Zur schriftlichen Verwendung von Fachsprache durch Mathematik-Studierende in der Studieneingangsphase – eine theoretische und empirische Bestandsaufnahme

ANDREAS BÜCHTER, ESSEN & JULIA T. KAISER, ESSEN

***Zusammenfassung**: Das Verstehen und stimmige Verwenden der Fachsprache Mathematik stellt für viele Studierende in der Studieneingangsphase eine große Herausforderung dar. Insbesondere zur schriftlichen Verwendung der Fachsprache liegen bislang allerdings kaum belastbare Befunde vor. In diesem Beitrag werden eine theoretische Analyse und eine empirische Bestandsaufnahme vorgestellt.*

Im empirischen Teil der Studie wurden in einer Analysis-I-Lehrveranstaltung Übungsbearbeitungen von 15 Studierenden quer- und teilweise längsschnittlich ausgewertet. Dabei zeigt sich eine große Vielfalt der Ausdruckweisen z. B. zu Implikationen und es deutet sich eine zunehmende Souveränität der Fachsprachverwendung im Verlauf der Vorlesung an.

***Abstract:** Understanding and coherently using the language of mathematics is a challenge for many freshmen. So far, however, there is little evidence on students' written use of the language of mathematics. This paper presents a theoretical analysis and an empirical survey.*

In the empirical part of the study, exercises completed by 15 students in an Analysis I course were analyzed cross-sectionally and in some cases longitudinally. The results show a wide variety of expressions, e.g. on implications, and an increasing confidence in the use of the language of mathematics.

1. Einleitung

In der Studieneingangsphase Mathematik treffen viele Studierende auf fachübergreifende und fachspezifische Herausforderungen, die sie nicht in jedem Fall erfolgreich bewältigen, sodass es zu einer hohen Quote von Studienfachwechseln oder -abbrüchen kommt (vgl. Blömeke, 2016; Heublein, 2010, 2022). Zu den fachspezifischen Herausforderungen des Übergangs von der Schule in die Hochschule zählt der Erwerb der Fachsprache Mathematik (vgl. Hefendehl-Hebeker, 2016; Büchter & Kaiser, 2023). Während andere Aspekte der Übergangsproblematik und von Lernprozessen in der Studieneingangsphase auch im deutschsprachigen Raum bereits vergleichsweise gut erforscht sind (vgl. z. B. Hochmuth et al., 2023; Hoppenbrock et al., 2016; Roth, 2015), stellt der Erwerb der Fachsprache noch weitgehend eine Forschungslücke dar.[1]

Zu Studienbeginn steht den Lernenden die fachgebundene Bildungssprache, die sie im Mathematikunterricht der Schule erworben haben, als „Sprache des Verstehens“ (Wagenschein, 1980) für die Lernprozesse in der Hochschule zur Verfügung (vgl. Kaiser, 2023). Dabei muss berücksichtigt werden, dass sich die Art der Begriffsbildung und Argumentation sowie die zugehörigen fachbezogenen Kommunikationsprozesse zwischen dem Mathematikunterricht der Schule und Mathematikvorlesungen zu Studienbeginn (im Folgenden wird exemplarisch Analysis I betrachtet) teilweise erheblich unterscheiden (vgl. Hefendehl-Hebeker, 2016). Während in der Schule bei vielen Begriffsbildungen Prototypen eine zentrale Rolle spielen und Argumentationen oft wenig streng und stark anschaulich geprägt sind, wird in der Hochschule in der Regel eine formale Begriffsbildung und eine darauf basierende strenge Deduktion angestrebt (vgl. Alcock & Simpson, 2002; Wilzek, 2021). Dazu passend unterscheiden sich auch die verwendeten sprachlichen und weiteren Darstellungsmittel (wie Symbole und Schaubilder).

Aufgrund dieser Unterschiede können die vorliegenden Befunde zum sprachlichen und fachlichen Lernen im Mathematikunterricht der Schule (vgl. Leiss et al., 2023; Ufer et al., 2020) nicht direkt auf die Hochschule übertragen werden. Dennoch kann es lohnend sein, entsprechende Befunde hinsichtlich möglicher Impulse für die Hochschuldidaktik der Mathematik zu reflektieren. Für die in diesem Beitrag verfolgte Absicht, die Aneignung und schriftliche Verwendung der Fachsprache im Laufe einer Analysis-I-Vorlesung in einer ersten Bestandsaufnahme zu beschreiben, können darüber hinaus Vergleiche mit anderen Spracherwerbsprozessen relevante Ansatzpunkt liefern.

Insbesondere im deutschsprachigen Raum liegen bislang kaum Befunde zur Verwendung von Fachsprache durch Studierende vor – eine Ausnahme stellt die Arbeit von Körtling und Eichler (2022) dar. Die produktive Sprachverwendung erfolgt mangels mündlicher Diskurssituationen in Lehrveranstaltungen in der Studieneingangsphase vorwiegend schriftlich. Daher widmet sich der vorliegende Beitrag der schriftlichen Verwendung von Fachsprache durch Studierende bei der Bearbeitung von Übungsaufgaben zur Analysis I. Dabei werden sowohl die konkreten individuellen Ausdrucks- und Darstellungsweisen detailliert erfasst und kategorisiert als auch ausgewählte individuelle Entwicklungen rekonstruiert. Die abschließende Diskussion der Ergebnisse erfolgt auch im Sinne einer konstruktiven Wendung mit Überlegungen zur Lehrpraxis.

2. Theoretischer Hintergrund

Als Ausgangspunkt für die theoretischen Grundlagen werden zunächst Funktionen und Register von Sprache in fachbezogenen Lehr-Lern-Prozessen betrachtet. Anschließend werden u. a. vor diesem Hintergrund die besonderen Merkmale der Fachsprache Mathematik der Hochschule in Abgrenzung zur fachgebundenen Bildungssprache des Mathematikunterrichts der Schule herausgearbeitet. Schließlich wird der Erwerb der Fachsprache Mathematik in Theorien zum Spracherwerb eingebettet, um Ansatzpunkte für typische und geeignete Lern- bzw. Erwerbsprozesse zu erhalten.

2.1 Sprache in fachbezogenen Lehr-Lern-Prozessen

2.1.1 Funktionen von Sprache

Für die Gestaltung fachbezogener Lehr-Lern-Prozesse ist Interaktion konstitutiv. Dabei spielt sprachliche Kommunikation neben dem (häufig begleitenden) Einsatz anderer Kommunikationsmittel die zentrale Rolle. Es ist für fachbezogene Lehr-Lern-Prozesse aber entscheidend, über die augenscheinliche *kommunikative Funktion* von Sprache hinaus auch deren *kognitive Funktion* zu berücksichtigen (vgl. z. B. Maier & Schweiger, 1999).

Umfangreiche theoretische und empirische Untersuchungen zum Zusammenhang von „Denken und Sprechen" hat Vygotskij bereits in den 1930er-Jahren auf der Grundlage der maßgeblich von ihm entwickelten kulturhistorischen Theorie durchgeführt (Vygotskij, 2017). Lernpsychologische Weiterentwicklungen und Konkretisierungen führten zur Theorie der „Etappenweisen Ausbildung geistiger Handlungen", bei der das „äußere Sprechen" über das „innere Sprechen" zum „Denken in Begriffen" führt (Giest & Lompscher, 2006, S. 196 ff.). Sfard (2008) betont diesen Zusammenhang spezifisch für das Lernen von Mathematik, indem sie „communicational" und „cognitive" zu dem Kunstwort „commognitive" zusammenführt. Vygotskij (2017) hat zwar vor dem Hintergrund anderer Forschungsarbeiten darauf hingewiesen, dass nicht jegliches Denken auf Sprache beruht, da Mathematik aber als „Denken in Begriffen" (Wittenberg, 1957) betrachtet werden kann, dürfte Sprache beim mathematischen Denken eine besondere Rolle spielen (Morgan et al., 2014).

Für „Schulsprache" betonen Vollmer und Thürmann (2010), dass diese vor allem ein „kognitives Werkzeug" ist. Jüngere Studien haben die Bedeutung der kognitiven Funktion von Sprache für das Lernen von Mathematik in der Schule spezifisch herausgearbeitet (für einen Überblick vgl. Leiss et al., 2023). Die kognitive Funktion von Sprache realisiert sich in institutionalisierten fachbezogenen Lehr-Lern-Prozessen dabei vor allem über die fachtypischen Ausprägungen der *Diskursfunktionen*:

> Dieses Konstrukt bildet […] die Brücke zwischen den kognitiven Operationen des fachbezogenen Lehrens und Lernens […] und den sprachlichen Mitteln und Diskursstrategien zu ihrer Realisierung. (Thürmann & Vollmer, 2017, S. 307)

Dabei lassen sich über alle Fächer hinweg gemeinsame Diskursfunktionen identifizieren, ohne dass dies zu einem allgemein akzeptieren Katalog geführt hätte (Vollmer & Thürmann, 2010). Beispiele für solche Diskursfunktionen sind „Benennen", „Beschreiben", „Erklären", „Argumentieren" und „(Be-) Werten" (ebd., S. 10 f.). Die konkrete Gestaltung von Sprachhandlungen in Lehr-Lern-Prozessen hängt den Analysen zufolge u. a. von der Diskursfunktion ab, die die jeweilige sprachliche Form mitprägt.

Trotz fachübergreifend identifizierter Diskursfunktionen ist eine Fachspezifik von Sprachhandlungen beobachtbar. Auf Ebene der Diskursfunktionen zeigt sie sich in deren variierender quantitativer Bedeutung von Fach zu Fach.[2] Darüber hinaus wird Fachspezifik in naheliegender Weise „auf der lexikalischen bzw. begrifflichen Ebene" (ebd., S. 6) sichtbar, also in der *Fachsprache* (siehe 2.1.2).

2.1.2 Sprachliche Register

Die *Fachsprache* eines Unterrichtsfachs[3] wird häufig als spezifisches sprachliches Register beschrieben. In der schulbezogenen Forschung werden daneben weitere Register betrachtet, die z. B. als Alltags-, Umgangs-, Unterrichts-, Schul- oder Bildungssprache bezeichnet werden. Für diese Konstrukte gibt es dabei keine einheitlichen Begriffsauffassungen, wie Vollmer und Thürmann (2013) insbesondere für „Bildungssprache" herausarbeiten.

In der Mathematikdidaktik im deutschsprachigen Raum werden überwiegend die Register „Alltags-, Bildungs- und Fachsprache" als „in der schulischen Praxis […] ineinander verwobenes Kontinuum" (Leiss et al., 2023) betrachtet. Für die Schule ist dabei zunächst die Unterscheidung von Alltags- und Bildungssprache relevant. Koch und Oesterreicher (1985) beschreiben Alltagssprache als „Sprache der Nähe“ und Bildungssprache als „Sprache der Distanz“. Dabei lässt sich Bildungssprache

> generell durch Adjektive wie *prägnant*, *präzise*, *vollständig*, *komplex*, *strukturiert*, *objektiv*, *distant*, *emotionsfrei*, *eindeutig*, *situationsungebunden* und *dekontextualisiert* charakterisieren (Vollmer & Thürmann, 2010, Herv. i. O.).[4]

Die Fachsprachen der Unterrichtsfächer bauen sprachlich auf Bildungssprache auf und zeichnen sich vor allem durch ihr spezifisches Fachvokabular aus, wozu im Fall der Mathematik auch die Symbolsprache zählt (vgl. Schlager, 2020). Die spezifisch im Mathematikunterricht verwendete Bildungs- und Fachsprache weist u. a. folgende Merkmale auf:

> Auf *Wortebene* (lexikalisch) typisch sind der Fachwortschatz, ungebräuchliche Wörter, eine hohe Lexikvarianz, lange Wörter sowie der Strukturwortschatz. […]
>
> Auf *Satzebene* (morpho-syntaktisch) werden die sprachlichen Besonderheiten vor allem durch die Struktur der Mathematik, ihren Fokus auf *Beziehungen*, *Unpersönlichkeit* und *Präzision* bedingt. […]
>
> Auf *Textebene* (textuell) verorten sich Besonderheiten und Hürden in einer *undurchsichtigen Referenzstruktur* […] sowie einer *hohen Informationsdichte* […] (ebd., S. 22 ff., Herv. i. O.)

Darüber hinaus ist seit längerem gut herausgearbeitet, dass auf lexikalischer Ebene insbesondere Bedeutungsverschiebungen von Wörtern zwischen der Verwendung in Alltags- und Fachsprache große Herausforderungen darstellen (Walsch, 1991; Maier & Schweiger, 1999; Schleppegrell, 2007).

Inwieweit die Idee des Kontinuums von Alltags-, Bildungs- und Fachsprache auch für den Erwerb der Fachsprache Mathematik in der Hochschule Orientierung geben kann, wird in Abschnitt 2.3.1 betrachtet, nachdem wir in Abschnitt 2.2 die besonderen Merkmale dieser Fachsprache in Abgrenzung zur fachgebundenen Bildungssprache des Mathematikunterrichts (der Schule) herausgearbeitet haben.

