel-Weide, 2016; Rechtsteiner-Merz, 2013) im Lernprozess kontinuierlich gefördert und verknüpft werden müssen.

In den Analysen der Fördersequenzen werden über den Förderzeitraum hinweg zwei zentrale **Hürden** in Bezug auf Erkennen und Nutzen von Aufgabenmerkmalen und -beziehungen sichtbar: Erstens werden Zahl- und Aufgabenbeziehungen zwar erkannt und können beschrieben werden, sie werden aber zu verschiedenen Zeiten im Lernprozess nicht zwingend genutzt. Vielmehr wird dabei auf merkmalsunabhängige Lösungswege zurückgegriffen: zu Beginn der Förderung, während der Entwicklung des Rechnens auf bisher genutzte zählende Lösungswege, später bei der Erweiterung des Zahlenraums auf das Ergänzen zur Zehn. Zweitens können Zahl- und Aufgabenbeziehungen für eine einzelne singuläre Aufgabe erkannt und beschrieben werden, jedoch nicht auf weitere merkmalsgleiche Aufgaben übertragen werden. Das entwickelte und genutzte strategische Werkzeug bleibt singulär mit dieser spezifischen Aufgabe verbunden, eine allgemeine Beschreibung der Struktur gelingt zunächst nicht.

Als lernförderlich haben sich zwei **Gestaltungsmerkmale** erwiesen, die zum einen den Aufbau der Aktivität und zum anderen die Art der Impulse adressieren. Als wichtiger Entwicklungsschritt erweist sich die gezielte Ausdifferenzierung und Erweiterung von Zahl- und Aufgabenbeziehungen auf weitere Aufgaben und die zunehmende Verallgemeinerung. Weiterhin ermöglicht die Unterbrechung des Zählens oder später des verfahrensorientierten Rechnens verbunden mit der Anregung, erneut bereits beschriebene Beziehungen in den Blick zu nehmen und der Einleitung des Lösungsprozesses vor deren Hintergrund, das Schaffen der von Bauersfeld (1983) beschriebenen Querverbindungen zwischen der *Lösewelt* und der *Beziehungswelt* und unterstützt möglicherweise die Neubildung eines SEBs.

Die vorgestellten Ergebnisse konnten nur durch die Dauer der Förderung und damit verbunden durch die zahlreichen und auf einer Mikroebene betrachteten Analysesequenzen sichtbar werden. Langfristige Beobachtungen scheinen also für das Erkennen wiederkehrender bzw. für die Abgrenzung punktueller Denk- und Vorgehensweisen wichtig zu sein.

Neben der Notwendigkeit weiterer Untersuchungen zum Zusammenhang zwischen der Konzeption der

Aktivitäten, der Impulse und Fragestellungen, schließen sich Fragen zur Förderung an. Vor dem Hintergrund der Bedeutung der systematischen Anregung zum Erkennen und Nutzen von Zahl- und Aufgabenbeziehungen sowie des diskursiven Aushandlungsprozesses unter Lernenden (u. a. Häsel-Weide, 2016) stellt sich die Frage, wann, wie und mit welcher Funktion Beziehungen beim Rechnen lernen im Rahmen einer kooperativen ergänzenden Förderung erkannt und genutzt werden (Scheffknecht, Rechtsteiner & Ott, i. Dr.).

Danksagung

Wir danken Emi für die spannenden Erfahrungen während der Förderung und ihren Eltern für die Bereitschaft, die Aufzeichnungen nutzen zu dürfen. Auch danken wir den Gutachter:innen für die intensive Auseinandersetzung und die konstruktiven Rückmeldungen.

Literatur

Akinwumni, K. & Lüken, M. (2021). Muster und Strukturen – Empirische Forschung zu einem schillernden Inhaltsbereich?! In A. S. Steinweg (Hrsg.), *Mathematikdidaktik Grundschule, Band 10: Blick auf Schulcurricula Mathematik – Empirische Fundierung? Tagungsband des Arbeitskreises Grundschule der GDM* (S. 9–24). University of Bamberg Press.

Bauersfeld, H. (1983). Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In H. Bauersfeld, G. Krummheuer, J. H. Lorenz & J. Voigt (Hrsg.), *Lernen und Lehren von Mathematik* (S. 1–56). Aulis.

