Lernendenschwierigkeiten bei der Anwendung inhaltlicher Deutungen des Ableitungsbegriffs – Ergebnisse einer Interviewstudie zum Grundvorstellungskonzept

TOMMA JETSES, BIELEFELD; ALEXANDER SALLE, BIELEFELD & MALTE MIKOLEIT, OSNABRÜCK

Zusammenfassung: *Studien zeigen, dass Lernenden fachlich korrekte, inhaltliche Deutungen des Ableitungsbegriffs – insbesondere Ableitung als (Tangenten-)Steigung – bekannt sind. Gleichzeitig gibt es Hinweise, dass diese Deutungen nicht (erfolgreich) in Aufgabenbearbeitungen angewendet werden. Diese Diskrepanz zwischen Kenntnis und Anwendung wird anhand dreier Fallbeispiele aus einer Interviewstudie in der Qualifikationsphase untersucht. Als mögliche Gründe für die nicht erfolgreiche Anwendung bekannter Deutungen werden u. a. fragmentarische Deutungsverständnisse sowie nicht ausreichende Grundkenntnisse zum Funktionsbegriff herausgearbeitet.*

Abstract: *Research has demonstrated that learners are familiar with correct interpretations of the concept of derivation – specifically in relation to derivation as (tangent) slope. However, there are indications that these interpretations are not (successfully) applied in tasks. This research aims to investigate this discrepancy between knowledge and application by analyzing three case studies from a secondary school interview study. Possible reasons for the unsuccessful application of known interpretations include a fragmentary understanding of the interpretation and insufficient basic knowledge of the concept of function.*

1. Einleitung

Eine Grundvorstellung zu einem mathematischen Begriff wird als fachlich korrekte, „inhaltliche Deutung des Begriffs, die diesem Sinn gibt" (Greefrath et al., 2016a, S. 17; siehe auch vom Hofe, 1995) aufgefasst.[1] Derartige Deutungen wurden bereits zu zahlreichen mathematischen Begriffen herausgearbeitet (Prediger, 2010), darunter insbesondere auch zum Ableitungsbegriff (z. B. Danckwerts & Vogel, 2006; Greefrath et al., 2016a).

Auf empirischer Ebene zeigen mathematikdidaktische Studienergebnisse, dass Lernenden aus der Oberstufe oder der Studieneingangsphase bestimmte fachlich korrekte, inhaltliche Deutungen des Ableitungsbegriffs bekannt sind, insbesondere die Deutung der Ableitung als (Tangenten-)Steigung (z. B. Greefrath et al., 2023; Klinger, 2018; Moormann, 2009). Wenngleich davon ausgegangen werden kann, dass die Kenntnis solcher Deutungen die Anwendung der Ableitung in entsprechenden Anwendungssituationen erleichtern könnte, weisen einige der Studien darauf hin, dass Schülerinnen und Schüler ungeachtet einer solchen Kenntnis dennoch Schwierigkeiten bei der Anwendung der Ableitung haben (Klinger, 2018; Moormann, 2009; Orhun, 2013).

Der vorliegende Beitrag möchte diese unterrichtlich hochgradig relevante Diskrepanz zwischen einerseits der Kenntnis und andererseits der Anwendung des Ableitungsbegriffs und seiner Deutungen näher in den Blick nehmen. Ziel ist es, die Diskrepanz zunächst ausführlich zu beschreiben und anschließend Gründe für die Schwierigkeiten bei der Anwendung des Ableitungsbegriffs und seiner Deutungen herauszuarbeiten. Somit wird eine empirisch fundierte Grundlage für eine Entwicklung entsprechender unterrichtlicher Förderkonzepte gegeben.

Zu dem soeben beschriebenen Zweck wird im Beitrag eine Interviewstudie mit Schülerinnen und Schülern der Oberstufe (Ende der Qualifikationsphase) vorgestellt. Grundlegend wird hierfür im nächsten Abschnitt (Abschnitt 2) zunächst der theoretische Rahmen des Beitrags näher erläutert sowie der Forschungsstand zur aufgeworfenen Thematik ausführlich dargestellt. Die methodische Anlage der Interviewstudie wird in Abschnitt 3 geschildert. In Abschnitt 4 werden drei Fallbeispiele der Interviewstudie ausführlich beschrieben. Abschließend werden die Ergebnisse diskutiert und in den Forschungsstand eingeordnet (Abschnitt 5).

2. Theoretischer Rahmen und Forschungsstand

2.1 Das Grundvorstellungskonzept

Grundvorstellungen – im Sinne von fachlich korrekten, inhaltlichen Deutungen mathematischer Begriffe – werden als normative Leitlinien für die Gestaltung von spezifischen Lehr-Lern-Prozessen hergeleitet (Salle & Clüver, 2021; vom Hofe, 1995). Ziel dieser Lehr-Lern-Prozesse ist es, dass die Lernenden die normativ formulierten Grundvorstellungen in ihre „Erklärungs- und Handlungsmöglichkeiten integrieren" (vom Hofe, 1995, S. 125). Diese Integration soll nicht ausschließlich darin bestehen, dass die Lernenden verschiedene normativ formulierte

Grundvorstellungen als solche wiedergeben können (siehe dazu auch Abschnitt 2.2); vielmehr sollen sie mithilfe entsprechend aufbereiteter Lernarrangements, die bestimmte Grundvorstellungen aufgreifen, dazu befähigt werden,

1) mathematischen Begriffen einen Sinn zu geben,
2) mit den Begriffen auf mentaler Ebene flexibel zu operieren,
3) und die Begriffe anzuwenden (vom Hofe, 1995).

Die im ersten Punkt festgehaltene *Sinnkonstituierung* basiert auf der in den Grundvorstellungen wirksam werdenden Verknüpfung von Definitionen, Anwendungen und Darstellungen der mathematischen Begriffe. Durch diese den Grundvorstellungen inhärente Verknüpfung sollen die Lernenden angeregt werden, die mathematischen Begriffe mit eigenen Vorerfahrungen zu verbinden (z. B. Roth & Siller, 2016; Salle & Clüver, 2021; vom Hofe, 1995).

Das im zweiten Punkt angemerkte *flexible mentale Operieren* setzt einen „Aufbau entsprechender (visueller) Repräsentationen voraus" (vom Hofe, 1995, S. 98). Dieses Operieren kann im Sinne des beweglichen Denkens nach Roth (2005) aufgefasst werden, als „das bewusste, aktive Verändern einer evtl. zunächst statischen Konfiguration einschließlich der Reflexion der Konsequenzen dieser Veränderung" (S. 38).

Die drittens vermerkte *Anwendung* der Begriffe soll vor allem in Aufgaben zu Modellierungskontexten oder zu innermathematischen Darstellungen sowie Darstellungswechseln erfolgen (Stölting, 2008; vom Hofe, 1995; vom Hofe & Blum, 2016). Um die mathematischen Begriffe und die hierzu formulierten Grundvorstellungen erfolgreich anwenden zu können, müssen die Lernenden nach Stölting (2008) über sogenannte *Grundkenntnisse* verfügen. Diese umfassen beispielsweise „Kenntnisse zu Auswirkungen von Eigenschaften mathematischer Konzepte bei Übersetzungsprozessen" (Stölting, 2008, S. 39) und stellen notwendiges Wissen dar, um eine Grundvorstellung überhaupt nutzen zu können.

Zur weiteren Erläuterung einer Grundvorstellung als eine inhaltliche Deutung eines mathematischen Begriffs wird im Folgenden auf den Herleitungsprozess von Grundvorstellungen Bezug genommen: In der Herleitung von Grundvorstellungen zu mathematischen Begriffen werden Beziehungen zwischen Definitionen der Begriffe und realitätsnahen oder mathematikbezogenen Phänomenen herausgearbeitet (Salle & Clüver, 2021). Zur Identifikation dieser Phänomene wird hinterfragt, in welchen Kontexten die mathematischen Begriffe zum Tragen kommen und auch ursprünglich Anwendung fanden (Freudenthal, 1983; Salle & Clüver, 2021). Die herausgearbeiteten Beziehungen zwischen den Definitionen und Phänomenen werden klassifiziert. Aufbauend auf den resultierenden Klassen, die sowohl die Definitionen als auch die genannten Phänomene einschließen, können letztendlich Grundvorstellungen als fachlich korrekte, inhaltliche Deutungen der mathematischen Begriffe formuliert werden (Salle & Clüver, 2021). Eine inhaltliche Deutung kann in diesem Zusammenhang als eine „Auslegung" (Pfeifer, 1993, S. 218) der mathematischen Begriffe verstanden werden, die die mathematischen Begriffe mit den identifizierten Phänomenen in Beziehung setzt (Greefrath et al., 2016a; vom Hofe & Blum, 2016).

Zum Ableitungsbegriff in schulischen Zusammenhängen wurden in bisherigen mathematikdidaktischen Arbeiten vier Grundvorstellungen hergeleitet, die an dieser Stelle in Anlehnung an Greefrath et al. (2016a, 2016b) kurz benannt und skizziert werden. Für ausführlichere Erläuterungen sei z. B. auf Büchter und Henn (2010), Danckwerts und Vogel (2006), Greefrath et al. (2016a, 2016b) und Roth und Siller (2016) hingewiesen.

- Die Ableitung einer Funktion an einer Stelle gibt die lokale Änderungsrate der Funktion an dieser Stelle an *(Grundvorstellung der lokalen Änderungsrate).*
- Die Ableitung einer Funktion an einer Stelle bestimmt die Steigung der Tangente – als Schmieggerade – im entsprechenden Punkt (*Grundvorstellung der Tangentensteigung*).
- Für differenzierbare Funktionen gilt, dass zu jedem Punkt des Funktionsgraphen eine Gerade existiert, sodass der Funktionsgraph lokal approximativ um diesen Punkt hinreichend genau durch diese Gerade dargestellt wird. Die Ableitung gibt die Steigung dieser Geraden an (*Grundvorstellung der lokalen Linearität*).
- Die Ableitung an einer Stelle gibt an, wie stark sich kleine Änderungen der unabhängigen auf die abhängige Variable auswirken (*Grundvorstellung des Verstärkungsfaktors*).

Die Herleitung von Grundvorstellungen ist auf der sogenannten *normativen Ebene* des Grundvorstellungskonzeptes verortet (Salle & Clüver, 2021; vom Hofe, 1995). Im Zuge dieser Herleitung ist es möglich, dass konkrete inhaltliche Deutungen ein und desselben mathematischen Begriffs in verschiedenen Kontexten zwar Unterschiede aufweisen, dass jedoch die Gemeinsamkeiten dieser unterschiedlichen Deutungen letztendlich dazu führen, die unterschiedlichen Deutungen zu genau einer Grundvorstellung zusammenzufassen. Zum Beispiel kann die Ableitung einer reellen Funktion als Momentangeschwindigkeit, als Momentanbeschleunigung oder auch als Grenzsteuersatz gedeutet werden (z. B. Büchter & Henn, 2010; Greefrath et al., 2016a). Gibt die abhängige Größe den Flächeninhalt eines Kreises an, so wird in diesem Kontext durch die Ableitung der Umfang des Kreises bestimmt (Büchter & Henn, 2010; Greefrath et al., 2016a). All diese Deutungen werden der Grundvorstellung der lokalen Änderungsrate zugeordnet (Greefrath et al., 2016a).

Von der normativen Ebene unterscheidet vom Hofe (1995) unter anderem eine sogenannte *deskriptive Ebene*.[2] Die Adjektive „normativ“ und „deskriptiv“ beziehen sich nicht auf unterschiedliche Arten von Grundvorstellungen, sondern auf unterschiedliche Methoden, mit dem Grundvorstellungskonzept zu arbeiten (vom Hofe & Blum, 2016, S. 232). Während auf der normativen Ebene die Herleitung von Grundvorstellungen verortet ist, fokussiert die deskriptive Ebene eine „deskriptive Erfassung von individuellen Schülervorstellungen, die sich bei spezifischen Lernsituationen zeigen“ (vom Hofe, 1995, S. 128).

Vor allem auf der deskriptiven Ebene des Grundvorstellungskonzeptes werden Deutungen mathematischer Begriffe durch Schülerinnen und Schüler in den Blick genommen (vom Hofe, 1995). Bzgl. dieser Deutungen durch die Schülerinnen und Schüler ist es grundsätzlich denkbar, dass die beschriebene Vielfalt der betrachteten Kontexte die Schülerinnen und Schüler vor Herausforderungen stellt. Solche Herausforderungen können darin bestehen, dass den Schülerinnen und Schülern eine Deutung der mathematischen Begriffe zwar in einem Kontext gelingt, in einem anderen Kontext jedoch nicht. Dieses Phänomen, dass Wissen bzw. Erfahrungen an einen konkreten Kontext oder eine konkrete Situation gebunden sind, wird durch das Konzept der Subjektiven Erfahrungsbereiche (abgekürzt: SEB, Bauersfeld, 1983) und allgemeiner durch die situated cognition (Brown et al., 1989) beschrieben. Auf empirischer Ebene zeigt diesbezüglich eine Studie von Pielsticker et al. (2021) in der vierten Jahrgangsstufe für das Themengebiet geometrischer Körper auf, dass ein „(vermeintlich bereits verfügbare[r]) allgemeinere[r] SEB (beispielsweise SEB „geometrische Körper“) […] keinesfalls garantiert, dass das Wissen bzw. die Grundvorstellung auf neue ähnliche Situationen […] angewendet werden kann“ (S. 18).

Insofern liegt es nahe, dass insbesondere das Wissen, dass der Ableitungsbegriff auf bestimmte Weise gedeutet werden kann, nicht immer zur Anwendung dieses Wissens in einer anderen Situation befähigt. Die Unterscheidung von Nennung, Vernetzung und Anwendung von Wissen lässt sich auch durch eine Charakterisierung der jeweils zugrundeliegenden Wissensarten ausdrücken. Auf verschiedene Wissensarten und den Zusammenhang zu Grundvorstellungen wird im nächsten Abschnitt näher eingegangen.