2.2 Besondere Merkmale der Fachsprache Mathematik in der Hochschule

Im Folgenden betrachten wir die *Fachsprache Mathematik der Hochschule* in Abgrenzung zur *fachgebundenen Bildungssprache des Mathematikunterrichts*, um einschätzen zu können, in welchem Umfang ein Fachsprachwerb in der Studieneingangsphase erforderlich ist und inwieweit die schulbezogenen Betrachtungen zu sprachlichen Registern auf die Hochschule übertragbar sind. Als Ausgangspunkt dienen dabei zwei Beispiele aus Lehrtexten, in Abbildung 1 aus einem Schulbuch für Gymnasien und in Abbildung 2 aus einem Lehrbuch zur Analysis I. Der betrachtete fachliche Gegenstand ist jeweils der Funktionsbegriff. Der Schulbuchauszug (Abb. 1) stammt aus der fortgeschrittenen Sekundarstufe I.

Vor der Einführung linearer Funktionen wird im betrachteten Schulbuch ein allgemeinerer Funktionsbegriff thematisiert, wobei Funktionen als eindeutige Zuordnungen definiert werden. Der Rückgriff auf den bereits etablierten Begriff der Zuordnung findet vor dem Informationskasten knapp (und eher implizit) durch das Partizipialattribut „zugeordnet“ und im Informationskasten (inhaltlich nicht weiter hervorgehoben) im ersten Satz statt.

Funktionen werden häufig mit Kleinbuchstaben (f, g, h, …) bezeichnet.
Man verwendet z. B. den Anfangsbuchstaben der zugeordneten Größe und schreibt
f**: horizontale Entfernung (in m)* → ***Flughöhe des Basketballs (in m).
Den Ausdruck f(1,6) = 1,3 liest man „f von 1,6 ist gleich 1,3“ und interpretiert ihn im Kontext als „Einen Meter sechzig horizontal vom Abwurfpunkt entfernt hatte der Basketball eine Höhe von 1,3 Metern.“.

Bei Funktionen nennt man den Ausgangswert Stelle und einen zugeordneten Wert Funktionswert. Wenn man alle Wertepaare (Stelle | Funktionswert) als Punkte in ein Koordinatensystem einträgt, erhält man den Graphen der Funktion.

Eine eindeutige Zuordnung heißt **Funktion**.
Wenn eine Funktion f an der **Stelle** 2 den **Wert** 3 annimmt, schreibt man f(2) = 3 und spricht „f von 2 gleich 3“.
Der **Punkt P(2 | 3)** liegt dann auf dem **Graphen** der Funktion f.

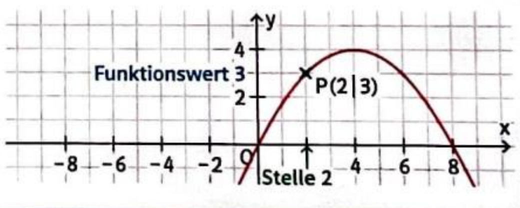


Abb. 1: Schulbuchauszug (Giersemehl et al., 2021, S.40) zum Funktionsbegriff

Im Vordergrund der Ausführungen stehen das betrachtete Beispiel („Basketballwurf“), das auf dem oberen (nicht abgebildeten) Teil der Seite ausführlicher diskutiert wird, konventionelle Schreib- und Sprechweisen sowie unterschiedliche Darstellungsarten. Die Betrachtungen von Argument und Funktionswert bleiben jeweils konkret (zahlenmäßig). Neben bildungs- und fachsprachlichen Mitteln umfasst der Schulbuchauszug auch Kontextlexik, die für das Beispiel benötigt wird, und mathematikdidaktische Sprechweisen („interpretiert ihn im Kontext“).

Insgesamt ist der Schulbuchauszug bildungssprachlich geprägt, was sich u. a. an der distanzierten und unpersönlichen Ausdrucksweise („werden … bezeichnet“, „Man verwendet“, „liest man“, „nennt man“, „erhält man“, „spricht man“ etc.) sowie der strukturierten Darstellung erkennen lässt. Dabei werden auch Verbalisierungen fachtypischer logischer Beziehungen („Wenn …, erhält …“, Folgerung mit „dann“) genutzt. Die Ausführungen bleiben beispielgebunden, Abgrenzungen sind zum Teil unscharf („werden häufig“). Für die intendierte beispielbasierte Begriffsbildung spielt insbesondere das Schaubild im Informationskasten eine zentrale Rolle, das sich als Angebot eines Prototyps (vgl. Ruwisch & Weigand, 2023) verstehen lässt.

Im kontrastierend betrachteten Auszug aus einem Lehrbuch zur Analysis I (Abb. 2) wird ebenfalls der Funktionsbegriff thematisiert. Dargestellt sind eine Definition und das zugehörige erste Beispiel. Die Begriffsbildung ist hier allgemein, knapp und präzise. So werden in drei kurzen Sätzen die Begriffe „reellwertige (reelle) *Funktion*“, „*Definitionsbereich*“ und „*Graph*“ definiert. Der Begriff „reellwertige (reelle) *Funktion*“ wird dabei unter Rückgriff auf den Begriff „Abbildung“[5] definiert. Im Vergleich zum Schulbuch ist die allgemeine symbolische Darstellung stärker prägend. Insbesondere bei der mengentheoretischen Definition des Graphen einer Funktion dürfte das Dekodieren der Zeichen für Studienanfänger:innen herausfordernd sein. (Wie ist der Ausdruck zwischen den Mengenklammern zu segmentieren?)

Unter den im Anschluss betrachteten Beispielen sind keine Prototypen, sondern Grenzfälle, die den Geltungsbereich des Begriffs ausleuchten. Die Begriffsbildung erfolgt vorrangig formal im Sinne der klassischen Theorie von Eigenschaftsbegriffen (vgl. ebd.), vermutlich auch, da bekannt ist, dass das vorrangige Arbeiten mit Prototypen in der Hochschulmathematik schnell an Grenzen stößt (vgl. Alcock & Simpson, 2002; Wilzek, 2021).

Der Lehrbuchauszug benötigt nur wenige allgemeine bildungssprachliche Mittel, die im Lehrbuch wiederholt auftreten, und vorranging Fachsprache (verbal und symbolisch) im engeren Sinne. Dabei

> ist die mathematische Fachsprache ein hoch entwickeltes Artefakt, das *eine große Informationsdichte auf kleinem Raum* erzeugt und dessen verständige Handhabung eine eigene Expertise erfordert. Mathematik in der Schule nimmt diese Kunstsprache nur in moderaten Ansätzen in Gebrauch und bedient sich überwiegend einer mit Fachwörtern durchsetzten natürlichen Sprache. (Hefendehl-Hebeker, 2016, S. 18)

Die verwendete mathematische Fachsprache ist insbesondere *redundanzfrei* und für das Verstehen ist zentral, dass *jedes* einzelne Wort und Zeichen „zusammen mit seiner Position in der Zeichenfolge“ (ebd., S. 19) dekodiert werden kann. Diese Bedeutung des einzelnen Zeichens wird von Berger (2004) in Anlehnung an Vygotskij (2017) beschrieben durch

> the mathematical sign has a cultural meaning which derives from its already established usage in mathematical discourse. Thus the learner strives to use the ‘new’ mathematical sign in a way that is compatible with is socially-sanctioned use by mathematics community. (ebd., S. 85)

Definition. Sei D eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Unter einer reellwertigen (reellen) *Funktion* auf D versteht man eine Abbildung $f\colon D \to \mathbb{R}$. Die Menge D heißt *Definitionsbereich* von f. Der *Graph* von f ist die Menge

$$\Gamma_f := \{(x,y) \in D \times \mathbb{R} : y = f(x)\}.$$

Beispiele

(10.1) Konstante Funktionen. Sei $c \in \mathbb{R}$ vorgegeben.

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto f(x) = c. \end{aligned}$$

Abb. 2: Lehrbuchauszug (Forster, 2016, S. 104) zum Funktionsbegriff

Ähnlich wie Hefendehl-Hebeker (2016) betrachten wir zur Verdeutlichung der Bedeutung des Verständnisses *jedes* Zeichens die Gruppenaxiome, genauer die Forderung der Existenz von neutralen und inversen Elementen (vgl. Fischer, 2014):

- Bei neutralen Elementen ist entscheidend, dass *ein* Element ($e \in G$) gefordert wird, das zu *allen* anderen Elementen ($a \in G$) in einer bestimmten Beziehung ($e * a = a$) steht.
- Bei inversen Elementen ist hingegen entscheidend, dass zu *allen* Elementen ($a \in G$) *jeweils ein* Element ($a' \in G$) gefordert wird, zu dem sie in einer bestimmten Beziehung ($a' * a = e$) stehen.

Dabei müssen Studierende auch lernen, mit der Ambivalenz zwischen der einerseits sehr präzisen Verwendung der Zeichen der Fachsprache und der andererseits kontextabhängigen Bedeutung einzelner Zeichen umzugehen (vgl. Hanna, 1991). So wird beispielsweise häufig mit $\sin^{-1}$ nicht die Kehrwertfunktion, sondern arcsin bezeichnet, während f^2 im Sinne des Potenzierens verstanden wird.

Die *logischen Beziehungen* zwischen einzelnen Zeichen, aber auch zwischen Begriffen, sind dabei eine Art „Kitt“, mit dem die Struktur der mathematischen Theorien geformt wird und der vielen Studierenden erfahrungsgemäß zunächst große Probleme bereitet. Der Umstand, dass kleine Unterschiede an der Sprachoberfläche tiefgreifende strukturelle Unterschiede festlegen können, dürfte erheblich zu diesen Problemen beitragen. Die Herausforderungen, die der Umgang mit logischen Beziehungen und Konstellationen auf der Ebene von Aussagen bereithält, hat Walsch (1991) anhand überzeugender Beispiele und in empirischen Studien herausgearbeitet.[6] Besonders herausfordernd war dabei die Unterscheidung zwischen Implikationen und den entsprechenden Äquivalenzen, Umkehrungen und Kontrapositionen.

Die spezifische Form erhält die Fachsprache Mathematik über die *Symbolik*, das *Fachvokabular* und die *logischen Beziehungen* hinaus durch die für sie typischen *fachsprachlichen Redewendungen* sowie durch das Zusammenspiel dieser Bestandteile (vgl. Ganesalingam, 2013). Dabei bezeichnen wir als *fachsprachliche Redewendungen* sowohl rhetorische Strukturen, wie sie nur in der Mathematik auftreten, als auch Satzkonstruktionen, die im Kontext der Fachsprache Mathematik eine andere Bedeutung als in der übergreifenden Bildungssprache haben. Besonders markant ist u. a. die Redewendung „ohne Beschränkung der Allgemeinheit“, der Beutelspacher (2009) den Titel seines Buchs mit „Tipps und Tricks zur Formulierung mathematischer Gedanken“ gewidmet hat. Fachsprachliche Redewendungen müssen wesentlich unter der *kognitiven Funktion* von Sprache (s. o.) betrachtet werden, da mit ihnen *fachspezifische Denkfiguren* einhergehen. Wir verdeutlichen an Beispielen, die in der Studieneingangsphase wiederkehrend auftreten, welche gedanklichen Herausforderungen mit ihnen zusammenhängen können:

- In einem Beweis wird mit zwei verschiedenen natürliche Zahlen a und b gearbeitet, wobei nur die Konstellation $b > a$ betrachtet wird, damit die Differenz $b - a$ wieder eine natürliche Zahl ist und somit im Folgenden Fallunterscheidungen vermieden werden können. Häufig liest man dann, dass dies „ohne Beschränkung der Allgemeinheit“ geschieht. Für Studienanfänger:innen kann dies verstörend sein, weil die Allgemeinheit durch diese Setzung scheinbar beschränkt wird. Expert:innen sehen hingegen direkt, dass von zwei verschiedenen natürlichen Zahlen stets eine größer als die andere ist, die Frage der Benennung mit a und b willkürlich ist und durch Umbenennung geändert werden kann.[7]
- Insbesondere in der Analysis I werden viele Untersuchungen bzw. Beweise mit einer nicht näher bestimmten positiven reellen Zahl begonnen. „Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest“ wird dann häufig geschrieben, um die anschließenden Folgerungen direkt für alle positiven reellen Zahlen zu schließen. Für Studienanfänger:innen ist oft schwer verständlich, wie dieses betrachtete ε zugleich beliebig und fest, also in gewisser Hinsicht veränderlich und unveränderlich sein kann. Die Schwierigkeiten beim Verständnis dieser Denkfigur lässt sich auch in eigenen Schriftprodukten erkennen, wenn dort steht „Sei $\varepsilon > 0$ fest, aber beliebig“ (vgl. Abb. 3).[8]
- Mit „Sei“ wird in einem Widerspruchsbeweis keine reale Festlegung durchgeführt, sondern eine Denkfigur eingeführt, in der eine hypothetische Setzung im Sinne von „Wir nehmen an“ stattfindet, obwohl bzw. weil die Überzeugung vorliegt, dass diese Annahme falsch ist. In ihrer präzisen Bedeutung und Funktion unterscheidet sich auch die fachsprachliche beweisstrukturierende Redewendung „Zu zeigen ist“ von ihrer Alltagsbedeutung – in der Mathematik wird eine abstrakte Argumentation eingefordert.

