Qualitative Analyse studentischer Bearbeitungen von Übungsaufgaben aus Mathematikvorlesungen zur Identifikation von Schwierigkeiten

THOMAS STENZEL, ESSEN & BENJAMIN ROTT, KÖLN

***Zusammenfassung**: Aufgrund der großen Bedeutung von Übungsaufgaben, insbesondere in Anfängervorlesungen, für das Lernen von Studierenden der Fachmathematik bzw. des Gymnasiallehramts wurden in der vorliegenden Studie zugehörige Bearbeitungen qualitativ analysiert. Die aufgetretenen Schwierigkeiten lassen sich insbesondere auf mangelhaft ausgeprägte Concept Images zurückführen, die eine sinnvolle Auseinandersetzung mit den Aufgaben mitunter ganz verhindern können und sich auch nicht durch die Nutzung eines Skripts zur Vorlesung kompensieren lassen.*

***Abstract:** Since working on problems, especially in beginners' lectures, is an important part of university student's learning, we qualitatively analyzed solving processes. Occurring difficulties are mainly traced back to a lack of adequate concept images which mostly prohibit serious problem-solving activities. Students were not able to resolve that issue by using lecture notes.*

1. Einleitung

An Universitäten wird – anders als in der Schule – Mathematik in der Regel im Rahmen von Vorlesungen unterrichtet; das heißt, dass Informationen im Allgemeinen in deutlich abstrakterer, formalerer und kompakterer Form sowie in deutlich kürzerer Zeit dargeboten werden als in der Schule, wo meist eher informelles Verständnis, u. a. durch kontextgebundene Anwendungen der mathematischen Inhalte, im Mittelpunkt steht. Zudem ist die Vermittlung von Wissen in Vorlesungen in der Regel eher transmissiv. Wenn eine eigenständige Auseinandersetzung mit den Vorlesungsinhalten, die nachvollzogen und angewendet werden müssen, erfolgt, dann meist durch die Bearbeitung von Übungsaufgaben, die zu den Vorlesungen hinzukommen, deren Lösungen abgegeben werden müssen und die in der Regel anschließend in Tutorien besprochen werden. Dies ist insofern ungewohnt für Studienanfänger:innen, als dass sie an der Universität in viel größerem Maße selbst für ihre Lernprozesse verantwortlich sind, was beispielsweise die Vor- und Nachbereitung der Vorlesungen betrifft. Aus der Schule kennen sie eine solche eigenständige Bearbeitung, größtenteils ohne Feedback der Lehrenden, in der Regel nicht (vgl. Wlassak & Schöneburg-Lehnert, 2022). Erschwerend kommt für die Studierenden noch hinzu, dass viele solcher Übungsaufgaben eine Anwendung des in den Vorlesungen vermittelten, allerdings noch nicht unbedingt gefestigten, Wissens erfordern, sodass man hier auch schon von Problemen im Sinne von Nicht-Routine-Aufgaben sprechen kann.

Aufgrund der großen Bedeutung für das Lernen der Studierenden bei gleichzeitig zu erwartenden Schwierigkeiten, die auf die Komplexität der Aufgaben und die Eigenständigkeit der Lern- und Bearbeitungsprozesse zurückzuführen sind, sollte die Bearbeitung mathematischer Übungsaufgaben der Studieneingangsphase ein wichtiger Gegenstand mathematikdidaktischer Forschung sein; ein Blick in den Forschungsstand zeigt allerdings, dass dies momentan – zumindest explizit – nicht der Fall ist – es werden aber natürlich Aufgabenbearbeitungen untersucht, die solchen Übungsaufgaben ähneln (s. u.). In diesem Artikel geht es daher darum, die aufgezeigte Forschungslücke ein Stück weit zu schließen. Dabei wird, aufbauend auf den Erkenntnissen von Stenzel (2023), geschaut, was über Schwierigkeiten der Studierenden gelernt werden kann. Ein besonderer Fokus wird hierbei auf das Fachwissen und Concept Images der Studierenden sowie die Verwendung von Skripten während der Aufgabenbearbeitung gelegt.

2. Theoretischer Hintergrund

2.1 Aufgaben

Aufgaben wurden nachweislich schon im alten Ägypten, also seit mehr als 3500 Jahren, genutzt, um Mathematik zu kommunizieren (Stanic & Kilpatrick, 1988). In mathematikbezogenen Lernsituationen bilden Aufgaben eine sehr wichtige, wenn nicht sogar die hauptsächliche Form der Auseinandersetzung mit dem Lerngegenstand; damit sind sie ein entscheidender Faktor für einen erfolgreichen Erwerb von Wissen, Fertigkeiten und Kompetenzen (vgl. BLK, 1997; Leuders & Büchter, 1997; Leuders, 2015; Scheja, 2017). Auch an der Universität wird Übungsaufgaben ein hoher Stellenwert beigemessen, was sich daran erkennen lässt, dass deren Bearbeitung häufig die einzige Lernaktivität ist, die von den Dozierenden verbindlich eingefordert wird.

Es gibt viele verschiedene Arten und Klassifikationen von Aufgaben – beispielsweise Modellierungs- oder Beweisaufgaben. Letztere spielen in der Hochschullehre eine bedeutende Rolle (s. Abschnitt 2.3). Zusätzlich ist hier die Unterscheidung zwischen *Routine*- und Nichtroutineaufgaben (Pólya, 1980) relevant, wobei letztere auch als *Problem* oder *Problemaufgabe* bezeichnet werden. Probleme werden dadurch definiert, dass sie für die bearbeitende Person nicht durch Anwendung von leicht zugänglichen Verfahren lösbar sind (z. B. Schoenfeld, 1989, S. 87) bzw. dass eine Barriere die Transformation vom Ausgangs- in den gewünschten Endzustand verhindert (Dörner, 1979, S. 10). Bei diesen und allen ähnlichen Definitionen des Begriffs „Problem" ist relevant, dass die Aufgaben nicht per se, sondern immer nur im Zusammenhang mit der bearbeitenden Person als Routineaufgabe oder Problem identifiziert werden können; es hängt letztlich also vom zugehörigen Bearbeitungsprozess ab, ob eine Aufgabe Problemcharakter für die jeweiligen Bearbeiter:innen zeigt oder nicht (Rott, 2013). Solche Problembearbeitungsprozesse sind in der Regel gekennzeichnet durch den Einsatz von Heurismen, d. h. Vorgehensweisen und Strategien, die beim Bearbeiten von Problemen nützlich sind, aber keine Lösung garantieren (vgl. Rott, 2018), sowie insbesondere durch das Auftreten von Barrieren (s. o.). Lange (2013) hat genau dies für empirische Prozesse konkretisiert:

> Eine Stelle in einem Bearbeitungsprozess, in der rekonstruierbar ist, dass eine Person nichts oder etwas nicht selbstverständlich (im Sinne von nicht sicher, zweifelnd) ausführt und dabei auf nichts in der Aufgabensituation Anwendbares zugreifen möchte bzw. zugreifen kann […], soll als Barriere bzw. als Nichtroutine definiert werden. (S. 32)

2.2 Concept Definition und Concept Image

Für die Forschung zum Problemlösen sind laut Schoenfeld (1985) in empirischen Studien mit Hochschulstudierenden die folgenden vier Faktoren als zentral herausgearbeitet: (1) Ressourcen bzw. das Fach- und Vorwissen, (2) Heurismen bzw. Problemlösestrategien, (3) metakognitive und Kontrollstrategien sowie (4) Beliefs bzw. Einstellungen. In all diesen Bereichen können Problemlösenden Fehler unterlaufen (vgl. Geering, 1995; Heinrich, 2013). Im vorliegenden Beitrag werden insbesondere der Faktor „Ressourcen" und zugehörig mögliche Wissensfehler in den Fokus genommen, da das Vorwissen zum einen in Studien zum Problemlösen häufig ausgeklammert wird (durch eine entsprechende Wahl von Problemen, angepasst an das Vorwissen der Proband:innen) und zum anderen in der universitären Mathematik aufgrund der hohen Dichte neuer Inhalte eine große Bedeutung dieses Faktors zu vermuten ist.

Im Kontext des Geometrieunterrichts in der Schule wurde in mehreren Studien (Chinnappan et al., 2012; Hellmich et al., 2002; Ufer et al., 2008) inhaltliches Fachwissen als der größte Prädiktor für erfolgreiche Beweiskonstruktion identifiziert. Sommerhoff (2017) ist im universitären Kontext zu ähnlichen Ergebnissen gekommen:

> Content- and domain-specific knowledge showed a strong impact on student's performance in proof validation and construction. Both analyses highlight the impact of these resources, which proved to be the only significant predictors of student's performance. (S. 89)

Bei unseren Analysen verwenden wir zur Beschreibung von Schwierigkeiten durch mangelndes oder fehlerhaftes Fachwissen das Konstrukt des *Concept Images*, das von Tall und Vinner (1981) wie folgt beschrieben wird:

> We shall use the term *concept image* to describe the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes. It is built up over the years through experiences of all kinds, changing as the individual meets new stimuli and matures. (S. 152, Hervorhebung im Original)

Es umfasst also alle mentalen Repräsentationen des abgebildeten Begriffs, sowie alle damit assoziierten Eigenschaften und Verfahren und ist individuell von der jeweiligen Person abhängig.

Weiter schreiben Vinner und Hershkowitz (1980):

> By *concept definition* we mean here a verbal definition that accurately explains the concept in a non circular way. (S. 177, Hervorhebung im Original)

An dieser Stelle sei besonders auf das Adverb *accurately* hingewiesen. Während ein Concept Image (bei Lernenden) durchaus fehlerhaft sein kann, stellt die Concept Definition nach dieser Charakterisierung eine allgemein akzeptierte Definition des Begriffs dar, wie sie etwa im Skript oder Lehrbuch stehen würde. Tall und Vinner (1981) sprechen hier auch von der *Formal Concept Definition* in Abgrenzung von der *Personal Concept Definition*, welche eine individuelle (möglicherweise fehlerhafte) verbale Beschreibung des Begriffs darstellt. Im vorliegenden Artikel verzichten wir auf eine solche Unterscheidung, sehen also auf der einen Seite die Concept Definition als formal gegeben an und betrachten auf der anderen Seite die Personal Concept Definition als eine mögliche Begriffsrepräsentation und damit als Teil des Concept Images.

Man sollte sich außerdem darüber im Klaren sein, dass bei Bearbeitungsprozessen immer nur ein Teil des Concept Images auftritt. Dieser Teil wird auch *Evoked Concept Image* genannt. Da aus dem Zusammenhang klar sein dürfte, was gemeint ist, wird im Folgenden weiterhin von *Concept Image* gesprochen, obwohl bei der durchgeführten Erhebung maximal das Evoked Concept Image beobachtet werden kann.

Insgesamt werden im vorliegenden Artikel ausschließlich die Begriffe der *Concept Definition* als formale Definition, bestehend aus Wörtern und mathematischen Symbolen, und des *Concept Images* als Menge von individuellen Repräsentationen und Zusammenhängen zu einem Begriff, die alle möglichen Formen annehmen können und nicht zwingend korrekt sein müssen, verwendet.

2.3 Aufgaben in der Hochschullehre

Im Rahmen universitärer mathematischer Lehrveranstaltungen werden ebenfalls regelmäßig Aufgaben – sogenannte *Übungsaufgaben* – bearbeitet, deren (erfolgreiche) Bearbeitung in der Regel über die Zulassung zur Klausur am Ende der Vorlesungszeit entscheidet. Im Vergleich zu Aufgaben aus dem Mathematikunterricht der Schule erfordert die Bearbeitung solcher Übungsaufgaben eher die Aktivierung mehrerer Wissenseinheiten und damit im Einklang eher das Verknüpfen von Wissen als dessen bloße Anwendung (Wlassak & Schöneburg-Lehnert, 2022, S. 22). Auch sind universitäre Übungsaufgaben eher konzeptuell als prozedural orientiert und es müssen häufiger eigenständig Ansätze gefunden werden als in der Schulmathematik (ebd.). Weber und Lindmeier (2020) konnten mithilfe einer Aufgabenanalyse noch etwas konkreter vier Typen von Übungsaufgaben identifizieren: (1) Rechenaufgaben, (2) Beweise mittels Rechnung, (3) Beweise mittels Definitionen und (4) Beweise mittels Sätzen, wobei Aufgaben, die auf die Anwendung von Rechenvorschriften zielen (Typen 1 und 2), und Aufgaben, die argumentative Kompetenzen erfordern (Typen 3 und 4), in etwa gleichen Anteilen vorkamen (ebd., S. 278 f.).

Bei drei der vier Aufgabentypen von Weber und Lindmeier handelt es sich um Aufgaben, in denen mathematische Aussagen im weitesten Sinne bewiesen werden sollen. Dass dies ein Kennzeichen von universitären Mathematikaufgaben ist, stellen auch andere Autor:innen fest.

Ebenfalls unstrittig ist, dass Beweisaufgaben für Lernende schwierig sind. Studien zeigen beispielsweise Schwierigkeiten in Bezug auf die konzeptuellen Anforderungen sowie Schwierigkeiten mit der formal-logischen Struktur und der erwarteten Fachsprache (z. B. Dreyfus, 1999; Selden & Selden, 2013).

Passend dazu hat Moore (1994) verschiedene Schwierigkeiten von Universitätsstudierenden beim Bearbeiten von Beweisaufgaben herausgearbeitet. Auch diese Schwierigkeiten lassen sich unterteilen in solche, die inhaltliches Verständnis (Moore bezieht sich dabei auf die Idee des *Concept Images*, s. o.) benötigen, und solche, bei denen Definitionen erinnert und Aussagen formallogisch aufgeschrieben werden müssen.

Moore (1994) hat in einer qualitativen Studie mit fünf Studierenden sieben Schwierigkeiten (D1)–(D7) beim Bearbeiten von Beweisaufgaben identifiziert, von denen hier insbesondere die ersten drei von Bedeutung sind:

- (D1): Die Studierenden kennen Definitionen nicht, die im Beweis gebraucht werden. Dies wird in der vorliegenden Studie durch die Möglichkeit, ein Skript zu nutzen (s. u.) weitgehend umgangen.
- (D2): Die Studierenden haben ein (zu) geringes intuitives Verständnis der Konzepte (Concept Image). Hier ist das konzeptuelle Verständnis der benötigten mathematischen Sätze und Aussagen gemeint.
- (D3): Die Concept Images der Studierenden genügen nicht, den Beweis angemessen aufzuschreiben. Hiermit spricht Moore die Fertigkeit an, einen gefundenen Beweis so aufzuschreiben, dass er den formalen Anforderungen genügt.

In den übrigen vier Schwierigkeiten geht es um das Generieren eigener Beispiele; das Nutzen von Definitionen, um die Struktur des Beweises zu erstellen; die Nutzung mathematischer Sprache und Notation sowie die Art und Weise, wie man damit beginnt, einen Beweis aufzuschreiben.

In der Diskussion von Schwierigkeiten beim Bearbeiten von Beweisaufgaben vertreten mehrere Autor:innen die Position, dass die Bearbeitung solcher Aufgaben für die Studierenden Probleme im Sinne von Nicht-Routine-Aufgaben darstellen (z. B. Grieser, 2017; Selden & Selden, 2013; Weber, 2001).

Selden und Selden (2013) präzisieren Anforderungen an Beweisaufgaben in zwei Bereiche: Einen problemzentrierten Teil, in dem es darum geht, die Anforderungen inhaltlich zu erfassen und zu bearbeiten, was Problemlösefertigkeiten, Intuition und ein tiefes Verständnis benötige. Und einen formal-rhetorischen Teil, in dem es um die logische Struktur und Formalia geht, was Faktenkenntnis, aber keine Intuition und kein tiefes Verständnis brauche. Eine ähnliche Unterscheidung treffen Weber und Alcock (2004), wenn sie von semantischen Beweisführungen sprechen, die durch Bedeutungszuweisungen auf informeller Ebene geleitet werden (vorrangiges Arbeiten mit dem Concept Image) und syntaktischen Beweisführungen, die auf dem logischen Arbeiten auf formaler Ebene beruhen (vorrangiges Arbeiten mit der Concept Definition). Die Schwierigkeit (D2) von Moore (1994) kommt auf semantischer Ebene zum Tragen oder sorgt dafür, dass nur auf syntaktischer Ebene gearbeitet werden kann, wohingegen Schwierigkeit (D3) bei der Übersetzung von semantisch verstandenen Argumenten in die formale (syntaktische) Ebene auftritt.

Diese Positionen haben uns in dem Ansatz bestätigt, Übungsaufgaben von Studierenden mit Beweisanforderungen u. a. aus einer Problemlöseperspektive heraus zu analysieren.

2.4 Skripten in der Hochschullehre

Ein Hilfsmittel, das von vielen Dozierenden genutzt wird, um den Studierenden den Umgang mit der Stofffülle in kurzer Zeit zu erleichtern, ist ein *Skript* zur Vorlesung, in dem die Inhalte der Veranstaltung kompakt zusammengefasst sind. Skripten sollen die Lernenden dabei unterstützen, der Lehrveranstaltung zu folgen, da man sich weniger auf das Abschreiben konzentrieren muss und stattdessen zuhören und mitdenken kann. Zudem dienen Skripten als Nachschlagewerk – für die Nachbereitung von Lehrveranstaltungen und für die Vorbereitung auf Prüfungen – und machen die Inhalte der Veranstaltung transparent. (Dulisch, 1996; Isaacs, 1994)

Dulisch (1996) ergänzt, dass die Mitschriften von Studierenden oft von geringer Qualität seien und Skripte daher dafür Sorge tragen können, dass den Lernenden fachlich korrekte Informationen in geschriebener Form zur Verfügung stehen. Eine unterstützende Wirkung entfalten Skripte nach Dulisch auch durch die Verwendung von übersichtlichen Strukturierungen, Illustrationen und Piktogrammen.

2.5 Empirische Erkenntnisse zur Bearbeitung von Problem- und Beweisaufgaben an der Universität

Die vorliegende Studie stellt eine Reanalyse der Daten einer Arbeit von Stenzel (2023) dar. Hier wurde bei einer ausführlichen qualitativen Analyse von 13 Problembearbeitungen festgestellt, dass in vielen Fällen mangelndes Fachwissen eine sinnvolle Auseinandersetzung mit der Aufgabe stark einschränken oder gar komplett verhindern kann.