Björklund, C., Marton, F. & Kullberg, A. (2021). What is to be learnt? Critical aspects of elementary arithmetic skills. *Educational Studies in Mathematics, 107,* 261–284. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10045-0

Brandt, B. & Krummheuer, G. (2000). Das Prinzip der Komparation im Rahmen der Interpretativen Unterrichtsforschung in der Mathematikdidaktik. *Journal für Mathematik-Didaktik, 21,* 193–226. https://doi.org/10.1007/BF03338919

Ellemor-Collins, D. & Wright, B. (2009). Structuring Numbers 1 to 20: Developing Facile Addition and Subtraction. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 50–75.

Gaidoschik, M. (2010). *Die Entwicklung von Lösungsstrategien zu den additiven Grundaufgaben im Laufe des ersten Schuljahres.* Dissertation Universität Wien. http://othes.univie.ac.at/9155/1/2010-01-18_8302038.pdf

Gaidoschik, M. (2014). *Rechenschwäche – Dyskalkulie. Eine unterrichtspraktische Einführung für LehrerInnen und Eltern*. Persen.

Gaidoschik, M., Moser Opitz, E., Nührenbörger, M. & Rathgeb-Schnierer, E. (2021). *Besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen. Special Issue der Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, *47*(111S), S. 3–19. https://ojs.didaktik-der-mathematik.de/index.php/mgdm/article/view/1042/1156

Gerster, H.-D. (2005). Anschaulich rechnen – im Kopf, halbschriftlich, schriftlich. In M. von Aster & J. H. Lorenz (Hrsg.), *Rechenstörungen bei Kindern. Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik* (S. 202–236). Vandenhoeck & Ruprecht.

Gerster, H.-D. (2009). Schwierigkeiten bei der Entwicklung arithmetischer Konzepte im Zahlenraum bis 100. In A. Fritz, G. Ricken & S. Schmidt (Hrsg.), *Handbuch Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie* (S. 269–284). Weinheim und Basel.

Gerster, H.-D. & Schultz, R. (2004). *Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht. Bericht zum Forschungsprojekt Rechenschwäche – Erkennen, Beheben, Vorbeugen*. Pädagogische Hochschule Freiburg.

Götze, D. (2019). Language-Sensitive Support Of Multiplication Concepts Among at-Risk Children: A Qualitative Didactical Design Research Case Study. *Learning Disabilities: A Contemporary Journal, 17*(2), 165–182.

Gray, E. M. (2008). Compressing the counting process: strength from the flexible interpretation of symbols. In I. Thompson (Hrsg.), *Teaching and learning early number* (S. 82–93). Open University Press.

Gray, E. M. & Tall, D. O. (1994). Duality, Ambiguity, and Flexibility: a “Proceptual” View of Simple Arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(2), 116–140.

Häsel-Weide, U. (2016). *Vom Zählen zum Rechnen. Strukturfokussierende Deutungen in kooperativen Lernumgebungen*. Springer Spektrum.

Häsel-Weide, U. & Prediger, S. (2017). Förderung und Diagnose im Mathematikunterricht – Begriffe, Pla- nungsfragen und Ansätze. In M. Abshagen, B. Barzel, J. Kramer, T. Riecke-Baulecke, B. Rösken-Winter & Ch. Selter (Hrsg.). *Basiswissen Lehrerbildung: Mathematik unterrichten mit Beiträgen für den Primar- und Sekundarstufenbereich* (S. 167–181). Klett Kallmeyer.

Heinze, A., Schwabe, J., Grüßing, M. & Lipowsky, F. (2015). Effects of instruction on strategy types chosen by German 3rd-graders for multi-digit addition and subtraction tasks: an experimental study. In K. Beswick, T. Muir & J. Wells (Hrsg.), *Proceedings of 39th Psychology of Mathematics Education Conference*, Vol. 3, (S 49–56). PME.

Höhtker, B. & Selter, Ch. (1999). Normal verfahren? Viertklässler reflektieren über Rechenmethoden. *Die Grundschulzeitschrift, 13*(125), 19–21.