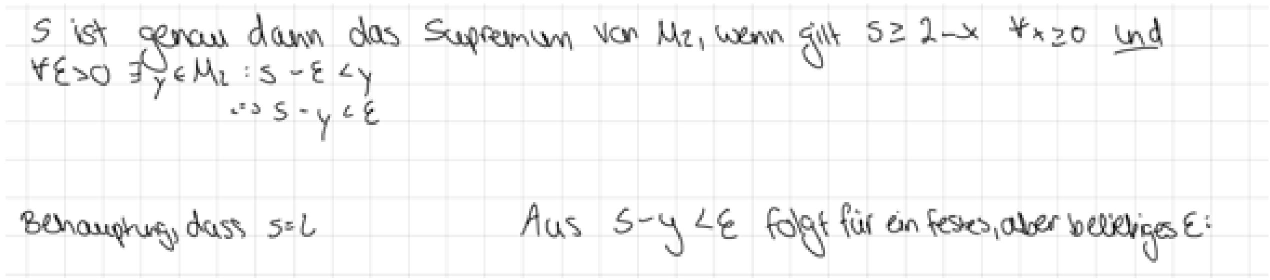


Abb. 3: Studierendenbearbeitung mit einer fachsprachlichen Redewendung

Zusammenfassend gehen wir davon aus, dass die *Explikation logischer Beziehungen* und die Verwendung *fachsprachlicher Redewendungen* einen zentralen *und* herausfordernden Teil der Fachsprache Mathematik darstellen. Studienanfänger:innen müssen diese Fachsprache (der Hochschule) erst noch erwerben, da sie weit über die fachgebundene Bildungssprache des Mathematikunterrichts hinausgeht bzw. deutlich anders geprägt ist.

Modelle für die Fachsprache liefern – in unterschiedlicher redaktioneller Reinheit – das gesprochene Wort von Lehrenden, Tafelanschriebe, Skripte, Lehrbücher sowie Internetquellen. Lehrbüchern kann dabei i. d. R. zugeschrieben werden, am elaboriertesten zu sein und die höchste redaktionelle Qualität aufzuweisen, sodass sie potenziell einen Referenzrahmen für Fachsprache darstellen können.

Gelegenheit zur Verschriftlichung von mathematischen Sachverhalten haben Studierende in der Analysis I in den üblichen Lehrveranstaltungen (Vorlesung/Übungen) in der Regel nur bei der Bearbeitung von Übungsaufgaben. Dabei tritt bei den üblichen Übungsaufgaben allerdings im Wesentlichen die Diskursfunktion *Argumentieren* (vor allem: Beweis von Aussagen, deduktive Absicherung von Umformungen und Abschätzungen) auf.

2.3 Erwerb der Fachsprache als spezifisches sprachliches Lernen

Für ein besseres Verständnis des Prozesses der Aneignung und der Verwendung der Fachsprache durch Studierende und als Interpretationshintergrund für die Schriftprodukte zu Analysis-I-Übungsaufgaben werden Theorien und Befunde aus der Sprachdidaktik herangezogen. Dabei wird zunächst geklärt, in welche sprachdidaktischen Kategorien sich die Fachsprache Mathematik (Register der Erst- bzw. Muttersprache vs. eine Zweit- oder Fremdsprache) und die zugehörigen Aneignungsprozesse (Lernen oder Erwerb) einordnen lassen. Anschließend werden für den Aneignungsprozess relevante Ausschnitte sprachdidaktischer Theorien bereitgestellt.

2.3.1 „Kontinuumshypothese der Sprachbildung“

Im Abschnitt 2.1.2 haben wir dargestellt, dass für Sprache im Mathematikunterricht überwiegend von einem Kontinuum von Alltags-, Bildungs- und Fachsprache ausgegangen wird (vgl. Leiss et al., 2023).[9] Der Lernprozess von der „Sprache des Verstehens“ zur „Sprache des Verstandenen“ (Wagenschein, 1980) wird aus dieser Sicht als Erweiterung der Alltags- und Bildungssprache um weitere fachsprachliche Mittel bzw. um das Register Fachsprache (des Mathematikunterrichts) verstanden.

Für die *Fachsprache der Mathematik der Hochschule* formuliert Hefendehl-Hebeker (2016) aber aus der Perspektive mathematischer Wissensbildung Parallelen zu einer *Fremdsprache*:

> Für das verständige Lesen eines mathematischen Textes müssen viele Ausdrücke, syntaktische Regeln und fachinterne Konventionen gleichzeitig im Bewusstsein gehalten werden, ähnlich wie der geläufige Umgang mit einer Fremdsprache die Verfügbarkeit von Vokabeln, grammatischen Regeln und Idiomen erfordert. (Hefendehl-Hebeker, 2016, S. 20)

In seinem Beitrag „Mathematics as a foreign language“ betont Ervynck (1992) darüber hinaus, dass es auch beim Erlernen der Mathematik (auf dem formalen Niveau der Hochschule) zunächst um die Einführung in eine neue bzw. (noch) fremde Kultur geht, die sprachlich etabliert wird und dementsprechend sprachlich erschlossen werden muss.

Rincke (2010) arbeitet für die Fachsprache Physik unter Nutzung entsprechender Betrachtungen von Vygotskij (2017)[10] zum Fremdsprachenerwerb heraus, dass dessen

> angenommene Parallelität in den Entwicklungen von Alltags- und Fachsprache auf der einen und Erst- und Fremdsprache auf der anderen Seite (Rincke, 2010, S. 257)

eine tragfähige Grundlage für empirische Untersuchungen sein kann.

> Er [Rincke, Erg. d. d. Verf.] postuliert […] für Alltags- und Fachsprache je eigene Entwicklungswege, wobei die Alltagssprache sich vom Objekt der Anschauung ausgehend entwickelt und die Fachsprache sich auf das Objekt der Anschauung hin entwickelt. (Vollmer & Thürmann, 2013, S. 53)

Rinckes empirische Befunde stärken diese Annahme (Rincke, 2010). Bei seinen Überlegungen ist zwar die Fachsprache des Physikunterrichts Gegenstand der Betrachtung, sodass vermutet werden könnte, dass eine Übertragung bereits auf den Mathematikunterricht möglich sein müsste. Im Physikunterricht tritt aber schon in der Schule in Erscheinung, dass die Fachsprache theoretische Begriffe umfasst, die nicht aus der Anschauung extrahiert werden können, sondern in einem theoretischen Begriffssystem entstehen, um von dort aus auf die Anschauung angewendet zu werden. Bei einer Übertragung auf Mathematik weist heutzutage erst das theoretische Begriffssystem der Hochschule die Parallelität auf, da die Begriffe in der Schule noch alltagsweltlich-anschaulich verankert sind (vgl. Hefendehl-Hebeker, 2016).

Liebendörfer (2018) sieht hingegen nur eingeschränkt Parallelen zwischen dem Fachsprach- und dem Fremdsprachenerwerb:

> […] anders als beim Erwerb einer Fremdsprache führen minimale Abweichungen in der Regel zu Verfälschung oder Verlust des Inhalts einer Aussage (Hefendehl-Hebeker, 2016). Ein weiterer Unterschied zum Fremdsprachenerwerb liegt darin, dass der Lernprozess der Sprache an Inhalten erfolgt, die in dieser Form nicht bekannt sind. (ebd., S. 41)

Gegen diese Einschränkungen kann allerdings im Hinblick auf die Sprachproduktion durch Lernende argumentiert werden, dass in der Fachsprache Mathematik zwar kleine Unterschiede zu großen Bedeutungsunterschieden führen (können), aber Mathematikkundige häufig dennoch verstehen, was Studierende in ihren Bearbeitungen ausdrücken möchten – so wie Muttersprachler:innen einer Fremdsprache häufig Sprachlernende verstehen, die noch nicht regelkonform sprechen. Für die Analysis I gehen wir außerdem davon aus, dass viele Inhalte zumindest propädeutisch aus der Schule bekannt sind und in der Hochschule präzisiert und formalisiert werden, sodass sprachliches und inhaltliches Lernen verschränkt erfolgen kann und Bedeutungen nicht grundständig neu konstruiert werden müssen. Des Weiteren ist auch in Fremdsprachen höchstens die Lexik den Lernenden inhaltlich aus der Erstsprache bekannt ist, nicht aber die „grammatischen Regeln und Idiome[]“ (Hefendehl-Hebeker, 2016, S. 20).

Zusammenfassend gehen wir daher mit Blick auf den Spracherwerb davon aus, dass die Fachsprache Mathematik der Hochschule eher als Fremdsprache betrachtet werden kann denn als weiteres Register auf einem Kontinuum. Dies hat wesentliche Konsequenzen für die Beforschung der Prozesse der Aneignung der Fachsprache:

> Fast keine der so gut untersuchten Gesetzmäßigkeiten der Entwicklung der Muttersprache wiederholt sich in ähnlicher Weise bei der Aneignung der Fremdsprache. (Vygotskij, 2017, S. 272)

2.3.2 Fachsprache „lernen“ oder „erwerben“?

Die Frage, wie die Prozesse der *Aneignung* der Fachsprache Mathematik der Hochschule eingeordnet und effektiv gestaltet werden können, ist sowohl für die Interpretation der Schriftprodukte von Studienanfänger:innen als auch für die Gestaltung der Lehre (inkl. der Rückmeldungen zu Übungsbearbeitungen) bedeutsam. In der Sprachdidaktik wird – ausgehend von der Unterscheidung zwischen beiläufigem und absichtlichem Lernen in der Psychologie – zwischen dem „Erwerb“ und dem „Lernen“ einer Fremdsprache unterschieden (vgl. Apeltauer, 1997, S. 14). Der *Erwerb* einer Fremdsprache findet nicht didaktisch geplant statt, während das *Lernen* in geplanten und gesteuerten Settings vollzogen wird (vgl. Königs, 2013). Dieser Unterschied wirkt sich auch auf die kognitiven Prozesse während der Aneignung aus:

> Mit der begrifflichen Differenzierung zwischen Lernen und Erwerben wird neben der […] unterschiedlichen Aneignungssituation auf unterschiedliche mentale Verarbeitungsmodi rekurriert: Der Erwerbende benötige keine explizite Korrektur bzw. werde durch sie in seinem Erwerbsvorgang nicht gefördert, und er systematisiere sprachliche Erscheinungen auch nicht, weil diese Systematisierung für ihn nicht hilfreich sei. Demgegenüber könne der Lernende von Fehlerkorrektur profitieren, und er orientiere sich ferner an Systematisierungen zur Beschleunigung des fremdsprachlichen Aneignungsvorgangs. (ebd., S. 323)

In der Sprachdidaktik scheint dabei Einigkeit darüber zu bestehen, dass auch beim Lernen einer Fremdsprache – und nicht nur beim Erwerb – „natürliche Gesprächssituationen zum Zentrum des Unterrichts“ (ebd., S. 324) gemacht werden sollen.

Die Aneignung der Fachsprache Mathematik weist in der Studieneingangsphase erfahrungsgemäß (mit Blick auf die im deutschsprachigen Raum übliche Gestaltung der Lehrveranstaltungen) Merkmale von Erwerb *und* von Lernen auf. Dabei wird überwiegend auf die fachlichen Inhalte, die Begriffsentwicklung und den Theorieaufbau fokussiert. Die Fachsprache wird eher beiläufig erworben. Die schriftliche Bearbeitung von Übungsaufgaben kann dabei als *natürliche* (sich aus der Sache ergebende) Kommunikationssituation aufgefasst werden. In unterschiedlichem Ausmaß reflektieren Lehrende darüber hinaus auch die Verwendung der Fachsprache, weisen auf Konventionen, syntaktische und semantische Aspekte oder typische Regelverstöße hin. Bei Rückmeldungen zu Übungsbearbeitungen könnte grundsätzlich auf individuelle Sprachprodukte eingegangen werden, was aber wohl eher unüblich ist.[11]

Für die Aneignung von Bildungssprache im schulischen Unterricht aller Fächer betonen Vollmer und Thürmann (2013) das „komplementäre Verhältnis von ‚Lernen' und ‚Erwerb'" (ebd., S. 51), in dem beide Spielarten ihren Platz haben. Neben den „möglichst authentischen und […] bedeutsamen Situationen" im Sinne des Erwerbs sind für sie auch „bewusstmachende Lernprozesse" wichtig. Dies könnte auch eine stimmige Perspektive auf die Aneignung der Fachsprache Mathematik in der Hochschule sein.

2.3.3 Interimsprache und Imitation

Für die Beforschung und Gestaltung der hier betrachteten Aneignungsprozesse und schriftlichen Sprachverwendung sind einige weitere Perspektiven aus der Sprachdidaktik relevant:

- Unter den Begriffen „Lernersprache" oder „Interimsprache" wird darauf verwiesen, dass Lernende sich im Laufe des Aneignungsprozesses schrittweise der Zielsprache nähern und dabei verschiedene Übergangsformen, die noch nicht vollständig zur Zielsprache passen, vorübergehend nutzen (vgl. Apeltauer, 1997; Raupach, 2013). Für die entsprechenden „Zwischensprachen" sind Dynamik, Veränderbarkeit und Individualität charakteristisch (Raupach, 2013). Diese Zwischensprachen treten unausweichlich auf und lassen sich insbesondere in schriftlichen Sprachprodukten rekonstruieren.
- Apeltauer (1997) betont die potenzielle Bedeutung von spezifischen Lernstrategien:

  > Bewußtes Steuern von Aneignungsprozessen scheint für bestimmte sprachliche Bereiche von Vorteil zu sein. Vor allem ältere Lerner, insbesondere Jugendliche und Erwachsene, können davon profitieren. (ebd., S. 98).