Obwohl Fachwissen als einer der wichtigsten Prädiktoren für Beweiskompetenz gilt (vgl. Abschnitt 2.2), steht dieses häufig nicht im Fokus von Prozessbeobachtungen. In diesem Zusammenhang sollte man sich dessen bewusst sein, dass sich der Aufbau des Mathematikstudiums in Deutschland von dem vieler Länder unterscheidet: Während hier in den Anfängervorlesungen (Lineare Algebra und Analysis) bereits ein starker Fokus auf Beweiskonstruktionen gelegt wird, stehen etwa in den USA in den Fächern Calculus und Linear Algebra zunächst Rechenprozeduren im Mittelpunkt. Erst in höheren Semestern werden (meist nach einem Transition-to-Proof Kurs) in Lehrveranstaltungen wie Analysis oder Abstract Algebra verstärkt Beweise behandelt (vgl. Alcock & Weber, 2010; Moore, 1994; Zazkis et al., 2016; für Kanada Broley & Hardy, 2022). Daraus ergibt sich, dass viele Studien entweder bei Studierenden höherer Semester durchgeführt werden (Furinghetti & Morselli, 2009; Sandefur et al., 2013; VanSpronsen, 2008, Weber, 2001; Weber & Alcock, 2004; Zazkis et al., 2016) oder Aufgaben mit stärkeren rechnerischen Anteilen betrachten (Lithner, 2000, 2003). Das könnte erklären, warum mangelndes Vorwissen in diesen Erhebungen eine weniger große Rolle gespielt hat, im ersten Fall, weil die Proband:innen bereits erfolgreich mathematische Lehrveranstaltungen, teils mit ähnlichen Themen besucht haben, im zweiten weil Begriffsverständnis weniger im Fokus liegt. Einige Studien wählen auch bewusst starke Studierende aus (Inglis et al., 2007, Zazkis et al. 2015) oder betrachten gezielt Aufgaben, bei denen das benötigte Fachwissen bewusst auf einem basalen Niveau gehalten wird (z. B. VanSpronsen, 2008), eine Praxis, die auch für die Problemlöseforschung außerhalb der Universität typisch ist und die häufig zum Ziel hat, dass es überhaupt zu sinnvollen Bearbeitungen kommen kann.

Dennoch spielt das Verständnis offenbar eine große Rolle, denn heuristische Hilfsmittel, die zum Verstehen beitragen sollen, wie das Generieren von Beispielen (Alcock & Weber, 2010, Sandefur, 2013) oder verschiedene Visualisierungen (Alcock & Simpson, 2004; Stylianou & Silver, 2004), werden vergleichsweise häufig betrachtet. Hat sich hierbei eine Diskrepanz zwischen Concept Image und Concept Definition gezeigt, die nicht aufgelöst wurde, so konnten in der Regel keine sinnvollen Beweisschritte durchgeführt werden.

Weitere Schwerpunkte bei der Beobachtung von Bearbeitungsprozessen liegen bei der Art der *Argumentation* (Inglis et al, 2007) bzw. *Reasoning*, was neben nach außen gerichtetem Begründen auch interne Verstehensprozesse beinhaltet (Lithner, 2000, 2003), bei den verwendeten *Strategien* (VanSpronsen, 2008; Zazkis et al.,2015), bei *Metakognition* (Stubbemann & Knipping, 2019) sowie dem Einfluss *affektiver* Komponenten (Furinghetti & Morselli, 2009). Wenngleich das Vorwissen dabei nur marginal betrachtet wird, wird immer wieder festgestellt, dass hierin zwar nicht die häufigste Schwierigkeit, wohl aber das größte Hindernis liegt, wie etwa in der Dissertation von VanSpronsen (2008):

> Computational and comprehension errors were the most difficult for participants to overcome. (S. 328)

Neben der bereits angesprochenen Studie von Alcock und Simpson (2004), die in Großbritannien stattgefunden hat, ist eine der wenigen, die sich mit Beweisen in der Studieneingangsphase auseinandergesetzt hat, die Dissertation von Kirsten (2021). Hier wurden Beweisprozesse in Phasen unterschiedlicher Aktivitäten eingeteilt und verschiedene Typen der Bearbeitung kategorisiert. Eher am Rande wurde hier bemerkt, dass mangelndes inhaltliches Wissen kaum auszugleichen ist und zu erfolglosen Bearbeitungen führt. Es handelt sich hierbei auch um eine der wenigen Prozessbeobachtungen, bei denen die Verwendung des Skriptes explizit erlaubt war. Kirsten beschreibt in diesem Zusammenhang die Aktivität des *ressourcengeleiteten Ergänzens* als wenig gewinnbringend:

> Das ressourcengeleitete Ergänzen kennzeichnet sich dadurch, dass die Studierenden ihre Suche nach hilfreichen Informationen ausschließlich mithilfe des Buchs oder Skripts durchführen und ihren Erkenntnisprozess damit stärker an externen Informationsquellen als an aufgabenbezogenen Konzepten ausrichten. Das Ergänzen verläuft hier wenig zielgerichtet und nimmt stellenweise den Charakter einer Vorlesungsnachbereitung an. Es wird deutlich, dass die Studierenden über nur geringes Überblickswissen verfügen, das ihnen erlauben würde, gezielt Hintergrundwissen zu aktivieren oder eine Suchrichtung für die Verwendung der Hilfsmittel zu bestimmen. (S. 348)

Explizit mit dem Begriffsverständnis beim Beweisen haben sich Ko und Knuth (2009) beschäftigt. Sie diagnostizieren bei Studierenden im dritten Fachsemester „unsatisfactory understanding of limits, onto functions, and discontinuous and continuous functions, which led them to verify given statements incorrectly." (S. 76)

3. Forschungsinteresse

Ziel der vorliegenden explorativen Studie ist es, grundlegende Erkenntnisse zur Bearbeitung problemhafter Übungsaufgaben zu Erstsemesterveranstaltungen zu gewinnen, wobei insbesondere die dabei auftretenden Schwierigkeiten der Studierenden besser verstanden werden sollen.

Der Blick in den Forschungsstand zeigt die Bedeutung dieses Ziels, da Übungsaufgaben eine sehr wichtige Rolle für Lernprozesse in der Studieneingangsphase spielen, sie bisher aber selten explizit beforscht wurden – vor allem zugehörige Bearbeitungsprozesse wurden bislang kaum in den Blick genommen. Zunächst wird deshalb die Aufgabenauswahl begründet und es werden die eingesetzten Aufgaben stoffdidaktisch analysiert.

Die anschließende Analyse von Bearbeitungen der ausgewählten Aufgaben zielt zunächst auf eine Charakterisierung der Prozesse ab. Hier wird exemplarisch – mit Blick darauf, ob Barrieren im Sinne von Lange (2013) empirisch feststellbar sind – überprüft, ob die untersuchten Prozesse als Problembearbeitungsprozesse identifiziert werden können. Gezielt untersucht werden folgende Aspekte, die in der Literatur (s. o.) als bedeutend herausgearbeitet wurden: Zunächst wurde festgestellt, dass Fachwissen eine große Rolle beim Bearbeiten universitärer Übungsaufgaben haben kann (Sommerhoff, 2017; Stenzel, 2023), allerdings bei Prozessbeobachtungen bisher nur wenig beachtet wurde (vgl. Abschnitt 2.5). Diese Rolle soll also genauer unter die Lupe genommen werden.

Zur Feststellung des während der Bearbeitung abrufbaren Fachwissens und zur Beschreibung auftretender Schwierigkeiten scheint uns, auch im Hinblick auf die Kategorisierung von Moore (1994) das Konstrukt des Concept Image geeignet.

Lassen sich Concept Images in Bezug auf für ausgewählte Aufgaben zentrale mathematische Konzepte rekonstruieren und Bearbeitungsschwierigkeiten auf fehlerhaft oder unzureichend ausgebildete Concept Images zurückführen?

Die Nutzung von Skripten während der Aufgabenbearbeitung wurde in den in Kapitel 2 genannten

Studien nicht berücksichtigt (größtenteils auch gar nicht zugelassen). Ausnahmen bilden die Arbeiten von Kirsten (2021) und Stenzel (2023). Es stellt sich daher die Frage, wie Studierende mit diesem Hilfsmittel umgehen und ob sich das auf den Erfolg der Proband:innen auswirkt.

Wie lässt sich die Nutzung der Skripten beschreiben?

Hängt die Art der Nutzung von Skripten mit dem Bearbeitungserfolg zusammen?

4. Methodik

4.1 Stichprobe und Datenerhebung

Um die Forschungsfragen zu beantworten, wurden Daten aus einer früheren Studie von Stenzel (2023) reanalysiert. Im Rahmen besagter Studie wurden an der Universität Duisburg-Essen Studienanfänger:innen der Fachmathematik bzw. des Gymnasiallehramts bei der Bearbeitung von authentischen Aufgaben (also solchen, die auf einem Übungsblatt zur Analysis bzw. Linearen Algebra stehen könnten) gefilmt, mit dem Ziel, grundlegende Erkenntnisse zum Problemlösen von Studienanfänger:innen gewinnen zu können. Für eine ausführliche qualitative Untersuchung wurden dort 13 Problembearbeitungsprozesse ausgewählt. Hierbei wurde eine starke Bedeutung des Vorwissens (bzw. der Ausprägung passender Concept Images) für die Bearbeitung der Aufgaben festgestellt.

Um die in Abschnitt 3 formulierten Forschungsfragen zu beantworten, wurden die Daten aus Stenzel (2023) neu ausgewertet. Die hier vorgestellte Studie, mit starkem Fokus auf auftretende Schwierigkeiten, weitet die Untersuchungen auf insgesamt 60 Prozesse aus, sodass nun auch Bearbeitungen betrachtet werden, in denen gar keine Lösungsideen aufgekommen sind. Solche Prozesse wurden nicht für die ursprüngliche Untersuchung ausgewählt, da vergleichsweise wenig Problemlöseaktivitäten zu erkennen waren.

4.1.1 Stichprobe

Bei den Proband:innen handelt es sich um Studierende im ersten Fachsemester, die gerade die jeweilige Veranstaltung (Analysis I bzw. Lineare Algebra I) hörten und sich bereiterklärt hatten, während des Semesters zu zwei bis drei Zeitpunkten Aufgaben unter den in Abschnitt 4.1.2 beschriebenen Bedingungen zu bearbeiten. Da die Teilnahme freiwillig war, ist zu erwarten, dass es sich eher um eine Positivauswahl als um einen repräsentativen Querschnitt der Studierendenschaft handelt. Weitere Daten zu den Proband:innen, wie etwa das Alter oder der Erfolg bei der folgenden Klausur wurden nicht erfasst, um die Hürde zur Teilnahme nicht weiter zu erhöhen.

Tab. 1 (Abschnitt 5.2) zeigt, welche Aufgaben die jeweiligen Proband:innen bearbeitet haben. Zusätzlich enthält die Tabelle Informationen darüber, wie erfolgreich die jeweiligen Bearbeitungen waren (Die Kategorien (E0) bis (E3) stehen hier für den erreichten Erfolgsgrad, vgl. Abschnitt 4.2.1). Die Aufgaben sind nach den Zeitpunkten sortiert, in denen sie bearbeitet wurden, angefangen vom Wintersemester 2016/17 (Aufgaben „Lineare Unabhängigkeit 1“ und „Affine Unterräume“) bis zum Wintersemester 2018/19 („Grenzwert von Quotient und Wurzel“, „konstante Funktion“ und „Monotonie“). Die Aufgaben haben sich von Semester zu Semester unterschieden, mit der Ausnahme, dass im Sommersemester 2019 von Niklas, Silas und Sophie Aufgaben bearbeitet wurden, die bereits in vorherigen Semestern zum Einsatz kamen. Mit Ausnahme von Jan, der im WS 17/18 Aufgaben aus der Linearen Algebra und im WS 18/19 Aufgaben aus der Analysis bearbeitet hat, nahmen alle Proband:innen nur in einem Semester teil und haben 1 bis 3 (Median: 2) Aufgaben bearbeitet. Insgesamt wurden 60 Bearbeitungsprozesse von 34 verschiedenen Studierenden für diese Studie betrachtet.

4.1.2 Datenerhebung

Die Studierenden wurden bei der Bearbeitung einer auf die Inhalte der Lehrveranstaltung abgestimmten Aufgabe in Einzelarbeit gefilmt. Dabei wurde darauf geachtet, den Teilnehmenden durch bewusst wenig Einschränkungen einen Lösungsprozess zu ermöglichen, der möglichst authentisch die Bearbeitung universitärer Übungsaufgaben widerspiegelt: Es gab keine Obergrenze für die Bearbeitungszeit (wobei die Prozesse selten länger als eine Stunde dauerten, was im Vergleich zu einer Woche, die üblicherweise zur Bearbeitung von Übungsaufgaben zur Verfügung steht, natürlich schon eine starke Verkürzung ist) und sämtliche mitgebrachten Materialien, inklusive eines Laptops mit Internetzugang, durften verwendet werden. Darüber hinaus wurde der aktuelle Teil des Vorlesungsskriptes, auf das die Studierenden in der Regel bereits vorher durch den verantwortlichen Dozenten Zugriff hatten, zur Verfügung gestellt. Der Interviewer war zwar für dringende Rückfragen anwesend, hat sich aber räumlich entfernt außerhalb des Blickfeldes der Proband:innen aufgehalten. Die Studierenden wurden zum lauten Denken angehalten. Bei manchen Proband:innen hat das gut funktioniert, andere mussten während der Bearbeitung daran erinnert werden, wenige haben nur unmittelbar nach Aufforderung ihre letzten Gedanken rekapituliert. Dank der Mitschriften konnten trotz dieser Schwierigkeiten alle Prozesse in der vorliegenden Studie verwendet werden. Bei einem anderen Fokus (etwa auf Heurismeneinsatz oder Metakognition) wären aber einige der Beobachtungen unbrauchbar (vgl. Stenzel, 2023). Die verschiedenen Sitzungen unterschieden sich strukturell nicht voneinander, mit einer Ausnahme: Die Aufgaben „Lineare Unabhängigkeit 2" und „Rangungleichung" wurden in einer Sitzung bearbeitet und bei der Aufgabe „Lineare Unabhängigkeit 1" wurde in derselben Sitzung eine weitere Aufgabe aus einem anderen Thema auf Schulniveau bearbeitet. Beides hatte möglicherweise Einfluss auf den Fokus der Studierenden bzw. auf die Bearbeitungszeit und -intensität der einzelnen Aufgabe. Bei allen anderen Sitzungen wurde nur jeweils eine Aufgabe bearbeitet.

4.1.3 Aufgabenauswahl

Für die Studie wurden 11 Aufgaben ausgewählt. Bei dieser Auswahl wurde zum einen darauf geachtet, dass es sich um authentische Aufgaben, also typische Übungsaufgaben zu aktuellen Inhalten der Vorlesung handelt. Um das zu gewährleisten, wurden die Aufgaben aus früheren Lehrveranstaltungen zur Analysis bzw. linearen Algebra übernommen und inhaltlich auf den Stand der Vorlesung zu den jeweiligen Erhebungszeitpunkten abgestimmt. Hierbei wurde darauf geachtet, dass diese nicht bereits als Übungsaufgabe behandelt wurden. Zum anderen sollten die Aufgaben auch für stärkere Studierende einen Problemcharakter haben, also nicht durch Routineoperationen lösbar sein. Dieser wurde a priori durch stoffdidaktische Analysen der Aufgaben mit Identifikation möglicher Barrieren bestimmt. A posteriori konnte in den qualitativen Analysen bestätigt werden, dass es sich bei allen bis auf zwei Bearbeitungen (vgl. Abschnitt 5.2) tatsächlich um Problemlöseprozesse handelte. Dadurch haben die betrachteten Übungsaufgaben tendenziell auch einen überdurchschnittlich hohen Schwierigkeitsgrad, was sich im Bearbeitungserfolg widerspiegelt (vgl. Abschnitt 5.2). Weitere Kriterien zur Aufgabenauswahl gab es nicht. Im Folgenden werden zwei dieser Aufgaben dargestellt, die weiteren befinden sich im Anhang.

Lineare Unabhängigkeit 1: Sei V ein Vektorraum über dem Körper K. Ferner seien $v_1, \dots v_n \in V$ linear unabhängig. Zeigen Sie:

a) Dann sind die Vektoren $v_1, \dots, v_n, \sum_{i=1}^{n} v_i$ linear abhängig.

b) Je n der Vektoren $v_1, \dots, v_n, \sum_{i=1}^{n} v_i$ sind linear unabhängig.

Quetschlemma: Seien a_n, b_n und c_n Folgen mit $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie: Wenn a_n und c_n gegen den gemeinsamen Grenzwert c konvergieren, dann konvergiert auch b_n gegen c.

4.1.4 Aufgabenanalyse

Bevor sie den Studierenden zur Bearbeitung vorgelegt wurden, wurden die Aufgaben analysiert. Hier wurde jeweils eine Modelllösung erstellt. Exemplarisch wird hier für die „Quetschlemma"-Aufgabe (siehe 4.1.3) eine knappe Lösung vorgestellt. Zum Beweis der Behauptung ist es sinnvoll, die Konvergenz formal darzustellen:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N: \qquad |a_n - c| < \varepsilon$$

Analoges gilt für c_n (ggf. mit anderem N; damit die Aussagen möglichst für a_n und c_n gelten, bietet es sich an, das Maximum beider N zu verwenden) und ist für b_n zu zeigen. An dieser Stelle kann es hilfreich sein, diese Formel in eine bildliche Vorstellung (mit beliebig kleinem, aber festem ε) zu übersetzen (Repräsentationswechsel): Für genügend große n liegen alle a_n in der ε-Umgebung von c, ebenso alle c_n. Für b_n ist dies zu zeigen.

Entweder durch Umstellen der Formel oder über die Umgebungsvorstellung lassen sich dann die Ungleichungen

$$c - \varepsilon < a_n < c + \varepsilon \quad \text{und} \quad c - \varepsilon < c_n < c + \varepsilon$$

herleiten. Bei der formalen Herangehensweise ist die Abschätzung nach oben leichter zu erkennen als die nach unten, da erstere sich direkt durch Weglassen der Betragsstriche ergibt, während für letztere zuerst noch erkannt werden muss, dass

$$|a_n - c| = |c - a_n|$$

ist, was für Studierende eine weitere Barriere darstellen kann (vgl. Stenzel, 2023, Kap. 5.5).

Kombiniert man diese Ungleichungen mit der Ungleichungskette aus der Voraussetzung, ergibt sich

$$c - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < c + \varepsilon$$

Hieraus folgt mit entsprechenden Überlegungen, für welche n dies gilt, die Konvergenz von b_n gegen c.

4.2 Analyse der Daten

Im Folgenden wird beschrieben, mit welchen Instrumenten versucht wurde, die Forschungsfragen zu beantworten. Zur Messung des Bearbeitungserfolges (4.2.1) wurden vier verschiedene Kategorien gebildet, zur Identifikation von Schwierigkeiten wurden die Bearbeitungsprozesse mit einem starken Fokus auf Concept Images qualitativ analysiert (4.2.2), bezüglich der Skriptnutzung wurden die Prozesse ebenfalls in vier verschiedene Kategorien eingeteilt (4.2.3) und anschließend Zusammenhänge mit dem Bearbeitungserfolg hergestellt (4.2.4). Um die Vorgehensweise zu verdeutlichen, wird in Abschnitt 5.1 ein Prozess komplett analysiert.

4.2.1 Bearbeitungserfolg

Mit dem Ziel, den Erfolg einer Aufgabenbearbeitung über alle elf verschiedenen Aufgaben hinweg vergleichbar einschätzen zu können, wurden keine Punktzahlen vergeben; stattdessen wurden verschiedene Erfolgsgrade definiert (vgl. Rott, 2013, Kap. 10). Während (E0 – kein Fortschritt) und (E3 – vollständige Lösung) selbsterklärend sind, werden für (E1) und (E2) jeweils zwei Ankerbeispiele angegeben. Weitere befinden sich im Anhang.