2.2 Wissensarten

In der Mathematikdidaktik werden verschiedene Wissensarten unterschieden, die bzgl. eines Wissenserwerbs im Mathematikunterricht relevant sind (z. B. Hiebert & Lefevre, 1986; Prediger et al., 2011; Schneider, 2006). Eine zentrale Unterscheidung ist die zwischen konzeptuellem Wissen und prozeduralem Wissen. Konzeptuelles Wissen wird als vernetztes Wissen zu mathematischen Begriffen beschrieben, das auch als Grundlage für ein Verständnis dieser Begriffe eingeschätzt wird (z. B. Hiebert & Lefevre, 1986; Schneider, 2006; Zandieh, 2000). Nach Lenz et al. (2019) umfasst das konzeptuelle Wissen auch Grundvorstellungen (siehe auch Prediger et al., 2011).

Normativ hergeleitete Grundvorstellungen, wie die in Kapitel 2.1 dargestellten vier Grundvorstellungen zum Ableitungsbegriff, stellen folglich spezifisches konzeptuelles Wissen dar, welches idealerweise ausgebildet werden soll. Im Rahmen dieser Ausbildung wird in Bezug auf das konzeptuelle Wissen nicht allein die Wiedergabe der fachlich korrekten, inhaltlichen Deutungen angestrebt, sondern vielmehr ein tiefergehendes Verständnis der mathematischen Begriffe und der entsprechenden Deutungen. Dieses Verständnis kann sich im Sinne des konzeptuellen Wissens z. B. durch Vernetzungen der Deutungen mit anderen mathematischen Begriffen auszeichnen (z. B. Hiebert & Lefevre, 1986; Schneider, 2006; Zandieh, 2000). Im Hinblick auf die Grundvorstellung der lokalen Änderungsrate (siehe Kapitel 2.1) kann das konzeptuelle Wissen zum Ableitungsbegriff z. B. den Zusammenhang von absoluter, mittlerer und momentaner Änderungsrate oder auch Wissen zum Grenzwertbegriff umfassen.

Konzeptuelles Wissen kann auch als „deklaratives Wissen […], das tieferes Verständnis konstituiert“

(Renkl, 2015, S. 4) beschrieben werden.[3] Deklaratives Wissen bezieht sich auf ein „Wissen-dass“. Dass der Begriff der Ableitung als Tangentensteigung gedeutet wird, kann z. B. als deklaratives Wissen klassifiziert werden.

Konzeptuellem und deklarativem Wissen wird in der Literatur prozedurales Wissen gegenübergestellt (Anderson, 1983; Hiebert & Lefevre, 1986). Dieses wird als „effizient anwendbares Handlungswissen zur Lösung von Routineproblemen“ (Schneider, 2006, S. 22) beschrieben. Beispielsweise führt Moormann (2009) das symbolische und graphische Differenzieren als Aufgaben an, für deren Bearbeitung vor allem prozedurales Wissen benötigt werde, wobei jedoch gerade beim graphischen Differenzieren auch konzeptuelles Wissen notwendig sei. Bzgl. des Zusammenhangs der Wissensarten werden unterschiedliche Annahmen getroffen, wobei verschiedene Arbeiten davon ausgehen, dass einerseits konzeptuelles Wissen eine Grundlage für die Entwicklung prozeduralen Wissens sein kann, und andererseits, dass konzeptuelles Wissen aus der Reflexion prozeduralen Wissens entstehen kann (Engelbrecht et al., 2000; Moormann, 2009; Rittle-Johnson et al., 2001).

Wie genau Lernende die normativ formulierten Grundvorstellungen zum Ableitungsbegriff tatsächlich in ihre „Erklärungs- und Handlungsmöglichkeiten integrieren“ (vom Hofe, 1995, S. 125) – also, ob sie z. B. bestimmte Deutungen des Ableitungsbegriffs, die auch in Bezug auf das Grundvorstellungskonzept diskutiert werden, im Sinne des deklarativen Wissens nennen, im Sinne des konzeptuellen Wissens vernetzen oder im Sinne des prozeduralen Wissens routiniert anwenden können – wurde bereits in empirischen Arbeiten untersucht (z. B. Moormann, 2009). Welche Forschungsergebnisse diesbezüglich vorliegen, wird im nächsten Abschnitt näher beleuchtet.

2.3 Empirische Ergebnisse zur Ableitung

In der TIMS-Studie, einer der ersten groß angelegten internationalen Vergleichsstudien über mathematisch-naturwissenschaftliche Kompetenzen von Oberstufenschülerinnen und -schülern, die auch die Differentialrechnung in den Blick nimmt, werden Grundvorstellungen in den Formulierungen der zu bearbeitenden Aufgaben operationalisiert (Baumert et al., 1999). Schülerinnen und Schüler aus Deutschland hatten insbesondere Schwierigkeiten bei solchen Aufgaben, die nicht mithilfe eines ihnen bekannten Rechenverfahrens algorithmisch gelöst werden können, sondern die im Sinne des Grundvorstellungskonzepts das flexible Anwenden mathematischer Begriffe oder das mentale Operieren mit diesen erfordern. Dies betrifft z. B. insbesondere auch Aufgaben, die die Grundvorstellung der Tangentensteigung oder der lokalen Änderungsrate adressieren (z. B. Baumert et al., 1999; Baumert et al., 2000).

Als eine Reaktion unter anderem auf diese Ergebnisse wurde im Rahmen der Einführung des Kompetenzbegriffs auch die Orientierung an Grundvorstellungen explizit in Lehrpläne aufgenommen (Bildungsstandards für die Allg. Hochschulreife, Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland, 2015; Nds. Kerncurriculum für das Gymnasium gymn. Oberstufe, Niedersächsisches Kultusministerium, 2018). Mittlerweile wurden zudem verschiedene Lernarrangements und Unterrichtsmaterialien entwickelt, in denen die Grundvorstellungen zum Ableitungsbegriff zum Tragen kommen (z. B. Hahn & Prediger, 2008; Salle & vom Hofe, 2020; Weber et al., 2016).

Gegenüber dieser normativen Perspektive fanden sich bei einer Literaturrecherche wenige empirische Studien, die am Ende der Sekundarstufe II verortet sind und individuelle Vorstellungen zur Ableitung rekonstruieren (Beck et al., 2020; Moormann, 2009). Die genannten Studien lassen sich zum hier vorliegenden Erkenntnisinteresse nur in Ansätzen in Verbindung bringen: Beck et al. (2020) stellen eine Studie in der elften Jahrgangsstufe in Baden-Württemberg und Frankreich vor und berichten von Überschneidungen zwischen rekonstruierten individuellen Vorstellungen und der Grundvorstellung der lokalen Linearität. Der Schwerpunkt des Beitrags liegt auf einem kulturvergleichenden theoretischen Blick auf das Grundvorstellungskonzept und weniger auf einer systematischen Darstellung empirischer Ergebnisse. So wird eine theoretische Zusammenführung des Grundvorstellungskonzepts und der in Frankreich etablierten Theorie des Mathematical Working Space vorgenommen. In letztgenannter Theorie werden eine kognitive und eine epistemologische Ebene mathematischer Lehr-Lern-Prozesse ausdifferenziert.

Moormann (2009) untersucht den Zusammenhang konzeptuellen und prozeduralen Wissens von Schülerinnen und Schülern der elften Jahrgangsstufe zum Ableitungsbegriff. Weitere Schwerpunkte der Studie liegen auf der Bedeutung des Vorwissens sowie Kenntnissen bzgl. formaler Schreibweisen im Bereich der Differentialrechnung. Grundvorstellungen werden explizit als solche nur kurz thematisiert und neben „Grundtechniken des Differenzierens“ als „eine wichtige Basis für ein gutes Begriffsverständnis“ (Moormann, 2009, S. 62) angeführt. Im Rahmen der Ergebnisse zum konzeptuellen Wissen lassen sich jedoch für diesen Beitrag wichtige Erkenntnisse zu inhaltlichen Deutungen des Ableitungsbegriffs herausarbeiten:

Insgesamt zeigt Moormann (2009) für die Qualifikationsphase, wie auch Klinger (2018) für die Einführungsphase, dass den Schülerinnen und Schülern in Deutschland bzgl. des Ableitungsbegriffs vor allem die Deutung der Ableitung als momentane Steigung an einer Stelle des Funktionsgraphen oder als Tangentensteigung bekannt sind. Ein vergleichbarer Befund zeigt sich für höhere Klassenstufen auch in internationalen Studien (z. B. Hähkiöniemi, 2006; Zandieh, 1997) sowie in einer von Greefrath et al. (2023) mit Studienanfängerinnen und -anfängern an deutschen Universitäten durchgeführten Untersuchung: Durch individuelle Einschätzungen verschiedener Erklärungsmöglichkeiten des Ableitungsbegriffs, die sich an den zum Ableitungsbegriff formulierten Grundvorstellungen orientieren, stellt sich heraus, dass Studierende Übereinstimmungen zwischen allen vier Erklärungsmöglichkeiten und ihrem eigenen Denken erkennen (Greefrath et al., 2023). Die größten Übereinstimmungen liegen bei Erklärungen vor, die auf der Grundvorstellung der Tangentensteigung beruhen (Greefrath et al., 2023).

Bezüglich dieser und weiterer Erklärungen bzw. inhaltlichen Deutungen des Ableitungsbegriffs geben ausgewählte Studien Anlass zur Vermutung, dass zwischen einerseits der Kenntnis und andererseits dem erfolgreichen Anwenden der fachlich korrekten, inhaltlichen Deutungen eine Diskrepanz besteht (Klinger, 2018; Moormann, 2009; Orhun, 2013). So stellt Orhun (2013) die These auf, dass Studienanfängerinnen und -anfängern zwar bestimmte Definitionen und Deutungen des Ableitungsbegriffs bekannt sind, diese jedoch in gewissen Aufgaben nicht genutzt werden:

> Although a definition of the derivative via limit was known by the students, it is determined that they have difficulty using this relationship. […] Similarly, although a geometric interpretation of the derivative was known, for the $f(x)$ function, values of $f'(0) = 3$ and $f'(-1)$ could not be understood. (Orhun, 2013, S. 148)

Orhun (2013) beschreibt, dass die Studierenden Schwierigkeiten haben, Beziehungen zwischen verschiedenen Darstellungen der Ableitung herzustellen; eine systematische Aufarbeitung weiterer Gründe für die Schwierigkeiten, die bekannten Definitionen bzw. Deutungen zu nutzen, wird in dem Beitrag nicht vorgenommen.

Die berichteten Lernendenschwierigkeiten zeigen sich insbesondere beim graphischen Differenzieren: Einem Großteil der Lernenden sind zwar die zur Lösung nützlichen Deutungen des Ableitungsbegriffs bekannt, dennoch bereiten vielen von ihnen das Lösen graphischer Differenzierungsaufgaben Schwierigkeiten (Klinger, 2018; Moormann, 2009). Bezüglich der Schwierigkeiten beim graphischen Differenzieren von Schülerinnen und Schülern der Einführungsphase fasst Klinger (2018) zusammen,

> dass Schülerinnen und Schüler das symbolische Differenzieren via Kalkül insgesamt gut beherrschen. Aufgaben zum graphischen Differenzieren wiesen hingegen deutlich geringere Lösungsquoten auf, wenngleich erkennbar war, dass die Thematik bereits häufig Bestandteil des Unterrichts entsprechender Schülerinnen und Schüler gewesen sein muss. Insgesamt scheint die Vorstellung der Ableitungsfunktion als Steigung der Tangente sowie als Änderungsrate durchaus verbreitet. (Klinger, 2018, S. 427)

Auch Moormann (2009) stellt fest, dass in einer von ihr als leistungsstark eingeschätzten Gruppe an Elftklässlerinnen und -klässlern, „das graphische Differenzieren […] in erster Linie treffend erklärt aber weniger erfolgreich ausgeführt“ (Moormann, 2009, S. 150) wird, wobei sich letzteres zum Beispiel darin zeigt, dass schlussendlich eine annähernde Reproduktion des Ausgangsgraphen stattfindet. Gleichzeitig geht aus der Studie hervor, dass allen Lernenden dieser Gruppe die Deutung der Ableitung als momentane Steigung und als Tangentensteigung bekannt ist, insofern, als dass diese Lernenden „die angegebene Vorstellung bzw. den angegebenen Begriff im Interview zweifelsfrei explizit machen“ (Moormann 2009, S. 151/152).

Während die Ergebnisse nachvollziehbar vor dem Hintergrund der Theorie des konzeptuellen und prozeduralen Wissens beschrieben und diskutiert werden, bleibt eine systematische Aufarbeitung möglicher Gründe, warum genau eine erfolgreiche Anwendung bestimmter bekannter Deutungen ausbleibt, weitestgehend offen. Inwiefern die inhaltlichen Deutungen den Lernenden bekannt sind und wie genau sich deren nicht erfolgreiche Anwendung zeigt, wäre insbesondere für mögliche vertiefende Untersuchungen und die Gestaltung entsprechender unterrichtlicher Förderkonzepte wünschenswert zu erforschen.

2.4 Zusammenfassung und Forschungsfragen

Zusammenfassend zeigen ausgewählte Studien sowohl aus der schulischen Oberstufe als auch dem Hochschulkontext, dass Lernenden bestimmte fachlich korrekte, inhaltliche Deutungen des Ableitungsbegriffs bekannt sind, die auch mit Bezug auf das Grundvorstellungskonzept diskutiert werden (insbesondere Ableitung als (Tangenten-)Steigung) (z. B. Greefrath et al., 2023; Klinger, 2018; Moormann, 2009). Können Schülerinnen und Schüler eine inhaltliche Deutung des Ableitungsbegriffs nennen, kann insbesondere von vorhandenem deklarativen Wissen ausgegangen werden. Einige der Studien geben gleichzeitig Hinweise, dass dieses deklarative Wissen, also diese Deutungen, nicht bzw. nicht erfolgreich in entsprechenden Aufgabenbearbeitungen angewendet wird (Klinger, 2018; Moormann, 2009; Orhun, 2013). Es ist also entscheidend, Schülerinnen und Schüler zur Anwendung inhaltlicher Deutungen im Rahmen innermathematischer oder sachkontextbezogener Probleme zur Differentialrechnung zu befähigen und die Schülerinnen und Schüler entsprechend zu fördern.