  Dabei kann die Verwendung von Sprachlernstrategien von individuellen Lernstilen (vgl. Kolb, 1985) abhängen. Die folgende „Ratestrategie" schreibt Apeltauer (1997, S. 99) „extrovertierten" Lernenden zu, die dem Lernstil „Akkomodation" nach Kolb (1985) zuneigen dürften, der durch konkrete Erfahrung und aktives Experimentieren geprägt ist:

  > Sie schnappen Äußerungen auf und versuchen, sie zu gebrauchen, wobei sie so tun, als ob sie die Äußerungen bereits verstehen würden (Ratestrategie). Dabei achten sie offenbar auf wiederkehrende Elemente und bemühen sich, die richtige Bedeutung zu erraten […] (Apeltauer, 1997, S. 99, i. O. m. Herv.).

Diese Herangehensweise bezeichnen wir im Folgenden als *Imitation*.

Bei allen Lernenden ist darüber hinaus eine „Transferstrategie" beobachtbar mit der „lexikalische Lücken" geschlossen werden (ebd.). Dabei werden Wörter der Erstsprache in Sprachprodukte der Fremdsprache eingebaut. In diesem Sinne lassen sich *Mischformen* von symbolischen und verbalen Ausdrücken bei der Bearbeitung von Übungsaufgaben verstehen.

3. Design der Untersuchung

Ausgehend von der Feststellung, dass bisher kaum Befunde zur Verwendung von Fachsprache Mathematik durch Studierende vorliegen, ist eine entsprechende *detaillierte erste Bestandsaufnahme* das Ziel der empirischen Untersuchung. Dabei soll insbesondere die *Phänomenvielfalt* bei der individuellen schriftlichen Verwendung der Fachsprache – im Sinne einer *Interimsprache* (vgl. 2.3.3) – erfasst werden. Die fachliche Richtigkeit der zugehörigen Aufgabenbearbeitungen wird dabei nicht näher betrachtet, da die Frage im Vordergrund steht, wie sich Studierende mit Blick auf ihre (aufgrund des Kontextes unterstellten) Intentionen schriftlich ausdrücken. Aufgrund der in Abschnitt 2.2 herausgearbeiteten zentralen Bedeutung wird dabei auf die *Explikation logischer Beziehungen* und auf *fachsprachliche Redewendungen* fokussiert.

Zum dynamischen Charakter der Interimsprache passend soll dabei neben querschnittlichen Betrachtungen auch die Entwicklung der schriftlichen Verwendung von Fachsprache im Verlauf der Analysis-I-Vorlesung exemplarisch in den Blick genommen werden. Lehrbücher werden als potenzieller Referenzrahmen für Fachsprache (vgl. 2.2) für die Entwicklung des Kategoriensystems in die Untersuchung einbezogen.

Die Auswertung entsprechender Bearbeitungen von Studierenden erfolgt im Rahmen einer *Qualitativen*

Inhaltsanalyse, die sich an den Konzepten von Mayring (2022) und Kuckartz (Kuckartz & Rädiker, 2022) orientiert (siehe 3.3 und 3.4).

3.1 Forschungsfragen

Das zuvor benannte Untersuchungsanliegen wird durch folgende Forschungsfragen konkretisiert.

FF1: Wo und wie treten Explikationen logischer Beziehungen bei der Bearbeitung von Übungsaufgaben auf?

Mit „wo" wird dabei nach der Stelle in einer Bearbeitung, an der eine entsprechende Explikation auftritt, zusammen mit ihrem direkten Umfeld gefragt. Dabei soll auch darauf geachtet werden, an welchen Stellen entsprechende Explikationen noch erwartbar – im Sinne von (für Expert:innen) „üblich" oder „naheliegend" – gewesen wären, aber nicht auftreten, um ggf. Verwendungsgewohnheiten aufzudecken. Mit „wie" ist die konkrete Ausdrucks- und Darstellungsweise gemeint.

FF2: Wo und wie werden fachsprachliche Redewendungen bei der Bearbeitung verwendet?

Bei der zweiten Forschungsfrage werden „wo" und „wie" in gleicher Weise wie bei der ersten verstanden. Anders als bei der Explikation logischer Beziehungen lassen sich hier allerdings keine „erwartbaren" Stellen festlegen, sodass diese Suchrichtung entfällt.

FF3: Welche Entwicklungen lassen sich bei der Verwendung dieser fachsprachlichen Mittel im Laufe eines Semesters beobachten?

Hier soll unter Bezug auf die in den beiden ersten Forschungsfragen vorliegenden Beobachtungen exemplarisch betrachtet werden, inwieweit sich bei entsprechend ausgewählten Studierenden intraindividuelle Unterschiede in der Fachsprachverwendung zwischen dem Anfang und dem Ende des Semesters beobachten lassen.

3.2 Datenmaterial

Für die angestrebte *detaillierte Bestandaufnahme*, bei der ein Schwerpunkt auf der Dokumentation der *Phänomenvielfalt* bei der individuellen schriftlichen Verwendung der Fachsprache liegt, wurden von 15 Studierenden der Analysis I jeweils Bearbeitungen zu zwei Übungsblättern, also insgesamt 30 Bearbeitungen, untersucht. Dabei stammt ein Übungsblatt vom Anfang des Semesters (Blatt 3 betrachtet wird Aufgabe 1, s. Anhang) und eins vom Ende des Semesters (Blatt 11, betrachtet wird wieder Aufgabe 1, s. Anhang). Bei Blatt 3, Aufgabe 1, sollen verschiedene Mengen auf ihr Infimum/Supremum bzw. Maximum/Minimum untersucht werden. Bei Blatt 11, Aufgabe 1, soll zunächst gezeigt werden, dass die Bildfolge einer Cauchyfolge unter einer gleichmäßig stetigen Funktion wieder eine Cauchyfolge ist, und anschließend, dass die Komposition zweier gleichmäßig stetiger Funktionen wieder gleichmäßig stetig ist (bei entsprechenden Definitionsbereichen). Bewusst wird erst bei Blatt 3 mit der Analyse begonnen, damit die Studierenden zuvor schon erste Erfahrungen mit der Fachsprache Mathematik machen konnten (aktiv und passiv). Die ausgewählten Aufgaben von Blatt 3 und Blatt 11 sind (mit Blick auf FF3) dabei geeignet die Verwendung vergleichbarer fachsprachlicher Mittel anzuregen.

Die Untersuchung der Bearbeitungen erfolgt zunächst querschnittlich (FF1 und FF2), jeweils mit allen 15 Studierenden. Bei der Durchführung der Kodierung erwiesen sich 15 Bearbeitungen als hinreichend, um eine Sättigung bzgl. der interessierenden Phänomenvielfalt zu erreichen. So zeigte sich bereits nach ca. zehn kodierten Bearbeitungen, dass die Berücksichtigung weiterer Bearbeitungen zunächst kaum noch und dann praktisch keine Ergänzungen im induktiven Teil des Kategoriensystems (siehe 3.3) ergaben.

Für die Absicherung des deduktiv gewonnenen Teils des Kategoriensystems wurden jeweils die ersten zehn Seiten von häufig verwendeten Lehrbüchern (in ihrer Rolle als potenzieller Referenzrahmen für Fachsprache) kodiert. Als häufig verwendete Lehrbücher lieferte eine kleine Umfrage an sechs Standorten (acht Lehrende) als meistgenannte Analysis-I-Lehrbücher Königsberger (2004), Forster (2016), Heuser (2009), Bröcker (1995) und Hieber (2018). Die weitere Erprobung der Arbeit mit dem Kategoriensystem mit Blick auf die Anreicherung um induktive Kategorien auf der untersten Ebene erfolgte mit zehn Bearbeitungen von Blatt 1.

Für die Beantwortung von FF3 wurden zwei ausgewählte Studierende hinsichtlich ihrer Entwicklung von Blatt 3 nach Blatt 11 untersucht. Zur Forschungsfrage passend wurden Studierende gesucht, bei denen es zu markanten Beobachtungen bei Blatt 3 auch einen Einsatz vergleichbarer fachsprachlicher Mittel bei Blatt 11 gab. Hieraus folgend fand eine Positivauswahl von Studierenden mit erkennbaren Änderungen in der schriftlichen Verwendung von Fachsprache statt.

3.3 Kategoriensystem

Die Entwicklung des Kategoriensystems erfolgte im Wesentlichen deduktiv (in Anlehnung an Mayring, 2022), nur in der untersten Ebene war direkt eine induktive Sammlung von Phänomen vorgesehen (in Anlehnung an Kuckartz & Rädiker, 2022). Dabei ist es sowohl bei der Entwicklung des Kategoriensystems als auch bei der Kodierung zu berücksichtigen, dass die *Qualitative Inhaltsanalyse* kein standardisiertes Instrument ist, sondern dem jeweiligen Material und der jeweiligen Fragestellung angepasst werden muss (vgl. Mayring, 2022).

Auf der obersten Ebene besteht das Kategoriensystem aus den beiden in Abschnitt 2.2 herausgearbeiteten (also deduktiv gewonnenen) Hauptkategorien[12] *Logische Beziehungen* und *Fachsprachliche Redewendungen.* Dabei ist die Unterscheidung zwischen fachsprachlichen Redewendungen und logischen Beziehungen auf den ersten Blick nicht immer trennscharf: Das Wort „sei“ wird im Kategoriensystem je nach Verwendung als *Fachsprachliche Redewendung* oder *Logische Beziehungen/Setzung* eingeordnet. Die genauere Betrachtung des Wortes „sei“ macht diese Unterscheidung nötig (und möglich), da je nach Verwendung unterschiedliche Absichten angesprochen werden. So kann „sei“ im Sinne einer Definition und Setzung im konstruktiven Sinn verwendet werden oder aber im hypothetischen Sinn wie zu Beginn eines Widerspruchbeweises als Synonym zu „Angenommen, ...“ auftreten (vgl. 2.2).

Die Hauptkategorie *Logische Beziehungen* besteht aus den (deduktiv gewonnenen) Kategorien *Äquivalenzen, Implikationen, Quantoren, Setzungen* und *Logische Konjunktionen* mit den jeweiligen Subkategorien *verbal*, *symbolisch, fehlt* und *Mischform*. Bei der Deduktion der Kategorien und Subkategorien wurde auf einen geteilten Erfahrungshintergrund zu Mathematikvorlesungen in der Studieneingangsphase zurückgegriffen, der z. B. auch Beutelspacher (2009) erkennbar zugrunde liegt. Dort finden sich zahlreiche übliche Konkretisierungen. Die Vermutung, dass Studierende in der Studieneingangsphase Mischformen aufgrund von lexikalischen Lücken benutzen könnten, ergibt sich aus der Erfahrung und Überlegungen zur Transferstrategie (vgl. 2.3.3).

Die Subkategorien werden mit Blick auf die Tragfähigkeit der Darstellung (hinsichtlich einer unterstellten Intention) jeweils nach *richtig, semantisch falsch* und *syntaktisch falsch* unterteilt, wobei auf die verwendeten fachsprachlichen Mittel fokussiert wird und die fachliche Richtigkeit unberücksichtigt bleibt. Für *richtig* vs. *semantisch falsch* bedeutet dies, dass die Schriftsprachprodukte darauf hin betrachtet wurden, ob die Studierenden ihre (aufgrund des Kontextes unterstellte) Intention fachsprachlich tragfähig ausgedrückt haben. Wenn also vermutlich eine Äquivalenz ausgedrückt werden sollte, obwohl aus fachlicher Sicht keine Äquivalenz vorliegt, wurde nur darauf geachtet, ob die Äquivalenz angemessen (verbal oder symbolisch) dargestellt wurde.

Um die Forschungsfragen, die nach konkreten *Stellen* und *Arten* des Auftretens fragen, beantworten zu können, sind auf der jeweils untersten Ebene (zunächst noch leere) Platzhalter für *induktive Anreicherungen* vorgesehen, um die individuelle Verwendung der Fachsprache dokumentieren zu können.

Die Hauptkategorie *Fachsprachliche Redewendungen* wurde mit den (deduktiv gewonnenen) Kategorien *Struktur eines Beweises* und *Logische Redewendungen* angelegt, die wiederum Platzhalter für induktive Anreicherungen enthalten. Bei der Absicherung des Kategoriensystems mithilfe der Lehrbücher ergab sich hier zusätzlich die (induktiv ergänzte) Kategorie *Habituelle Wendungen,* konkretisiert durch Ausdrücke wie „leicht“ (zu sehen) und „offenbar“ (gilt). Die Verwendung dieser Ausdrücke ist aus der Sache heraus nicht erforderlich, scheint aber für ein bestimmtes Mitteilungsbedürfnis zu stehen. Dies könnte beispielsweise der Fall sein, wenn markiert werden soll, dass ein Sachverhalt allen (fiktiv) Beteiligten klar ist bzw. klar sein sollte.