- **Erfolgsgrad 0 (E0):** Bei der Lösung des Problems wurde kein Schritt in Richtung einer Lösung erzielt.
- **Erfolgsgrad 1 (E1):** Es wurde eine Definition auf die Aufgabe übertragen oder eine sinnvolle Schreibweise eingeführt, darüber hinaus aber kein Fortschritt erzielt. Was genau das bedeutet, ist aufgabenabhängig. Zum Teil gibt es sogar Aufgaben, bei denen eine solche Übertragung nicht möglich oder zumindest nicht üblich ist. Diese Aktivitäten führen zwar nicht direkt zu einer Lösungsidee, zeugen aber von einem zumindest rudimentären Verständnis der Aufgabe. Mit der Taxonomie von Moore (siehe Abschnitt 2.3) gesprochen: Schwierigkeit (D3) ist nicht aufgetreten bzw. wurde überwunden, wenn (E1) erreicht wurde.

Beispiele:

Bei den Aufgaben zur *linearen Unabhängigkeit* wird eine passende Linearkombination aufgestellt, z. B. für die Aufgabe LU 1a):

$$\sum_{j=1}^{n} a_j v_j + a_{n+1} \sum_{i=1}^{n} v_i = 0$$

Bei Aufgaben zum Grenzwert (wie etwa dem *Quetschlemma*) wird die Konvergenz mindestens einer Folge formal dargestellt (vgl. Abschnitt 4.1.4).

Im Anhang sind zu jeder verwendeten Aufgabe Beispiele mit (E1) aufgeführt.

- **Erfolgsgrad 2 (E2):** Es wurden gewisse Fortschritte auf dem Weg zu einer Lösung erzielt. Das kann der Beweis eines Spezialfalls sein, das Erreichen von Teilzielen oder auch nur kleine Schritte in die richtige Richtung Diese Kategorie ist sehr breit gefächert und schließt die Lücke zwischen (E1) und (E3).

Beispiele:

Beim *Quetschlemma* wird nur die Abschätzung nach oben gezeigt.

Bei der Aufgabe zur *n-ten Wurzel* wird das Quetschlemma als korrektes Werkzeug ausgewählt, aber nur eine Abschätzung gefunden.

Sämtliche Bearbeitungen mit (E2) sind im Anhang kurz beschrieben.

- **Erfolgsgrad 3 (E3):** Die Aufgabe wurde vollständig gelöst. Dadurch, dass die Niederschrift der Bearbeitung durch mündliche Erläuterungen ergänzt wurde, darf es hierbei kleinere Lücken in der schriftlichen Argumentation geben, wenn diese im Prozess erklärt wurden.

4.2.2 Mangelhafte Concept Images und weitere Schwierigkeiten

Neben der Skriptnutzung und dem Bearbeitungserfolg wurden die Stellen in den Bearbeitungsprozessen analysiert, in denen Schwierigkeiten, also Barrierestellen im Sinne von Lange (2013) identifiziert wurden. Beim Bearbeiten von Aufgaben oder allgemein beim Nachdenken über mathematische Begriffe wird in der Regel das Concept Image und nicht die Concept Definition aktiviert (vgl. Vinner & Hershkowitz, 1980). Daher ist für uns von großer Bedeutung, welche Schwierigkeiten auf ein mangelhaft ausgeprägtes Concept Image zurückzuführen sind. Hierbei betrachten wir nicht nur Abweichungen von der Concept Definition, sondern auch wenig bis gar nicht ausgeprägte Concept Images. Beide entsprechen Schwierigkeit (D2) nach Moore (1994 – vgl. Abschnitt 2.3). Schwierigkeit (D1) ist aufgrund der Tatsache, dass auf das Skript zurückgegriffen werden konnte, nicht aufgetreten. Die

Situationen, in denen (D3) eine Rolle spielte, wurden ebenfalls festgehalten. Die eher strategischen Schwierigkeiten (D4)–(D7) haben wir in dieser Studie nicht beachtet.

Während sich ein unzureichend ausgeprägtes Concept Image meist nur indirekt erkennen lässt (etwa da bestimmte Aktivitäten *nicht* stattgefunden haben oder bestimmte Aspekte eines Begriffs nicht beachtet wurden), lassen sich fehlerhaft ausgeprägte Concept Images deutlicher an Äußerungen und Niederschriften erkennen. Diese reichen von Missinterpretationen grundlegender Begriffe wie dem des Grenzwertes, über fehlerhafte Vorstellungen zu aufgabenspezifischen Zusammenhängen, bis hin zu kleineren Missverständnissen. Hierbei wurde insbesondere darauf geachtet, ob bestimmte Fehler mehrfach bei verschiedenen Proband:innen auftauchen.

4.2.3 Skriptnutzung

In allen Prozessen wurde die Skriptnutzung der Proband:innen kodiert. Die Verhaltensweisen der Studierenden konnten hierbei mithilfe von vier verschiedenen Kategorien charakterisiert werden, die induktiv aus den Daten gewonnen wurden (siehe Abschnitt 5.4.1). Diese Kodierung soll eine grobe Kategorisierung des gesamten Prozesses darstellen. Es wurde daher nicht jede Interaktion mit dem Skript einzeln kodiert, sondern der Prozess als Ganzes. Auf Ankerbeispiele wird an dieser Stelle verzichtet, da in Abschnitt 5.4.1 ausführlich auf die verschiedenen Nutzungsweisen eingegangen wird.

- **Keine Skriptnutzung:** Im Prozess ist keine Nutzung des Skripts oder anderer externer Ressourcen zu beobachten.
- **Gezielte Skriptnutzung:** In diese Kategorie fallen Prozesse, in denen erkennbar ist, dass die Proband:innen ausschließlich gezielt nach bestimmten Stellen im Skript suchen. Meist ist ein solches Verhalten daran zu erkennen, dass die Studierenden vorher äußern, wonach sie suchen und dass nach dem Auffinden der entsprechenden Stelle nur genau diese betrachten. Häufig werden zu Beginn der Prozesse gezielt Definitionen angesteuert und im Laufe des Prozesses dann bestimmte Sätze oder Lemmata. Diese Kategorie wird auch dann vergeben, wenn mit einem gezielt aufgeschlagenen Skriptausschnitt intensiv gearbeitet wird.
- **Durchblättern:** Hier wurden solche Prozesse erfasst, in denen (ggf. zusätzlich zu gezielter Nutzung) Proband:innen das Skript überflogen haben, ohne dass sie sich längere Zeit an einer Stelle aufgehalten haben. Hierbei wurden keine bestimmten Zeiteinheiten als Obergrenze gesetzt. Haben Studierende nur die Hauptaussagen einer Seite erfasst bzw. sich mit Hilfe des Skripts daran erinnert, so wurde diese Kategorie vergeben. Wird versucht, eine Aussage oder Definition (erneut) nachzuvollziehen, wurde stattdessen *Intensives Lesen* kodiert. In der praktischen Umsetzung war die Zuordnung immer eindeutig.
- **Intensives Lesen:** Sobald sich Proband:innen längere Zeit mit einer Stelle im Skript auseinandersetzt haben, wurde dieser Kode vergeben. Hierzu zählt das Betrachten von Details in Formulierungen ebenso wie das Entschlüsseln eines Beweises. Es kann sein, dass das Skript zunächst durchgeblättert oder nicht genutzt wird. Sobald dann aber zu mindestens einem Zeitpunkt intensiv mit dem Skript gearbeitet wird, fällt der Prozess in diese Kategorie. Wird andererseits intensiv ausschließlich mit gezielt ausgewählten Stellen gearbeitet, so wird dies als *gezielte Skriptnutzung* kodiert.

Zusätzlich wurde qualitativ untersucht, welche Ideen die Proband:innen aus dem Skript übernommen haben. Hierzu wurde beobachtet, an welcher Stelle im Skript sich die Studierenden gerade befanden. Zwar kann man in der Aufnahme nicht immer direkt mitlesen, es ist aber meistens nachvollziehbar welche Seite im Skript gerade aufgeschlagen war. Zudem haben viele Proband:innen zumindest Stichpunkte aus dem Skript genannt, die Hinweise darauf geben. In wenigen Ausnahmefällen wurde selbst mitgebrachtes Material verwendet oder das Skript wurde von den Studierenden unbeabsichtigt außerhalb des Bildes geschoben. Trotzdem wird meist aus dem Zusammenhang klar, was in etwa gerade gelesen wurde. Wurden im Anschluss dazu passende Ideen verwendet oder aufgeschrieben, wurde das qualitativ erfasst. Das kann die Übernahme eines Satzes oder anderen Zusammenhangs sein, der die weiteren Überlegungen beeinflusst (z. B. der Zwischenwertsatz oder die Grenzwertsätze) aber auch eine Definition oder Teile davon.

4.2.4 Zusammenhang zwischen Skriptnutzung und Bearbeitungserfolg

Um einen Überblick über den Zusammenhang zwischen Skriptnutzung und Bearbeitungserfolg zu geben, wurde dieser zunächst aufgabenweise quantitativ erfasst (siehe Tab. 2). Darauf aufbauend wurden die Prozesse, geordnet nach den Kategorien der Skriptnutzung, qualitativ analysiert, mit dem Ziel, mögliche Einflüsse dieser Nutzung auf Bearbeitungsschwierigkeiten und Lösungserfolg zu ermitteln. Da sich hierbei gezeigt hat, dass dies stark von den mathematischen Inhalten abhängig ist, wurde auch diese Analyse auf Aufgabenebene durchgeführt.

4.2.5 Existenz von Barrieren

Lange (2013, S. 177–296) legt ausführliche Kodierregeln für die Identifikation von Barrierestellen vor (inkl. verschiedenen Arten von Barrieren und Abgrenzungen, beispielsweise zu Routinefehlern). In der hier vorliegenden Studie wird – im Gegensatz zu Lange (2013) – nicht das Ziel verfolgt, Prozesse mit einem besonderen Fokus auf solche Stellen zu untersuchen. Daher reicht für die hier angestrebten „Existenzbeweise“ von Barrieren im Prozess die Identifikation von Prozessstellen, an denen die Proband:innen steckenbleiben, zögern bzw. etwas nicht routiniert ausführen. Solche Stellen wurden – wie bei Lange – konsensuell validiert.

5. Ergebnisse

Um die verschiedenen Kodierungen zu verdeutlichen, werden diese zunächst an einem Beispielprozess (Jennifer, Aufgabe „Quetschlemma“) vorgestellt (5.1). Anschließend wird eine Übersicht über den Bearbeitungserfolg der jeweiligen Prozesse gegeben (5.2). In Abschnitt 5.3 wird dann genauer auf die zu beobachtenden Schwierigkeiten eingegangen mit starkem Fokus auf Concept Images. In Abschnitt 5.4 wird dann die Skriptnutzung und deren Zusammenhang mit dem Lösungserfolg betrachtet.

5.1 Beispielprozess

Der Bearbeitungsprozess von Jennifer zur Aufgabe „Quetschlemma“ (s. Abschnitt 4.1.4) bietet sich hier als Beispiel an, da die Probandin vergleichsweise viel redet und mehrmals das Skript benutzt, so dass mit diesem Prozess gut demonstriert werden kann, was in den verschiedenen Analysen alles erfasst wurde. Zur besseren Einordnung werden zunächst die Inhalte der ersten drei Skriptseiten, mit denen sie viel arbeitet, zusammengefasst:

Auf S. 1 stehen die Definitionen (in dieser Reihenfolge mit diesen Bezeichnungen) von Cauchy-Folgen, Nullfolgen und konvergenten Folgen sowie einige Bemerkungen (unter anderem auch die geometrische Vorstellung, dass eine Folge genau dann (gegen α) konvergiert, wenn „in jeder ε-Umgebung von α fast alle Glieder der Folge liegen“). Auf der zweiten Seite steht im Wesentlichen, dass jede rationale Cauchy-Folge konvergent ist, die Definition einer beschränkten Folge und der Satz, dass jede konvergente Folge beschränkt ist. Auf der dritten Seite stehen einige Beispiele für konvergente und divergente Folgen.

5.1.1 Beschreibung des Prozesses

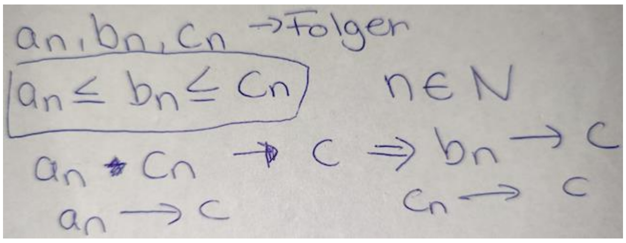

Abb. 1: Jennifers Paraphrase der Aufgabenstellung

Jennifer startet die Bearbeitung der Aufgabe damit aufzuschreiben (00:40)[1], was gegeben ist (vgl. Abb. 1). Anschließend sagt sie:

> „Also, wir müssen zeigen, dass a_n und c_n beide gegen c konvergieren und dann soll gleichzeitig auch gelten, dass b_n gegen c konvergiert.“ (01:05)

Bei 01:37 greift sie zum Skript, wobei sie zunächst die ersten drei Seiten überfliegt (insgesamt 80 s). Dann (02:57) liest sie die Definition einer konvergenten Folge vor, blättert immer wieder zwischen den ersten drei Seiten hin und her und liest dabei einzelne Teile auch genauer. Insgesamt betrachtet sie in den ersten fünf Minuten des Prozesses gut eine Minute die erste Seite, knapp zwei Minuten die zweite Seite und eine halbe Minute die dritte Seite des Skripts.

Von 04:57 bis 06:03 blättert Jennifer noch die weiteren Seiten des Skripts durch. Anschließend legt sie das Skript beiseite mit den Worten „Ich hab’ grad absolut keinen Ansatz, wie ich daran gehen soll.“ Sie liest den zweiten Teil der Aufgabe („Wenn...“) laut vor und greift bei 06:48 wieder zum Skript. Während sie vor sich hinmurmelt, ist der Begriff „beschränkt“ zu verstehen. Sie ist nun durchgängig bis 15:26 (mit Ausnahme einer kurzen Zeit von 08:02 bis 08:54, in der sie die anderen Seiten durchblättert) mit den Seiten 1 und 2 beschäftigt. Von 08:54 bis 11:09 liest sie sogar lückenhaft das Skript von Beginn bis zur Definition der Beschränktheit laut vor und schreibt anschließend:

$$„a_n + c_n \leq c“ \text{ (12:21)},$$

streicht das aber wenig später (12:38) mit den Worten „Nein, das wäre, wenn die beschränkt wären […], also fliegt das hier unten schonmal raus.“ Sie überlegt noch eine Minute, ohne in das Skript zu schauen, und fragt sich dann laut (16:23): „Wie hatten wir das denn definiert?“ Danach blättert sie das Skript bis 17:12 durch. Nach welcher Definition, welchem Satz oder welchen Beispielen sie hier sucht, wird aus dem Zusammenhang nicht klar.

Anschließend bricht sie sie die Bearbeitung mit den Worten „Ich finde hier leider keinen Ansatz“ (17:12) ab. An dieser Stelle ist der Prozess offiziell beendet, da der Interviewer eingreift und unter anderem klarstellt, dass die Konvergenz von a_n und c_n gegen c gegeben ist.

Für unsere Zwecke ist trotzdem interessant, was weiter passiert. Nach einer Aufmunterung des Interviewers versucht Jennifer noch knapp 8 Minuten lang, die Aufgabe zu lösen. Hierbei blättert sie in ihren eigenen Unterlagen und stößt dabei unter anderem auf einen der Grenzwertsätze, der besagt, dass der Grenzwert der Summe zweier konvergenter Folgen gleich der Summe der Grenzwerte ist. Daraufhin schreibt sie ihren einzigen Ansatz auf:

$$„lim(a_n + c_n) = 2c“,$$

kann aber auch damit nicht weiterarbeiten.

5.1.2 Interpretation der Abläufe

Barrieren und verwendete Heurismen

Wie es die Aufgabenauswahl nahelegt, entfaltet sich der Prozess nicht als Routine-, sondern als Problemlöseprozess. An mehreren Stellen sind beispielsweise deutliche Anzeichen für empirische Barrieren im Sinne von Lange (2013, S. 32) erkennbar, d. h. Stellen, an denen Jennifer zögert oder nicht sicher weiterarbeitet. Man kann also davon ausgehen, dass für Jennifer Barrieren (vgl. Dörner, 1979) vorliegen. Die Nutzung des Skripts, deutet zudem auf eine heuristische Absicht hin: die Probandin verwendet es als Wissensspeicher, um Informationen nachzuschlagen, und erhofft sich damit das Finden von Lösungsideen (vgl. Rott, 2013). Dies zeigt exemplarisch den in Abschnitt 2 theoretisch vorhergesagten Zusammenhang von Beweisaufgaben und Problemen.

Bearbeitungserfolg

Zum Bearbeitungserfolg lässt sich sagen: Jennifer schreibt zwar zu Beginn auf, was gegeben ist, allerdings wird an keiner Stelle die Konvergenz der Folgen a_n und c_n (oder auch die zu zeigende Konvergenz von b_n) formal (also in Form einer Ungleichung oder Ähnlichem) aufgeschrieben. Wäre das geschehen, würde dieser Aufgabe der Erfolgsgrad 1 zugeordnet werden. Da das aber nicht der Fall war und auch sonst kein Fortschritt erzielt wurde, wird (E0) vergeben.

Schwierigkeiten bei der Bearbeitung

An ihrem Zitat nach einer Minute wird bereits deutlich, dass sie die Aufgabenstellung falsch verstanden hat, da sie offenbar davon ausgeht, dass die Konvergenz der Folgen a_n und c_n zu zeigen ist, obwohl dies vorausgesetzt ist. Bereits dieses Missverständnis, das erst nach der eigentlichen Bearbeitung vom Interviewer aufgeklärt wird, stellt ein massives Hindernis dar: Die Probandin muss selbstständig ihren Fehler entdecken, bevor überhaupt eine Möglichkeit hat, die Aufgabe zu lösen, denn die Konvergenz von a_n und c_n zu zeigen ist in dieser Aufgabe unmöglich. Jennifer hat offensichtlich keine Idee, wie sie an diese Aufgabe herangehen soll, was sie bei Minute 6 sogar selbst sagt. Da sie kaum Ansätze aufschreibt oder Ideen benennt, lässt sich auch wenig über die Ausprägung eines Concept Images sagen, abgesehen davon, dass Jennifer offenbar nicht bewusst ist, dass konvergente Folgen beschränkt sind (siehe folgender Abschnitt).