Für diese Förderung sowie für das Herausarbeiten empirischer Grundlagen weiterer Forschungsvorhaben zu diesem Themenbereich ist es grundlegend, die Diskrepanz zwischen Kenntnis und Anwendung inhaltlicher Deutungen des Ableitungsbegriffs zunächst ausführlich zu beschreiben und darüber hinaus mögliche Gründe herauszuarbeiten, warum die Anwendung nicht gelingt. Diesbezüglich liegen jedoch für die Differentialrechnung in der gymnasialen Oberstufe kaum Ergebnisse vor. Insbesondere ist offen, inwiefern sich die Diskrepanz zwischen Kenntnis und Anwendung fachlich korrekter, inhaltlicher Deutungen auch noch am Ende der Qualifikationsphase zeigt und begründet werden kann, also im letzten Schuljahr nachdem der Ableitungsbegriff in der Schule abschließend thematisiert wurde.

Dementsprechend wird in diesem Beitrag folgenden Forschungsfragen nachgegangen:

Welche Schwierigkeiten von Schülerinnen und Schülern der Qualifikationsphase können bei der Anwendung (ihnen bekannter) fachlich korrekter, inhaltlicher Deutungen des Ableitungsbegriffs rekonstruiert werden?

Welche möglichen Gründe können für diese Schwierigkeiten herausgearbeitet werden?

Zur Beantwortung dieser Forschungsfragen wurde eine Interviewstudie durchgeführt, in der inhaltliche Deutungen des Ableitungsbegriffs durch Schülerinnen und Schüler im Mittelpunkt stehen. In der Vorbereitung der Interviewstudie und Datenauswertung dienten die in Abschnitt 2.1 dargestellten Grundvorstellungen des Ableitungsbegriffs als Orientierung. Gleichzeitig wurde während des gesamten Forschungsprozesses insbesondere auch Offenheit gegenüber inhaltlichen Deutungen bewahrt, die sich in bereits formulierten Grundvorstellungen nicht wiederfinden (siehe Weber, 2007 und Abschnitt 3.1).

Zwar können die fachlich korrekten, inhaltlichen Deutungen des Ableitungsbegriffs, die den Schülerinnen und Schülern bekannt sind, Gemeinsamkeiten mit den normativ formulierten Grundvorstellungen aufweisen, müssen dies jedoch nicht zwangsläufig. Aus diesem Grund wird in den Forschungsfragen auch der Begriff der „Deutung“ und nicht der „Grundvorstellung“ gewählt. Des Weiteren wird durch diese Begriffswahl eine Präzision in der Datenauswertung verfolgt, die darin besteht, die den Lernenden bekannten Deutungen als solche konkret zu beschreiben und zu analysieren sowie nicht vorschnell einer Grundvorstellung zuzuordnen.

3. Anlage der Studie

3.1 Datenerhebung

Die Datenerhebung erfolgte mittels halbstrukturierter Leitfadeninterviews. Diese Methode wurde ausgewählt, um den Schülerinnen und Schülern ausreichend Raum für die Elaboration von Deutungen des Ableitungsbegriffs zu geben. Des Weiteren boten die Interviews einen großen Gestaltungsspielraum bzgl. der Einbindung von zu bearbeitenden Aufgaben, bei denen eine Anwendung inhaltlicher Deutungen sowie das Anfertigen von Notizen oder Skizzen zielführend sind. Situationen im Interview, in denen eine Anwendung einer inhaltlichen Deutung zur Lösung einer innermathematischen oder sachkontextbezogenen Aufgabe zum Ableitungsbegriff zielführend ist, werden im Folgenden als *einschlägige Anwendungssituationen* bezeichnet. Die Identifikation und Beschreibung einschlägiger Anwendungssituationen im Interview, in denen die besagte Anwendung einer den Lernenden bekannten Deutungen nicht erfolgt bzw. nicht gelingt, waren zentral für eine datenbasierte Beantwortung der Forschungsfragen (detaillierter in Abschnitt 3.2). Das Format einer Interviewstudie wurde vor allem auch gewählt, um anders als bei z. B. ausschließlich schriftlichen Befragungen gezielte Nachfragen zu Lernendenäußerungen stellen zu können, insbesondere zu Deutungen und (alternativen) Wegen der Aufgabenbearbeitungen.

Es wurden 30 Oberstufenschülerinnen und -schüler der Qualifikationsphase von vier Gesamtschulen und acht Gymnasien in Niedersachsen und Nordrhein-Westfalen im Alter von 17 bis 19 Jahren interviewt. Die Erhebung fand mit Schülerinnen und Schülern statt, die zum Zeitpunkt der Interviews angaben, ein mathematiknahes Studium beginnen zu wollen (z. B. Mathematik, Informatik, Physik, BWL etc.). Diese Auswahl ist darin begründet, dass die Interviews im Rahmen eines Forschungsprojekts zum Übergang von der Schule zur Hochschule entstanden sind.[4]

Um eine reichhaltige Datengrundlage zu gewährleisten, wurde die Stichprobe in mehrerlei Hinsicht heterogen zusammengesetzt: Erstens wurden, wie bereits beschrieben, Lernende von verschiedenen Schultypen in verschiedenen Bundesländern ausgewählt. Zweitens belegten die Schülerinnen und Schüler das Fach Mathematik sowohl als Grund- (11 Lernende) als auch als Leistungskurs (19 Lernende). Drittens lagen die Zeugnisnoten der Schülerinnen und Schüler im Fach Mathematik zwischen 5 und 15 Punkten, was eine hohe Spannweite der Leistung zeigt.

Durchgeführt wurden die Interviews drei bis sechs Monate vor den Abiturprüfungen 2020, d. h. am Ende der Schullaufbahn der Lernenden, sodass der Ableitungsbegriff ausführlich im Unterricht thematisiert worden war. Die Interviews weisen eine Länge zwischen 45 und 75 Minuten auf. Die Länge hängt sowohl vom Antwortverhalten als auch von der zur Verfügung gestandenen Zeit der Probandinnen und Probanden ab.

Zur Vergleichbarkeit der Interviewdaten wurde auf Basis verschiedener Arbeiten zu Grund- und individuellen Vorstellungen ein Interviewleitfaden konzipiert, der den von Helfferich (2011) formulierten Anforderungen an einen Leitfaden genügt (siehe auch z. B. Hafner, 2012; Stölting, 2008; Wartha, 2007). So genügt der Leitfaden der Anforderung, Sprünge und Themenwechsel zu vermeiden. Auch wurde ein realistisches Pensum an Fragen ausgewählt, um den Schülerinnen und Schülern genügend Äußerungszeit zu lassen sowie um ausreichend Zeit für eventuelle Nachfragen zu haben. Des Weiteren wurde die Anforderung, Offenheit im Interview zu wahren, durch offene Fragen sowie eine nicht fest gesetzte Reihenfolge der Themenblöcke und Fragen berücksichtigt. Hierdurch wurde insbesondere auch das Ziel verfolgt, individuellen Vorstellungen trotz normativ formulierter Grundvorstellungen nicht ausschließlich mit einer „überprüfend-kontrollierenden Haltung" (Weber, 2007, S. 113) zu begegnen. Außerdem sollte ermöglicht werden, dass vielfältige individuelle Deutungen eingebracht werden können, die auch ggf. bisher nicht durch eine Grundvorstellung erfasst wurden (siehe Weber, 2007).

Insgesamt umfasst der Interviewleitfaden fünf Themenblöcke zur Ableitung[5], die wie folgt betitelt sind: (1) Einstieg, (2) Vernetzung, (3) Graphisches Differenzieren, (4) Realitätsnaher Anwendungskontext und (5) Funktionenlupe. Diese fünf Themenblöcke werden im Folgenden genauer beschrieben und begründet.

(1) Einstieg: Im Sinne der soeben angestrebten Offenheit in den Interviews begannen die Interviews mit der Frage, was den Schülerinnen und Schülern alles zum Ableitungsbegriff einfalle. Anschließend wurden die Schülerinnen und Schüler hinsichtlich der Forschungsfragen nach möglichen Deutungen und Anwendungen des Ableitungs- und Integralbegriffs sowie nach bekannten Anwendungsaufgaben hierzu gefragt (z. B.: Wie würdest du einem Schulfreund erklären, was der Begriff ‚Ableitung' bedeutet? Welche Anwendungsaufgaben zur Ableitung fallen dir ein?).

Während der Intervieweinstieg sich nicht an normativen Analysen orientierte (wie erläutert mit dem Ziel, eine vorrangig überprüfende Haltung zu vermeiden), wurden die folgenden Themenblöcke ausgewählt, um die in Abschnitt 2.1 dargelegten Grundvorstellungen gezielt zu adressieren.[6] Die Grundvorstellungen dienten somit als Leitlinie bei der Formulierung von weiteren Fragen und bei der Erstellung und Auswahl von weiteren Aufgaben.

(2) Vernetzung: In einem weiteren Themenblock wurden Fragen zu Verbindungen verschiedener, in den Grundvorstellungen zur Ableitung aufkommenden, Begriffen gestellt (z. B. wie der Ableitungsbegriff mit den Begriffen „Steigung", „Tangente", „Sekante", „Änderungsrate" und „Grenzwert" zusammenhängt). Auch Verbindungen des Ableitungsbegriffs zu verwandten Begriffen wie „Funktion" und „Integral" wurden erfragt. Dieser Themenblock wurde gewählt, um durch die Nennung ausgewählter Begriffe wie z. B. „Tangente" oder „Steigung" normative Analysen in die Datenerhebung einzubinden, gleichzeitig jedoch Deutungen des Ableitungsbegriffs nicht vollständig vorzugeben.

(3) Graphisches Differenzieren (Teil eins): Des Weiteren wurden die Lernenden – wie in zahlreichen empirischen Studien durchgeführt (z. B. Klinger, 2018;

Moormann, 2009) oder in unterrichtspraktischen Ausführungen zu Vorstellungen bzgl. der Differentialrechnung vorgeschlagen (z. B. Büchter & Henn, 2010; Salle & vom Hofe, 2020) – zum graphischen Differenzieren und zur Begründung des Vorgehens beim graphischen Differenzieren aufgefordert. In diesem Themenblock wurde zunächst eine Parabel, der Graph einer konstanten sowie linearen Funktion und der Graph der Betragsfunktion betrachtet und diskutiert, ob die dargestellten Funktionen jeweils abgeleitet werden können, bevor anschließend je nach Diskussionsergebnis zum graphischen Differenzieren ausgewählter Funktionen aufgefordert wurde. Vor allem die Diskussion der Betragsfunktion wurde hinsichtlich der Forschungsfragen als eine einschlägige Anwendungssituation eingestuft, da bestimmte Deutungen des Ableitungsbegriffs wie z. B. die der Tangentensteigung oder die der lokalen Änderungsrate zur Begründung der Nicht-Differenzierbarkeit zielführend sind. Hinsichtlich des Forschungsinteresses wurde dieser Themenblock also ausgewählt, um eventuelle Schwierigkeiten der Anwendung inhaltlicher Deutungen beschreiben und analysieren zu können. Je nach Gesprächsverlauf wurden in diesem Themenblock weitere Graphen anderer ganzrationaler Funktionen (vgl. Abb. 1a), insbesondere auch mit Sprungstellen (vgl. Abb. 1b) oder Definitionslücken (vgl. Abb. 1c), hinsichtlich der Frage der Differenzierbarkeit thematisiert.

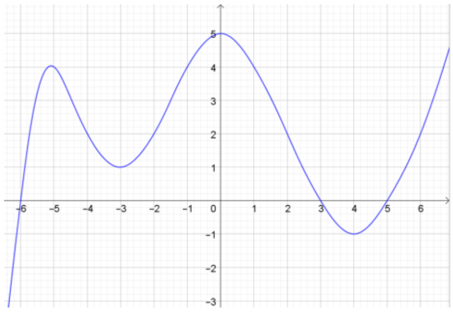


Abb. 1a: Graph einer ganzrationalen Funktion

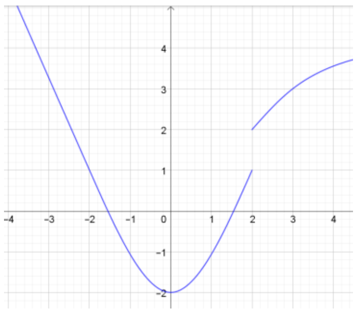


Abb. 1b: Graph mit Sprungstellen

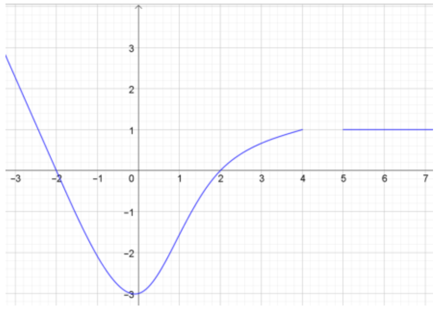


Abb. 1c: Graph mit Definitionslücke

(4) Realitätsnaher Anwendungskontext und graphisches Differenzieren (Teil zwei): In einem weiteren Themenblock stand die Interpretation der Ableitung im Rahmen realitätsnaher Zusammenhänge im Zentrum. Dazu wurde den Lernenden folgender Funktionsgraph (vgl. Abb. 2) präsentiert und zunächst offen gefragt, welche realitätsnahen Zusammenhänge der Funktionsgraph darstellen könnte.