Darüber hinaus gab es keine weitere Anreicherung des deduktiv gewonnenen Teils des Kategoriensystems durch die Kodierung der Lehrbücher.[13] Die probeweise induktive „Füllung der Platzhalter“ anhand der zehn Bearbeitungen von Blatt 1 deutete ebenfalls auf die Tragfähigkeit des intendierten Vorgehens und eine relativ schnelle Sättigung bei der Erfassung der Phänomenvielfalt hin. Ein exemplarischer Auszug des Kategoriensystems findet sich in Abbildung 4 für die Kategorie *Quantoren.* Auszüge für die Kategorie *Implikationen* und die Hauptkategorie *Fachsprachliche Redewendungen* befinden sich im Anhang.

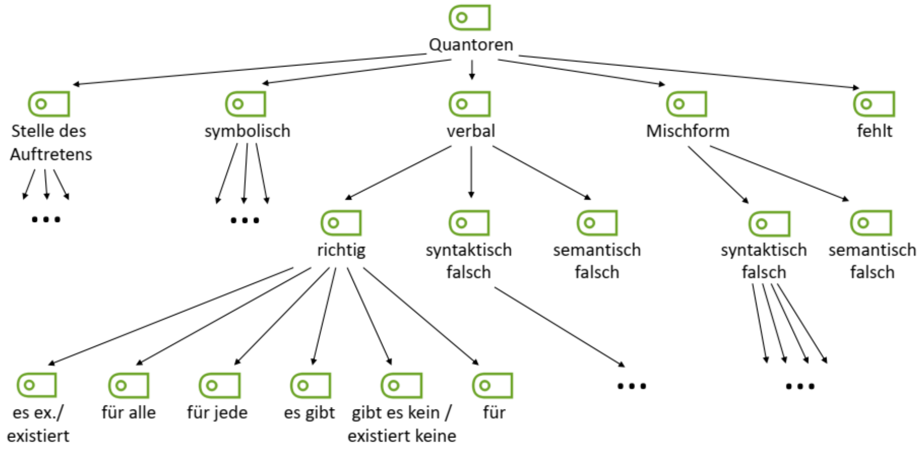


Abb. 4: Kategoriensystem – Auszug „Quantoren“

3.4 Kodierung

Die Bearbeitungen der Studierenden sind sehr individuell, sodass keine schematische Segmentierung in Kodiereinheiten möglich ist. Vielmehr muss bei jeder Bearbeitung für jedes Zeichen bzw. jede Zeichenkombination entschieden werden, ob logische Beziehungen oder fachsprachliche Redewendungen kodiert werden können. Zusätzlich muss über den Text „hinausgedacht“ werden, um das etwaige „Fehlen“ von (in gewisser Hinsicht erwarteten) Explikationen logischer Beziehungen kodieren zu können. Die Identifikation solcher Stellen und die Einordnung in die Subkategorie *fehlt* wird anhand der Bearbeitung in Abbildung 5 erläutert.[14]

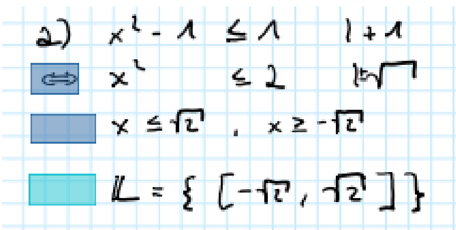


Abb. 5: Beispiel für die Vergabe der Subkategorie *fehlt*

Im ersten Schritt wurde die logische Beziehung symbolisch expliziert. Aus Expert:innensicht wäre eine entsprechende Explikation in den beiden folgenden Schritte genauso „üblich“ oder „naheliegend“ und daher in unserem Sinne „erwartbar“ (vgl. 3.1, FF1).

Die Kodierung hinsichtlich der Einschätzung der fachsprachlichen Tragfähigkeit – zunächst ohne Berücksichtigung der fachlichen Korrektheit (vgl. 3.3) – verdeutlichen wir an der Bearbeitung in Abbildung 6.

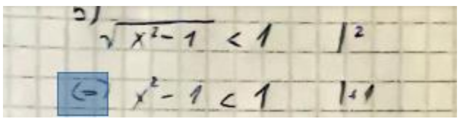


Abb. 6: Beispiel für (semantisch und syntaktisch) *richtig*

Hier haben wir aufgrund des Kontextes angenommen, dass eine Äquivalenzumformung symbolisch expliziert werden sollte. Diese Intention wurde fachsprachlich tragfähig (semantisch und syntaktisch *richtig*) notiert, was entsprechend für die *Art des Auftretens* der Explikation kodiert wurde. Der Aspekt der fachlichen Korrektheit ist bei der Kodierung der *Stelle des Auftretens* berücksichtigt worden, indem die Subkategorie *symbolisches Umfeld* auf der untersten Ebene induktiv um *keine Äquivalenz beim Quadrieren* ergänzt wurde.

Auf diesem Weg erfolgten bei den 30 untersuchten Bearbeitungen an insgesamt ca. 2500 Stellen ca. 5000 Kodevergaben, da jeweils die *Stelle* und die *Art des Auftretens* kodiert wurden. Die Kodierung erfolgte dabei konsensuell (vgl. Kuckartz & Rädiker, 2022) im Team (der Autor:innen).

Die *induktive Anreicherung* des Kategoriensystems auf der untersten Ebene („Füllung der Platzhalter“) erforderte folgende Ausbalancierung: Zum einen sollte die Vielfalt der verwendeten sprachlichen Mittel hinreichend differenziert abgebildet werden, zum anderen sollte die Kategorisierung übersichtlich bleiben und „im Wesentlichen gleiche“ Ausprägungen sollten zusammengefasst werden. Dies führte dazu, dass alle Ausprägungen beim erstmaligen Kodieren einen eigenen Kode erhalten haben Nachfolgend wurden solche Kodes zusammengefasst, die in der gleichen Situation (mathematisch und grammatikalisch) verwendet werden können. Dieses Vorgehen der induktiven Anreicherung – im Sinne der induktiven Kategorienbildung bei Kuckartz und Rädiker (ebd.) – soll am Beispiel der verbalen Explikation von Implikationen verdeutlicht werden: So werden beispielsweise die Kodes *also gilt*, *ist also, dann gilt, dann sind, da ist, ist da, somit ist, somit gilt* und *somit bleibt* zur Sammelkategorie *also/dann/somit/da* *gilt/ist/bleibt* verbunden. Die Kodes *erhält man, es liefert* und *ergibt sich* werden ebenfalls zusammengefasst, da hier die unpersönliche Satzkonstruktion im Vordergrund steht. Alle induktiven Anreicherungen bezüglich der Art des Auftretens bei *Implikationen* finden sich in der entsprechenden Abbildung im Anhang.

4. Ergebnisse

In den folgenden Abschnitten 4.1 bis 4.3 werden die Ergebnisse zu den Forschungsfragen FF1 bis FF3 differenziert beschrieben, bevor sie in Abschnitt 5 verdichtet und weitergehend diskutiert werden.

4.1 Explikation logischer Beziehungen

Zu FF1 stellen wir die Ergebnisse entlang der Kategorien (*Äquivalenzen*, *Implikationen*, *Quantoren*, *Logische Konjunktionen* und *Setzungen*) vor.

- *Äquivalenzen* wurden *verbal*, *symbolisch* oder gar nicht (Kode: *fehlt*) verwendet, *Mischformen* traten nicht auf. Dabei wurde der Kode *fehlt* vergeben, wenn an der jeweiligen Stelle die Kennzeichnung der Äquivalenz erwartbar gewesen wäre. Äquivalenzen wurden symbolisch nahezu immer richtig verwendet. Bei der richtigen verbalen Explikation von Äquivalenzen wurde von Studierenden ausschließlich *genau dann, wenn* verwendet.

  Der Subkode *semantisch falsch* wurde nur bei der verbalen Explikation von Äquivalenzen mehrmals vergeben. Dabei wurden Äquivalenzen in Definitionen von Studierenden durch die konditionale Konjunktion *wenn* ausgedrückt, die im Wortsinne nur eine Bedingung und keine Äquivalenz ausdrückt.[15]

- *Implikationen* wurden symbolisch oder verbal ausgedrückt, am häufigsten tritt die Sammelkategorie *also/dann/somit/da gilt/ist/bleibt* auf, aber auch *d. h.*, *denn, da* und *weil* kommen vor. Die Kodes *wenn/falls* und *(daraus) folgt* wurden deutlich seltener verwendet. Bei nahezu allen Studierenden (eine Ausnahme) wurden Implikationen auch symbolisch ausgedrückt, wobei auch syntaktisch falsche Zeichen verwendet wurden, z. B. „→“, große geschweifte Klammern (ggf. mit Pfeilspitze) und weitere Pfeilsymbole. Die Studierenden, die syntaktisch falsche Zeichen verwendet haben, verwendeten diese aber nicht durchgängig, sondern auch manchmal das richtige Zeichen. Mischformen wie „⇒ da“ kamen selten vor.

  Wenn man berücksichtigt, dass die Sammelkategorien jeweils mehrere konkrete Ausprägungen zusammenfassen, lässt sich eine große Ausdrucks- und Darstellungsvielfalt für die Explikation von *Implikationen* festhalten, wobei auch syntaktisch falsche Verwendungen eine Rolle spielen.

- *Quantoren* wurden von den Studierenden häufiger symbolisch als verbal verwendet, was grundsätzlich an den untersuchten Aufgaben liegen kann. Richtige Verbalisierungen waren *es gibt/ existiert keine*, *es ex./existiert/gibt*, *für jede* und *für alle*. Die symbolische Verwendung erfolgte häufig richtig, jedoch verwendete ein Drittel der Studierenden neben der richtigen symbolischen Explikation auch syntaktisch falsche Varianten. Dabei scheint (fast) jede:r dieser Studierenden eigene Varianten entwickelt zu haben. Beispielsweise wurde ein Komma vor dem Quantor verwendet, die übliche Grammatik des Quantors nicht beachtet, indem er in Äquivalenzumformungen auftrat, Ausdrücke der Form $Max(M_1) = \nexists$ auftraten oder die an den Existenzquantor geknüpfte Bedingung mit einem Pfeil ausgedrückt wurde. Mischformen traten selten auf, wurden aber verwendet, wie z. B. $\exists\ ein$ bzw. $\exists\ kein$ oder ∀ *für*.

  Auch bei der Explikation von *Quantoren* gab es also eine große Ausdrucks- und Darstellungsvielfalt, wobei syntaktische Fehler häufiger auftraten. Inwieweit hinter den syntaktischen Fehlern auch gedankliche Schwierigkeiten im Umgang mit Quantoren steckten, lässt sich allein anhand der schriftlichen Bearbeitung nicht klären.

- *Logische Konjunktionen* wurden nur verbal und symbolisch von den Studierenden verwendet. Verbal fand sich die Konjunktion und die verbale Kennzeichnung eines Widerspruchs. Eine verbale syntaktisch falsche Verwendung ließ sich nur bei einem Lernendem ausmachen – der Widerspruch wird durch die Phrase *bietet keine Lösung für x* gekennzeichnet. Symbolisch fand sich die Verwendung von ∧, ∨ oder ↯. An einigen Stellen fehlten logische Konjunktionen (im Sinne unseres Kategoriensystems und unserer Kodierung), aber dies sind seltene Ausnahmen.

- *Setzungen* wurden verbal durch *Sei/Seien, setzt/definiert* oder *wähle* ausgedrückt. Häufig wurden Setzungen auch symbolisch ausgedrückt durch „≔“, nur ein:e Student:in verwendete stattdessen als syntaktisch falsche Variante einen Doppelpunkt (ohne Gleichheitszeichen).

Die Verwendung von Setzungen schien damit insgesamt keine großen Schwierigkeiten zu bereiten.

4.2 Verwendung fachsprachlicher Redewendungen

Die Darstellung der Ergebnisse zu FF2 erfolgt wieder entlang der Kategorien (*Strukturierung eines Beweises, Logische Wendungen* und *Habituelle Wendungen*).

- Als Redewendungen, die der *Strukturierung eines Beweises* dienen, wurden häufig verwendet: *wie zu zeigen/zu zeigen (ist), Wir nehmen an/Sei/Angenommen, um zu zeigen* oder *es genügt zu zeigen*. Das Ende eines Beweises wurde von Studierenden ausschließlich symbolisch mit Variationen von ■ markiert.
- *Logische Redewendungen* konnten wir in unserer Stichprobe nicht finden, was grundsätzlich der Aufgabenauswahl geschuldet sein kann – und bei unserer Aufgabenauswahl auch plausibel ist. Anders als bei anderen Kategorien lassen sich hierzu mit unserem Datenmaterial also kaum Aussagen treffen.
- *Habituelle Redewendungen* wurden von Studierenden nur selten verwendet, dafür aber bereits beim dritten Blatt. Konkret schrieben Studierende „Es ist klar“ oder „Dies ist offensichtlich“, wofür der Kode *leicht/offenbar* vergeben wurde. Aus dem Kontext war dabei kaum ersichtlich, warum diese Redewendungen genutzt wurden. Plausibel wäre sowohl die *Imitation* der Zielsprache der Expert:innen als auch die bewusste Markierung, dass der betrachtete Sachverhalt für nicht beweisbedürftig gehalten wurde.