Skriptnutzung

Wenngleich es durchaus Phasen gibt, in denen die Probandin das Skript durchblättert (etwa in den ersten drei und in der letzten Minute der offiziellen Bearbeitung sowie in Minute 8), ist die Nutzung als *intensiv* einzuschätzen. Das zeigt sich bereits beim gründlichen Lesen vor allem der ersten zwei Seiten von Minute 3 bis 5. Bemerkenswert ist auch, dass sich die Skriptnutzung sogar noch intensiviert, nachdem Jennifer zugegeben hat, dass sie keinen Ansatz findet

Interessant ist auch, was genau aus dem Skript übernommen wurde: Nachdem sie das komplette Skript bis zur Definition von Beschränktheit detailliert durchgelesen hat, möchte sie diese auf die Aufgabe anwenden (und übernimmt als Bezeichnung für die obere Schranke das im Skript verwendete c, was in der Aufgabenstellung aber bereits für den Grenzwert eingeführt wurde), korrigiert sich dann aber, weil sie der Meinung ist, dass die Folgen nicht beschränkt sein müssen. Direkt nach der Definition steht im Skript aber, dass konvergente Folgen beschränkt sind, was sie offenbar nicht gelesen hat. Warum sie genau an dieser Stelle mit dem Lesen aufgehört hat, lässt sich leider nicht sagen. Nach der eigentlichen Bearbeitung stößt sie auf die Grenzwertsätze, die sie ebenfalls anwenden möchte. Zwar ist hier ein Beweis über den Mittelwert von a_n und c_n denkbar, ein solcher Beweis ist aber sicherlich kompliziert und benötigt ähnliche Vorstellungen wie die in Abschnitt 4.2 skizzierte Lösung. Jennifers Vorgehen ist ein typisches Beispiel dafür, dass es Proband:innen gibt, die (insbesondere, wenn sie selbst keine Ideen haben) sehr intensiv im Skript lesen. Das birgt die Gefahr, keine oder nicht zielführende Ideen zu verfolgen und damit wichtige Ressourcen (Energie und vor allem Zeit) verbrauchen.

5.2 Bearbeitungserfolg

Tab. 1 gibt auch einen Überblick über die bei den jeweiligen Aufgaben erreichen Erfolgsgrade (vgl. Abschnitt 4.2.1). Insgesamt waren nur 6 von 60 Bearbeitungen komplett erfolgreich (Kategorie E3), während 25 gänzlich ohne Lösungsfortschritt blieben (E0) und 19 nur mit geringem Erfolg bearbeitet wurden (E1). Man sieht auch, dass es Aufgaben gibt („Lineare Unabhängigkeit 2“, „Grenzwert von Quotient und Wurzel“ sowie „Monotonie“), in denen Erfolgsgrad 2 oder 3 gar nicht erreicht wird.

Die in der Studie genutzten Übungsaufgaben sollten für alle Studierenden ein Problem darstellen, Routinebearbeitungen sollten also ausgeschlossen werden. Dies ist gelungen, denn bei den Bearbeitungen zu allen Übungsaufgaben lassen sich Stellen im Prozess ausmachen, an denen die Bearbeitenden steckenbleiben und damit empirische Barrieren aufzeigen. Deutliche Hinweise dafür sind unter anderem die Kategorisierung der Skriptnutzung als intensiv (vgl. Abschnitt 4.2.2), da hierdurch meist versucht wird, eine Wissenslücke zu schließen, der Einsatz von Heurismen, auf den in diesem Artikel nicht intensiv eingegangen wird, aber auch längeres Nachdenken.

Es gibt lediglich zwei Prozesse zur Aufgabe „Lineare Unabhängigkeit 1“, die nicht problemhaft wirken: Ivan hat diese Aufgabe ohne große Hindernisse (also durch Routineoperationen) gelöst. Dasselbe gilt, zumindest im Aufgabenteil (a) auch für Lena. Bei allen anderen Prozessen waren Barrieren zu erkennen. Auch die eher geringen Erfolgsquoten bei der Bearbeitung (Tab. 1) sprechen für den Problemcharakter der ausgewerteten Prozesse. Eigene Erfahrungen aus der Leitung von Tutorien und der Korrektur von Übungsaufgaben legen die Vermutung nahe, dass durch diese Auswahl die betrachteten Aufgaben etwas schwieriger als die durchschnittlichen Übungsaufgaben waren. Diese Einschätzung wurde von den verantwortlichen Dozenten bestätigt.

5.3 Mangelnde Concept Images und weitere Schwierigkeiten

In diesem Abschnitt wird qualitativ den Schwierigkeiten bei der Bearbeitung der Aufgaben auf den Grund gegangen. Hierbei wird vor allem auf Defizite im Concept Image geachtet. Zunächst werden einige Beispielaufgaben ausführlich betrachtet (5.3.1 bis 5.3.3), um anschließend eine Zusammenfassung der Schwierigkeiten bei anderen Aufgaben zu geben (5.3.4).

5.3.1 Aufgabe „Quetschlemma“

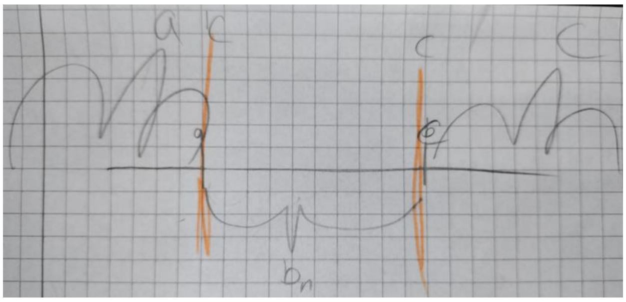

Abb. 2: Tims Skizze zum Quetschlemma

Bei der „Quetschlemma“-Aufgabe war besonders auffällig, dass ein Großteil der neun Proband:innen deutliche Schwierigkeiten mit dem Grenzwertbegriff hat. So zeichnet etwa Tim eine Skizze (Abb. 2), die einige Schwächen im Concept Image offenbart (vgl. Stenzel, 2023, Kap. 5.5): Zunächst wird hier zweimal der Grenzwert c eingezeichnet, obwohl dieser eindeutig ist. Darüber hinaus wird durch diese beiden mit c bezeichneten Stellen die Zahlengerade in drei Bereiche aufgeteilt, in denen sich jeweils die Folgen a_n, b_n und c_n befinden. Die dazu getätigten Äußerungen verstärken den Eindruck, dass es sich bei den Fehlern in der Skizze nicht um Unsauberkeiten handelt, sondern dass ein fundamentales Unverständnis des Grenzwertbegriffes vorliegt:

> „Für mich würde das heißen, dass z. B. der erste Wert a links bis c geht und bis minus unendlich, dann eben die Lücke kommt, die b erfüllt, dann eben *(kurzes Stocken)* b ist ja beschränkt […] durch den Wert c, [der] auf der rechten Seite von c bis positiv unendlich geht. Dass eben a und c diese Bereiche abdecken, […] ist schon durch die Aufgabe gegeben. […] Jetzt müsste ich eben nur noch zeigen, dass es (b; Ergänzung T. S.) dazwischen liegt, dass es keine Überschneidungen gibt.“ (Tim, Quetschlemma, 37:48)

Proband:in	Lin. Unabhg. 1	Aff. Unterraum	Injektivität	Lin. Unabhg. 2	Rangungl.	Lin. Unabhg. 3	Quetschlemma	n-te Wurzel	GW Quot./Wurzel	Konstante Fkt.	Monotonie	Summe
Ivan	E3	E3										2
Lena	E3	E2										2
Michelle	E0	E1										2
Daniel	E1											1
Magnus	E1											1
Marcel			E1									1
Alexander			E0									1
Jana			E3									1
Leonie			E0									1
Anna			E1									1
Sarah				E1	E1							2
Vanessa				E1	E2							2
Jasmin				E0	E0	E1						3
Jan				E1	E2	E1			E0	E2	E1	6
Andreas				E1	E2	E2						3
Finn				E1	E0							2
Marco							E1					1
Tim							E0	E0				2
Jonas							E1					1
Antonia							E2					1
Samir							E0	E0				2
Malik							E3	E3				2
David							E0					1
Jennifer							E0	E2				2
Marvin							E2	E0				2
Charlotte									E0			1
Julia									E0	E0	E1	3
Katharina									E1	E0	E1	3
Mailin									E0			1
Manuel									E0			1
Luan									E0			1
Niklas								E2		E0		2
Silas								E2		E0		2
Sophie								E0				1
E0	1	0	2	1	2	0	5	4	6	4	0	25
E1	2	1	2	5	1	2	2	0	1	0	3	19
E2	0	1	0	0	3	1	1	3	0	1	0	10
E3	2	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	6
Summe	5	3	5	6	6	3	9	8	7	5	3	60

Tab. 1: Übersicht der bearbeiteten Aufgaben

Abgesehen davon, dass die Folgen a_n, b_n und c_n hier mit a, b und c bezeichnet werden, was unabhängig von üblichen Konventionen auch zu Verwechslungen mit dem Grenzwert c führen kann, sind die auffälligsten fachlichen Fehler: Die Folgen a_n und c_n sind keine „Werte" und decken auch nicht die kompletten Bereiche von minus unendlich bis c bzw. von c bis plus unendlich ab, sondern befinden sich für fast alle n in einer Umgebung (unterhalb und oberhalb) von c. Darüber hinaus sind sie auch nicht durch c nach oben bzw. unten beschränkt. Außerdem ist nicht zu zeigen, dass b_n zwischen a_n und c_n liegt, das ist (zumindest punktweise) bereits vorgegeben. Auch darf es grundsätzlich Überschneidungen der Bereiche geben, in denen sich a_n, b_n und c_n bewegen (die Ungleichung gilt hier punktweise, also für feste n). Es liegen also offenbar erhebliche Defizite im Concept Image zum Grenzwert vor. An anderer Stelle sagt Tim noch:

> „Wann konvergiert […] eine Folge […] gegen den Grenzwert c? Das passiert, wenn es sich um eine Nullfolge handelt." (15:20, vgl. Abb. 3)

Diese Vermutung wurde interessanterweise von drei weiteren Proband:innen (Jonas, Samir und David) geäußert. Eine mögliche Erklärung werden wir in Abschnitt 5.4.3 geben.

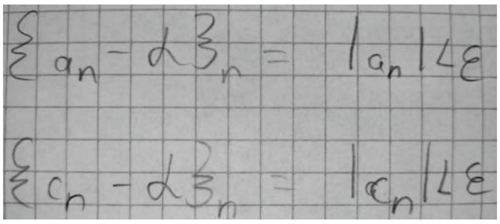

Abb. 3: Tim betrachtet die Folgen als Nullfolgen

Auch Jonas hat große Schwierigkeiten mit dem Grenzwertbegriff, die hier nur kurz angedeutet werden sollen (für ausführlichere Beschreibungen siehe Stenzel, 2023, Kap. 5.5): Wie Tim zeichnet er ebenfalls eine Skizze, die allerdings nicht so starke Schwierigkeiten mit dem Concept Image offenbart (Abb. 4). Auch er schreibt „a_n, b_n, c_n Nullfolgen". Außerdem wählt er feste Zahlen (etwa 0,5 oder 1) für ε, was in diesem Zusammenhang nicht zielführend ist und er vermutet zwischenzeitlich, dass „c_n gleich c" ist.

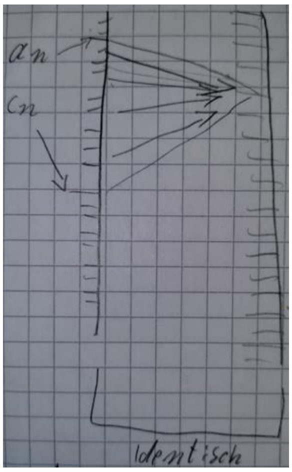

Abb. 4: Jonas' Skizze zum Quetschlemma

Samir redet, ähnlich wie Tim, von a_n, b_n und c_n als „Zahlen". Dass es sich hierbei nicht um eine unsaubere Sprechweise handelt, zeigt sich in dem Beispiel, das er aufschreibt (Abb. 5). Während man links ($a_n = 2$, $b_n = 2{,}1$ und $c_n = 2{,}2$) noch vermuten könnte, dass hier konstante Funktionen als Beispiel gewählt wurden, sieht man rechts (alle drei Folgen konvergieren gegen 2,3), dass auch Samir kein tragfähiges Concept Image zu konvergenten Folgen aufgebaut hat. Darüber hinaus schreibt auch er, dass alle drei Folgen Nullfolgen sind, was nicht nur hier nicht stimmt, sondern auch noch seinem Beispiel widerspricht.

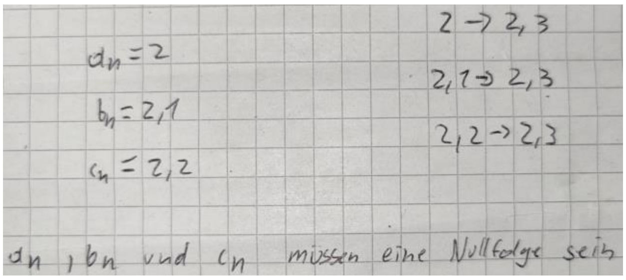

Abb. 5: Samirs Beispiel für Folgen

Bei David werden die Lücken nicht ganz so deutlich. Allerdings schreibt er „$lim_c \to \infty$" (Abb. 6). Was genau er damit sagen will, ist nicht klar; wenn es für die Divergenz von c_n stehen soll, so widerspricht das der Voraussetzung, dass c_n gegen c konvergiert. Die darüberstehende Notiz weist ebenfalls auf ein mangelhaftes Concept Image hin, da die Grenzwerte mit den Beträgen der Folgenglieder gleichgesetzt werden. Außerdem sagt er, dass ihn die Aufgabe an Transitivität erinnert, zu der es aufgrund der vorgegebenen Ungleichungskette nur eine oberflächliche Ähnlichkeit gibt.

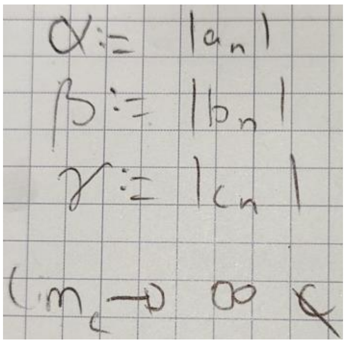

Abb. 6: Davids Notizen zum Quetschlemma

Die beschriebenen Schwächen in den Concept Images, die sich in diesen drei Beispielprozessen zeigen, scheinen so groß zu sein, dass sie eine erfolgreiche Aufgabenbearbeitung verhindern. Selbst das Anwenden geeigneter heuristischer Verfahren (wie das Beispiel des Anfertigens einer Skizze bei Tim zeigt), wird dadurch stark gestört.

Zwei weitere Proband:innen (Jennifer und Marvin) können keinerlei Teilerfolg bei der Aufgabe verbuchen. Jennifer sagt, dass die Folgen nicht beschränkt sind (vgl. Abschnitt 5.1), was zwar nicht von grundlegendem Unverständnis des Grenzwertbegriffs zeugt, allerdings ist die Beschränktheit eine der typischen Eigenschaften konvergenter Folgen. Darüber hinaus reden beide Proband:innen aber zu wenig, als dass sich Gründe für den nicht vorhandenen Erfolg erkennen lassen. Auch bei Marco, der ebenfalls nur die Definition der Konvergenz korrekt auf die gegebenen Folgen überträgt (E1), ist nicht zu erkennen, woran das liegt.

Der einzige Proband, der die Aufgabe komplett lösen konnte, ist Malik. Er zeigt sicheren Umgang mit dem Grenzwertbegriff, wird aber durch Schwierigkeiten mit dem Betragsbegriff aufgehalten. Die dadurch entstandene Hürde kann er aber überwinden (für eine ausführliche Beschreibung siehe Stenzel, 2023, Kap. 5.5). Dies zeigt, dass es grundsätzlich möglich ist, in Problemlöseprozessen Wissenslücken zu schließen, also neues Wissen aufzubauen. Es ist naheliegend, zu vermuten, dass solche Fälle nur dann auftreten, wenn diese Lücken nicht zu groß sind.

5.3.2 Aufgabe: „n-te Wurzel"

Die Aufgabe zur n-ten Wurzel wurde zum Teil in derselben Kohorte bearbeitet, wie die „Quetschlemma"-Aufgabe, zum Teil in einer anderen (vgl. Tab. 1). Auch hier gibt es Bearbeitungen, die Schwierigkeiten mit dem Grenzwertbegriff offenbaren. Neben grundlegenden Schwächen im Concept Image, die hier bei zwei Proband:innen an Äußerungen wie „Null ist halt auf jeden Fall das kleinste Element und läuft auf plus unendlich bis a_k zu." (Sophie) oder „Ich glaube, dass der Grenzwert […] von 1 bis plus unendlich geht." (Samir) deutlich werden, ist hier die Idee sehr präsent, dass der gesuchte Grenzwert gleich 1 ist. Diese ergibt sich bei vier Proband:innen (Jennifer, Tim, Silas und Sophie) aus der Überlegung, dass im Exponent $1/n$ steht, was für n gegen unendlich gegen Null konvergiert. Leider wird hier aber nicht beachtet, dass der Ausdruck unter der Wurzel ebenfalls gegen unendlich geht, so dass diese Argumentation hier nicht greift. Nur einer Studierenden (Jennifer) gelingt es, diesen Fehler zu korrigieren. Sie erreicht anschließend zumindest den Beweis eines Spezialfalls (alle a_i sind gleich), sowie (mit etwas Hilfe des Interviewers) eine geeignete Abschätzung nach oben (insgesamt E2).

5.3.3 Aufgaben zur „linearen Unabhängigkeit"

Neben dem Grenzwertbegriff aus der Analysis haben sich auch bei einem zentralen Begriff der Linearen Algebra, nämlich der linearen Unabhängigkeit, problematische Concept Images gezeigt. Es liegen Materialien zu drei verschiedenen Aufgaben zu diesem Thema vor. Bei der ersten Aufgabe (kurz: LU1) ging es um die lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit von n linear unabhängigen Vektoren und deren Summe. Dies war die einzige betrachtete Aufgabe, bei der sich vermuten lässt, dass sie für zwei der fünf Proband:innen (Ivan und Lena) eine Routineaufgabe darstellte (vgl. Abschnitt 5.2), da beide Aufgabenteil (a) ohne große Hindernisse lösen konnten, Ivan auch Teil (b).

Von den anderen dreien (Magnus, Michelle und Daniel) hatten zwei offensichtliche Probleme mit dem Begriff der linearen Unabhängigkeit: Magnus glaubt zunächst, dass eine Liste von Vektoren linear unabhängig ist, wenn eine Linearkombination aus diesen Vektoren existiert, die den Nullvektor ergibt, und linear abhängig, wenn das nicht der Fall ist. Tatsächlich gibt es eine solche Kombination immer (wenn man alle Koeffizienten gleich Null setzt). Die Frage ist, ob es eine nicht-triviale Linearkombination gibt, die Null ergibt. Dann wäre die Liste linear abhängig. Nur mit großer Hilfe des Interviewers gelingt es ihm überhaupt, die Definition passend auf die Aufgabe zu übertragen. Michelle dreht die Implikation um: Sie ist der Meinung, dass eine Liste linear unabhängig ist, wenn daraus, dass alle Koeffizienten der Linearkombination gleich Null sind, folgt, dass diese Kombination den Nullvektor ergibt. Auch das gilt immer.