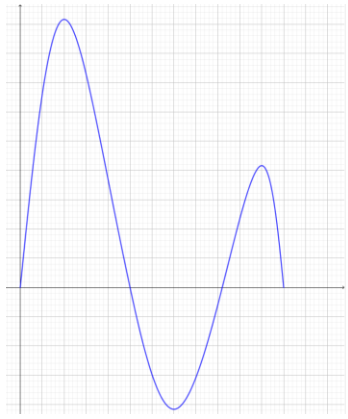


Abb. 2: Funktionsgraph im Themenblock Anwendungskontext

Anschließend wurde nach Deutungen der Ableitung im selbst gewählten Kontext gefragt. Unter anderem zur besseren Vergleichbarkeit der Interviews, wurde der Funktionsgraph in jedem Interview auch in einem Zeit-Geschwindigkeit-Kontext interpretiert. Dazu sollte am abgebildeten Graphen die Geschwindigkeit eines Einrads abgelesen werden. In diesem Fall wurde eine passende Beschriftung und Skalierung der Achsen vorgegeben. Erneut wurde erfragt, wie die Ableitung in diesem Sachzusammenhang zu deuten sei. Im Interview ergab sich damit nochmals eine einschlägige Anwendungssituation, in der die Anwendung einer Deutung (diesmal bzgl. eines realitätsnahen Sachzusammenhangs) zielführend war und anhand der eventuelle Schwierigkeiten der Anwendung inhaltlicher Deutungen analysiert werden konnten. Je nachdem, wie ausführlich der zuvor beschriebene Themenblock zum graphischen Differenzieren im Interview entfaltet wurde, forderte die Interviewerin die Schülerinnen und Schüler auf, auch im Rahmen des realitätsnahen Sachzusammenhangs graphisch zu differenzieren und das jeweilige Vorgehen zu begründen.

(5) Funktionenlupe: In diesem Themenblock des Interviews, der in der Regel am Ende des Interviews verortet war, wurde die Frage aufgegriffen, wie der in Abbildung 2 dargestellter Funktionsgraph an ausgewählten Punkten bei starker Vergrößerung aussehen würde (siehe Funktionenlupe in Elschenbroich, 2015). Die Lernenden wurden auch explizit danach gefragt, ob sie bzgl. dieser Frage einen Zusammenhang zum Ableitungsbegriff herstellen können. Des Weiteren wurden sie gebeten, zu folgender Aussage Stellung zu nehmen: „Jede Funktion lässt sich in einem kleinen Bereich durch eine lineare Funktion annähern“. Dieser Themenblock wurde in das Interview aufgenommen, um auch die Grundvorstellung der lokalen Linearität zu adressieren und eine weitere, zur Beantwortung der Forschungsfrage wichtige Anwendungssituation von inhaltlichen Deutungen der Ableitung in das Interview einzubetten.

Im Rahmen der Interviews wurden die Schülerinnen und Schüler stets ermuntert, ihre Denkprozesse und ihr Vorgehen während der Aufgabenbearbeitungen zu verbalisieren (Döring & Bortz, 2016). Um detaillierte Auswertungen durchführen zu können, wurden die Interviews videographiert. Auf genaue Vorgehen der Datenauswertung wird im nächsten Abschnitt eingegangen.

3.2 Datenauswertung

Zur Datenauswertung wurde das Videomaterial zunächst in Anlehnung an Dresing und Pehl (2018) sowie Kuckartz und Rädiker (2022) transkribiert. Eine Transkriptionslegende findet sich am Ende des Beitrags. Die Transkripte wurden in einzelne thematisch abgeschlossene Szenen gegliedert (z. B. „Einstieg“, „Graphisches Differenzieren“, „Zeit-Geschwindigkeit-Diagramm“) (siehe Krummheuer & Naujok, 1999; Tiedemann, 2020). Die Szenen orientieren sich an den im Interviewleitfaden festgehaltenen Themenblöcken (siehe Abschnitt 3.1) und Fragestellungen sowie insbesondere an den in das Interview eingebundenen Aufgaben. Aufgrund der Offenheit gegenüber den Lernendenäußerungen und nicht im Interviewleitfaden vermerkter Nachfragen wurden zudem Szenen identifiziert, die sich nicht aus dem Interviewleitfaden ergaben. Die Gliederung in einzelne Szenen wurde in der weiteren Datenauswertung genutzt, um das Datenmaterial zugänglich zu machen und einzelne Szenen als thematisch abgeschlossene Einheiten detailliert analysieren zu können. Außerdem konnten mithilfe der Gliederung Interviewszenen schneller in den gesamten Interviewverlauf eingeordnet und mit anderen Szenen (auch aus anderen Interviews) verglichen werden.

Hinsichtlich einer geplanten Sequenzanalyse wurden Interpretationsansätze, die bezüglich der in diesem Beitrag im Fokus stehenden Forschungsfragen während des Gliederungsprozesses aufkamen, systematisch als Memos festgehalten, um diese im weiteren Analyseprozess reflektiert anderen Interpretationsmöglichkeiten gegenüberzustellen.

Szenenauswahl: Die Auswahl empirisch relevanter Szenen erfolgte in drei Schritten. *Erstens* wurden die Interviews hinsichtlich Szenen gesichtet, in denen die Lernenden fachlich korrekte, inhaltliche Deutungen des Ableitungsbegriffs nennen und elaborieren; also Szenen, aus denen hervorgeht, dass den Lernenden bestimmte Deutungen bekannt sind. Beispielhaft sei auf ein Interview verwiesen, in dem eine Schülerin die Deutung der Ableitung als Steigung wie folgt erläutert: „Die Ableitung ist auch die Steigung in einem Punkt.“ Diese Aussage elaboriert die Schülerin in der entsprechenden Szene: „[Bei einer Ableitung] kann man für x immer einen Wert einsetzen und dann gucken genau an dem Punkt, wie die Steigung da ist.“ Die entsprechende Szene wurde im ersten Schritt der Szenenauswahl folglich als empirisch relevant eingestuft.

In einem *zweiten* Schritt wurden Szenen identifiziert, in denen die Anwendung der bekannten Deutung zur Lösung einer Aufgabe zielführend ist. Es wurden also Szenen mit einschlägigen Anwendungssituationen identifiziert (siehe Abschnitt 3.1). Bezüglich dieses zweiten Schritts der Szenenauswahl kann zum Beispiel eine Szene im soeben erwähnten Interview der Schülerin angeführt werden, in der zum graphischen Differenzieren aufgefordert wird. In diesem Rahmen kann die Anwendung der der Schülerin bekannten Deutung als Steigung als zielführend angesehen werden.

In einem *dritten* Schritt wurden von den im zweiten Schritt identifizierten Szenen diejenigen ausgewählt, in denen im Sinne der Forschungsfragen die Anwendung der bekannten Deutung in einer entsprechenden Aufgabenbearbeitung nicht oder nicht erfolgreich erfolgt. Beispielsweise stellt sich in einer Szene des Interviews mit der Schülerin heraus, dass das graphische Differenzieren nicht gelingt, was sich in der entsprechenden Szene auch in Aussagen widerspiegelt wie: „Wenn der Funktionsgraph steigt, dann fällt die Ableitung“.

Hinsichtlich der Forschungsfragen wurden zusammenfassend diejenigen Szenen für detaillierte Analysen ausgewählt, die die folgenden Kriterien erfüllen:

1) Es lässt sich auf Basis im Interview getätigter Äußerungen und Handlungen rekonstruieren, dass der Schülerin bzw. dem Schüler mindestens eine für die Aufgabenlösung zielführende, fachlich korrekte, inhaltliche Deutung des Ableitungsbegriffs bekannt ist.
2) Die bekannte Deutung wird vom Schüler bzw. von der Schülerin nicht oder nicht erfolgreich im Rahmen der Aufgabenlösung angewendet, obwohl dies in der Situation zielführend wäre.

Aufgrund einer Vielzahl von potentiell empirisch relevanten Szenen wurden sieben Interviews vom Forschungsteam ausgewählt, die besonders reichhaltige Szenen enthalten. Diese sieben Interviews wurden von zwei der Autorinnen bzw. Autoren nochmals unabhängig voneinander detailliert hinsichtlich empirisch relevanter Szenen gesichtet, die den oben genannten zwei Kriterien entsprechen. Ein Vergleich der jeweils von Autorin und Autor identifizierten Szenen zeigte eine hohe Übereinstimmung. Wurden Szenen nur von einer Person identifiziert, wurde gemeinsam geprüft, inwieweit die Kriterien für empirisch relevante Szenen erfüllt waren.

Szenenanalyse: Alle in den sieben Interviews identifizierten empirisch relevanten Szenen wurden sequenzanalytisch beschrieben und interpretiert. Die Analyse basierte auf folgenden fünf Schritten, die u. a. auch im Rahmen von Interaktionsanalysen von Unterrichtsszenarien herangezogen werden (Krummheuer & Naujok, 1999; Tiedemann, 2020):

1) Gliederung der Szene in Sinnabschnitte
2) Beschreibung der Szene nach dem ersten Eindruck
3) Analyse der Einzeläußerungen und Entwicklung von alternativen Interpretationen dieser Äußerungen
4) Turn-by-Turn-Analyse
5) Zusammenfassende Interpretation

Die zusammenfassende Interpretation fokussierte abschließend folgende Leitfragen:

- Inwieweit ist die Schülerin bzw. der Schüler in der Lage, Deutungen des Ableitungsbegriffs anzuwenden?
- Welche Schwierigkeiten können bei dieser Anwendung rekonstruiert und beschrieben werden?
- Welche möglichen Gründe könnte es für diese Schwierigkeiten geben?

Szenen, mithilfe derer hinsichtlich der zweiten Forschungsfrage mögliche Gründe herausgearbeitet werden konnten, wurden dann nochmals in einem größeren Forschungsteam sequenzanalytisch analysiert, um die Interpretation der jeweiligen Szenen intersubjektiv zu prüfen.

Für den vorliegenden Beitrag wurde ein Fallstudiendesign ausgewählt, um die Diskrepanz zwischen Kenntnis und Anwendung fachlich korrekter, inhaltlicher Deutungen ausführlich zu beschreiben und mögliche Gründe für diese Diskrepanz detailliert herauszuarbeiten. Die drei Fallbeispiele wurden für diesen Beitrag ausgewählt, weil bezüglich dieser Fallbeispiele die jeweiligen Gründe der nicht erfolgreichen Anwendung besonders eindrücklich dargestellt und anhand anderer Studien untermauert werden können. Des Weiteren wurden die drei Fälle ausgewählt, da eine hohe Relevanz der Fallbeispiele sowie der ausgewählten Szenen für die Forschungsfragen durch das Forschungsteam bestätigt wurde. Diese Szenen und Interpretationen werden im Folgenden fallspezifisch – d. h. jeweils auf die interviewte Person bezogen – beschrieben und diskutiert.

4. Ergebnisse

Auf Basis der in Abschnitt 3 beschriebenen Szenenauswahl und -analyse werden im Folgenden fallbezogen einschlägige Anwendungssituationen beschrieben und interpretiert, in denen die interviewten Schülerinnen und Schüler eine ihnen bekannte fachlich korrekte, inhaltliche Deutung nicht oder nicht erfolgreich anwenden. Durch welche Interviewszenen rekonstruiert wurde, dass die Schülerinnen und Schüler eine bestimmte Deutung der Ableitung kennen, wird ebenfalls dargestellt. Aus Gründen der Lesbarkeit basiert die Darstellung der Ergebnisse auf zusammenfassenden Beschreibungen und Interpretationen dieser Anwendungssituationen, die sich im Analyseprozess bewährt haben.

In allen dargestellten Fallbeispielen wird die Deutung der Ableitung als Steigung beleuchtet und damit jene Deutung, die – wie im Forschungsstand aufgezeigt – Oberstufenschülerinnen und -schülern mit am bekanntesten ist (vgl. Abschnitt 2.3). Dies spiegelt sich in der hier beschriebenen Studie auch insofern wider, als dass diese Deutung von den meisten

Schülerinnen und Schülern im Interview ohne Nachfragen genannt und im Vergleich zu anderen möglichen Deutungen am ausführlichsten elaboriert wurde. Die inhaltliche Gemeinsamkeit der drei dargestellten Fallbeispiele ermöglicht es, herauszuarbeiten, welche unterschiedlichen Gründe dazu führen können, die bekannte Deutung des Ableitungsbegriffs nicht erfolgreich anzuwenden.

4.1 Thea

Thea (Pseudonym) belegt Mathematik als Grundkurs an einer Gesamtschule. Ihre Zeugnisnoten der letzten vier Schulhalbjahre in der Oberstufe liegen im Durchschnitt bei 14,5 Punkten.

Zu Beginn des Interviews wird Thea gefragt, was ihr alles zum Ableitungsbegriff einfalle. Hieraufhin antwortet sie:

> Thea: Die Ableitungen, da gibt es verschiedene. Wenn wir jetzt zum Beispiel einfach mal bei der Parabel uns das anschauen (*skizziert die Normalparabel*, vgl. Abb. 3), dann ist die Ableitung, zum Beispiel die erste Ableitung (*notiert „$f'(x)$" unter der skizzierten Normalparabel*, vgl. Abb. 3), die Steigung an der Stelle.

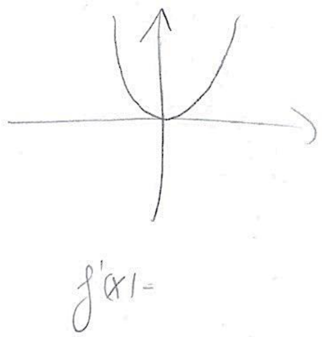


Abb. 3: Theas Skizze der Normalparabel

In ihrer Aussage bringt Thea den Ableitungsbegriff fachlich korrekt mit dem Steigungsbegriff in Verbindung, indem sie die Ableitung als „Steigung an der Stelle" deutet. Grundsätzlich zeigt sich an dieser Interviewstelle, dass der Schülerin die Deutung des Ableitungsbegriffs als Steigung bekannt ist. Diese Deutung könnte ein erfolgreiches Anwenden der Ableitung in entsprechenden Aufgaben ermöglichen. Inwiefern sich hierbei dennoch Schwierigkeiten zeigen, offenbart sich in der im Folgenden beschriebenen einschlägigen Anwendungssituation. In der analysierten Interviewszene werden die in den Abbildungen 1a bis 1c dargestellten Funktionsgraphen sowie der Graph der Betragsfunktion unter der Frage betrachtet, ob die repräsentierten Funktionen abgeleitet werden können oder nicht. Die Thea bekannte Deutung des Ableitungsbegriffs als Steigung wäre insofern zielführend, als dass entschieden werden kann, ob bei den abgebildeten Funktionsgraphen eine Steigung an jedem Punkt innerhalb des Definitionsbereichs bestimmt werden kann oder nicht.