4.3 Entwicklung fachsprachlicher Mittel

Anhand zweier ausgewählter Studierender soll die mögliche Entwicklung der schriftlich verwendeten Fachsprache (im Sinne einer *Interimsprache*) genauer betrachtet werden. Der Fokus liegt dabei auf der Nutzung (symbolisch verwendeter) Implikationen, fachsprachlicher Redewendungen und symbolisch verwendeter Quantoren.

Student:in 1 verwendete auf Blatt 3 verschiedene Arten von Pfeilen und den Pfeil „→“ in verschiedenen Bedeutungen (vgl. Abb. 7).

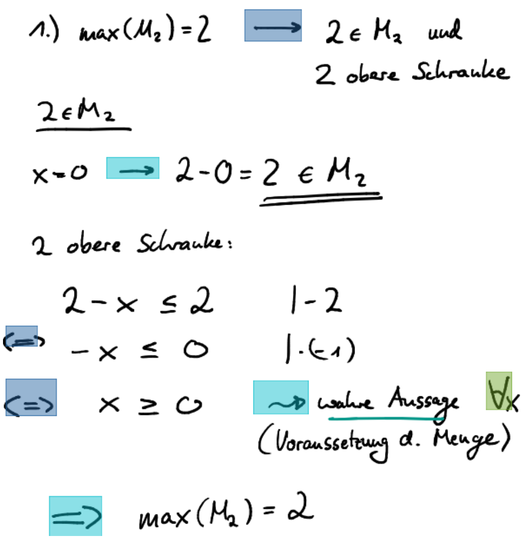


Abb. 7: Student:in 1, Blatt 3

Der Pfeil „→“ sollte einerseits ausdrücken, was zu zeigen ist, und andererseits, was eingesetzt wird. Der geschlängelte Pfeil sollte vermutlich ausdrücken, dass gefolgert wurde, dass eine Aussage wahr ist. Unten wurde dann ein Implikationspfeil verwendet, um die Schlussfolgerung, dass das Maximum der Menge 2 ist, zu markieren.

Bei Blatt 11 (Abb. 8 u. 9) verwendete Student:in 1 Pfeile viel differenzierter bzw. (bewusst) nicht. Der zu zeigende Sachverhalt wurde mit „z.zg“. eingeleitet, und ein unspezifischer Pfeil wurde nur noch parallel zur verbalen Implikation „d. h.“ verwendet. In vielen Situationen wurden sowohl verbale Implikationen wie „da“ und „somit“ als auch der Implikationspfeil richtig verwendet, wenn auch teilweise vertikal. Es konnte also einerseits ein Zugewinn an Souveränität im Umgang mit Pfeilen und allgemein der Explikation von Implikationen festgestellt werden, die Bearbeitung endete andererseits aber noch mit einem großen unspezifischen Pfeil, der zwei vorab ausgeführte Überlegungen zu einem Fazit verbindet.

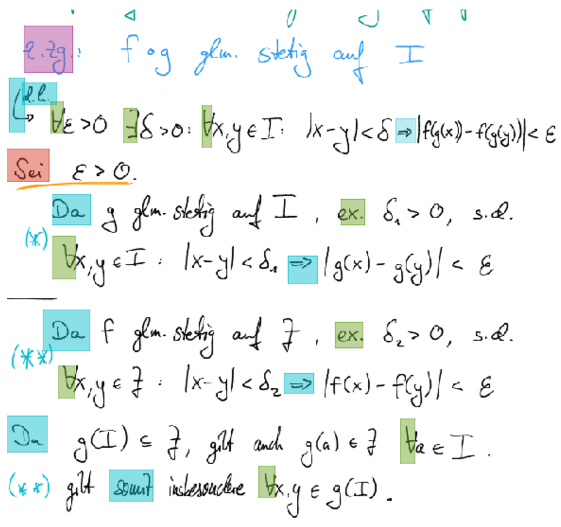


Abb. 8 Student:in 1, Blatt 11 -Teil I

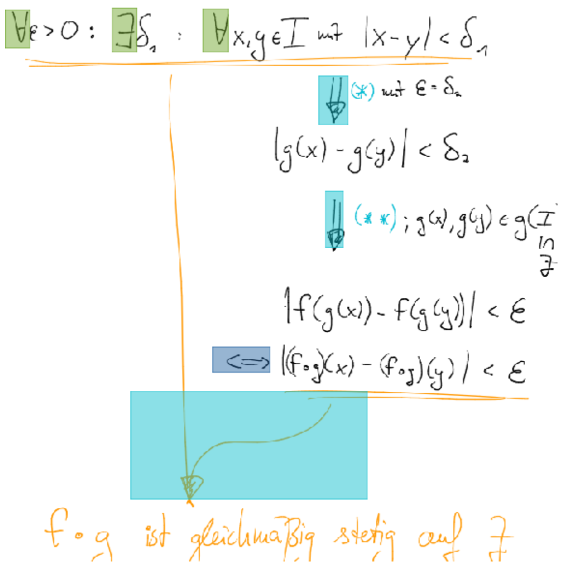


Abb. 9: Student:in 1, Blatt 11 -Teil II

Bei der Analyse der (hier nicht abgebildeten) Bearbeitungen von Student:in 2 fällt die Entwicklung bei der Verwendung von *Quantoren* auf. Auf Blatt 3 wurden Quantoren unkonventionell verwendet, z. B.: $\exists x \geq 1 \rightarrow 1+\frac{1}{x} < 1+\varepsilon$. Die Bedingung für den Quantor wurde mittels eines Pfeilsymbols anstelle eines Doppelpunkts „sodass", oder „mit" dargestellt. Bei Blatt 11 trat diese Ausdrucksform nicht mehr auf, hier stand $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ sd$.

Bei beiden exemplarisch betrachteten Studierenden ließ sich also eine mögliche *Entwicklung der Interimsprache* in Richtung der Zielsprache feststellen, da nicht plausibel ist, dass die beschriebenen Darstellungen durch die jeweiligen Aufgabenstellungen induziert waren. Diese Entwicklung ist besonders interessant, weil in der Lehrveranstaltung bei der Korrektur der Bearbeitungen *kein* besonderes Augenmerk auf Rückmeldungen zur Darstellungsqualität gerichtet war.

5. Diskussion und Ausblick

Im Folgenden werden die Ergebnisse aus den Abschnitten 4.1 bis 4.3 zu Antworten auf die Forschungsfragen 1 bis 3 verdichtet, vor dem Hintergrund der Theorie diskutiert und hinsichtlich vorhandener Limitationen reflektiert. Anschließend werden mögliche Folgerungen für die vertiefte Forschung im Bereich der Hochschuldidaktik der Mathematik und für die Entwicklung der Lehrpraxis erörtert.

5.1 Diskussion der Ergebnisse

5.1.1 Beantwortung der Forschungsfragen

Die zuvor dargestellten Ergebnisse lassen sich direkt den einzelnen Forschungsfragen zuordnen. Für das „Wo" in FF1 und FF2 lässt sich dabei sagen, dass die Kodierung der *Stelle des Auftretens* keine relevanten Muster hervorgebracht hat.[16] Dabei wurde die Frage nach dem „Wo" gestellt, um erfahrungsbasierte Hypothesen, wie beispielweise, dass gewisse Arten des Auftretens in Abhängigkeit von der Art der Stelle (nicht) auftreten, zu überprüfen. Eine Vermutung war zum Beispiel, dass Quantoren im Fließtext überwiegend verbal verwendet werden oder Implikationen häufiger fehlen, wenn sie verbal vorkommen, als bei einem symbolischen Auftreten in Umformungsketten. Diese Hypothesen ließen sich jedoch nicht durch die Ergebnisse unterstützen.

FF1: *Wo und wie treten Explikationen logischer Beziehungen bei der Bearbeitung von Übungsaufgaben auf?*

Logische Beziehungen wurden sowohl symbolisch als auch verbal mit einer großen Vielfalt expliziert. Mischformen aus verbaler und symbolischer Darstellung traten seltener auf, als aufgrund der Vorüberlegungen („Transferstrategie", vgl. 2.3.3) erwartet wurde. Die aufgetretenen syntaktischen Fehler scheinen nicht hartnäckig zu sein. Die größte Herausforderung bestand bei der Darstellung von Quantoren. Für „fehlende" Explikationen logischer Beziehungen ließ sich kein Muster erkennen.

FF2: *Wo und wie werden fachsprachliche Redewendungen bei der Bearbeitung verwendet?*

Fachsprachliche Redewendungen spielten bei den untersuchten Bearbeitungen eine geringere Rolle als die Explikation logischer Beziehungen, was an der Aufgabenauswahl liegen kann. Die größte Relevanz hatten Redewendungen zur Strukturierung eines Beweises. Insgesamt war die Verwendung fachsprachlicher Redewendungen nicht so herausfordernd, wie dies vorab erwartet wurde. Interessant – weil „schillernd" – ist der Bereich der habituellen Wendungen, die von den Studierenden zwar selten genutzt wurden, für deren Nutzung es aber anscheinend ein Bedürfnis gibt. Möglicherweise wurden sie frühzeitig als Element der fachlichen Sozialisation bzw. Enkulturation erkannt (z. B. als „Schmuck der Fachsprache").

FF3: *Welche Entwicklungen lassen sich bei der Verwendung dieser fachsprachlichen Mittel im Laufe eines Semesters beobachten?*

Bei den beiden längsschnittlich betrachteten Studierenden zeigte sich jeweils ein Zugewinn an Souveränität bei der Verwendung der

Fachsprache. Hiermit ist jeweils gemeint, dass sich die individuellen Ausdrucks- und Darstellungsweisen (im Sinne einer Interimsprache) in Richtung der konventionellen Fachsprache entwickelten. Hier muss berücksichtigt werden, dass es sich bei den beiden Studierenden um eine Positivauswahl handelt, an der entsprechende Entwicklungsmöglichkeiten aufgezeigt werden konnte.

5.1.2 Zusammenfassende Diskussion

Die große Vielfalt, die sich insgesamt bei den Ausdrucks- und Darstellungsweisen von Studierenden zeigt, lässt sich nicht fachlich begründet auf eine kleine(re) Auswahl einschränken. Da Studierende vermutlich bevorzugt Darstellungen verwenden, bei denen sie sich (bereits einigermaßen) sicher in der Verwendung fühlen, sollte die Vielfalt nicht sachfremd normiert werden.

Studierende scheinen dabei auch ohne spezifische Rückmeldungen (z. B. im Sinne einer Korrektur der Darstellungen) die individuelle Form der Fachsprache schriftlich zunehmend im Sinne der Konventionen zu verwenden. Da Hintergrundinformationen zur konkreten Lehrveranstaltung darauf hindeuten, dass hier keine spezifische Reflexion oder Rückmeldung erfolgte, kann die skizzierte Entwicklung der Fachsprache (FF3) als gelingender Prozess des *Erwerbs* (vgl. 2.3.2) verstanden werden.

Insgesamt kann es eine didaktisch tragfähige Perspektive sein, die Aneignung der Fachsprache Mathematik in Parallelität zum *Erwerb* einer *Fremdsprache* zu betrachten, bei dem eine individuelle und dynamische *Interimsprache* auftritt und *Imitation* eine produktive Rolle spielen kann (vgl. 2.3.3). Aus Sicht des Spracherwerbs können auftretenden Fehler (im Sinne eines Verstoßes gegen Konventionen) und nicht vollständig verstandene Nachahmungen als natürliche Bestandteile gelingender Erwerbsprozesse betrachtet werden.

Es kann daher auch stimmig sein, den Erwerb der Fachsprache nicht mit zu starken Interventionen im Sinne des Sprachenlernens zu begleiten, sondern verstärkt auf die Schaffung „natürlicher" fachsprachlicher Kommunikationssituationen und -anlässe zu achten. Dennoch bleibt zu prüfen, ob bzw. wie „bewusstmachende Lernprozesse" (Vollmer & Thürmann, 2013, S. 51) zur Fachsprache Mathematik effektiv sein können (vgl. 2.3.2).

5.1.3 Limitationen der Untersuchung

Für die berichteten Ergebnisse und deren Diskussion müssen die Grenzen der empirischen Studie berücksichtigt werden. Die Untersuchung hat an *einem* Standort in *einer* Analysis-I-Vorlesung stattgefunden und ein begrenztes Aufgabenrepertoire umfasst. Der deduktiv entwickelte Teil des Kategoriensystems dürfte aber über diese Grenzen hinaus anwendbar bleiben. Die Sättigung, die während der Kodierung für die induktiv ausdifferenzierten Kategorien frühzeitig eingetreten ist, deutet auch hier auf nicht zu enge Grenzen der Anwendbarkeit hin. Dennoch dürften sowohl der Inhaltsbereich (Analysis) als auch die ausgewählten Aufgaben noch einen gewissen Einfluss haben. Insbesondere bei einem Blick in die Lineare Algebra dürften sich weitere Ergänzungen auf der untersten Ebene ergeben.