Dass Schwierigkeiten mit diesen Begriffen nicht ungewöhnlich sind, zeigt sich bei der Betrachtung der zweiten Aufgabe zu diesem Thema (kurz: LU2). Auch hier ist bei drei (Andreas, Annika, Sarah) von sechs Proband:innen erkennbar, dass sie nicht verstanden haben, wie man lineare Unabhängigkeit nachweist. Sarah ist, wie Michelle, der Meinung, dass die Vektoren linear unabhängig sind, wenn die triviale Linearkombination den Nullvektor ergibt:

> „Wenn alle λ gleich Null sind […], dann gilt auf jeden Fall diese Gleichung, dann ist das ja gleich Null. Dann ist das ja so gesehen linear unabhängig." (Sarah, 10:15)

Andreas und Annika scheinen zu vermuten, dass eine Linearkombination nur dann gleich Null sein kann, wenn jeder einzelne Summand gleich Null ist:

> „Also, da jetzt die einzelnen $F^n(v)$ ungleich Null sind, kann ein Produkt ja nur dann Null sein, wenn einer der Faktoren Null ist. […] Daraus folgt schonmal, dass λ_1 bis λ_n gleich Null sein muss." (Andreas, 08:31)

In allen hier genannten Fällen haben die Studierenden Schwierigkeiten, die Definition der linearen Unabhängigkeit sinnvoll anzuwenden. Wir deuten diese Schwierigkeiten als Zeichen eines mangelhaften Concept Images, wenngleich auch andere Interpretationen (etwa Schwierigkeiten auf formaler Ebene) möglich sind.

In derselben Kohorte wurde später im Semester auch die dritte Aufgabe zur linearen Unabhängigkeit (kurz: LU3) bearbeitet. Bemerkenswert ist hier, dass keiner der drei Probanden mehr begriffliche Schwierigkeiten hat (und auch das Skript gar nicht mehr benutzt wird). Das lässt sich zu einem großen Teil dadurch erklären, dass die schwächeren Studierenden zu diesem Zeitpunkt nicht mehr an der Lehrveranstaltung und daher auch nicht mehr an der Studie teilnahmen. Zwei der Übriggebliebenen (Jan und Jasmin) hatten bereits bei LU2 keine Anzeichen für Verständnisprobleme gezeigt. Allerdings gehört auch Andreas zu den Bearbeitenden dieser Aufgabe. Er muss zwischen den beiden Messzeitpunkten etwas dazugelernt haben, denn sein Umgang mit der linearen Unabhängigkeit ist jetzt sehr sicher. Was zu diesem Lernfortschritt geführt hat, lässt sich im Rahmen dieser Studie leider nicht sagen. Möglicherweise hat bereits die Nachbesprechung der vorherigen Aufgabe mit dem Interviewer geholfen oder er hat sich nach dem Misserfolg aktiv mit dem Begriff auseinandergesetzt; vielleicht hat auch die Beschäftigung im Rahmen der Veranstaltung (Vorlesung und Übung sowie deren Nachbereitung) Früchte getragen.

Es zeigt sich also, dass auch zu einem vergleichsweise überschaubaren Begriff wie der linearen Unabhängigkeit ein gewisses Concept Image vorhanden sein muss, damit entsprechende Aufgaben bearbeitet werden können. Andreas ist es zwar nicht gelungen, während der Bearbeitung von LU2 fehlerhafte Vorstellungen zu überwinden, offenbar wurden diese aber zwischen den beiden Messzeitpunkten ausgeräumt.

5.3.4 Weitere Schwierigkeiten bei anderen Aufgaben

Bei anderen Themengebieten der Analysis und Linearen Algebra sind solche grundlegenden Mängel im Concept Image nicht aufgefallen. Bei der Aufgabe „affine Unterräume“ gab es z. B. keine großen Verständnisschwierigkeiten. Allerdings handelt es sich hier auch um ein Thema, das zum einen sehr übersichtlich ist, in dem Sinne, dass es nicht viele Sätze dazu im Skript gab, zum anderen sind affine Unterräume in Form von Geraden und Ebenen bereits aus der Schule bekannt, wo sie sogar in sehr ähnlicher Gestalt (Parameterform) dargestellt werden.

Teilweise gab es kleinere aufgabenspezifische Missverständnisse. So haben etwa bei der Aufgabe zur Monotonie zwei von drei Proband:innen (Jan und Julia) den Satz von Weierstraß („Jede auf einem kompakten Intervall definierte stetige Funktion nimmt ihr Maximum und ihr Minimum auf diesem Intervall an.“) falsch interpretiert, indem sie vermutet haben, dass es „Berge“ und „Täler“ geben muss. Dass das Maximum auch am Rande des Intervalls liegen kann, haben sie nicht erkannt. Diese Schwierigkeit hat aber nicht zu grundlegenden Verständnisproblemen geführt.

Genau diese beiden Prozesse von Jan bzw. Julia sind auch die einzigen, bei denen die Proband:innen zwar grundsätzlich erklären konnten, warum die Behauptung zutreffen muss, was für ein gutes Concept Image spricht, dieses Beweisprinzip aber nicht formal umsetzen konnten. Solche Schwierigkeiten mit der Formalisierung (bei Moore D3) bilden eine Ausnahme und waren fast nur bei dieser Aufgabe zu erkennen. Das lässt sich dadurch erklären, dass es hier besonders schwierig ist, die Erkenntnisse in Formelgestalt umzuwandeln. Der Grund dafür liegt darin, dass die Negation der Aussage „f ist streng monoton“ für den (indirekten) Beweis notwendig ist, was sich als recht aufwändig erweist, da es nicht genügt, anzunehmen, dass die Funktion f nicht streng monoton wachsend ist (d. h. es gibt ein Tupel (x_1, x_2), mit $x_1 < x_2$, so dass $f(x_1) \geq f(x_2)$ – bzw. wegen der Injektivität $f(x_1) > f(x_2)$), sie darf auch nicht streng monoton fallend sein (d. h. es gibt auch noch ein Tupel (y_1, y_2) mit $y_1 < y_2$, so dass $f(y_1) < f(y_2)$). Je nachdem, wie sich x_1, x_2, y_1 und y_2 zueinander verhalten, müssen dann einige Fallunterscheidungen getroffen werden. Abgesehen von diesen beiden Prozessen zur Monotonie, gab es nur eine Probandin (Lena), die erkennbare Schwierigkeiten beim Übertragen ihrer Ideen in die Formelsprache hatte (D3). Diese sind in beiden beobachteten Aufgabenbearbeitungen (bei „Lineare Unabhängigkeit 1“ sowie bei „affine Unterräume“) aufgetreten. Es scheint sich hierbei aber um ein individuelles Problem zu handeln, da es bei anderen Proband:innen bei diesen Aufgaben nicht aufgetreten ist.

5.4 Skriptnutzung

In Tab. 2 wird dargestellt, welche der vier in Abschnitt 4.2.3 beschriebenen Typen der Skriptnutzung bei welcher Aufgabe aufgetreten sind und welcher Lösungserfolg dabei erreicht wurde. In Abschnitt 5.4.1 werden zunächst diese vier Nutzungsweisen vorgestellt, anhand von Beispielen illustriert und näher auf typische, damit verbundene Verhaltensweisen eingegangen. In 5.4.2 wird der Zusammenhang zum Lösungserfolg zunächst allgemein beleuchtet, bevor in Abschnitt 5.4.3 exemplarisch für die Aufgaben zum Grenzwertbegriff qualitativ untersucht wird, wie genau das Skript verwendet wurde. Zuletzt werden in Abschnitt 5.4.4 sämtliche Situationen beschrieben, in denen das Skript tatsächlich hilfreich war. In 5.4.5 werden die Ergebnisse zusammengefasst.

5.4.1 Nutzungsweisen

Skripte werden in der Regel ausgegeben, um Studierende zu unterstützen, sie dienen der Entlastung beim Mitschreiben und fungieren als Nachschlagewerk, um mit der Stofffülle umgehen zu können – soweit die Theorie (s. Abschnitt 2.2). Von Interesse ist daher nun, wie Skripte bei der Bearbeitung von Übungsaufgaben mit Problemcharakter tatsächlich genutzt werden.

Die Umgangsweisen der Proband:innen mit dem Skript bei der Aufgabenbearbeitung konnten zu vier Typen zusammengefasst werden, die in den Prozessen kodiert wurden (siehe Abschnitt 4.2.3). Hierbei stellen die Kodiervorschriften zugleich inhaltliche Ergebnisse dar. Im Folgenden werden die Nutzungsweisen bzw. Kategorien beschrieben:

(1) Zunächst gibt es Prozesse, in denen *Keine Nutzung* des Skriptes vorkommt. Bemerkenswert ist hierbei, dass nach der Kodierung bei der qualitativen Analyse der Prozesse aufgefallen ist, dass sich diese Kategorie disjunkt in zwei verschiedene Teiltypen aufteilen lässt:

Zum einen gibt es Bearbeitungen, bei denen die Proband:innen in dem jeweiligen Themengebiet das Skript nicht nutzen und dabei sehr sicher wirken, so dass zu vermuten ist, dass diese das Skript nicht benötigen oder es zumindest nicht für nötig halten, mit dem Skript zu arbeiten. Hierzu zählen die Bearbeitungsprozesse von Jana („Injektivität“), Jan, Andreas (beide „Lineare Unabhängigkeit 3“) und Niklas („n-te Wurzel“). Jan und Andreas hatten, bevor sie die dritte Aufgabe zur Linearen Unabhängigkeit erhalten haben, vorher die zweite Aufgabe zu diesem Thema bearbeitet (hier hat Jan das Skript noch intensiv benutzt und Andreas es zumindest durchgeblättert) und dann bei der dritten das Skript nicht mehr genutzt. Dies macht den vermuteten Grund, dass das Skript in diesem Prozess nicht benötigt wird, plausibel. Der zweite Teiltyp besteht aus Bearbeitungen, die relativ kurz waren und bei denen keinerlei Lösungsansätze aufgekommen sind. In diesen Prozessen haben sich die Proband:innen offenbar keine Hilfe vom Skript versprochen. Woran das liegt, ist nicht ganz klar, eine plausible Vermutung wäre aber (die sich zum Teil auch mit den Aussagen der Studierenden deckt), dass sie sich in dem Themengebiet derart unsicher fühlten, dass sie sich auch mit Hilfe des Skripts keine großen Erfolgschancen ausrechneten. Hierzu zählen die Prozesse von Jasmin („Rangungleichung“, 6 Min.), Marvin („n-te Wurzel“, 12 Min.) und Silas („konstante Funktion“, 10 Min.).

	Keine Nutzung				gezielt				Durchblättern				Intensiv				Σ
Aufgabe	E0	E1	E2	E3	E0	E1	E2	E3	E0	E1	E2	E3	E0	E1	E2	E3	
Lin. Unabhg. 1	0	0	0	0	0	1	0	2	0	0	0	0	1	1	0	0	5
Affine Unterräume	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	3
Injektivität	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	2	0	0	5
Lin. Unabhg. 2	0	0	0	0	1	2	0	0	0	2	0	0	0	1	0	0	6
Rangungl.	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	2	0	0	1	1	0	6
Lin. Unabhg. 3	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	3
Quetschlemma	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	5	2	1	0	9
n-te Wurzel	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	3	0	1	0	8
GW Quot./Wurzel	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	1	0	0	7
Konstante Fkt.	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	2	0	0	0	5
Monotonie	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	3
Summe	4	1	1	1	2	3	0	2	1	3	5	3	18	12	4	0	60
	7				7				12				34				

Tab. 2: Skriptnutzung und Bearbeitungserfolg

(2) Bei der *gezielten* Skriptnutzung ist es häufig so, dass zunächst eine Definition nachgeschlagen wird. Dies geschieht in der Regel bereits in der ersten Minute der Bearbeitung (einzige Ausnahme ist Magnus, der erst nach drei Minuten zum Skript greift, weil er zunächst noch Rückfragen zur Aufgabenstellung an den Interviewer stellt) und kann mit oder ohne explizite Ankündigung („Ich frag mich jetzt natürlich erstmal, was bedeutet lineare Unabhängigkeit." (Magnus)) geschehen. Die meisten Proband:innen schlagen kurz den Wortlaut nach, übertragen ihn ggf. auf das Aufgabenblatt und legen das Skript dann beiseite. Es gibt aber auch zwei Proband:innen (Magnus und Vanessa) die sich sehr lange mit der Definition auseinandersetzen (man hätte diese beiden auch in die Kategorie *Intensive Nutzung* einsortieren können, da sie aber ausschließlich und gezielt nach der Definition suchen, wurde sich für diese Variante entschieden). Auch das ist ein Hinweis darauf, dass sie begriffliche Schwierigkeiten haben. Die einzigen Proband:innen, deren Skriptnutzung als *gezielt* kodiert wurde, die aber keine Definition nachschlagen haben, sind Ivan und Lena (beide „Lineare Unabhängigkeit 1"): Ersterer sagt zwar zu Beginn, dass er dies tun möchte, während er sucht, fällt ihm die Definition aber offenbar ein, denn er legt das Skript mit den Worten „Normalerweise würde ich jetzt eigentlich im Skript suchen, aber ich bin jetzt ein bisschen faul." beiseite und fährt ohne große Schwierigkeiten mit der Bearbeitung fort. Etwa 10 Minuten später greift er erneut zum Skript und sagt: „Es gibt auf jeden Fall einen Satz, der sagt, dass man bei 'ner Basis etwas austauschen kann." Auch diesen Satz findet er nach etwa einer Minute des Suchens nicht. Lena hingegen sucht gar nicht nach der Definition, schlägt aber 10 Minuten vor Ende des Prozesses das Skript auf mit den Worten

> „Wir hatten irgendwas in der Vorlesung dazu geschrieben. Ich erinnere mich, das abgeschrieben zu haben, aber ich weiß gerade leider nicht mehr, was. Und dieser Argumentationsschritt fehlt mir jetzt." (39:56)

Auch sie findet, wie sie im Nachgespräch bestätigt, nicht das, was sie gesucht hat. Sowohl Ivan als auch Lena können die Aufgabe komplett lösen, scheinen also sehr sicher mit den Begriffen zu sein. Jasmin schlägt auch zu Beginn die Definition nach und sucht zusätzlich später gezielt nach dem Basisergänzungssatz, den sie auch findet. Sie ist der Meinung, dass dieser die Aufgabe löst (was nicht stimmt) und beendet ihre Bearbeitung. Bei der *gezielten* Nutzung scheint das Skript eher eine Art Gedächtnisstütze als ein Ideengeber zu sein, denn den Studierenden ist ja bereits klar, wonach sie suchen.

(3) In die Kategorie *Durchblättern* werden solche Prozesse eingeordnet, in denen das Skript überflogen wird, ohne dass für längere Zeit an einer Stelle stehengeblieben wird. Typische Aussagen, die dies einleiten, sind etwa: „Vielleicht finde ich ja noch was Spannendes, was mir noch weiterhilft" (Ivan, „Affine Unterräume"). oder „Mal schauen, was der Fischer[2] dazu geschrieben hat" (Sarah, „Lineare Unabhängigkeit 2"). Wie bei der *gezielten* Nutzung wird nach etwas Hilfreichem im Skript gesucht, im Gegensatz dazu ist aber nicht zu erkennen, dass die Studierenden hierbei etwas Bestimmtes im Sinn haben. Bei Jan („konstante Funktion") sind die dabei ablaufenden Gedanken gut zu erkennen, da er laut mitspricht:

> „Folgenkriterium hab' ich gesagt – nee, ist schwierig. […] Summe, Produkt stetiger Funktionen, Komposition stetiger Funktionen stetig, herzlichen Glückwunsch! Gleichmäßig stetig, nee, nee, nee, nee, so funktioniert's nicht." (Jan, 34:17)

Er nennt also Stichpunkte und schätzt diese nach ihrem Nutzen für die Aufgabe ein. Ob das die Studierenden, die nicht so viel reden, auch so machen, lässt sich schwer sagen.

(4) Bei der Mehrheit aller Bearbeitungen (34 von 60) wurde das Skript *intensiv* genutzt, d. h. es wurden ganze Passagen gründlich gelesen. Dies kann als Hinweis darauf gesehen werden kann, dass bestimmte Begriffe, Zusammenhänge oder Verfahren noch nicht verinnerlicht wurden. In den meisten Fällen wurde bereits zu Beginn intensiv mit dem Skript gearbeitet, es gibt aber auch Proband:innen, die zunächst einer der anderen Kategorien zuzuordnen wären und erst später verstärkt mit dem Skript arbeiten. So sucht Michelle („Lineare Unabhängigkeit 1") zunächst *gezielt* zwei Aussagen aus dem Skript heraus (vgl. Abschnitt 5.4.3). Als diese sie aber nicht weiterbringen, geht sie zur intensiven Arbeit mit dem Skript über, bei der sie längere Zeit im Skript liest, Definitionen und Sätze abschreibt etc. In diesem Fall spricht das Vorgehen dafür, dass die Probandin zunächst eine eigene Idee verfolgt, schließlich aber stärker auf das Skript zurückgreifen muss. Bei Jans Bearbeitung der zweiten Aufgabe zur linearen Unabhängigkeit sieht das etwas anders aus: Er blättert, ähnlich wie bei der Aufgabe zur konstanten Funktion (s. o.) zunächst das Skript durch, entdeckt dann eine Aussage, die er für hilfreich hält (lineare Abhängigkeit bleibt unter linea-

ren Abbildungen erhalten), mit der er sich aber (im Gegensatz zum *Durchblättern*, bei dem sich die Studierenden nur mit Hilfe des Skriptes an Zusammenhänge erinnern) genauer beschäftigen muss. Konkret bedeutet dies, dass Jan aus irgendeinem Grund (womöglich da die Schlagworte *Lineare Abhängigkeit* und *Lineare Abbildung* in dem Satz vorkommen) auf die Aussage aufmerksam geworden ist und sich entscheidet, diese genauer zu entschlüsseln. Das bedeutet zum einen, dass Jan erkennen muss, dass eine Familie von linear abhängigen Vektoren nach Anwendung einer linearen Abbildung wieder linear abhängig ist, zum anderen aber auch, dass das für lineare Unabhängigkeit nicht zwingend gilt. Hinzu kommt die Folgerung, dass der Nullvektor auf sich selbst abbildet.

Aufgabenabhängigkeit

Welche Nutzungsweisen zu beobachten sind, hängt sicherlich von den Präferenzen der jeweiligen Bearbeitenden ab, es gibt aber auch Hinweise darauf, dass dies aufgabenabhängig ist: In den Prozessen zu den Aufgaben „Grenzwert von Quotient und Wurzel“ sowie „Monotonie“ haben alle Proband:innen intensiv mit dem Skript gearbeitet. Dies deutet darauf hin, dass alle Schwierigkeiten hatten. Auch bei der Aufgabe „Quetschlemma“ haben fast alle Bearbeitenden das Skript intensiv genutzt. Darüber hinaus hat bei der Aufgabe „lineare Unabhängigkeit 3“ niemand intensiv mit dem Skript gearbeitet. Eine mögliche Erklärung dafür ist, dass in dieser Kohorte bereits die zweite Aufgabe zur linearen Unabhängigkeit bearbeitet wurde, wodurch die wesentlichen Inhalte bereits bekannt waren.