Thea gibt auf die Frage der Interviewerin, welche der als Graph dargestellten Funktionen abgeleitet werden können, folgende Antwort:

> Thea: Also da (*zeigt auf den Graphen der ganzrationalen Funktion in Abb. 1a*) kann man ganz normal eine Ableitung beschreiben. Hier (*zeigt auf Graph mit Sprungstelle in Abb. 1b*) könnte man jede x-beliebige Stelle ableiten. Hier (*zeigt auf Graph mit Definitionslücke in Abb. 1c*) auch eigentlich, also ich/ Die Lücke nicht, aber allgemein. Hier (*zeigt auf den Graphen der Betragsfunktion*) würde ich jetzt erstmal sagen 'Nein', weil wir ja schon die Gerade haben und da können wir ja die Steigung einfach an der Stelle berechnen mit der/ Also das kann man ja quasi als zwei Geraden betrachten (*zeichnet den Graphen der Betragsfunktion für positive x-Werte in der Luft nach*) und dann kann man das darüber ausrechnen.

Sie fasst zusammen:

> Thea: Ich würde sagen, da kann man keine Ableitung machen, braucht man aber auch gar nicht unbedingt.

Im Folgenden führt sie ihre Aussage auf Nachfrage aus, indem sie Funktionsgleichungen für die zwei von ihr identifizierten Geraden aufstellt:

> Thea: Also das kann man ja eigentlich ganz normal/ Also das wäre ja eine Gerade (*deckt den Graphen der Betragsfunktion für negative x-Werte ab und zeichnet den Graphen für positive x-Werte nach*) und das wäre eine Gerade (*deckt die entsprechend andere Hälfte ab*). Und die kann ich ja quasi als eine fallende (*zeichnet den Graphen für negative x-Werte nach*) und eine steigende betrachten (*nimmt das abdeckende Papier weg, sodass der gesamte Graph sichtbar ist*). Das hier wäre jetzt eins also $f(x) = -mx + n$ (*notiert entsprechend Abb. 4*) und dann wäre zwei steigend, also $f(x) = mx + n$ (*notiert entsprechend Abb. 4*). n ist der y-Achsenabschnitt, also wo sie halt die y-Achse schneidet, das ist hier bei 0. Das heißt, das können wir eigentlich fallen lassen. Und dann würde ich die Funktionsgleichung aufstellen. Das kann ich hier gut mit einem Steigungsdreieck machen. Das wäre dann ja hier $-1x$ und hier wäre es dann $1x$ (*notiert entsprechend Abb. 4*).

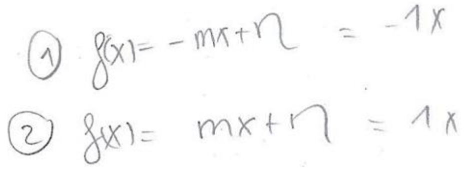


Abb. 4: Theas Notizen zur Betragsfunktion

Die Interviewerin weist Thea im weiteren Verlauf des Gesprächs auf ihre Aussage zu Beginn des Interviews, die Ableitung sei die Steigung, hin, worauf Thea mit einer Frage reagiert:

> I: Man könnte ja auch sagen, hier fällt der Graph und hier steigt der Graph (*zeichnet entsprechend den Äußerungen den Graphen der Betragsfunktion nach*). Und die Ableitung, hast du am Anfang ja auch richtig gesagt, ist die Steigung. Also könnte man ja hier irgendwie schon sagen: Hier steigt der Graph //Thea: Ja// und zwar immer um eins.
>
> Thea: Ja, aber ist nicht dieses m die Steigung?

Zusammenfassend kommt Thea in der beschriebenen Szene zu dem Schluss, dass man den Graphen der Betragsfunktion nicht ableiten kann. Dies führt sie jedoch nicht darauf zurück, dass die Betragsfunktion am Punkt $(0,0)$ nicht differenzierbar ist. Ob die Funktion differenzierbar ist, beurteilt sie aufgrund ihres Vorgehens zur Bestimmung der Steigung des Funktionsgraphen. Dass Thea die Ableitung aus ihrer Sicht *zur Bestimmung* der Steigung des Funktionsgraphen jedoch nicht „brauche" – vermutlich, da für sie die Steigung schon bestimmt ist –, verwendet sie als Begründung der Nicht-Differenzierbarkeit.

In der dargestellten Anwendungssituation zeigt sich als Kontrast zu der zu Beginn des Interviews geäußerten Deutung der Ableitung „dann ist die Ableitung [...] die Steigung an der Stelle" die Auffassung der Ableitung als ein Werkzeug, mit dem die Steigung eines Funktionsgraphen an einer Stelle berechnet werden kann. Dass Thea die Deutung der Ableitung als Steigung in der dargestellten Anwendungssituation im Sinne der Aufgabenlösung nicht erfolgreich anwendet, könnte also als Grund haben, dass sie diese Deutung zwar nennen kann, ihr sie also zunächst bekannt zu sein scheint, aber – wie der weitere Interviewverlauf zeigt – sie die Deutung nicht „bidirektional" auffasst. D. h. mit der Ableitung kann für Thea die Steigung bestimmt werden, die Steigung (in Gestalt des Parameters m) hält selbst jedoch keine Information über die Ableitung für sie bereit. Dies wird insbesondere deutlich durch die Tatsache, dass es Thea nicht gelingt, die bereits berechnete Steigung als Ableitung zu begreifen.

4.2 Lisa

Lisa (Pseudonym) belegt Mathematik als Leistungskurs an einem Gymnasium. Ihre Zeugnisnoten der letzten vier Schulhalbjahre in der Oberstufe liegen im Durchschnitt bei 7 Punkten.

Auch Lisa wird zu Beginn die Frage gestellt, was ihr alles zum Ableitungsbegriff einfalle. Sie antwortet zunächst:

> Lisa: Ich nehme einfach jetzt eine Funktion des dritten Grades $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ (*notiert entsprechend Abb. 5*) und dann die Ableitung davon ist immer $f'(x)$ zum Beispiel $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ (*notiert entsprechend Abb. 5*).

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$$
$$\hookrightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Abb. 5: Von Lisa notierte Funktionsgleichungen $f(x)$ und $f'(x)$

Auf die Nachfrage, ob Lisa noch etwas mehr zur Ableitung erzählen könne, ergänzt sie:

> Lisa: Man braucht die Ableitung, um die Steigung zu berechnen. Beispielsweise ich brauche jetzt die Steigung im Punkt zum Beispiel zwei. Und dann kann man hier so eine Tangente zeichnen (*Lisa zieht eine Skizze heran, die sie kurz vor der hier beschriebenen Szene zur Erläuterung des Integralbegriffs erstellt hat und zeichnet eine Tangente ein*, vgl. Abb. 6a) und die Gleichung der Tangente ist ja die Ableitung (*zeigt auf die Funktionsgleichung f'(x) aus Abb. 5)* und wir haben ja/ Also dann setzt man für x immer Punkt 2 ein (*unterstreicht die 2 in Abb. 6a*).

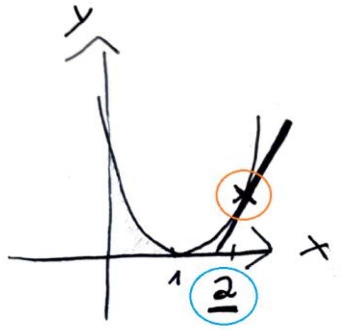


Abb. 6a: Von Lisa skizzierte Parabel und Tangente (farbige Markierungen Anm. d. Verf.)

Lisa erkundigt sich, ob man ihre Ausführungen versteht, was durch die Interviewerin kurz bejaht wird, sodass Lisa ihre Erläuterungen fortsetzt.

> Lisa: Genau also wir setzen quasi/ Weil wir berechnen ja die Steigung von dem Punkt (*zeigt auf das orange markierte Kreuz*, vgl. Abb. 6a) dem Punkt zwei (*zeigt blau umkreiste 2*, vgl. Abb. 6a). Dann setzen wir für x immer 2 ein (*zeigt nacheinander auf die x-Variablen in der Funktionsgleichung $f'(x)$ in Abb. 5*) und dann hat man einen Wert raus (*umkreist in Abb. 5 den Funktionswert f'(x)*), das ist dann die Steigung in dem Punkt.

In der soeben dargestellten Interviewszene führt Lisa auf die Frage, was ihr alles zum Ableitungsbegriff einfalle, beispielhaft eine Funktionsgleichung an und bildet formal symbolisch korrekt die Ableitung (vgl. Abb. 5). In ihren weiteren Äußerungen stellt sie einen Bezug der Ableitung zur Deutung als Steigung her, indem sie erläutert, dass man die Ableitung gebrauche, „um die Steigung zu berechnen". Exemplarisch erläutert sie dies anhand ihrer Skizze und der aufgestellten Funktionsgleichung für die Stelle $x = 2$. Lisa erläutert unter anderem, den Wert zwei in die aufgestellte Ableitung einzusetzen, um die Steigung in dem entsprechenden Punkt zu berechnen. Darauf, dass die Funktionsgleichungen nicht zur von ihr skizzierten Parabel passen, geht Lisa nicht ein.

Durch die dargestellte Szene kann aufgezeigt werden, dass Lisa die Deutung als Steigung bekannt ist; inwiefern sie im Vergleich zu Thea die Ableitung ebenfalls ausschließlich als ein Werkzeug zur Bestimmung der Steigung auffasst, kann an dieser Stelle nur vermutet werden und wird daher später erneut aufgegriffen. Des Weiteren nimmt Lisa in der Szene auf den Begriff der Tangente Bezug. Sie zeichnet die Tangente in ihrer Skizze auch korrekt ein, fälschlicherweise ordnet sie jedoch die Gleichung der Tangente als Ableitung ein.

Die Interviewerin greift den von Lisa in das Interview eingebrachten Begriff der Tangente auf. Sie bittet Lisa, den Begriff der Tangente weiter auszuführen, woraufhin Lisa antwortet, die Tangente sei „quasi so eine Gerade, die den Punkt berührt". Die Interviewerin fragt Lisa im Laufe der Szene daraufhin nochmal explizit nach dem Zusammenhang der Begriffe Ableitung und Tangente. Lisa antwortet:

> Lisa: Also wir haben das immer so gemacht, dass wir auch ein Dreieck gezeichnet haben, das ist das Steigungsdreieck (*Lisa zeichnet ein Steigungsdreieck an die gezeichnete Tangente in ihrer ersten Skizze ein*, vgl. Abb. 6b) und mit der Ableitung (*zeigt auf die Funktionsgleichung f'(x) in Abb. 5*) berechnet man auch die Steigung.

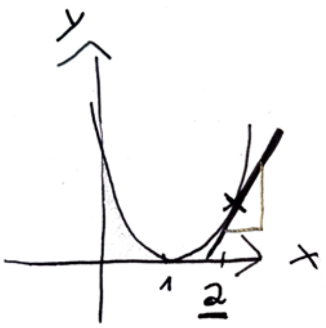


Abb. 6b: Von Lisa skizzierte Parabel, Tangente und Steigungsdreieck

> I: Kannst du mir das nochmal ein bisschen genauer beschreiben, wie du dir das vorstellst da mit der Steigung in dem einen Punkt?

> Lisa: Also die Steigung ändert sich ja in jedem Punkt (*zeichnet die Parabel nach*, vgl. Abb. 6b) (4 Sek.) Also zum Beispiel/ Also das ist so konkreter. Man kann auch von zwei Punkten die Steigung berechnen dann ist das so ein mittlerer Wert oder wie man das nennt. Und hier (*zeigt auf den Punkt in Abb. 6b, an den eine Tangente angelegt wurde*) ist das ja konkret von einem einzigen Punkt.

Lisa stellt bei der Frage nach dem Zusammenhang des Ableitungs- und Tangentenbegriffs einen Bezug zum Begriff des Steigungsdreiecks her, das sie in ihrer Skizze an die Tangente einzeichnet (vgl. Abb. 6a). Durch ihre Wortwahl „mit der Ableitung berechnet man *auch* die Steigung" (Hervorh. d. Verf.) kann vermutet werden, dass Lisa zwei Ansätze zur Bestimmung der Steigung in einem Punkt sieht: Zum einen durch die Bestimmung der Ableitungsfunktion und zum anderen durch die Bestimmung der Tangentensteigung.

In der folgenden Szene, die durch eine einschlägige Anwendungssituation der Deutung als Steigung charakterisiert ist, greift die Interviewerin den Funktionsgraphen der quadratischen Funktion aus der Einstiegsszene erneut auf. Sie bittet Lisa, nochmals eine neue Parabel, dieses Mal etwas größer, aufzuzeichnen. Lisa skizziert daraufhin die in Abb. 9a dargestellte Parabel. Die Interviewerin fragt Lisa, ob sie ihr den Graphen der Ableitung skizzieren könne. Lisa sagt:

> Lisa: Also wenn wir sagen, dass das die Normalparabel x^2 ist, dann ist ja die Ableitung $2x$ (*notiert die Funktionsgleichungen*, vgl. Abb. 7).