Hinsichtlich der Rekonstruktion möglicher Entwicklungsverläufe (FF3) muss berücksichtigt werden, dass hier bewusst zwei Studierende ausgewählt wurden, bei denen sich Änderungen bei der Verwendung von Fachsprache beobachten ließen. Damit ist zwar einerseits belegt, dass entsprechende Verläufe im Sinne eines Fachspracherwerbs ohne zielgerichtete Intervention möglich sind, andererseits ist aber offen, ob es auch anders geartete Verläufe (in die erwünschte Richtung der Zielsprache) gibt.

5.2 Folgerungen für Forschung und Entwicklung

Aus den zusammengefassten und diskutierten Ergebnissen lassen sich einige relevante Impulse für die Forschung im Bereich der *Hochschuldidaktik der Mathematik* ableiten und Anregungen für die *Entwicklung der Lehrpraxis* vorschlagen.

5.2.1 Folgerungen für die Forschung

Die hier berichtete Studie stellt eine *erste Bestandsaufnahme* zur schriftlichen Verwendung von Fachsprache durch Studierende dar, die durch weitere Settings (z. B. andere Textsorten als Übungsbearbeitungen oder in der Linearen Algebra) ergänzt werden sollte. Die von uns realisierte Vorgehensweise bei der Kodierung und der deduktiv entwickelte Teil des Kategoriensystems (mit der induktiven Ergänzung der habituellen Wendungen) stellen hierfür bewährte Ausgangspunkte dar.

In Interviewsettings sollte darüber hinaus auch die Rezeption von schriftlicher Fachsprache untersucht werden, um etwaige Schwierigkeiten oder Hürden bei der Arbeit mit Fachtexten (z. B. aus Lehrbüchern, Skripten, Mitschriften oder Internetquellen) zu erfassen. Zusätzlich können subjektive Theorien von

Studierenden, z. B. am Ende des ersten Semesters, zu Herausforderungen beim Umgang mit Fachsprache und deren Bewältigung eine weitere wichtige Perspektive auf den Prozess des Erwerbs der Fachsprache liefern.

Die im Abschnitt 5.1.2 aufgestellte These, dass sich die Aneignung der Fachsprache hinsichtlich des Prozesses mit dem Erwerb einer Fremdsprache vergleichen lässt, hat insbesondere hinsichtlich der Gestaltung der Lehrpraxis erhebliche Konsequenzen. Daher sollte die These in weitere Studien abgesichert werden. Diese können beispielsweise in Anlehnung an die Herangehensweise von Rincke (2010) gestaltet werden.

5.2.2 Anregungen für die Lehrpraxis

Wie zuvor dargestellt vermuten wir begründet, dass es sich bei der Aneignung von Fachsprache stärker um *Erwerb* als um *Lernen* (vgl. 2.3.2) handelt, wobei wir das „komplementäre Verhältnis“ von beiden im Sinne von Vollmer und Thürmann (2013) beachten. Daher können Korrekturen und Reflexionen zum Fachspracherwerb zwar (behutsam) gegeben bzw. angeregt werden, im Vordergrund sollte aber die Anregung fachsprachlicher Kommunikation in authentischen Situationen stehen. Insbesondere sollte die individuelle *Interimssprache* als üblicher – bzw. notwendiger – Zwischenschritt betrachtet werden.

Die Frage von lernförderlichen Feedbacks wird für viele Lehrveranstaltungen vor allem mit Blick auf die Übungsbearbeitungen diskutiert, wobei die Konzepte selten veröffentlicht werden. Eine Ausnahme stellt der Beitrag von Püschl et al. (2016) dar, in dem ein systematisch entwickeltes und erprobtes Feedbackschema, das auch fachsprachliche Aspekte berücksichtigt, dargestellt wird. Im Anschluss an unsere Diskussion der Ergebnisse dürfte es (u. a. mit Blick auf *Interimsprache* und *Imitation*) wichtig sein, dass die Ermutigung zur schriftlichen Verwendung von Fachsprache und die Akzeptanz vorläufiger Formen dabei im Vordergrund stehen. „Problemanzeigen“ sollten vor allem dann gegeben werden, wenn Schriftprodukte kommunikativ nicht tragfähig sind, d. h., das Bearbeitungen auch von Expert:innen nicht mehr nachvollzogen werden können.

Anmerkungen

[1] Eine Ausnahme stellt die aktuelle Untersuchung von Körtling und Eichler (2022) dar, in der die Entwicklung der Fachsprache von Studierenden in der Studieneingangsphase mit Blick auf Definitionen betrachtet wird.

[2] So berichten Thürmann und Vollmer (2017), dass z. B. „Beschreiben“ im Biologieunterricht curricular einen deutlich größeren Stellenwert hat als im Mathematikunterricht, was mit Blick auf die Disziplinen auch plausibel ist.

[3] Für die Zwecke unseres Beitrags ist es wichtig zu bemerken, dass an dieser Stelle die Fachsprache des Unterrichtsfachs (der Schule) betrachtet wird und noch nicht die Fachsprache der Disziplin, weil es zwischen diesen beiden Konstrukten bedeutende Unterschiede gibt (vgl. 2.2). Wenn wir diese Unterschiede betonen, verwenden wir schulbezogen den Ausdruck „fachgebundene Bildungssprache“.

[4] Die Autoren selbst nennen das charakterisierte Konstrukt allerdings „Schulsprache“.

[5] „Abbildung“ wird in der Mathematik häufig synonym zu „Funktion“ verwendet, manchmal aber auch allgemeiner hinsichtlich der involvierten Mengen verstanden. In der betrachteten Quelle wird der Begriff „Abbildung“ nicht zuvor definiert, sondern vorausgesetzt (z. B. aus der Linearen Algebra).

[6] Walsch (1991) verortet die Aussagen, die betrachtet werden, dabei selbst curricular in der Schule. Heute müssen sie aber wohl in der Studieneingangsphase verortet werden. Seine empirischen Befunde sind für unsere hochschulbezogenen Überlegungen in jedem Fall relevant, da in seinen Studien auch Lehramtsstudierende und Lehrkräfte für das Unterrichtsfach Mathematik große Schwierigkeiten mit der angemessenen Einschätzung des Wahrheitsgehalts der Aussagen hatten.

[7] Hier spielt also potenziell ein Bewusstsein über den Unterschied zwischen dem Symbol/Zeichen und dem mathematischen Objekt, auf das damit verwiesen wird, eine Rolle.

[8] In seinem bereits erwähnten Buch kritisiert Beutelspacher (2009) die häufig verwendete Formulierung „beliebig, aber fest“ und spricht sich für die schlichtere Formulierung „beliebig“ aus, die vollständig tragfähig ist und genügt. In zahlreichen Lehrbüchern, Skripten und Vorlesungen wird dennoch „beliebig, aber fest“ verwendet.

[9] Die Idee eines Kontinuums passt zur bereits zitierten Betrachtung der Sprache des Mathematikunterrichts als eine „mit Fachwörtern durchsetzte natürliche Sprache“ (Hefendehl-Hebeker, 2016).

[10] Rincke (2010) arbeitet dabei mit einer anderen Übersetzung von Vygotskijs „Denken und Sprechen“.

[11] Auch hierzu liegt lediglich anekdotische Evidenz aus Diskussionen vor, die standortübergreifend diese Einschätzung stützen. In solchen Diskussionen zeigt sich immer wieder ein recht einheitliches Bild von Mathematikvorlesungen in der Studieneingangsphase.

[12] Es werden im Folgenden (hierarchisch geordnet) Hauptkategorien, Kategorien, Subkategorien und Kodes unterschieden.

[13] Dabei ist aufgefallen, dass die berücksichtigten Werke große Gemeinsamkeiten bei den verwendeten sprachlichen Mitteln aufweisen. Die Lehrbücher können daher anscheinend als fachsprachliche Referenz im Sinne eines geteilten sprachlichen Inventars für Analysis-I-Vorlesungen betrachtet werden.

[14] Bei den Abbildungen 5 bis 9 handelt es sich um Auszüge der in MAXQDA kodierten Bearbeitungen. Die farbigen Markierungen stammen also aus dem Kodierprozess. Damit soll das methodische Vorgehen dokumentiert und verdeutlicht werden.

[15] Diese Verwendung von *wenn* zur Darstellung einer Äquivalenz in Definitionen entspricht dabei einer weit verbreiteten Formulierungsgewohnheit in den betrachteten Lehrbüchern. Neben dieser anscheinend konventionalisierten Verwendung von *wenn* für Äquivalenzen in Definitionen gibt es das Phänomen

der alltagssprachlichen Gleichsetzung von Implikation und Äquivalenz, die zur falschen Einschätzung des Wahrheitsgehalts von Aussagen führen kann (vgl. Walsch, 1991).

[16]Die Stelle des Auftretens wurde an jeder kodierten Stelle mitkodiert (vgl. 3.4). Dabei wurde unterschieden, ob die Stelle des Auftretens in einem symbolischen Umfeld wie in Rechnungen oder Formeln, im Fließtext, oder in einem gemischten Umfeld vorlag.

Literatur

Alcock, L. & Simpson, A. (2002). Definitions: Dealing with Categories Mathematically. *For the Learning of Mathematics, 22*(2), 28–34.

Apeltauer, E. (1997). *Grundlagen des Erst- und Fremdsprachenerwerbs*. Universität Kassel.

Berger, M. (2004). The functional use of a mathematical sign. *Educational Studies in Mathematics, 55*(1-3), 81–102.

Beutelspacher, A. (2009). *„Das ist o. B. d. A. trivial!" Tipps und Tricks zur Formulierung mathematischer Gedanken* (9. Aufl.). Vieweg+Teubner.

Blömeke, S. (2016). Der Übergang von der Schule in die Hochschule: Empirische Erkenntnisse zu mathematikbezogenen Studiengängen. In A. Hoppenbrock, R. Biehler, R. Hochmuth & H.-G. Rück (Hrsg.), *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase* (S. 3–14). Springer.

Bröcker, T. (1995). *Analysis* 1 (2. Aufl.). Spektrum Akademischer Verlag.

Büchter, A. & Kaiser, J. T. (2023). Untersuchung der schriftlichen Verwendung von Fachsprache in der Studieneingangsphase Mathematik. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2022*. (S. 901–904). WTM.

Ervynck, G. (1992). Mathematics as a foreign language. In W. Geeslin & K. Graham (Eds.), *Proceedings of the Sixteenth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 3* (S. 217–233). Durham, NH.

Fischer, G. (2014). *Lineare Algebra. Eine Einführung für Studienanfänger* (18. Aufl.). Springer

Forster, O. (2016). *Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen* (12. Aufl.). Springer.

Ganesalingam, M. (2013). *The Language of Mathematics. A Linguistic and Philosophical Investigation.* Springer.

Giest, H. & Lompscher, J. (2006). *Lerntätigkeit – Lernen aus kultur-historischer Perspektive. Ein Beitrag zur Entwicklung einer neuen Lernkultur im Unterricht.* Lehmanns Media.

Hanna, G. (1991). Mathematical proof. In D. Tall (Hrsg.), *Advanced mathematical thinking* (S. 54–61). Kluwer Academic Publisher.

Hefendehl-Hebeker, L. (2016). Mathematische Wissensbildung in Schule und Hochschule. In A. Hoppenbrock, R. Biehler, R. Hochmuth & H.-G. Rück (Hrsg.), *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase* (S. 15–30). Springer.

Heublein, U., Hutzsch, C. & Schmelzer, R. (2022). *Die Entwicklung der Studienabbruchquoten in Deutschland.* (DZHW Brief 05|2022). DZHW.

Heublein, U., Hutzsch, C., Schreiber, J., Sommer, D. & Besuch, G. (2010). *Ursachen des Studienabbruchs in Bachelor- und in herkömmlichen Studiengängen – Ergebnisse einer bundesweiten Befragung von Exmatrikulierten des Studienjahres 2007/08*. HIS.

Heuser, H. (2009). *Lehrbuch der Analysis* (17. Aufl.). Teubner.

Hieber, M. (2018). *Analysis I*. Springer.

Hochmuth, R., Biehler, R., Liebendörfer, M. & Schaper, N. (Hrsg.) (2023). Unterstützungsmaßnahmen in mathematikbezogenen Studiengängen. Konzepte, Praxisbeispiele und Untersuchungsergebnisse.

Hoppenbrock, A., Biehler, R., Hochmuth, R. & H.-G. Rück (Hrsg.) (2016). *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase*. Springer.

Kaiser, J. T. (2023). Anregen von Sprechanlässen im Mathematikstudium mit Fokus auf die Studieneingangsphase. In J. Härterich, M. Kallweit, K. Rolka & T. Skill (Hrsg.), *Hanse-Kolloquium zur Hochschuldidaktik der Mathematik 2021* (S. 81–90). WTM.

Koch, P. & Oesterreicher, W. (1985). Sprache der Nähe – Sprache der Distanz. Mündlichkeit und Schriftlichkeit im Spannungsfeld von Sprachtheorie und Sprachgeschichte. *Romanistisches Jahrbuch, 36*, 15–43.

Kolb, D. A. (1981). Learning styles and disciplinary differences. In A. W. Chickering (Hrsg.), *The Modern American College* (S. 232–255). Jossey-Bass.