Diese Überlegungen leiten über zum nächsten Abschnitt, in dem ein Abgleich mit dem Bearbeitungserfolg stattfindet.

5.4.2 Zusammenhänge der Skriptnutzung mit dem Bearbeitungserfolg

Tab. 2 gibt einen Überblick über den Zusammenhang zwischen Skriptnutzung und Bearbeitungserfolg.

Wie weiter oben bereits angesprochen, gibt es bei den Proband:innen, die das Skript nicht nutzen, zwei Typen. Die drei Proband:innen, die sich nur kurz (weniger als 12 Minuten) mit der Aufgabe beschäftigen und gar keine Ansätze finden, haben alle den Erfolgsgrad 0 erreicht. Die anderen vier Proband:innen zeigen, dass sie mit den grundlegenden Begriffen gut zurechtkommen und diese daher nicht nachschlagen müssen. Das muss nicht zu einem höheren Bearbeitungserfolg führen, zumindest aber bei der Bearbeitung der Aufgabe zur Injektivität hat die entsprechende Probandin (Jana) deutlich besser abgeschnitten als ihre Kommiliton:innen.

Zu der Gruppe der *gezielten* Prozesse zählen die zwei Bearbeitungen, die weiter oben bereits als potenzielle Routineprozesse (Aufgabe LU1) genannt wurden, in denen die Aufgabe also relativ zielstrebig gelöst werden konnte. Hier stellt sich die Frage, was genau nachgeschlagen wurde. Ivan sagt, bevor er zum Skript greift:

> „Wobei ich jetzt ganz spontan noch ‘ne andere Idee hätte. Ich würde jetzt nämlich überlegen, ob man jetzt mit den Dimensionen, mit der Basis argumentieren könnte. Da gab’s nämlich auch eine Definition und die würde ich jetzt mal nachgucken, ob ich überhaupt in dieser Richtung gehen kann. Und da würde ich mir ein bisschen Arbeit vielleicht sparen.“ (Ivan, 10:01)

Etwa eine Minute sucht er nach der entsprechenden Definition, findet diese aber nicht und arbeitet mit dem üblichen Kriterium für lineare Unabhängigkeit weiter. Lena such zwar ebenfalls gezielt, konkretisiert aber nicht, was genau sie sucht (vgl. Zitat in Abschnitt 5.4.1). Sie blättert etwa zwei Minuten lang im Skript und sagt im Nachgespräch, dass sie nichts Hilfreiches gefunden hat. Obwohl beide nicht gefunden haben, was sie gesucht haben, waren sie anschließend erfolgreich. Die bereits erwähnten Bearbeitungen von Magnus und Vanessa, in denen intensiv mit der Definition der linearen Unabhängigkeit gearbeitet wurde, zählen ebenfalls zu dieser Kategorie. Beide Studierende ringen sichtlich um Verständnis der jeweiligen Definition, was letztlich dazu führt, dass nur Erfolgsgrad 1 zu verbuchen ist. Darüber hinaus sind die Erfolgsgrade bei anderen Prozessen mit *gezielter* Skriptnutzung mit (E0) und (E1) zwar eher niedrig, im direkten Vergleich mit anderen Prozessen zu denselben Aufgaben relativiert sich dieser Eindruck aber, da auch in den anderen Gruppen kein höherer Erfolg erzielt wurde.

Proband:innen, die das Skript nur *durchblättern*, erreichen, mit einer Ausnahme, mindestens den Erfolgsgrad 1, was darauf hinweist, dass zu den grundlegenden Begriffen ein zumindest in Ansätzen tragfähiges Concept Image vorhanden ist. Das legt die Vermutung nahe, dass Studierende dieser Kategorie es nicht für nötig halten, sich Inhalte genauer anzuschauen. Von den zwölf Probanden aus dieser Gruppe haben acht mindestens (E2) erreicht, davon konnten drei die jeweilige Aufgabe komplett lösen.

Bei den Proband:innen, die *intensiv* mit dem Skript gearbeitet haben, fällt auf, dass diese kaum über

Erfolgsgrad 1 hinausgekommen sind und keiner davon eine Aufgabe vollständig gelöst hat (E3). Betrachtet man die vier Prozesse mit dem Erfolgsgrad 2 genauer, fällt auf, dass das Skript bei dreien hiervon (Lena, Antonia und Silas) zum Ende der Bearbeitung hin (mindestens in den letzten 19 Minuten) nicht mehr benutzt wurde. Eine mögliche Erklärung ist, dass diese Proband:innen auf eine Idee gekommen sind (es konnte in keinem der drei Fälle festgestellt werden, dass eine solche Idee aus der Skriptnutzung hervorgegangen ist) und diese in der letzten verbliebenen Zeit ausgearbeitet haben. Es könnte aber ebenfalls sein, dass die Studierenden entschieden haben, dass ihnen das Skript nicht mehr hilft und sie erst anschließend eine Idee hatten. Die drei Prozesse laufen unterschiedlich ab, so dass sich keine Favorisierung der einen oder anderen Theorie ergibt: Silas („n-te Wurzel“) geht, nachdem er das Skript beiseitegelegt hat, verschiedenen Ideen nach, Lena („Affiner Unterraum“) verfolgt eine einzelne Idee (Austauschbarkeit der Stützpunkte) und Antonia („Quetschlemma“) äußert sich in den folgenden 12 Minuten weder schriftlich noch mündlich, bis sie eine zielführende Idee (Fallunterscheidung) verfolgt.

Umgekehrt wäre aber auch eine Erklärung, dass die weniger erfolgreichen Bearbeitenden nach Ideen oder Anstößen im Skript suchen und erst nachdem dieser letzte Versuch erfolglos bleibt, die Bearbeitung abbrechen, so dass diese Skriptnutzung am Ende des Prozesses steht. Tatsächlich enden fast alle erfolglosen (E0 bis E1) Prozesse der intensiven Skriptnutzer:innen weniger als 2 Minuten nach dem letzten Blick in die Unterlagen, die meisten hiervon sogar unmittelbar danach. Lediglich vier Ausnahmen gibt es: Zwei davon sind Bearbeitungen von Jan („Lineare Unabhängigkeit 2“ und „Monotonie“), der, einmal 9 und einmal 16 Minuten lang, verschiedene Ansätze ausprobiert. Bei ihm scheint es so, als sähe er im Skript keinen Nutzen mehr (beide Male wendet er sich mit einem Kopfschütteln vom Skript ab und greift nicht mehr darauf zurück). Tim („n-te Wurzel“) hingegen äußert 13 Minuten nach der letzten Skriptnutzung keine Idee, bevor er aufgibt und David führt 9 Minuten lang einen Plan aus, der aus dem Skript zu stammen scheint.

Die einzige Probandin (Vanessa, „Rangungleichung“), die bis zum Ende der Bearbeitung *intensiv* mit dem Skript gearbeitet und Erfolgsgrad 2 erreicht hat, hat zu Beginn des Prozesses relativ schnell (innerhalb von 4 Minuten) einen Spezialfall der Rangungleichung (der Fall, dass der Rang von A maximal ist) gezeigt und erst nach diesem Fortschritt mit dem Skript gearbeitet. Die folgende Bearbeitung (noch 34 Minuten) ist erfolglos. Dieser Prozess ist ein weiteres Beispiel dafür, dass einige Studierende stärker mit dem Skript arbeiten, wenn ihnen die ohne diese Hilfe generierten Ideen ausgehen.

Insgesamt sind die *intensiveren* Skriptnutzer:innen nicht erfolgreicher als andere, im Gegenteil. Allerdings impliziert das zunächst einmal nicht, dass sich die Skriptnutzung negativ auf die Bearbeitung auswirkt. Die stärkere Verwendung externer Ressourcen scheint aber ein Symptom für eine mangelhafte interne Repräsentation (Concept Image) zu sein.

5.4.3 Qualitative Analyse der Skriptnutzung bei Aufgaben zum Grenzwertbegriff

Da sowohl der Bearbeitungserfolg als auch die Art der Skriptnutzung aufgabenabhängig ist, wird in diesem Abschnitt qualitativ betrachtet, wie diese beiden Dimensionen zusammenhängen. Darüber hinaus wird zusammengefasst, welche Ideen durch das Skript induziert wurden. Wir fokussieren hierbei beispielhaft auf die Aufgaben zum Grenzwertbegriff, da bei diesen die größten Mängel im Concept Image aufgefallen sind (vgl. Abschnitt 5.3).

Aufgabe „Quetschlemma“

Es gibt nur einen Probanden (Malik), der diese Aufgabe komplett lösen kann. Zu Beginn schlägt er die Definition der Konvergenz nach und nach etwa 23 Minuten blättert er für etwas mehr als eine Minute im Skript auf der Suche nach „etwas Ähnlichem“ (wie dem, was in der Aufgabe zu zeigen ist), ohne sich aber einzelne Stellen intensiver anzuschauen (Typ: *Durchblättern*). Möglicherweise ist diese Skriptnutzung ein Zeichen dafür, dass er gerade nicht weiterkommt (tatsächlich hat er in den zehn Minuten davor keinen wesentlichen Fortschritt erzielt). Anschließend fährt er mit einem Beweisansatz durch Widerspruch fort, der ihn aber nicht weiterbringt. Ob diese Idee aus dem Skript stammt, lässt sich nicht sagen. Erst später gelingt ihm ohne weitere Skriptnutzung der Beweis der Behauptung.

Alle anderen Proband:innen lesen *intensiv* im Skript. Fünf davon erzielen keinerlei Fortschritt, während zwei (Jonas und Marco) immerhin die Definition der Konvergenz korrekt auf die in der Aufgabe vorkommenden Folgen übertragen (E1). Dass die fünf erstgenannten das nicht getan haben, ist ein weiterer Hinweis auf große Verständnisprobleme (Schwierigkeit (D3) nach Moore). Nur eine Probandin (Antonia) aus der Gruppe der *intensiv* lesenden hat Lösungsfortschritte erzielt (Sie konnte zeigen, dass fast alle b_n größer als $c - \varepsilon$ sind; beim Beweis, dass diese auch kleiner als $c + \varepsilon$ sind, hat dann der Interviewer geholfen). Antonia hat in den letzten 25 Minuten nicht mehr auf das Skript zurückgegriffen, in der Zeit also offenbar Überlegungen ohne diese Stütze angestellt.

Samir begründet den Griff zum Skript mit den Worten: „Da mir jetzt nicht wirklich viel einfällt, versuche ich durch das Lesen des Skriptes mir ein wenig Informationen zu erhoffen (sic).“ Diese Aussage stützt die These, dass manche Studierende aus Mangel an Ideen zum Skript greifen. Zumindest das intensive Arbeiten mit dem Skript ist aber offenbar selten erfolgreich (vgl. Tab. 2). Eine Analyse von Ideen, die vermutlich aus dem Skript übernommen wurden, zeigt zusätzlich, dass diese sogar eher ablenkend als hilfreich waren:

Drei Probanden (David, Jonas und Marco) haben die (korrekte) Aussage übernommen, dass konvergente Folgen beschränkt sind. Bei der Niederschrift dieser Tatsache verwenden sie aber alle die Bezeichnung „c“ für die Schranke, was in der Folge zu unterschiedlich großen Verwirrungen führt, da der Grenzwert in der Aufgabe ebenfalls mit „c“ benannt ist.

Noch erstaunlicher ist, dass vier Probanden (David, Jonas, Samir und Tim) schreiben, dass die Folgen aus der Aufgabe Nullfolgen sind. Die Häufung dieses Fehlers lässt sich möglicherweise mit einer missverstandenen Formulierung aus dem Skript erklären. Da heißt es bei der Definition der Konvergenz:

> „Eine Folge $\{x_n\}_n$ aus $\mathbb{R}$ nennen wir *konvergent* gegen $\alpha \in \mathbb{R}$, wenn $\{x_n - \alpha\}_n$ eine Nullfolge ist.“

Alle vier Probanden hatten die entsprechende Seite im Skript aufgeschlagen, bevor sie vermutet haben, dass die Folgen a_n und c_n (teilweise auch b_n) selbst Nullfolgen sind. Dieser Fehler verhindert zwar nicht völlig die Bearbeitung der Aufgabe (es ist immerhin noch der Beweis des angenommenen Spezialfalls möglich), zeugt aber wiederum von Unverständnis des Konvergenzbegriffs (vgl. Abschnitt 5.3).

Eine korrekte Aussage, die von zwei Probanden (David und Samir) aus dem Skript übernommen wurde ist die, dass der Grenzwert c eindeutig bestimmt ist (was für die Lösung der Aufgabe aber wenig hilfreich ist).

David fasst im Nachgespräch zusammen: „Im Skript war so viel über Folgen, ich wusste nicht, was ich verwenden soll.“ Diese Aussage macht ebenfalls deutlich, dass einige Studierende durch die Fülle an Informationen im Skript eher überfordert waren. Das kann auch mit dem speziellen Themenbereich (Folgen und Grenzwerte) zusammenhängen, der tatsächlich sehr breit gefächert ist. Auch die folgende Aufgabe stammt aus diesem Bereich.

Aufgabe „n-te Wurzel“

Hier hat ein Proband (Marvin) das Skript gar nicht verwendet. Seine Bearbeitung hat auch nur 12 Minuten gedauert, in denen keine Lösungsideen aufgekommen sind. Davon abgesehen zeigt sich ein ähnliches Bild wie bei der Quetschlemma-Aufgabe: Die drei Proband:innen (Jennifer, Malik und Niklas), die das Skript nur durchgeblättert haben, sind auf einen Erfolgsgrad von 2 bzw. 3 gekommen, während von den intensiv Lesenden nur einer überhaupt (Silas) einen Fortschritt (E2) erzielen konnte. Auch dieser Proband hat in den letzten 20 Minuten seines Prozesses nicht mehr in das Skript geschaut.

Bei dieser Aufgabe sind aus dem Skript übernommene Ideen weniger auffällig als bei der Quetschlemma-Aufgabe. Tim, einer der erfolglosen Proband:innen, redet immer wieder von Partialsummen, nachdem er diesen Begriff im Skript gelesen hat, obwohl in der Aufgabe nur eine endliche, keine unendliche Summe vorkommt. Niklas hingegen kann Unsicherheiten mit der Exponentialschreibweise (beschreibt ein Bruch im Exponenten eine Wurzel oder einen Kehrwert?) mit Hilfe des Skriptes klären.

Sehr aufschlussreich ist der Prozess von Sophie, da sie Begriffe aus dem Skript in der Reihenfolge ihres Auftretens benennt und einige davon aufschreibt (sie scheint diese also für relevant zu halten). Ein Großteil der aufgeschriebenen Begriffe hat nichts direkt mit der Aufgabe zu tun, wie das Prinzip des Archimedes oder der Begriff der Häufungspunkte, während die Grenzwertsätze (die besagen, dass sich Grenzwerte von Verknüpfungen konvergenter Folgen so verhalten wie Verknüpfungen von Grenzwerten dieser Folgen) die häufig geäußerte falsche Vermutung nahelegen, dass der gesuchte Grenzwert gleich eins ist (vgl. Abschnitt 5.3). Interessant ist hierbei, dass Sophie scheinbar kaum hinterfragt, ob diese Ideen aus dem Skript sinnvoll sind und sich davon eher ablenken als helfen lässt. Durch die Skriptnutzung werden also Denkrichtungen angestoßen, die ohne metakognitive Kontrolle vom Lösungsweg abführen können. Auch hier spielt es möglicherweise eine Rolle, dass der Themenbereich Folgen und Grenzwerte relativ breit ist und es viele Begriffe und Zusammenhänge gibt, die nicht gerade hilfreich für die Aufgabe sind. Im Folgenden wird also noch eine weitere Aufgabe aus diesem Bereich betrachtet.

Aufgabe „Grenzwert von Quotient und Wurzel"

Auch bei dieser Aufgabe ist zu erkennen, dass das Skript hier eher zu Ablenkungen geführt hat. Ein typischer Fehler war die Vermutung, dass $L = 1$ sein muss, was nur der Fall ist, wenn die Folge a_n konvergent ist. Fünf der sieben Proband:innen haben mit dieser Annahme gearbeitet. Drei davon (Julia, Katharina und Luan) haben diese Idee entwickelt, nachdem sie im Skript auf die Grenzwertsätze gestoßen sind. Allerdings sind die beiden anderen (Manuel und Mailin) von sich aus darauf gekommen, was zeigt, dass die Idee zumindest naheliegend war. Ein Proband (Jan) sagt bewusst, dass er die Grenzwertsätze hier nicht anwenden kann, da die Folge a_n nicht konvergieren muss. In zwei Prozessen (Julia und Manuel) werden die Begriffe Intervallschachtelung, Häufungspunkt und Teilfolge aus dem Skript aufgegriffen und es wird versucht, damit zu arbeiten (vgl. Stenzel, 2023), was bei dieser Aufgabe nicht zielführend ist und damit eine Ablenkung darstellt. Keine:r der Proband:innen hat auch nur einen Teilerfolg erzielen können. Möglicherweise erklärt das auch, warum alle Studierenden intensiv mit dem Skript gearbeitet haben, selbst Jan, der bei anderen Aufgaben weniger darauf zurückgegriffen hat. Dadurch verstärkt sich die These, dass die Proband:innen zum Skript greifen, wenn sie ohne dessen Hilfe keine Ideen haben. Leider führte das aber in der Regel nicht zum erwünschten Erfolg, sondern eher zu Ablenkungen.

Interessanterweise sind solche aus dem Skript generierten Ideen, die vom Weg abführen, bei anderen betrachteten Themenbereichen als Folgen und Grenzwerte nicht aufgetreten. Wie bereits erwähnt, liegt ein möglicher Grund darin, dass Folgen und Grenzwerte ein sehr breites inhaltliches Spektrum abdecken, während andere Themen übersichtlicher sind.

5.4.4 Potenziale der Skriptnutzung

Neben diesen eher ablenkenden Skriptnutzungen wurde aber auch beobachtet, dass das Skript durchaus über das Nachschlagen einer Definition hinaus hilfreich sein kann. So erkennt z. B. Jan bei der Bearbeitung der zweiten Aufgabe zur linearen Unabhängigkeit mit Hilfe des Skriptes, dass $v \neq 0$ sein muss, da F eine lineare Abbildung ist und $F^n(v) \neq 0$ ist. In den 60 hier betrachteten Prozessen sind solche Fälle allerdings so selten aufgetreten, dass sie hier vollständig aufgeführt werden können:Bei der ersten Aufgabe zur linearen Unabhängigkeit benennt eine Probandin (Michelle) eine Proposition aus dem Skript, die zu einer alternativen Lösung führen könnte. Diese besagt:

> „Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, $u_1, \dots, u_m$ sei linear unabhängig in V und $w_1, \dots, w_n$ erfülle $span(w_1, \dots, w_n) = V$. Dann gilt: $m \leq n$." (Prop. 5.13)

Im Umkehrschluss bedeutet diese Aussage, dass aus $m > n$ folgt, dass $u_1, \dots, u_m$ linear abhängig sein müssen, was also auch für die $n + 1$ Vektoren aus Aufgabe (a) gelten muss. Michelle arbeitet aber nicht weiter mit dieser Aussage.