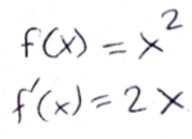
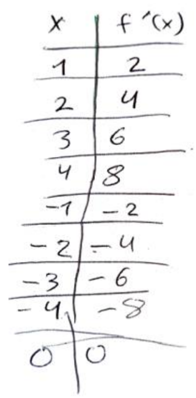


Abb. 7: Von Lisa notierte Funktionsgleichungen zur Parabel

Weiterhin stellt sie folgende Wertetabelle auf (vgl. Abb. 8):



x	f'(x)
1	2
2	4
3	6
4	8
-1	-2
-2	-4
-3	-6
-4	-8
0	0

Abb. 8: Von Lisa aufgestellte Wertetabelle

Im weiteren Verlauf der Szene beginnt Lisa, das von ihr gezeichnete Koordinatensystem zu beschriften und Punkte in das Koordinatensystem wie in Abbildung 9a abgebildet einzuzeichnen. Anschließend setzt sie dieses Vorgehen fort, indem sie zunächst

Markierungen auf dem negativen Teil der x-Achse einträgt und diese beschriftet, um dann erneut Punkte einzuzeichnen und diese mit einem grünen Stift zu einem durchgehenden Funktionsgraphen zu verbinden (vgl. Abb. 9b):

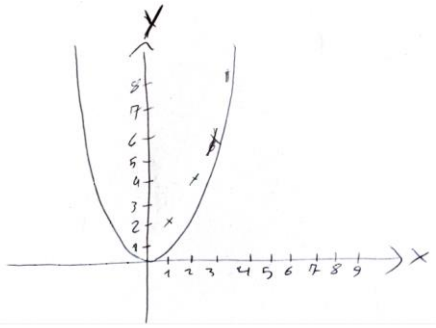


Abb. 9a: Lisas Vorgehen beim graphischen Differenzieren, Teil 1

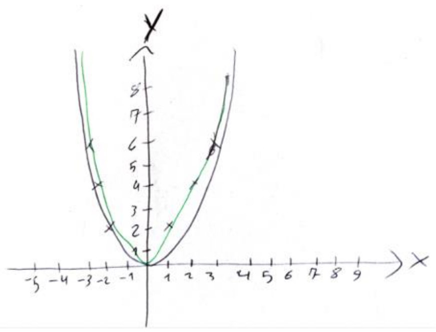


Abb. 9b: Lisas Vorgehen beim graphischen Differenzieren, Teil 2

Lisa fasst ihr Vorgehen wie folgt zusammen:

> Lisa: Also das ist jetzt nicht genau gezeichnet, aber also ich habe quasi jetzt um die Ableitung zu zeichnen, habe ich für x Werte eingesetzt (*zeigt auf die linke Spalte der Tabelle*, vgl. Abb. 8) und habe dann davon den y-Wert berechnet (*zeigt auf rechte Spalte der Tabelle*, vgl. Abb. 8) und die Ableitung von x^2 ist quasi fast die gleiche Parabel, aber ist ein bisschen gestreckter.

Hieraufhin fragt die Interviewerin, ob Lisa noch eine alternative Vorgehensweise zur Skizzierung des Ableitungsgraphen bekannt sei, woraufhin Lisa sagt:

> Lisa: Also ich gehe immer so vor. Ich weiß nicht, ob noch was dazu geht.

Auf abschließende Nachfrage erläutert Lisa den Zusammenhang zwischen der Wertetabelle und dem neu eingezeichneten Graphen wie folgt:

> I: Wie hängt die Wertetabelle (vgl. Abb. 8) mit dem eingezeichneten grünen Graphen (vgl. Abb. 9b) zusammen?

> Lisa: Also die positiven x-Werte (*deutet eine Umrandung der positiven x-Werte in der Wertetabelle an*, vgl. Abb. 8) sind ja die hier auf der rechten Seite (*zeichnet Teil des grünen Graphen im ersten Quadranten nach*, vgl. Abb. 9b) oder auf dem rechten Teil und die negativen (*umrandet in der Wertetabelle die negativen x-Werte*, vgl. Abb. 8) sind ja hier (*zeichnet Teil des grünen Graphen im zweiten Quadranten nach*, vgl. Abb. 9b)

Zusammenfassend bestimmt Lisa auf einer formal-symbolischen Ebene die Ableitungsfunktion der Normalparabel korrekt. Die ermittelte Funktionsgleichung nutzt sie zum Aufstellen einer ebenfalls korrekten Wertetabelle. Sie erkennt den Term jedoch offenbar nicht als Term einer linearen Funktion, die eine Gerade als Funktionsgraph hätte. Bei dem Einzeichnen der ermittelten Punkte in das Koordinatensystem unterlaufen ihr Fehler, die sie – auch als ihre Aufmerksamkeit direkt auf den Zusammenhang der Wertetabelle und des gezeichneten Funktionsgraphen gelenkt wird – nicht als solche erkennt.

Lisa zeigt ein symbolisch basiertes Vorgehen: Obwohl zu Beginn nur der Funktionsgraph und nicht der Term gegeben ist, wechselt sie zunächst direkt auf eine symbolische Ebene. Aufbauend auf der aufgestellten Funktionsgleichung und der aufgestellten Wertetabelle zeichnet sie einen Graphen, der in ihren Augen den Graphen der Ableitungsfunktion darstellt. Anders als zu Interviewbeginn stellt sie im Rahmen all dieser Schritte keinen Bezug zwischen dem Ableitungs- und dem Steigungsbegriff her. Auch ein Bezug zum Tangentenbegriff bleibt, anders als zu Interviewbeginn, aus. Ein Grund für dieses symbolisch basierte Vorgehen und insbesondere dafür, dass Lisa keine inhaltlichen Deutungen in der beschriebenen Szene anwendet, könnte darin liegen, dass Lisa, wie sie äußert, mit diesem Vorgehen sehr vertraut sei („Also ich gehe immer so vor").

Zusammen mit Lisas Aussage zu Beginn des Interviews, man brauche die Ableitung, „um die Steigung zu berechnen", könnte die soeben dargestellte Szene auch darauf hinweisen, dass sie – ähnlich wie Thea – die Deutung nicht „bidirektional" vollzieht. Dies könnte ein Grund sein, warum sie nicht explizit die Steigung des Funktionsgraphen betrachtet, um darauf aufbauend den Graphen der Ableitung zu skizzieren.

Ein weiterer Grund für die Fehler, die Lisa in der Interviewszene unterlaufen, kann in fehlenden Grundkenntnissen zum Funktionsbegriff liegen, insbesondere zu Übersetzungen zwischen den Darstellungsregistern Tabelle und Graph. Zum Beispiel betrifft dies Grundkenntnisse wie „Punkte mit negativen y-Koordinaten liegen unterhalb der x-Achse". Diese Interpretation kann durch andere Szenen im Interview gestärkt werden, in denen Lisa z. B. unsicher ist, ob der Graph der Funktion $f(x) = 0$ identisch mit der x- oder der y-Achse ist.

4.3 Annika

Annika (Pseudonym) belegt Mathematik als Grundkurs an einem Gymnasium. Ihre Zeugnisnoten der letzten vier Schulhalbjahre in der Oberstufe liegen im Durchschnitt bei 9,75 Punkten.

Auf die Einstiegsfrage, was Annika alles zum Ableitungsbegriff einfalle, antwortet sie:

> Annika: Zum Thema Ableitung. Man hat eine Funktion, die man ableiten kann und das war meine ich, immer die Steigung. Und es gibt auch noch das Gegenteil von ableiten, das nennt man nicht aufleiten, sondern das war die Stammfunktion. Meine ich ja, und von einer Ableitung kann man wieder eine Ableitung haben. Also das kann man lange weiter so machen.

Weiterhin geht Annika darauf ein, auch „ein Beispiel" für eine konkrete Ableitung angeben zu können, weil sie sich daran erinnere. Dann stellt sie die Funktionsgleichung $f(x) = x^2 + x + 5$ auf. Annika erläutert ihr Vorgehen des symbolischen Differenzierens durch Aussagen wie „Es wird immer minimiert, also dann steht hier $1x^0$" und notiert letztendlich die Gleichung $f'(x) = 2x + 1$.

Auch Annika wird von der Interviewerin im weiteren Gesprächsverlauf gefragt, was sie mit dem Begriff „Steigung" meine. Daraufhin antwortet Annika:

> Annika: Ich meine, dass die erste Ableitung die Steigung eines Graphen ist. Und man kann dann die Ableitung einer Ableitung machen. Das geht dann immer so weiter. Die zweite Ableitung war dann auch wieder etwas Besonderes. Aber daran erinnere ich mich nicht.

Zusammenfassend setzt Annika zu Beginn des Interviews den Ableitungsbegriff mit dem Steigungsbegriff in Beziehung („Die Ableitung war immer die Steigung"), sodass sich an dieser Stelle bereits nachzeichnen lässt, dass Annika die Deutung der Ableitung als Steigung bekannt ist. Des Weiteren nennt Annika die Stammfunktion als „Gegenteil des Ableitens" und geht darauf ein, dass man von einer Ableitung wiederum eine Ableitung bestimmen könne. Ähnlich wie Lisa führt auch Annika beispielhaft eine Funktionsgleichung an und bildet formal symbolisch korrekt die Ableitung.

Auf die Aussage, dass Annika sich nicht mehr erinnere, schlägt die Interviewerin in der nächsten Szene vor, sich einen konkreten Funktionsgraphen anzuschauen und fertigt daraufhin folgende Skizze an (vgl. Abb. 10):

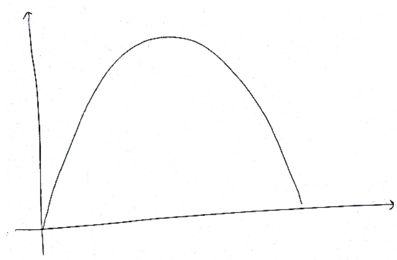


Abb. 10: Von der Interviewerin skizzierter Funktionsgraph im Interview mit Annika

Die Interviewerin fragt Annika, ob sie wisse, wie der Graph der Ableitung in diesem Falle aussieht. Zur Beantwortung dieser Frage kann die Deutung des Ableitungsbegriffs als Steigung, die Annika auch bekannt ist, als zielführend eingeordnet werden. Dennoch zeigen sich im Interview diesbezüglich Schwierigkeiten, wie im Folgenden dargestellt wird. Annika beantwortet die Frage zum Graphen der Ableitungsfunktion zunächst mit „Ja ungefähr" und skizziert anschließend den unten in der folgenden Abbildung einsehbaren Graphen (vgl. Abb. 11, unten):

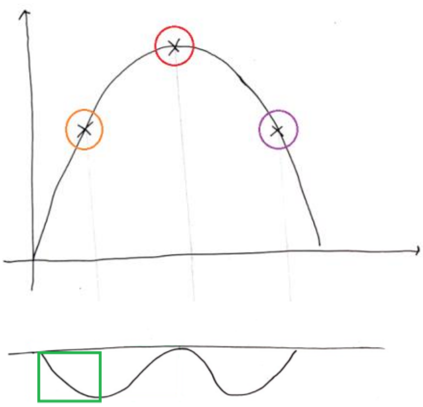


Abb. 11: Von Annika skizzierter Ableitungsgraph (farbige Umkreisungen und Rechteck Anm. d. Verf.)

Annika erklärt ihre Skizze wie folgt:

> Annika: Also das hier ist ja ein Hochpunkt, hier oben ist ein Hochpunkt (*zeichnet das rot umkreiste Kreuz ein*, vgl. Abb. 11) und dieser Hochpunkt wird bei der Ableitung dann auf der x-Achse sein (*zeigt an der Stelle des Hochpunktes auf die x-Achse*, vgl. Abb. 11 oben). Ich meine, wenn man das ableitet, wird dieser Teil (*zeichnet den steigenden Teil des Funktionsgraphen nach*, vgl. Abb. 11 oben) nach unten gehen (*deutet den in Abb. 11 unten grün umrandeten Teil des Graphen an*). Dann kommt man zur x-Achse zurück. Und dann geht das ja wieder nach unten. Dass es dann ungefähr so aussehen wird (*skizziert den gesamten Graphen*, vgl. Abb. 11 unten). Also so oder spiegelverkehrt. Daran erinnere ich mich nicht mehr genau, weil ich weiß halt noch, dass das hier ein Hochpunkt ist und der dann auf der x-Achse liegen wird. Also wenn das hier dann die x-Achse ist da (*zeichnet die abgebildete Strecke ein*, vgl. Abb. 11 unten).

I: Du hattest ja den Begriff Steigung schon erwähnt. Wie passt das denn jetzt damit so zusammen?

Annika: (18 Sek.) Ich muss gerade nachdenken.

Nach einer weiteren längeren Pause von ca. 40 Sekunden, erläutert Annika:

Annika: Also, wenn man jetzt diese Funktion hat, diesen Graphen (*zeigt auf Graph in Abb. 10*), dann kann man ja diese Steigung hier ausrechnen (*deutet mit ihrem Stift das größere Steigungsdreieck an*, vgl. Abb. 12) oder eine andere, je nachdem, wo man das jetzt herausfinden möchte (*deutet weiteres, kleineres Steigungsdreieck an*, vgl. Abb. 12). Und die Ableitung zeigt einfach nur die Steigung der Funktion, der ersten Funktion an. Aber ich weiß nicht mehr genau, was, woran man das jetzt erkennen soll.

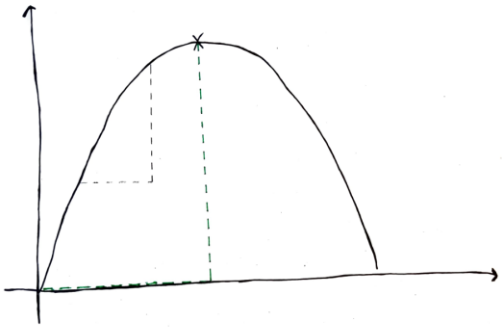


Abb. 12: Von Annika gestisch angedeutete Steigungsdreiecke, gestrichelt dargestellt

An dieser Stelle wird ergänzend zur Einstiegszene erneut deutlich, dass Annika die Deutung der Ableitung als Steigung im Sinne des deklarativen Wissens nennen kann („die Ableitung zeigt die Steigung der Funktion an"); es kann also angenommen werden, dass ihr diese grundsätzlich bekannt ist. Gleichzeitig deuten sich sowohl durch ihre Aussage „Aber ich weiß nicht mehr genau, was, woran man das jetzt erkennen soll" als auch durch ihre angefertigte Skizze (vgl. Abb. 11 unten) Schwierigkeiten an, die momentane Steigung im konkreten Beispiel zu bestimmen. Annika bezieht sich in ihrer Gestik und in ihren Aussagen auf Steigungsdreiecke, durch die ihrer Ansicht nach die Steigung berechnet werden könne. Darauf, dass es sich hierbei um eine durchschnittliche Steigung und bei der Ableitung um die momentane Steigung handelt geht Annika nicht explizit ein.

Die Interviewerin bittet Annika direkt im Anschluss, die Steigung des Funktionsgraphen f zu beschreiben. Annikas Beschreibung lautet wie folgt:

Annika: Man sieht hier, dass der Graph ansteigt, bis ungefähr zu diesem Punkt (*beginnt den Funktionsgraphen nachzuzeichnen und zeichnet das orange umkreiste Kreuz ein*, vgl. Abb. 11). Dann wird die Steigung geringer und man gelangt bis zu dem Hochpunkt (*zeichnet das bereits eingezeichnete Kreuz am Hochpunkt nach*, vgl. Abb. 11). Ab dem Punkt wird/ sinkt, die Steigung immer weiter, also sie fällt. Die Steigung fällt und wird dann ungefähr ab hier (*zeichnet das lila umkreiste Kreuz ein*, vgl. Abb. 11) wieder etwas steiler.