Jungwirth, H. (2003). Interpretative Forschung in der Mathematikdidaktik – ein Überblick für Irrgäste, Teilzieher und Standvögel. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 35,* 189–200. https://doi.org/10.1007/BF02655743

Jungwirth, H. (2014). *Beitrag zur Theoriearbeit und Lehreinnenbildung in der interpretativen mathematikdidaktischen Forschung*. Waxmann.

Kaufmann, S. & Wessolowski, S. (2015). *Rechenstörungen. Diagnose und Förderbausteine.* Kallmeyer mit Klett.

Kelle, U. & Kluge, S. (2010). *Vom Einzelfall zum Typus. Fallvergleich und Fallkonstruktion in der qualitativen Sozialforschung*. Leske + Budrich.

Korten, L. (2020). *Gemeinsame Lernsituationen im inklusiven Mathematikunterricht. Zieldifferentes Lernen am gemeinsamen Lerngegenstand des flexiblen Rechnens in der Grundschule*. Springer Spektrum.

Krummheuer, G. (2004). Wie kann man Mathematikunterricht verändern? Innovation von Unterricht aus der Sicht eines Ansatzes der Interpretativen Unterrichtsforschung. *Journal für Mathematik-Didaktik, 25,* 112–129.

Krummheuer, G. & Naujok, N. (1999). *Grundlagen und Beispiele Interpretativer Unterrichtsforschung*. Leske + Budrich.

Link, M. & Kuratli Geeler, S. (2021). *Heilpädagogischer Kommentar 1 zum Schweizer Zahlenbuch*. Klett und Balmer.

Lorenz, J. H. (2003). *Lernschwache Rechner fördern. Ursachen der Rechenschwäche. Frühhinweise auf Rechenschwäche. Diagnostisches Vorgehen*. Cornelsen Scriptor.

Lorenz, J. H. (2005). Grundlagen der Förderung und Therapie. Wege und Irrwege. In M. von Aster und J. H. Lorenz (Hrsg.), *Rechenstörungen bei Kindern. Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik* (S. 165–177). Vandenhoeck & Ruprecht.

Lorenz, J. H. (2011). Anschauungsmittel und Zahlenrepräsentationen. In A. S. Steinweg (Hrsg.), *Mathematikdidaktik Grundschule – Band 1: Medien und Materialien. Tagungsband des Arbeitskreises Grundschule der GDM* (S. 39–54). University of Bamberg Press (UBP).

Lüken, M. M. (2012). *Muster und Strukturen im mathematischen Anfangsunterricht*. Waxmann.

Menninger, K. (1940). *Rechenkniffe. Lustiges und vorteilhaftes Rechnen. Ein Lehr- und Handbuch für das tägliche Rechnen*. Klett.

Meyerhöfer, W. (2011). Vom Konstrukt der Rechenschwäche zum Konstrukt der nicht bearbeiteten stofflichen Hürden (nbsH). *Pädagogische Rundschau*, *65*(4), 401–426.

Moser-Opitz, E., Grob, U., Wittich, C., Häsel-Weide, U. & Nührenbörger, M. (2018). Fostering the Computation Competence of Low Achievers Through Cooperative Learning in Inclusive Classrooms. *Learning Disabilities, 16*(1), 19–35. https://doi.org/10.5167/uzh-165614

Mulligan, J., Mitchelmore, M. & Prescott, A. (2006). Case studies of children's development of structure in early mathematics: a two-year longitudinal study. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Hrsg.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, S. 1–8. PME.

Purpura, D., Baroody, A., Eiland, M. & Reid, E. (2016). Fostering first graders` reasoning strategies with basic sums. *The elementary school journal, 117*(1), 72–100. https://doi.org/10.1086/687809

Rathgeb-Schnierer, E. (2006). *Kinder auf dem Weg zum flexiblen Rechnen.* Franzbecker.

Rathgeb-Schnierer, E. (2011). Warum noch rechnen, wenn ich die Lösung sehen kann? Hintergründe zur Förderung flexibler Rechenkompetenzen bei Grundschulkindern. In R. Haug & L. Holzäpfel (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011* (S. 15–22). WTM.