Bei der Bearbeitung der Aufgabe zur konstanten Funktion kommen zwei Proband:innen (Jan und Julia) auf die Idee, die Folgenstetigkeit auszunutzen, was der vielversprechendste Ansatz ist. Beide verwerfen den Ansatz aber wieder, nachdem sie sich etwas damit auseinandergesetzt haben und nicht weitergekommen sind und bleiben somit erfolglos. Ebenso bemerken zwei Proband:innen (Julia und Katharina) bei der Bearbeitung der Monotonie-Aufgabe den Zwischenwertsatz im Skript, der ein starkes Werkzeug zur Lösung der Aufgabe ist. Trotzdem gelingt auch ihnen kein Beweis der Behauptung. Diese Situationen unterstreichen nochmals, dass das Skript durchaus hilfreich sein und Ideen zur Lösung beisteuern kann. Leider konnten die Proband:innen in diesen Beispielen, die eher zufällig beim Durchblättern des Skriptes auf diese Zusammenhänge gestoßen sind, hieraus keinen Nutzen ziehen. Der Vollständigkeit halber sei nochmal auf Niklas' Bearbeitung der Aufgabe zur n-ten Wurzel hingewiesen, bei der er immerhin Schwierigkeiten mit der Exponentialschreibweise mit Hilfe des Skriptes ausräumen konnte (vgl. Abschnitt 5.4.3).

5.4.5 Zusammenfassung

Die in Abschnitt 5.4.2 beschriebenen Zusammenhänge lassen vermuten, dass erfolgreichere Bearbeitungsprozesse eher mit einer geringeren Skriptnutzung einhergehen. Zwar lassen sich bei 60 betrachteten Prozessen und einer großen Aufgabenabhängigkeit keine generellen Aussagen treffen, die in 5.4.3 und 5.4.4 dargestellten qualitativen Analysen bringen aber etwas mehr Klarheit: Relativ deutlich lässt sich sagen, dass die Verwendung des Skriptes nicht (wie vielleicht zu hoffen war) über Schwierigkeiten bei der Bearbeitung hinweghelfen konnte. Abgesehen vom Nachschlagen wichtiger Begriffsdefinitionen oder vorher ausgewählter Stellen, wie es für die *gezielte* Skriptnutzung typisch ist, bildeten die Situationen, in denen das Skript nach außen erkennbar hilfreich war, eher die Ausnahme (vgl. Abschnitt 5.4.4). Im Gegenteil konnten sogar einige Stellen ausgemacht werden, an denen die Skriptnutzung zu weiteren Schwierigkeiten geführt hat, etwa weil Inhalte falsch verstanden wurden (Nullfolge beim Quetschlemma oder Satz von Weierstraß), weil Ideen generiert wurden, die nicht hilfreich waren (Sophie bei der Aufgabe „n-te Wurzel“) oder Werkzeuge verwendet wurden, die nicht anwendbar waren (Grenzwertsätze beim Grenzwert von Quotient und Wurzel). Offenbar hat auch die Menge der potenziell passenden Stellen im Skript einige Studierende überfordert, wie das Zitat von David zeigt. Ohne gute Metakognition ist es daher wenig verwunderlich, dass sich die Proband:innen hier ablenken lassen. Bei anderen Themenbereichen sind solche Ablenkungen nicht aufgefallen.

Insgesamt scheint eine intensive Skriptnutzung auch ein Hinweis auf schlecht ausgebildete Concept Images zu sein, denn die internen Repräsentationen der vorkommenden Begriffe müssen durch intensive Arbeit mit externen Quellen unterstützt werden. Auf der anderen Seite haben die Proband:innen, die das Skript gar nicht nutzen (wenn man von den drei Prozessen absieht, die sehr schnell abgebrochen wurden) und die, die neben der Definition auch andere Stellen gezielt nachschlagen, anscheinend ein breit ausgebildetes Begriffsnetzwerk als Concept Image oder sie kennen sich mit dem Skript bzw. der Vorlesung gut aus, was nicht zwingend dasselbe sein muss.

Eine weitere Erklärung für einen negativen Zusammenhang zwischen Skriptnutzung und Bearbeitungserfolg ergibt sich daraus, dass einige Studierende (erst) dann zum Skript greifen, wenn sie ohne diese Hilfestellung nicht mehr weiterkommen: Bei vielen erfolglosen Prozessen wird die Skriptarbeit zum Ende hin noch intensiviert, allerdings bleibt diese letzte Maßnahme in der Regel erfolglos.

6. Zusammenfassung

Die Bearbeitung von Übungsaufgaben in der Studieneingangsphase spielt sowohl im Lernprozess als auch bei der Bewertung von Studierenden eine große Rolle. Daher sollte diese intensiv beforscht werden, was derzeit allerdings nicht der Fall ist. Die wenigen existierenden Studien haben eher die Struktur der Übungsaufgaben oder den Bearbeitungserfolg im Blick als die eigentlichen Bearbeitungsprozesse. Aus diesem Grund wurden in der vorliegenden Studie 60 Prozesse von 34 Studienanfänger:innen der Fachmathematik bzw. des Gymnasiallehramts, die gerade die Veranstaltung zur Analysis I bzw. Linearen Algebra I besuchten, analysiert. Das Ziel war es, Schwierigkeiten von Studierenden identifizieren zu können. Hierbei wurden 11 verschiedene Aufgaben betrachtet, die so gestellt waren, dass sie für alle Studierenden ein Problem darstellen sollten, also jede:r Bearbeiter:in auf eine Barriere stoßen sollte. Dementsprechend handelt es sich bei diesen Aufgaben zwar um typische Übungsaufgaben, allerdings aus dem schwierigeren Bereich des Spektrums, was sich auch in den vergleichsweise niedrigen Erfolgsquoten widerspiegelt.

Erste Sichtungen der Daten (vgl. Stenzel, 2023) haben den Fokus der vorliegenden Analysen auf den Einfluss des Concept Images sowie der Nutzung des Skriptes, das bei der Bearbeitung zur Verfügung stand, gelegt. Bei der entsprechenden Analyse der Bearbeitungsprozesse wurden Mängel in den erkennbaren Concept Images diagnostiziert, die teilweise so groß waren, dass erfolgreiche Bearbeitungen und die damit verbundene vertiefte Auseinandersetzung mit den Inhalten nicht möglich waren. Insbesondere bei den Themenbereichen der Grenzwerte bzw. der linearen Unabhängigkeit ist aufgefallen, dass viele Studierende keine hinreichenden Concept Images zu den grundlegenden Begriffen haben. Ein Aufbau geeigneter Repräsentationen dieser Begriffe ist während keiner der beobachteten Bearbeitung gelungen. Einzig der Proband Andreas konnte Schwierigkeiten mit der linearen Unabhängigkeit ausräumen – und das auch nur im längeren Zeitraum zwischen zwei Prozessen. Dass es bei kleineren Lücken aber durchaus möglich ist, das Concept Image während der Bearbeitung sinnvoll zu erweitern, zeigt der Prozess von Malik zur Aufgabe „Quetschlemma“, der sein Verständnis des Betragsbegriffs erweitert hat. Schwierigkeiten bei der Formalisierung eines verstandenen Prinzips (vgl. D3 bei Moore, 1994) bilden die Ausnahme und sind ausschließlich bei der Aufgabe zur Monotonie sowie der Probandin Lena aufgetreten.

Was die Skriptnutzung angeht, konnten vier verschiedene Nutzungsweisen herausgearbeitet werden. Zudem hat sich wieder die These bestätigt, dass Studierende, die von sich aus keine Ideen (mehr) generieren, zum Skript greifen. Leider hat sich auch gezeigt, dass die Arbeit mit dem Skript – zumindest in den betrachteten Prozessen – nur sehr bedingt bei der Aufgabenbearbeitung hilft. Als Wissensspeicher bzw. Gedächtnisstütze, auf die man gezielt zurückgreifen kann, etwa beim Nachschlagen bestimmter Aussagen oder des Wortlautes einer Definition, kann das Skript durchaus gute

Dienste leisten. Wenn allerdings eine intensivere Auseinandersetzung mit den Inhalten notwendig wird, wurde dies – zumindest innerhalb der vergleichsweise kurzen Bearbeitungszeit die im Rahmen dieser Studie zur Verfügung stand – nicht erfolgreich demonstriert. Die vorliegende Studie hat gezeigt, dass die Prozesse, in denen das Skript intensiv genutzt wird, in der Regel nicht erfolgreich abgeschlossen werden: Unter den 34 Prozessen, bei denen eine solche Skriptnutzung festgestellt wurde, gab es nur vier, deren Erfolgsgrad über (E1) (Übertragung der Definition auf den Aufgabenkontext) hinausging. In dreien davon wurde das Skript mindestens in den letzten 19 Minuten der Bearbeitung nicht mehr verwendet. Umgekehrt gibt es bei den 30 Proband:innen dieser Kategorie, die nur Erfolgsgrad (E0) oder (E1) erreicht haben, nur vier, die nicht bis kurz (maximal 2 Minuten) vor Ende des Prozesses mit dem Skript gearbeitet haben. Zum einen lässt sich das pragmatisch erklären: Sofern ein Ansatz gefunden ist, wird das Skript nicht mehr unbedingt benötigt. Nach Pólya (1945) kommt es hier zur Durchführung des Plans, die ihre Zeit braucht. Umgekehrt zeigt sich aber, dass Proband:innen insbesondere zum Ende des Bearbeitungsprozesses ihre Ideenlosigkeit mit Hilfe des Skriptes auszugleichen versuchen.

Die Skriptnutzung ist aber nicht ausschließlich Symptom mangelnden Vorwissens oder von Ideenlosigkeit. Zum Teil hat sich gezeigt, dass Anregungen aus dem Skript Bearbeitende ablenken oder sogar in die Irre führen können. Nur selten konnten die Proband:innen etwas Hilfreiches aus dem Skript ziehen.

7. Diskussion und Ausblick

Da es sich bei den hier untersuchten Prozessen um Problemlöseprozesse (Anzeichen hierfür sind das Vorhandensein empirischer Barrieren, vgl. Lange, 2013) handelt, können die vorgestellten Ergebnisse einen Beitrag zur Problemlöseforschung leisten. Insbesondere wird hier der Bereich adressiert, der von Schoenfeld (1985) als *Ressourcen* bezeichnet wird und das Vorwissen der Proband:innen umfasst. Dieser bislang eher wenig beforschte Bereich wurde mit Hilfe qualitativer Analysen der auftretenden Concept Images untersucht. Es hat sich herausgestellt, dass das Auftreten von Schwierigkeiten mit dem Concept Image (D2 bei Moore, 1994) von der Aufgabe und dem zugehörigen Themengebiet abhängig ist. Der Bereich der Grenzwerte wurde als besonders anfällig diagnostiziert, was zu den Erkenntnissen von Ko und Knuth (2009) passt (vgl. Abschnitt 2.5).

Dass die ungezielte Suche nach Informationen im Skript oder anderen externen Ressourcen wenig hilfreich ist, hat auch Kirsten (2021) festgestellt. Als Begründung dafür, gibt sie passend zu unserer Interpretation an, dass eine Orientierung an externen Quellen deutlich weniger zielführend zu sein scheint als eine an aufgabeninternen Merkmalen. Anders ausgedrückt: Lösungsideen, die von der Aufgabe ausgehen und möglicherweise durch eine gezielte Skriptnutzung unterstützt werden, sind vielversprechender als Ideen, die durch Skriptausschnitte motiviert werden, auf die man zufällig beim Durchblättern gestoßen ist.

Während die meisten Studien zu Beweisprozessen andere Schwerpunkte als das Concept Image setzen (vgl. Abschnitt 2.5), hat sich hier gezeigt, dass dieses zu einem Mindestmaß ausgeprägt sein muss, damit solche Faktoren wie Strategie- und Hilfsmittelnutzung, Metakognition etc. überhaupt zum Tragen kommen können.

Insgesamt zeigen die Ergebnisse, dass es eine Diskrepanz gibt zwischen dem für manche Übungsaufgaben benötigten Wissen und dem, das die Studierenden zum Zeitpunkt der Bearbeitung mitbringen. Da es den Studierenden in der vorliegenden Studie in der Regel nicht gelungen ist, diese Lücke während des Bearbeitungsprozesses zu schließen, stellt sich die Frage, welche Möglichkeiten es gibt, diese zu verkleinern. Zumindest bei einem Teil der Proband:innen scheint die transmissive Vermittlung in der Vorlesung nicht ausgereicht zu haben, ein hinreichendes Concept Image – selbst zu vergleichsweise einfachen Begriffen, wie der linearen Unabhängigkeit – aufzubauen.

Eine rudimentäre Möglichkeit besteht darin, den Studierenden nahezulegen, die Vorlesungsinhalte selbstständig nachzubereiten. Wie Göller (2020) in einer Interviewstudie festgestellt hat, findet in der Vorlesungszeit eine solche Nachbereitung in der Regel nur im direkten Zusammenhang mit der Bearbeitung von Übungsaufgaben statt, was, wie wir gesehen haben, nicht besonders hilfreich ist. Des Weiteren kann man versuchen, Studierende bei der Nachbereitung der Vorlesung, respektive Vorbereitung der Aufgabenbearbeitung, zu unterstützen. Hier gibt es verschiedene denkbare Ansätze. Ein aufgrund des geringen Präsenzzeitaufwands gut umsetzbarer Ansatz besteht in einem Training zum Begriffsverstehen, wie es etwa an der Universität Duisburg-Essen (Stenzel, 2023) stattgefunden hat:

Die Studierenden wurden dazu angeregt, sich vor Bearbeitung der Übungsaufgaben selbstständig mit den benötigten Begriffen auseinanderzusetzen. Zur Orientierung wurde ihnen ein Fragenkatalog an die Hand gegeben, der die verschiedenen Facetten eines Begriffs in den Fokus rückt: explizite Formulierung (entspricht der Concept Definition), Konkretisierung und Abgrenzung sowie Bedeutung und Vernetzung (vgl. Prediger et al., 2011) (siehe Anhang). Da dies im Rahmen einer größeren Umstrukturierung von Übungstutorien geschehen ist, lässt sich bisher nichts über die Wirksamkeit dieser Teilmaßnahme sagen. Die Facette der Konkretisierung und Abgrenzung wird im Wesentlichen durch das Erinnern an sowie das Generieren von Beispielen und Gegenbeispielen gefestigt. Nach Dahlberg und Housman (1997) hat gerade das Generieren eigener Beispiele einen positiven Effekt auf die Beweiskonstruktion. Iannone et al. (2011) konnten dies in einer Studie mit Kontrollgruppe, die statt eigener Beispiele ein Skript mit Beispielen verwendet hat, allerdings nicht bestätigen. Als möglichen Grund geben sie an, dass die Art und Weise, wie Beispiele generiert werden, eine Rolle spielen könnte.

Andere Möglichkeiten bieten sich durch eine engere Betreuung der Studierenden bei der Bearbeitung von Übungsaufgaben. Allerdings ist hierbei darauf zu achten, dies nicht durch eine Erhöhung der Präsenzzeit auf Kosten der Eigenständigkeit der Studierenden zu tun. Eine bereits in der traditionellen Lehre verbreitete Variante ist die Form der Präsenzübung. Im Gegensatz zur Besprechung von bereits bearbeiteten Aufgaben bietet sich hier die Möglichkeit, weitere (ähnliche) Aufgaben in Vorbereitung auf die Hausaufgaben gemeinsam zu bearbeiten. Natürlich gibt es hier noch Verbesserungspotenzial im Vergleich zum klassischen Vorrechnen, etwa durch Erhöhung der Eigenaktivität der Studierenden oder durch Anpassung der Aufgaben (siehe unten).

Weitere Möglichkeiten ergeben sich durch größere Veränderung in der Organisationsstruktur der Veranstaltungen, wie sie etwa bei Flipped-Classroom-Modellen (Lage et al., 2000) durchgeführt werden. Dadurch ergibt sich etwa die Möglichkeit, neues Wissen nicht einfach vorzulesen, sondern durch geeignete Erkundungsaktivitäten entdecken zu lassen. Hierdurch könnten Konzepte besser verstanden und auf weitere Aufgaben übertragen werden. Weniger aufwändige Modifikationen des klassischen Vorlesungsformats werden von Alcock (2018) beschrieben: Neben organisatorischen und motivationalen Praktiken sind dies z. B. ein Training zum selbstständigen *Nachvollziehen von Beweisen* (vgl. Hodds et al., 2014), das Aushändigen von Teilen des Skripts als auszufüllende *Lückentexte*, das Stellen von *Entscheidungsaufgaben*, bei denen sich Studierende für eine von zwei (oder mehr) Antworten (meist „wahr“ oder „falsch“) entscheiden müssen, teilweise mit anschließender Diskussion, teilweise mit dem Auftrag, die Begründung selbstständig nachzuarbeiten, sowie *Lese- und Erklärübungen*, bei denen in Partnerarbeit zwei unterschiedliche kurze Skriptausschnitte gelesen und anschließend dem Gegenüber erklärt werden sollen. Neben diesen Aktivitäten, die allesamt während der Präsenzzeit stattfinden, bekommen die Studierenden Texte zur Vorbereitung auf kommende Sitzungen, die nicht länger als eine Stunde pro Woche dauern soll. All diese Maßnahmen sollen die Eigenaktivität der Lernenden fördern.

Auf der anderen Seite kann die erwähnte Lücke auch durch eine Anpassung der Übungsaufgaben verkleinert werden. Das muss nicht zwingend durch eine Absenkung des Niveaus geschehen. Denkbar wäre die Einführung von gestuften Aufgaben (vgl. Leuders & Prediger, 2016). Hierbei wird dem eigentlichen Problem eine Einstiegsaufgabe vorgeschaltet, die z. B. die Beschäftigung mit wichtigen Aspekten eines Begriffs auf einem leichter zugänglichen Niveau anregen soll. Solche Aufgaben können aus Expertensicht durchaus trivial wirken, betrachtet man aber die in der vorliegenden Studie aufgetretenen Schwierigkeiten, kann sich für Studierende hier durchaus authentisches Problemlösen ergeben, während stärkere Bearbeiter:innen die Aufgaben schnell lösen und zur nächsten Stufe übergehen können. Selbst wenn die schwächeren Studierenden die eigentliche Aufgabe nicht lösen können, haben sie damit die Möglichkeit einer erfolgreichen konzeptuellen Auseinandersetzung mit den neuen Inhalten.

Die hier genannten Ideen lassen sich sicherlich miteinander verknüpfen. So können z. B. gestufte Aufgaben mit einem Flipped-Classroom-Konzept verbunden oder in Präsenzübungen eingesetzt werden.