Die Interviewerin nimmt nochmal auf Annikas angefertigte Skizze (vgl. Abb. 11) Bezug, indem sie auf diese Skizze zeigt, und fragt:

I: Hilft dir das Beschreiben der Steigung weiter, um den Graphen der Ableitung nochmal genauer zu zeichnen?

Annika: Ähm, ja, man könnte also das hier/ Also ich habe ja gesagt, dass die Steigung hier (*fährt den Funktionsgraphen bis zum orange umkreisten Kreuz nach*, vgl. Abb. 11) steiler ist, als an diesem Punkt (*fährt den Funktionsgraphen vom orange umkreisten Kreuz bis zum rot umkreisten Kreuz am Hochpunkt nach*, vgl. Abb. 11), weil sie hier ja sinkt (*fährt den zuletzt genannten Bereich erneut nach*), also die Steigung fällt. Also ich weiß nicht genau, wie ich das beschreiben soll.

Annika radiert ihre erste Skizze (vgl. Abb. 11 unten) weg und fertigt eine neue an (vgl. Abb. 13 unten):

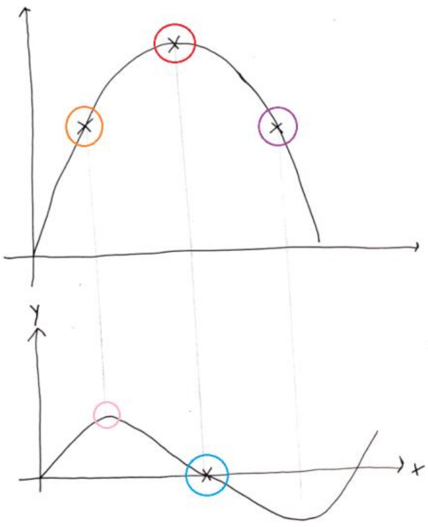


Abb. 13: Annikas zweite Skizze zum Graphischen Differenzieren, obere Skizze identisch zu Abb. 11 (farbige Umkreisungen Anm. d. Verf.)

Annika zeichnet zunächst ein neues Koordinatensystem unter das bereits bestehende (vgl. Abb. 13 unten). Dann zieht sie eine Linie vom Hochpunkt des Funktionsgraphen zur x-Achse des neu einzeichneten Koordinatensystems und vermerkt das blau umkreiste Kreuz. Anschließend skizziert sie jeweils eine Linie vom orange bzw. lila umkreisten Kreis in Richtung des neu gezeichneten Koordinatensystems und zeichnet den abgebildeten Graphen ein (vgl. Abb. 13 unten). Die neu angefertigte Skizze (vgl. Abb. 13 unten) erklärt Annika wie folgt:

Annika: Also als erstes wird der Graph steiler, also meine ich. Ich bin nicht sicher, dass es dann auch an-

> steigen muss, ungefähr bis hier hin (*beginnt den Graphen bis zum rosa umkreisten Punkt zu skizzieren*, vgl. Abb. 13 unten). Und dann sinkt das wieder bis zu dem Punkt, bis zum Endpunkt, also bis zum Hochpunkt. Und dann geht das runter bis hier hin und geht dann wieder hoch. Aber es könnte genau genauso gut auch umgekehrt sein. Vielleicht, weil man das ableitet, das genau andersherum ist.

Die Interviewerin fragt Annika, was sie mit „andersrum" meine, woraufhin Annika entgegnet:

> Annika: Hier steigt es ja an (*zeichnet den Funktionsgraphen bis zum orange markierten Kreuz nach*, vgl. Abb. 13). Und der Hochpunkt wird ja/ geht ja soweit runter (*zeigt auf blau markiertes Kreuz*, vgl. Abb. 13). Deswegen dachte ich vielleicht/ Also für mich ist es einfach logischer, dass, weil das hier ansteigt (*zeichnet nochmal den Funktionsgraphen bis zum orange markierten Kreuz nach*, vgl. Abb. 13), dass das hier bis hierhin auch ansteigt (*zeigt auf den rosa umkreisten Punkt*, vgl. Abb. 13). Aber es könnte genauso gut auch sein, weil es die Ableitung ist, dass es bis hierhin sinkt und dann steigt (*deutet einen Graphen an, der ihrem skizzierten Graphen in Abb. 13 unten an der x-Achse gespiegelt ähnelt)* Aber das liegt halt einfach daran, dass das so lange her ist, dass ich das nicht mehr so genau weiß.

Zusammenfassend zeichnet Annika im zweiten Teil der Interviewszene einen neuen Funktionsgraphen, der in ihren Augen den Graphen der Ableitungsfunktion darstellen könnte. Kennzeichnend für ihr Vorgehen beim Anfertigen der Skizzen ist die Suche nach markanten Punkten, wie dem Hochpunkt der Funktion f. An der Stelle des Hochpunktes der Funktion f erkennt Lisa korrekt eine Nullstelle der Ableitungsfunktion. Unklarheiten bestehen jedoch bezüglich des weiteren Verlaufs des Graphen der Ableitungsfunktion. So zeigen sich auch bezüglich des neu skizzierten zweiten Graphen Unsicherheiten in Annikas Äußerungen („Aber es könnte genau genauso gut auch umgekehrt sein"). Letztendlich entsprechen jegliche Funktionsgraphen, die von Annika skizziert werden, nicht dem korrekten Graphen der Ableitungsfunktion.

Ein Grund für die soeben angeführten Fehler – und explizit für die nicht erfolgreiche Anwendung der von Annika genannten Deutung der Ableitung als Steigung – könnte in der Auffassung des Steigungsbegriffs an sich liegen. Annika hat grundsätzlich nicht nur die durchschnittliche Steigung im Blick, da sie versucht, eine kontinuierliche Steigungsänderung zu beschreiben. Allerdings gelingt es Annika nicht durchgängig, die Steigung des Funktionsgraphen korrekt zu beschreiben. Ihre Unsicherheiten diesbezüglich bringt sie auch selbst zum Ausdruck („Also ich weiß nicht genau, wie ich das beschreiben soll"). Besonders deutlich werden diese Schwierigkeiten durch ihre fachlich nicht korrekten Aussagen „also als erstes wird der Graph steiler" (bzgl. des Funktionsgraphen vom Ursprung bis zum ersten, orange markierten Kreuz, vgl. Abb. 13) und „die Steigung fällt und wird dann […] wieder etwas steiler" (bzgl. des Funktionsgraphen vom dritten, lila markierten Kreuz bis zur zweiten Nullstelle, vgl. Abb. 13). Beide hier zitierten Aussagen passen allerdings zu Annikas letztendlich skizzierten Ableitungsfunktion (vgl. Abb. 13 unten).

Des Weiteren sei noch angemerkt, dass Annika zwar versucht, die Steigung des Funktionsgraphen f zu beschreiben, jedoch bzgl. ihrer selbst angefertigten Skizzen nicht auf die Steigung als Funktionswert von f' eingeht, um zum Beispiel ihre Aussagen zu untermauern bzw. grundsätzlich zu überprüfen. Dies könnte ein Indiz dafür sein, dass der Transferschritt vom Begriff der *Steigung des Graphen in einem Punkt* zum Begriff der *Steigungsfunktion* – konkreter: zu einem Wert der Steigungsfunktion – nicht erfolgreich bewältigt wurde (siehe auch Salle & vom Hofe, 2020). Voraussetzung hierfür wäre jedoch auch, dass Annika zunächst erfolgreich den Schritt von der durchschnittlichen Steigung an nicht-linearen Graphen zur Steigung in einem Punkt einer beliebigen Funktion gemeistert hätte, was aufgrund ihrer im vorherigen Absatz beschriebenen Schwierigkeiten in Frage gestellt werden kann.

5. Diskussion

5.1 Ergebnisdiskussion und Resümee

Durch die dargestellten Fallbeispiele konnte ein bisher für das Ende der Qualifikationsphase nicht vorhandener detaillierter, empirischer Einblick in den Kenntnisstand und die Fähigkeiten von Lernenden bzgl. inhaltlicher Deutungen des Ableitungsbegriffs gegeben werden. Die Fallbeispiele zeigen Diskrepanzen zwischen der Kenntnis und der erfolgreichen Anwendung der inhaltlichen Deutung der Ableitung als Steigung auf. Dies bestätigt entsprechende Ergebnisse aus Studien zur Einführungsphase bzw. Anfängen der Qualifikationsphase (z. B. Hahn, 2008, Klinger, 2018; Moormann, 2009) und der Studieneingangsphase (Greefrath et al., 2023; Orhun, 2013), die eben diese Diskrepanz vermuten lassen.

In den Fallbeispielen wurde ausführlich beschrieben, inwiefern davon ausgegangen werden kann, dass den Lernenden eine fachlich korrekte, inhaltliche Deutung bekannt ist und welche Schwierigkeiten sich bei der Anwendung dieser Deutungen rekonstruieren lassen (Forschungsfrage 1). Defizite im Bereich des graphischen Differenzierens wurden in zahlreichen sowohl nationalen als auch internationalen empirischen Studien beschrieben (z. B. Aspinwall et al., 1997; Klinger, 2018; Moormann, 2009; Ubuz, 2007). Der vorliegende Beitrag hebt darüber hinaus hervor, dass diese Defizite nicht zwangsläufig damit zu begründen sind, dass den Lernenden keine zielführenden inhaltlichen, fachlich korrekten Deutungen des Ableitungsbegriffs bekannt sind. Damit werden die Ergebnisse der Studien zu inhaltlichen Deutungen des Ableitungsbegriffs weiter ausdifferenziert (siehe Klinger, 2018; Moormann, 2009; Orhun, 2013). Zudem konnten unterschiedliche Gründe herausgearbeitet werden, warum eine Anwendung der bekannten inhaltlichen Deutung des Ableitungsbegriffs nicht erfolgt bzw. nicht gelingt (Forschungsfrage 2):

Bei *Thea* offenbart sich in der betrachteten einschlägigen Anwendungssituation ein fragmentarisches Verständnis der Ableitung als Steigung. Im Sinne des deklarativen Wissens kann sie die Deutung nennen, diese jedoch nicht im Sinne des konzeptuellen Wissens und auch im Sinne des Grundvorstellungskonzeptes tiefergehend vernetzen, anwenden oder flexibel mit dieser Deutung operieren. Thea versteht die Ableitung als Hilfsmittel, die Steigung einer Funktion zu ermitteln, was durchaus zur Bewältigung bestimmter Aufgabenstellungen nützlich sein kann. Andersherum gelingt es ihr jedoch nicht, von einer bekannten Steigung auf die Ableitung zu schließen. Dieses unidirektionale Verständnis der besagten Deutung „Ableitung als Steigung“ wurde als ein Grund herausgearbeitet, weshalb Thea diese in der geschilderten einschlägigen Anwendungssituation nicht erfolgreich anwendet und darauf beharrt, dass man bei der Betragsfunktion „keine Ableitung machen kann“.

Bezüglich des festgestellten unidirektionalen Verständnisses der Deutung kann auf eine in den USA durchgeführte Untersuchung von Nagle et al. (2013) verwiesen werden. In dieser Studie wurden 65 Studienanfängerinnen und -anfänger danach befragt, welche Aspekte des Begriffs der Steigung einer linearen Funktion ihnen präsent seien. Während die meisten der Studierenden die Steigung als geometrische Eigenschaft des Graphen anführten, die angibt, ob der Graph steigt oder fällt (ca. 71 %), stellten insgesamt nur wenige der befragten Studierenden einen Bezug zur Ableitung her (ca. 12 %, Nagle et al., 2013).

Dies verdeutlicht, wie wichtig es für unterrichtliche Aktivitäten sowie die Ausbildung von Grundvorstellungen ist, die entsprechenden mathematischen Begriffe und ihre inhaltlichen Deutungen nicht ein-, sondern wechselseitig in Beziehung zu setzen (z. B. Ableitung als Werkzeug zur Bestimmung der Steigung der Funktion und andersherum Steigung als Werkzeug zur Bestimmung der Ableitung). Wird hierbei z. B. auf Zeichnungen der Lernenden zurückgegriffen, wie sie unter anderem im Rahmen des graphischen Differenzierens auftreten, ist darauf zu achten, dass bestimmte Verfahren z. B. zur Bestimmung einer Steigung nicht rezeptartig eingesetzt werden (Bürger & Malle, 2000; Griesel et al., 2019).

Auch bei *Lisa* kann als ein möglicher Grund für die Anwendungsschwierigkeiten der ihr bekannten Deutung „Ableitung als Steigung“ ein unidirektionales Verständnis vermutet werden. Dieses Fallbeispiel zeichnet sich durch ein sehr stark symbolisch geprägtes Vorgehen im Rahmen der beschriebenen einschlägigen Anwendungssituation aus, das auch z. B. Asiala et al. (1997) und Orhun (2013) in einer Studie mit Studierenden herausgearbeitet haben: „The results show that the students preferred to apply an algebraic symbolic aspect instead of using logical meanings of function and its derivative“ (Orhun, 2013, S. 138).

Während in der Studie von Orhun (2013) vage bleibt, inwiefern den Studierenden eine inhaltliche Deutung tatsächlich bekannt ist und warum diese Deutung nicht angewendet wird, können im Fallbeispiel Lisa verschiedene mögliche Gründe hierfür herausgearbeitet werden. So konnte die nicht erfolgreiche Anwendung des Ableitungsbegriffs und seiner Deutung unter anderem auch durch nicht ausreichende Grundkenntnisse bzgl. des Funktionsbegriffs, insbesondere bzgl. Übersetzungen zwischen den Darstellungsregistern Tabelle und Graph, begründet werden.