Rathgeb-Schnierer, E. & Rechtsteiner, Ch. (2018*). Rechnen lernen und Flexibilität entwickeln.* Springer Spektrum.

Rechtsteiner-Merz, Ch. (2013). *Flexibles Rechnen und Zahlenblickschulung. Entwicklung und Förderung flexibler Rechenkompetenzen bei Erstklässlern, die Schwierigkeiten beim Rechnenlernen zeigen.* Waxmann.

Rechtsteiner, Ch. (2020). Flexibles Rechnen anregen. Multiplizieren, Dividieren und die Schulung des Zahlenblicks. *Grundschule Mathematik*, 66, 32–35.

Rechtsteiner, Ch. & Rathgeb-Schnierer, E. (2020). Aufgaben sortieren. Ein zentrales Aufgabenformat beim Rechnenlernen. *Die Grundschulzeitschrift*, 324, 14–17.

Rechsteiner, Ch. & Wessolowski, S. (2021). Wie lässt sich Kopfrechnen beschreiben? Flexibel rechnen und Fakten abrufen. *Grundschule Mathematik*, 71, 32–35.

Scheffknecht, M., Rechtsteiner, Ch. & Ott, B. (i. Dr.). Zahlenblick und Rechnenlernen: Förderung von Kindern mit besonderen Schwierigkeiten in Mathematik. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2022*. WTM.

Scherer, P. (1999). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht der Schule für Lernbehinderte. Theoretische Grundlegung und evaluierte unterrichtspraktische Erprobung*. Winter, Ed. S.

Schipper, W. (2002). Thesen und Empfehlungen zum schulischen und außerschulischen Umgang mit Rechenstörungen. *Journal für Mathematik-Didaktik, 23*(3/4), 243–261. https://doi.org/10.1007/BF03338958

Schülke, C. (2013). *Mathematische Reflexion in der Interaktion von Grundschulkindern*. Waxmann.

Schütte, M., Jung, J. & Krummheuer, G. (2021). Diskurse als Ort der mathematischen Denkentwicklung – Eine interaktionistische Perspektive. *Journal für Mathematik-Didaktik, 42,* 525–551. https://doi.org/10.1007/s13138-021-00183-6

Schütte, S. (2002). Die Schulung des „Zahlenblicks" als Grundlage für flexibles Rechnen. In S. Schütte (Hrsg.), *Die Matheprofis 3. Lehrerband* (S. 3–7). Oldenbourg.

Schütte, S. (2004). Rechenwegnotationen und Zahlenblick als Vehikel des Aufbaus flexibler Rechenkompetenzen. *Journal für Mathematik-Didaktik, 25*(2), 130–148. https://doi.org/10.1007/BF03338998

Schütte, S. (2008). *Qualität im Mathematikunterricht der Grundschule sichern. Für eine zeitgemäße Unterrichts- und Aufgabenkultur*. Oldenbourg.

Steinbring, H. (2000). Mathematische Bedeutung als eine soziale Konstruktion – Grundzüge der epistemologisch orientierten mathematischen Interaktionsforschung. *Journal für Mathematik-Didaktik, 21,* 28–49. https://doi.org/10.1007/BF03338905

Stöckli, M. (2019). *Unterrichtsintegrierte Förderung im Mathematikunterricht: Eine empirische Studie in der Primarschule*. Dissertation, Universität Zürich. https://doi.org/10.5167/uzh-177335

Wijns, N., Verschaffel, L., De Smedt, B. & Torbeyns, J. (2021). Associations Between Repeating Patterning, Growing Patterning, and Numerical Ability: A Longitudinal Panel Study in 4- to 6-Year Olds. *Child Development 92*(4), 1354–1368. https://doi.org/10.1111/cdev.13490

Anschrift der Verfasserinnen

Charlotte Rechtsteiner
PH Ludwigsburg
Institut für Mathematik und Informatik
Reuteallee 46
71634 Ludwigsburg
rechtsteiner@ph-ludwigsburg.de

Michaela Scheffknecht
PH St. Gallen
Institut Lehr-Lernforschung
Notkerstrasse 27
CH-9000 St. Gallen
michaela.scheffknecht@phsg.ch