Königs, F. G. (2013). Spracherwerb und Sprachenlernen. In W. Hallet & F. G. Königs (Hrsg.), *Handbuch Fremdsprachendidaktik* (2. Aufl.) (S. 322–325). Kallmeyer.

Königsberger, K. (2004). *Analysis 1* (6. Aufl.). Springer.

Körtling, J. & Eichler, A. (2022). Students' development of mathematical language regarding definitions. In J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi & F. Ferretti (Hrsg.), *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)* (S. 2445–2452). Free University of Bozen-Bolzano and ERME.

Giersemehl, I., Jörgens, T., Jürgensen-Engl, T., Lohmann, J., Riemer, W. & Spielmans, H. (2021). *Lambacher Schweizer 8. Mathematik für Gymnasien – G9. Nordrhein-Westfalen*. Klett.

Kuckartz, U. & Rädiker, S. (2022). Qualitative Inhaltsanalyse. Methoden, Praxis, Computerunterstützung (5. Aufl.). Beltz Juventa.

Leiss, D., Tiedemann, K., Wessel, L. & Schmidt-Thieme, B. (2023). Sprache und Mathematiklernen. In R. Bruder, A. Büchter, H. Gasteiger, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (2. Aufl.) (S. 561–595). Springer.

Liebendörfer. M. (2018). *Motivationsentwicklung im Mathematikstudium*. Springer

Maier, H. & Schweiger, F. (1999). *Mathematik und Sprache. Zum Verstehen und Verwenden von Fachsprache im Mathematikunterricht.* öbv & hpt.

Mayring, P. (2022). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken* (13. Aufl.). Beltz.

Morgan, C., Craig, T., Schütte, M. & Wagner, D. (2014). Language and communication in mathematics education: An overview of research in the field. *ZDM: The International Journal of Mathematics Education, 46*(6), 843–853

Püschl, J., Biehler, R., Hochmuth, R. & Schreiber, S. (2016). Wie geben Tutoren Feedback? Anforderungen an studentische Korrekturen und Weiterbildungsmaßnahmen im LIMA-Projekt. In A. Hoppenbrock, R. Biehler, R. Hochmuth & H.-G. Rück (Hrsg.), *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase* (S. 387–404). Springer.

Raupach, M. (2013). Lerner- und Interimsprachen. In W. Hallet & F. G. Königs (Hrsg.), *Handbuch Fremdsprachendidaktik* (2. Aufl.) (S. 330–333). Kallmeyer.

Rincke, K. (2010). Alltagssprache, Fachsprache und ihre besonderen Bedeutungen für das Lernen. Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften, 16, 235–260.

Roth, J., Bauer, T., Koch, H. & Prediger, S. (Hrsg.) (2015). Übergänge konstruktiv gestalten. Ansätze für eine zielgruppenspezifische Hochschuldidaktik Mathematik. Springer.

Ruwisch, S. & Weigand, H.-G. (2023). Begriffe bilden. In R. Bruder, A. Büchter, H. Gasteiger, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (2. Aufl.) (S. 281–311). Springer.

Schlager, S. (2020). *Zur Erforschung des Zusammenhangs zwischen Sprachkompetenz und Mathematikleistung. Oberflächlichkeit als potenzieller Mediator.* Springer.

Schleppegrell, M. J. (2007). The Linguistic Challenges of Mathematics Teaching and Learning: A Research Review. *Reading & Writing Quarterly, 23*(2), 139–159.

Sfard, A. (2008). *Thinking as Communicating. Human Development, the Growth of Discourses, and Mathematizing*. Cambridge University Press.

Thürmann, E. & Vollmer, H. J. (2017). Sprachliche Dimensionen fachlichen Lernens. In M. Becker-Mrotzek & H.-J. Roth (Hrsg.), *Sprachliche Bildung – Grundlagen und Handlungsfelder* (S. 299–320). Waxmann.

Ufer, S., Leiss, D., Stanat, P. & Gasteiger, H. (2020). Sprache und Mathematik – theoretische Analysen und empirische Ergebnisse zum Einfluss sprachlicher Fähigkeiten in mathemathematischen Lern- und Leistungssituationen. *Journal für Mathematik-Didaktik, 41*(1), 1–9.

Vollmer, H. J. & Thürmann, E. (2010). Zur Sprachlichkeit des Fachlernens: Modellierung eines Referenzrahmens für Deutsch als Zweitsprache. In B. Ahrenholz (Hrsg.), *Fachunterricht und Deutsch als Zweitsprache* (2. Aufl.) (S. 107–132). Narr.

Vollmer, H. J. & Thürmann, E. (2013). Sprachbildung und Bildungssprache als Aufgabe aller Fächer der Regelschule. In M. Becker-Mrotzek, K. Schramm, E. Thürmann & H. J. Vollmer (Hrsg.), *Sprache im Fach. Sprachlichkeit und fachliches Lernen* (S. 41–57). Waxmann.

Vygotskij, L. S. (2017). *Denken und Sprechen. Psychologische Untersuchungen* (3. Aufl.). Beltz.

Wagenschein, M. (1980). *Naturphänomene sehen und verstehen: genetische Lehrgänge*. Klett.

Walsch, W. (1991). Mathematische Fachsprache – Hilfe oder Barriere für mathematische Bildung. *Der Mathematikunterricht, 37*(1), 8–15.

Wilzek, W. (2021). *Zum Potenzial von Anschauung in der mathematischen Hochschullehre. Eine Untersuchung am Beispiel interaktiver dynamischer Visualisierungen in der Analysis.* Springer.

Wittenberg, A. I. (1957). *Vom Denken in Begriffen*. Birkhäuser.

Anschrift der Verfasser:innen

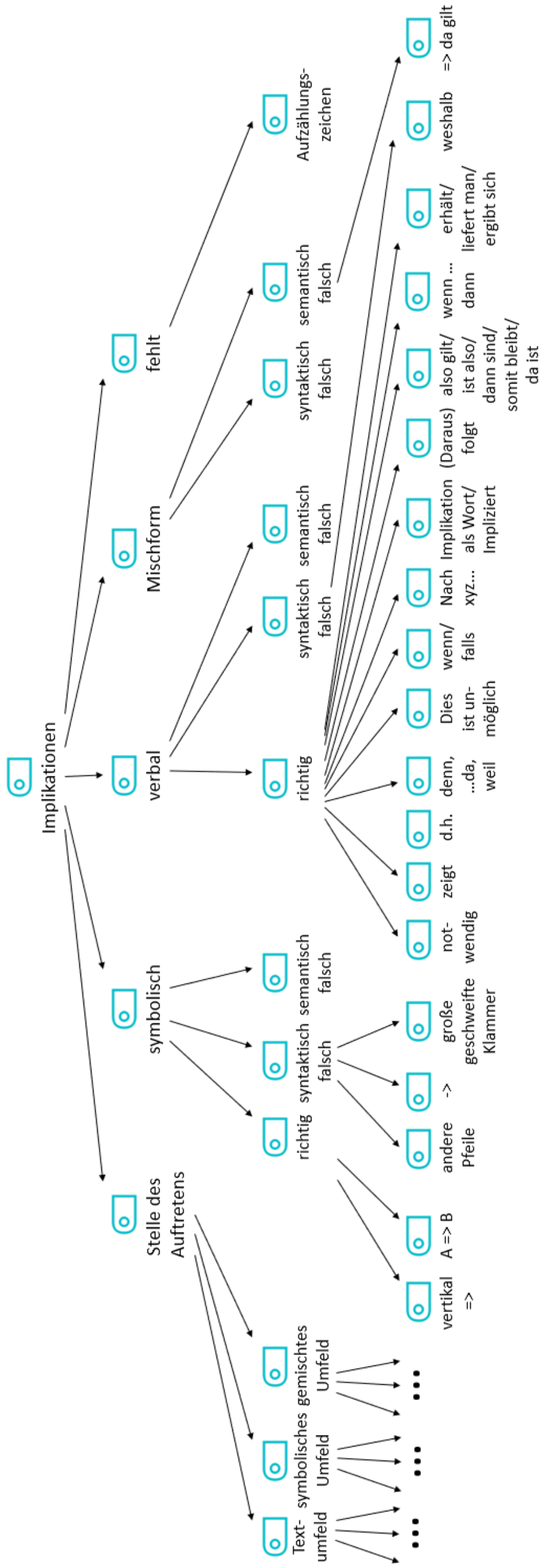
Andreas Büchter
Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Thea-Leymann-Straße 9
45127 Essen
andreas.buechter@uni-due.de

Julia T. Kaiser
Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Thea-Leymann-Straße 9
45127 Essen
julia.kaiser@uni-due.de

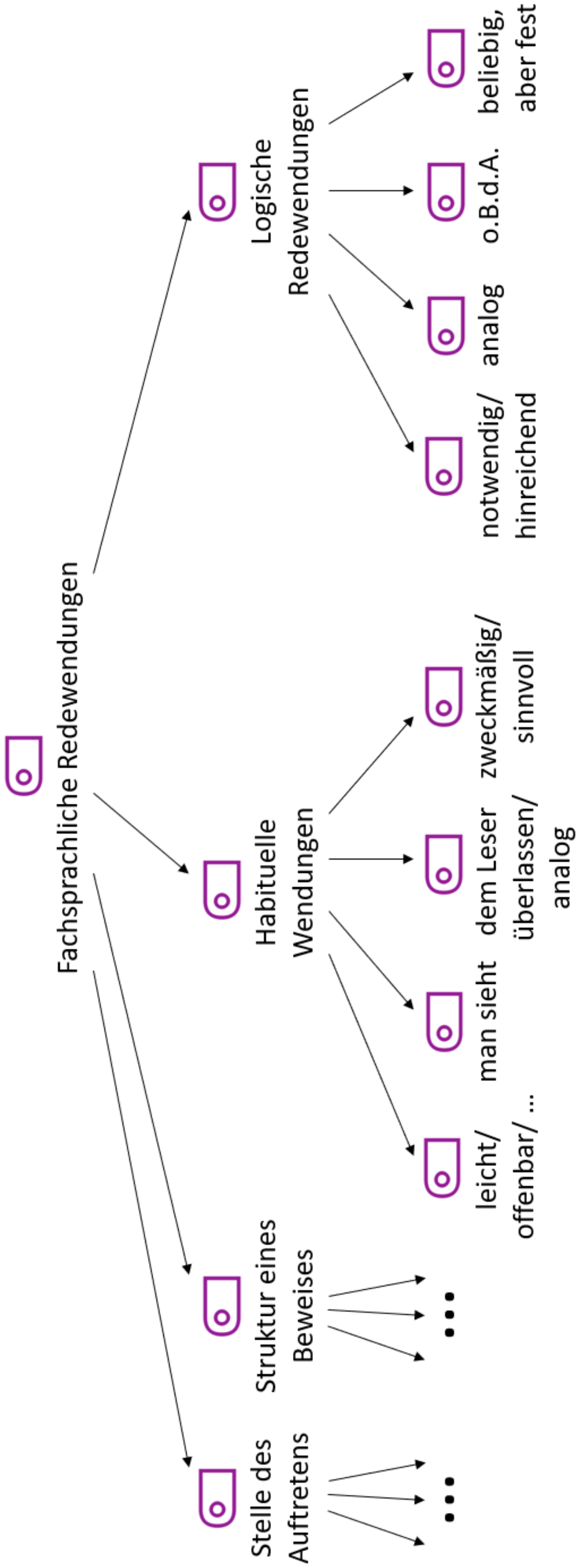
6. Anhang

6.1 Auszüge aus dem Kategoriensystem

6.1.1 Kategorie *Implikationen*



6.1.2 Hauptkategorie *fachsprachliche Redewendungen*



6.2 Betrachtete Übungsaufgaben

6.2.1 Blatt 3

Aufgabe 1 (2+2+2 Punkte)
Ordnen Sie jeder der folgenden Mengen genau einen der Punkte i) bis iii) zu! Beweisen Sie anschließend, dass die Mengen die genannten Eigenschaften besitzen!

$$M_1 := \left\{ \frac{2x}{x+1} : x > 1 \right\},\ M_2 := \{2 - x : x \geq 0\},\ M_3 := \left\{ 1 + \frac{1}{x} : x \geq 1 \right\}$$

i.) Die Menge hat die Zahl 1 als Infimum und die Zahl 2 als Maximum.

ii.) Die Menge hat die Zahl 2 als Maximum und besitzt kein Infimum.

iii.) Die Menge besitzt kein Maximum, ihr Supremum ist 2.

6.2.2 Blatt 11

Aufgabe 1 (2+4 Punkte)

a.) Sei $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Zeigen Sie, dass für jede Cauchy-Folge $(x_n)_n \subset]0,1[$ die Folge $(f(x_n))_n$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist. Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass diese Aussage nicht mehr gilt, wenn lediglich die Stetigkeit von f vorausgesetzt wird.

b.) Seien I, J Intervalle, $g : I \to \mathbb{R}$ sei gleichmäßig stetig auf I, $f : J \to \mathbb{R}$ sei gleichmäßig stetig auf J und $g(I) \subset J$. Zeigen Sie, dass dann die Komposition $f \circ g$ gleichmäßig stetig ist auf I.