Anmerkungen

[1] In diesem Artikel wird im Format (mm:ss) die Zeit angegeben, die seit Beginn des Bearbeitungsprozesses verstrichen ist.

[2] Gemeint ist hier das Lehrbuch (Fischer, 2013) zur linearen Algebra, das in der Lehrveranstaltung verwendet wurde.

Literatur

Alcock, L. (2018). Tilting the classroom. *London mathematical society newsletter, 474*, 22–27.

Alcock, L. & Simpson, A. (2004). Convergence of sequences and series: Interactions between visual reasoning and the learner's beliefs about their own role. *Educational Studies in Mathematics, 57*(1), 1–32.

Alcock, L., & Weber, K. (2010). Undergraduates' example use in proof construction: Purposes and effectiveness. *Investigations in Mathematics Learning*, *3*(1), 1-22.

BLK (1997). Bund-Länder-Kommission für Bildungsplanung und Forschungsförderung (Hrsg.). Gutachten zur Vorbereitung des Programms „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts". Materialien zur Bildungsplanung und Forschungsförderung Heft 60, Bonn. url (22.01.2023): https://www.pedocs.de/volltexte/2008/259/pdf/heft60.pdf

Broley, L., & Hardy, N. (2022). The evolution of students' learning from calculus to analysis: how students solve analysis tasks that look like calculus tasks. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *8*(2), 269-292.

Büchter, A. & Leuders, T. (2005). Mathematikaufgaben selbst entwickeln; Lernen fördern – Leistung überprüfen. Cornelsen.

Capon, N. & Kuhn, D. (2004). What's So Good About Problem-Based Learning? *Cognition and Construction, 22*(1), 61-79.

Chinnappan, M., Ekanayake, M. & Brown, C. (2012). Knowledge use in the construction of geometry proof by Sri Lankan students. *International Journal of Science and Mathematics Education, 10*(4).

Dahlberg, R. P. & Housman, D. L. (1997). Facilitating Learning Events Through Example Generation. *Educational Studies in Mathematics, 33*(3), 283-299. https://doi.org/10.1023/A:1002999415887

Dulisch, F. (1996). Skripten in der Hochschullehre. *Das Hochschulwesen*, *44*(1), 55–59.

Dörner, D. (1979). *Problemlösen als Informationsverarbeitung*. Stuttgart: Kohlhammer, 2., überarbeitete Auflage.

Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can't prove. *Educational studies in mathematics*, *38*(1-3), 85-109.

Fischer, G. (2013). *Lineare Algebra*. Springer.

Furinghetti, F. & Morselli, F. (2009). Every unsuccessful problem solver is unsuccessful in his or her own way: Affective and cognitive factors in proving. *Educational Studies in Mathematics, 70*(1), 71–90.

Geering, P. (1995). Aus Fehlern lernen im Mathematikunterricht. In E. Beck, T. Guldimann & M. Zutavern (Hrsg.), *Eigenständig lernen* (S. 59 – 70). Kollegium 2, St. Gallen: UVG Konstanz.

Göller, R. (2020). Selbstreguliertes Lernen im Mathematikstudium. Springer Spektrum.

Grieser, D. (2017). Mathematisches Problemlösen und Beweisen. Eine Entdeckungsreise in die Mathematik. 2. Überarbeitete und erweiterte Auflage. Springer.

Heinrich, F. (2013). „Fehler" in Problembearbeitungsprozessen als mögliche Ansatzpunkte zur Fortentwicklung der Problemlösefähigkeit im Bereich Mathematik. *Leibniz-Online, Jahrgang 2013, Nr. 15*, URL [Stand 28.01.2023]: http://leibnizsozietaet.de/wp-content/uploads/2013/04/heinrich.pdf

Vinner, S. & Hershkowitz, R. (1980). Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. In R. Karplus (Hrsg.), *Proceedings of the 4th PME Conference* (pp. 177-184). PME.

Hodds, M., Alcock, L., & Inglis, M. (2014). Self-explanation training improves proof comprehension. *Journal for Research in Mathematics Education*, *45*(1), 62-101.

Iannone, P., Inglis, M., Mejía-Ramos, J. P., Simpson, A. & Weber, K. (2011). Does generating examples aid proof production? *Educational Studies in Mathematics, 77*(1), 1–14.

Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P. & Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: the importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics, 66*(1), 3–21.

Isaacs, Geoff (1994). Lecturing Practices and Note-taking Purposes. *Studies in Higher Education, 19*(2), S. 203–216.

Kirsten, K. (2021). *Beweisprozesse von Studierenden* (Dissertation, Westfälische Wilhelms-Universität Münster]. Springer

Ko, Y.-Y. & Knuth, E. J. (2009). Undergraduate mathematics majors' writing performance producing proofs and counterexamples about continuous functions. *The Journal of Mathematical Behavior, 28*(1), 68–77.

Lange, D. (2013). Inhaltsanalytische Untersuchung zur Kooperation beim Bearbeiten mathematischer Problemaufgaben. Waxmann.

Lage, M. J., Platt, G. J., & Treglia, M. (2000). Inverting the classroom: A gateway to creating an inclusive learning environment. *The journal of economic education*, *31*(1), 30-43.

Leuders, T. (2015). Aufgaben in Forschung und Praxis. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch Mathematikdidaktik* (S. 433–458), Heidelberg: Springer.

Leuders, T. & Prediger, S. (2016). Flexibel differenzieren und fokussiert fördern im Mathematikunterricht. Cornelsen.

Lithner, J. (2000). Mathematical reasoning in task solving. *Educational studies in mathematics*, 165-190.

Lithner, J. (2003). Students' mathematical reasoning in university textbook exercises. *Educational studies in mathematics*, *52*(1), 29-55.

Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in mathematics*, *27*(3), 249-266.

Pólya, G. (1945). *How to solve it – a new aspect of mathematical method*. New Jersey: Princeton University.

Pólya, G. (1980). Wie lehren wir Problemlösen? Übersetzt aus dem Englischen von Rüdiger Baumann. *Mathematiklehrer 1*, 3–5.

Prediger, S., Hußmann, S., Barzel, B. & Leuders, T. (2011). Systematisieren und Sichern: nachhaltiges Lernen durch aktives Ordnen. *Mathematik lehren – Erfolgreich unterrichten: Konzepte und Materialien. Heft 164, S. 2–9.* Rott, B. (2013). Mathematisches Problemlösen – Ergebnisse einer empirischen Studie. WTM.

Rott, B. (2014). Mathematische Problembearbeitungsprozesse von Fünftklässlern – Entwicklung eines deskriptiven Phasenmodells. *Journal für Mathematik-Didaktik, 35*, 251–282.

Rott, B. (2018). Empirische Zugänge zu Heurismen und geistiger Beweglichkeit in den Problemlöseprozessen von Fünft- und Sechstklässlern. *mathematica didactica, 41*(2018)1, 47–75.

Sandefur, J., Mason, J., Stylianides, G. J. & Watson, A. (2013). Generating and using examples in the proving process. *Educational Studies in Mathematics, 83*(3), 323–340.

Scheja, B. (2017). Kognitive Aktivierung durch Mathematikaufgaben zentraler Abschlussprüfungen. *Journal für Mathematik-Didaktik, 38*, 291–322. https://doi.org/10.1007/s13138-017-0119-7

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1989). Teaching Mathematical Thinking and Problem Solving. In L. B. Resnick & L. E. Klopfer (Hrsg.), *Toward a thinking curriculum: Current cognitive Research* (S. 83–103). Washington DC: Association for Supervisors and Curriculum Developers.

Selden, A. & Selden, J. (2013). Proof and Problem Solving at University Level. *The Mathematics Enthusiast, 10*(1) , Article 14. DOI: https://doi.org/10.54870/1551-3440.1269

Sommerhoff, D. (2017). The individual cognitive resources underlying students' mathematical argumentation and proof skills (Dissertation, LMU).

Stanic, G. M. A. & Kilpatrick, J. (1988). Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum. In Randall I. Charles & Edward A. Silver (Hrsg.), *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving* (S.1–22). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Stenzel, T. (2023). Mathematisches Problemlösen in der Studieneingangsphase: Untersuchung von Problembearbeitungen und zyklische Entwicklung einer Fördermaßnahme im Rahmen vorlesungsbegleitender Übungen. Springer.

Stubbemann, N. & Knipping, C. (2019). Metacognitive activities of pre-service teachers in proving processes. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen & M. Veldhuis (Hrsg.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Educatio*, Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Stylianou, D. A. & Silver, E. A. (2004). The Role of Visual Representations in Advanced Mathematical Problem Solving: An Examination of Expert-Novice Similarities and Differences. *Mathematical thinking and learning, 6*(4), 353–387.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, *12*(2), 151-169.

Ufer, S., Heinze, A. & Reiss, K. (2008). Individual Predictors of Geometrical Proof Competence. In O. Figueras & A. Sepúlveda (Hrsg.), *Proceedings of the Joint Meeting of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the XX North American Chapter* (S. 361–368). Morelia: PME.

van Spronsen, H. D. (2008). *Proof Processes of Novice Mathematics Proof Writers* (Diss., University of Montana).

Weber, B. J. & Lindmeier, A. (2020). Viel Beweisen, kaum Rechnen? Gestaltungsmerkmale mathematischer Übungsaufgaben im Studium. *Mathematisch Semesterberichte, 67*, 263–284. https://doi.org/10.1007/s00591-020-00274-4

Weber, K. (2001) Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 48*, 101–119. https://doi.org/10.1023/A:1015535614355

Weber, K. & Alcock, L. (2004). Semantic and Syntactic Proof Productions. *Educational Studies in Mathematics, 56*, 209–234.

Wlassak, F. & Schöneburg-Lehnert, S. (2022). Was macht Übungsaufgaben eigentlich schwer? – Kognitive Gestaltungsmerkmale von Übungsaufgaben der Analysis I. *Mathematische Semesterberichte*. https://doi.org/10.1007/s00591-022-00321-2

Zazkis, D., Weber, K., & Mejía-Ramos, J. P. (2016). Bridging the gap between graphical arguments and verbal-symbolic proofs in a real analysis context. *Educational Studies in Mathematics*, *93*, 155-173.

Zazkis, D., Weber, K., & Mejía-Ramos, J. P. (2016). Bridging the gap between graphical arguments and verbal-symbolic proofs in a real analysis context. *Educational Studies in Mathematics*, *93*, 155-173.

Anschrift der Verfasser:innen

Thomas Stenzel
Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Thea-Leymann-Str. 9
45127 Essen
thomas.stenzel@uni-due.de

Benjamin Rott
Universität zu Köln
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Institut für Mathematikdidaktik
Gronewaldstr. 2
50931 Köln
benjamin.rott@uni-koeln.de

8. Anhang

8.1 Verwendete Aufgaben und Erfolgsgrad (E1)

In Ergänzung zu den in 4.1.3 erwähnten Aufgaben werden im Folgenden alle weiteren Aufgaben, in der Reihenfolge, in der sie verwendet wurden, dargestellt. Darüber hinaus wird direkt unter der jeweiligen Aufgabe angegeben, welche Übertragung einer Definition auf die Aufgabe zu einer Mindestkodierung des Erfolgsgrades (E1) geführt hätte.

Affiner Unterraum: Seien A_1 und A_2 zwei affine Unterräume eines Vektorraumes V.

Dann ist entweder $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ oder $A_1 \cap A_2$ ist ebenfalls ein affiner Unterraum von V.

Konkretisieren der Räume durch Stützvektoren und Unterräume in einer Gleichung der Form

$A_1 = v_1 + U_1$ bzw. $A_2 = v_2 + U_2$

Injektivität: Seien X, Y und Z Mengen und $f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$ Abbildungen.

Beweisen Sie: Falls $g \circ f$ injektiv ist, so ist auch f injektiv.

Die Injektivität von $g \circ f$ (oder von f) wird formal dargestellt, entweder in der Form

$$x_1 = x_2 \quad \Rightarrow \quad g \circ f(x_1) = g \circ f(y_1)$$

oder

$$g \circ f(x_1) \neq g \circ f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 \neq x_2$$

Lineare Unabhängigkeit 2: Sei V ein Vektorraum, $F: V \to V$ eine lineare Abbildung und $v \in V$ so dass für ein $n > 0$ gilt: $F^n(v) \neq 0$ und $F^{n+1}(v) = 0$.

Beweisen Sie, dass dann die Vektoren $v, F(v), F^2(v), \dots, F^n(v)$ linear unabhängig sind.

Eine passende Linearkombination wird aufgestellt und gleich Null gesetzt:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \, F^i(v) = 0$$

Rangungleichung: Sei K ein Körper, $A = \left(a_{ij}\right)_{j=1,\dots,n}^{i=1,\dots,m}$ eine Matrix mit Koeffizienten in K und r eine natürliche Zahl zwischen 1 und m. Ferner sei $A_1 = \left(a_{ij}\right)_{j=1,\dots,n}^{i=1,\dots,r}$ und $A_2 = \left(a_{ij}\right)_{j=1,\dots,n}^{i=r+1,\dots,m}$.

Zeigen Sie, dass dann gilt:

$rang(A) \leq rang(A_1) + rang(A_2)$.

Die Matrizen A, A_1 und A_2 werden in Pünktchenschreibweise korrekt aufgestellt:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix}$$

Analog für die anderen Matrizen.

Lineare Unabhängigkeit 3: Sei V ein K-Vektorraum und $v_1, \dots v_n \in V$ linear unabhängige Vektoren. Ferner sei $v := \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ mit $a_i \in K$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.

Beweisen Sie, dass $v_1 - v, \dots, v_n - v$ genau dann linear unabhängig ist, wenn $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 1$ ist.

Eine passende Linearkombination wird aufgestellt und gleich Null gesetzt:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(v_i - v) = 0$$

n-te Wurzel: Gegeben seien N Zahlen a_k mit

$$0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ \dots \ \leq a_N \ .$$

Was ist dann $\lim\limits_{n\to\infty} (a_1^n + a_2^n + \dots + a_N^n)^{1/n}$?

Hier ist es zwar denkbar, die Konvergenz gegen einen unbekannten Grenzwert a (oder sogar den tatsächlichen Grenzwert a_N) darzustellen, etwa wie folgt (für große n):

$$\left|(a_1^n + a_2^n + \dots + a_N^n)^{1/n} - a_N\right| < \varepsilon$$

Bei solchen Aufgaben ist das aber eher unüblich und sperrig. Das zeigt, dass nicht für alle Aufgaben Erfolgsgrad (E1) sinnvoll ist.

Konstante Funktion: Gegeben sei eine stetige Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Es gelte außerdem für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung $f(x) = f(x^2)$.

Zeigen Sie, dass dann f konstant sein muss.

Es wird formal dargestellt, was es bedeutet, dass eine Funktion konstant ist:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2: \quad f(x) = f(y)$$

Grenzwert von Quotient und Wurzel:

Sei a_n eine Folge mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \ .$$

Beweisen Sie, dass dann gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$.

Auch hier ist eine formale Darstellung der Konvergenz denkbar, hilfreicher für die Aufgabe kann aber auch eine ungenauere Darstellung sein, die ebenfalls für die Mindestkodierung (E1) genügen würde, etwa $\frac{\mathrm{a}_{(n+1)}}{\mathrm{a}_\mathrm{n}} \approx L$ für große n. Allerdings ist zu vermuten, dass Studierende, die bewusst eine solche Darstellung wählen, auch weitere Lösungsfortschritte erzielen und somit mindestens (E2) erreichen, da hinter dieser Wahl ja bereits eine Lösungsidee steckt.

Monotonie: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ eine stetige und injektive Funktion.

Zeigen Sie, dass dann f streng monoton ist.

Hier bietet sich, wie bei der Aufgabe *konstante Funktion* ein indirekter Beweis an, weswegen zunächst die Definition der strengen Monotonie benötigt wird:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2: \qquad x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) < f(y)$$

oder

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2: \qquad x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) > f(y)$$

Aber auch wenn die Definition der Stetigkeit und der Injektivität formal dargestellt würde, würde mindestens (E1) vergeben werden.

8.2 Erfolgsgrad (E2)

Da es nur zehn Prozesse mit dem Erfolgsgrad (E2) gab, sind die im Folgenden in Ergänzung zu den in Abschnitt 4.2.1 genannten Beispiele erschöpfend:

Affiner Unterraum: Es wird die Behauptung zwar bewiesen, allerdings fehlt die Begründung dafür, dass man den Stützvektor beliebig aus dem Durchschnitt von A_1 und A_2 wählen kann. Diese hätte auch durch einen Verweis auf ein entsprechendes Lemma aus dem Skript passieren können.

Rangungleichung: Die Behauptung wird nur für den Spezialfall, dass der Rang von A maximal ist (und evtl. für den trivialen Fall, dass der Rang gleich 1 ist), bewiesen.

Lineare Unabhängigkeit 2: Bei der Umformung der Linearkombination kam es zu Rechenfehlern, so dass der Proband zwar glaubte, fertig zu sein, aber der Beweis nicht korrekt war.

Konstante Funktion: Es wurde die Folgenstetigkeit auf x^{2^n} angewendet und ein Symmetriargument geliefert, was die Konstanz auf dem Intervall $[-1,1]$ beweist.

8.3 Training zum Begriffsverstehen

Im in der Diskussion erwähnten Training wurden zu Beginn des ersten Semesters verschiedene Facetten neuer Begriffe (Prediger et al., 2011) fokussiert, damit die Studierenden im weiteren Studienverlauf bei der Aneignung neuer Begriffe eine Orientierung haben, ob sie diese Begriffe verstanden haben. Im Verlauf des Semesters wurden dann vor jeder Übung die benötigten Begriffe von den Dozierenden explizit genannt, damit die Studierenden sich diese aneignen konnten. Bei Schwierigkeiten konnten gezielte Nachfragen gestellt werden. Die verschiedenen Facetten sind: Explizite Formulierung (EF), Konkretisierung und Abgrenzung (KA), Bedeutung und Vernetzung (BV), konventionelle Festlegungen (kF). Erstere entspricht der Concept Definition, die anderen sind erwünschte Teile des Concept Images. Während konventionelle Festlegungen (hierunter verstehen wir Schreibweisen, Bezeichnungen und andere Konventionen) nur in bestimmten Fällen von Bedeutung sind, wurden die anderen drei mit Hilfe der folgenden Leitfragen für alle neuen Begriffe konkretisiert:

- Kann ich die Definition mit eigenen Worten wiedergeben? (EF)
- Welche Beispiele bzw. Nicht-Beispiele kenne ich? (KA)
- Kann ich weitere Beispiele und Nicht-Beispiele finden? (KA)
- Kann ich eine Skizze oder andere Darstellungsform (z. B. Graph, Tabelle, Formel) finden? (BV)
- Welche Bezüge zu anderen Begriffen kann ich herstellen? (BV)

Ähnliche Fragen können nicht nur zu neuen Begriffen gestellt werden, sondern auch zu damit zusammenhängenden Sätzen und anderen Aussagen. Für deren Bedeutung und Vernetzung spielt zusätzlich noch die Betrachtung des Beweises eine große Rolle.