Damit lässt sich eine gewisse Relevanz der in Stölting (2008) aufgelisteten und diskutierten Grundkenntnisse zum Funktionsbegriff für eine erfolgreiche Anwendung des Ableitungsbegriffs aufzeigen. Dass vor allem das Wissen zum Funktionsbegriff neben Wissen zur mathematischen Symbolik und zur Steigung linearer Funktionen als relevantes Vorwissen für den Erwerb von Wissen zum Ableitungsbegriff einzuordnen ist, zeigen Litteck et al. (2023) durch eine in der 10. Jahrgangsstufe verorteten Studie auf. Ebenso umfasst auch das von Asiala et al. (1997) entwickelte Modell zum Erlernen des Ableitungsbegriffs als grundlegenden Schritt den Aufbau von Kenntnissen zu Repräsentationsformen von Funktionen und zum Wechsel zwischen diesen. Durch die im vorliegenden Beitrag berichteten Ergebnisse kann ergänzend demonstriert werden, wie Defizite bzgl. des Wissens zum Funktionsbegriff nicht nur den Erwerb von Wissen zum Ableitungsbegriff behindern können, sondern auch noch am Ende der Qualifikationsphase Schwierigkeiten bei der Anwendung des Ableitungsbegriffs und seiner Deutungen nach sich ziehen können.

Malle (2003) führt nicht ausreichende Grundkenntnisse, die sich während einer Kurvendiskussion wie im Fallbeispiel zeigen können, darauf zurück, dass „die Methoden wesentlich wichtiger erscheinen als die Grundbegriffe“ und fordert daher für die Unterrichtspraxis unter anderem „Aufgaben zu stellen, die gezielt bestimmte Grundvorstellungen ansprechen“ (S. 62).

Bei *Annika* konnte als Grund für die Schwierigkeiten beim graphischen Differenzieren und damit für die Anwendungsschwierigkeiten der von Annika genannten Deutung des Ableitungsbegriff als Steigung vor allem ein mangelndes Verständnis des Steigungsbegriffs herausgearbeitet werden. Studien, die das Verständnis des Steigungsbegriffs und diesbezüglich Schwierigkeiten sehr detailliert in den Blick nehmen, betrachten oftmals lineare Funktionen und sind vor allem im internationalen (z. B. Nagle et al., 2013; Zaslavsky et al., 2002) und bislang weniger im nationalen (Feudel, 2020) Raum verortet.

Aus der oben bereits vorgestellten Studie von Nagle et al. (2013) geht über die bereits geschilderten Ergebnisse hinaus hervor, dass ebenfalls sehr wenige Studierende (ca. 26 %) einen Bezug des Steigungsbegriffs zur Änderungsrate herstellten, was in der Studie selbst unter dem Schlagwort Steigung als „functional property“ diskutiert wird. Diese Ergebnisse stehen in einem engen Zusammenhang mit Annikas Schwierigkeiten: Sie erkennt zwar, ob der Graph steigt oder fällt, kann aber nicht durchgängig korrekt verbalisieren und zeichnerisch darstellen, wie stark er steigt oder fällt. Die Schwierigkeit, auf Basis des Wachstumsverhalten von f nicht nur zu beurteilen, ob f' im negativen oder positiven Bereich liegt, sondern ob sich f' vergrößert oder verringert, stellen z. B. Borji et al. (2018) auch in ihrer mit iranischen Studierenden durchgeführten Studie fest. Hahn und Prediger (2008) weisen auch bzgl. realitätsnaher Sachzusammenhänge darauf hin, dass „insbesondere das Phänomen, dass ein Bestand weiter wachsen kann, obwohl seine Änderung sinkt, […] sich als empirisch nachweislich *schwer intuitiv begreifbar* […] herausgestellt“ (S. 175, Hervorh. im Original) hat.

Die Frage nach dem Wachstumsverhalten einer Funktion wird auch unter dem Kovariationsaspekt bzw. der Kovariationsgrundvorstellung zu Funktionen diskutiert (z. B. Greefrath et al., 2016a; Malle, 2000). Aufgrund von häufig berichteten Lernendenschwierigkeiten bzgl. der Kovariationsgrundvorstellung wird kritisiert, dass diese Grundvorstellung gegenüber der Zuordnungsgrundvorstellung zu Funktionen zu wenig oder zu spät im Unterricht thematisiert wird (z. B. Rolfes, 2018; Roth, 2005). So stellen Rolfes et al. (2013) die Frage, „ob Verständnisprobleme in der Analysis nicht auch in der zu späten schulischen Anbahnung des Kovariationsaspektes zu suchen sind“ (S. 834). Auf die Bedeutung dieser Frage und entsprechenden Handlungsbedarf kann durch diesen Beitrag bzgl. der erfolgreichen Anwendung inhaltlicher Deutungen des Ableitungsbegriffs nochmal hingewiesen werden.

Die Kovariation korrekt zu erfassen ist zentrale Grundlage für die sogenannten *Transferschritte* zur Ableitungsfunktion (Büchter & Henn, 2010; Salle & vom Hofe, 2020). Der im Fallbeispiel Annika angesprochene Transferschritt bei dem „man die Kovariation von f ihrerseits wieder als eine eigene Zuordnung auf[fasst]“ (Hahn, 2008, S. 41) wird auch als „Ebenenwechsel“ (Hahn, 2008, S. 41) bezeichnet. Dass dieser Ebenenwechsel bzw. Transferschritt Lernende vor Herausforderungen stellt, wurde bereits mehrfach berichtet (z. B. Asiala et al., 1997; Hahn, 2008; Klinger, 2018; Salle & vom Hofe, 2020).

Im Sinne der Forschungsfragen werden durch den Beitrag grundsätzlich verschiedene Gründe dargelegt, die zu den im Fokus des Beitrags stehenden Schwierigkeiten führen könnten. Inwiefern es sich um die „entscheidenden Gründe“ für die Diskrepanz zwischen Kenntnis und Anwendung handelt und in diesem Sinne „erklärt“ werden kann, warum ein Schüler bzw. eine Schülern die besagten Schwierigkeiten hat (siehe Müller-Hill, 2017, S. 171; Bartelborth, 2007), muss für den Einzelfall, d. h. für jeden einzelnen Schüler bzw. jede einzelne Schülerin hinterfragt werden. In den jeweiligen Fallbeispielen liegt es zusammenfassend aus drei Gesichtspunkten nahe, dass es sich um „entscheidende Gründe“ handelt. *Erstens*: Die Interpretation der jeweiligen Szenen, durch die die Gründe herausgearbeitet wurden, haben sich im Rahmen der durchgeführten Sequenzanalyse gegenüber alternativen Interpretationen im Verlauf der Datenauswertung bewährt (siehe

Abschnitt 3.2). *Zweitens*: Die soeben genannte Sequenzanalyse fand in einem größeren Forschungsteam statt (siehe Abschnitt 3.2). Somit wurden unterschiedliche Gründe vor dem „Hintergrundwissen" (Bartelborth, 2007, S. 8) mehrerer Personen diskutiert und die in diesem Beitrag dargelegten Gründe von dem Forschungsteam als „die besten" (siehe Bartelborth, 2007, S. 8) Gründe für das jeweilige Fallbeispiel beurteilt. *Drittens*: Die herausgearbeiteten Gründe konnten durch eine Einbettung der Ergebnisse in den Forschungsstand und Bezüge zu anderen Studien untermauert werden. Insbesondere kann der Grund eines fragmentarischen Deutungsverständnisses auch dadurch untermauert werden, dass ebenfalls im Bereich der Bruchrechnung aus einem fragmentarischen Verständnis der Anteilsgrundvorstellung die Entwicklung von Fehlkonzepten zum Bruchzahlbegriff nachgezeichnet werden konnte (Kollhoff, 2021).

5.2 Limitationen und Forschungsperspektiven

Die qualitative Vorgehensweise der Studie zielte auf eine Herausarbeitung von Fallbeispielen ab, durch die Schwierigkeiten der Anwendung fachlich korrekter, inhaltlicher Deutungen im Sinne der ersten Forschungsfrage sehr detailliert rekonstruiert und abgebildet werden können. Durch das explorative Vorgehen der Studie erhebt diese nicht den Anspruch, alle möglichen Schwierigkeiten der Anwendung inhaltlicher Deutungen des Ableitungsbegriffs zu beschreiben und sämtliche Gründe für diese Schwierigkeiten im Sinne der zweiten Forschungsfrage herauszuarbeiten. In der vorliegenden Studie zeigte sich zudem, dass die Lernenden vor allem die Deutung des Ableitungsbegriffs als Steigung nannten und ausführlich elaborierten, sodass die Schwierigkeiten primär bzgl. dieser Deutung herausgearbeitet und begründet wurden. Weniger explorativ gestaltete Anschlussstudien könnten andere Deutungen wie die lokale Linearität systematischer fokussieren.

Insgesamt bleibt aufgrund des explorativen Charakters der vorliegenden Studie zudem unklar, wie häufig bzw. breit gestreut die dargestellten Schwierigkeiten im Mathematikunterricht auftreten, was quantitativ angelegte Studien beantworten könnten. Über die Relevanz der Ergebnisse über den inhaltlichen Bereich der Analysis hinaus wäre zu klären, inwieweit sich die herausgearbeiteten Gründe auch in anderen, in diesem Beitrag nicht betrachteten, Themen nachweisen lassen und inwieweit sie eine für den jeweiligen Inhalt spezifische Gestalt annehmen.

Die Auswahl der Stichprobe erfolgte auf Grundlage der voraussichtlichen mathematiknahen Studienwahl der Schülerinnen und Schüler, die zudem ausschließlich freiwillig an den Interviews teilnahmen. In Bezug auf Einstellungen zum Fach Mathematik kann somit von einer Positiv-Auswahl ausgegangen werden. Inwieweit ähnliche Phänomene bei Schülerinnen und Schülern mit anderen Studienwünschen und Einstellungen zu beobachten und zu begründen sind, müsste durch eine anders angelegte Stichprobe geklärt werden.

Gleichzeitig bietet die vorliegende Stichprobe das Potential, die Lernenden nach Aufnahme ihres mathematiknahen Studiums ein weiteres Mal zu interviewen. Somit könnte im Rahmen einer Längsschnittstudie der Frage nachgegangen werden, welche Rolle die zum Ableitungsbegriff formulierten Grundvorstellungen bei der weiteren Begriffsbildung der Lernenden an der Hochschule einnehmen.

Anmerkungen

[1] Die Auffassung und der Zusammenhang der Begriffe „Grundvorstellung" und „Deutung" werden in Abschnitt 2.1 und 2.4 näher erläutert.

[2] Von der normativen und deskriptiven Ebene unterscheidet vom Hofe (1995) noch eine konstruktive Ebene. Diese wird vor allem durch das „Aufdecken von Divergenzen zwischen solchen vom Lehrer als adäquat verfolgten und beim Schüler faktisch feststellbaren Vorstellungen" (vom Hofe, 1995, S. 103) sowie durch eine Entwicklung hierauf aufbauender Fördermaßnahmen charakterisiert.

[3] Zum Teil werden die Begriffe des „konzeptuellen Wissens" und „deklarativen Wissens" auch synonym verwendet. Weitere Informationen zur Verwendung der Begriffe z. B. in Klinger (2018), Moormann (2009) und Schneider (2006).

[4] Mögliche Auswirkungen der so ausgewählten Stichprobe auf die Ergebnisse werden im Diskussionsteil methodisch reflektiert.

[5] Neben dem Ableitungsbegriff wurde im Interview auch nach dem Integral- und Funktionsbegriff gefragt. Da die letzteren beiden Begriffe nicht im Erkenntnisinteresse des Beitrags stehen, wird auf Fragen und Aufgaben hierzu nicht weiter eingegangen.

[6] Die Grundvorstellung des Verstärkungsfaktors hat im Mathematikunterricht der Sekundarstufen eine geringere Bedeutung (Greefrath et al., 2016a) und wurde daher bei der Datenerhebung und -auswertung der in diesem Beitrag beschriebenen Studie nicht explizit berücksichtigt.

Danksagung

Wir danken den Teilnehmerinnen und Teilnehmern der Studie, den Lehrkräften der Schulen, an denen die Interviews stattfanden sowie allen Beteiligten der Forschungswerkstatt, insbesondere Sarah Langenhagen und Konstantin Sauer, für ihre Unterstützung. Unser Dank gilt ebenfalls den gutachtenden Personen für die hilfreichen und konstruktiven Anmerkungen.

Transkriptionslegende

Für eine gute Lesbarkeit sind die Transkripte so weit wie möglich der Schriftsprache angenähert. Es wurde folgende Formatierung genutzt:

- (*kursiv*): Beschreibung von Mimik, Gestik und Handeln
- (x Sek.): Pause von x Sekunden
- /: Wort- oder Satzabbruch
- //: Beginn und Ende von Sprecherinnen- und Sprecherüberlappungen

Literatur

Anderson, J. R. (1983). *The architecture of cognition*. Harvard University Press.

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E. & Schwingendorf, K. E. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. *The Journal of Mathematical Behavior*, *16*(4), 399–431.

Aspinwall, L., Shaw, K. L. & Presmeg, N. C. (1997). Uncontrollable mental imagery: Graphical connections between a function and its derivative. *Educational Studies in Mathematics*, *33*(3), 301–317.

Bartelborth, T. (2007). *Erklären*. de Gruyter.

Bauersfeld, H. (1983). Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In H. Bauersfeld, H. Bussmann, G. Krummheuer, J. H. Lorenz & J. Voigt (Hrsg.), *Lernen und Lehren von Mathematik* (S. 1–56). Aulis.

Baumert, J., Bos, W., Klieme, E., Lehmann, R., Lehrke, M., Hosenfeld, I., Neubrand, J. & Watermann, R. (1999). *Testaufgaben zu TIMSS/III: Mathematisch-naturwissenschaftliche Grundbildung und voruniversitäre Mathematik und Physik der Abschlußklassen der Sekundarstufe II (Population 3)*. Max-Planck-Institut für Bildungsforschung.

Baumert, J., Bos, W. & Watermann, R. (2000). Mathematisch-naturwissenschaftliche Grundbildung im internationalen Vergleich. In J. Baumert, W. Bos & R. Lehmann (Hrsg.), *TIMSS/III: Dritte Internationale Mathematik- und Naturwissenschaftsstudie – Mathematische und naturwissenschaftliche Bildung am Ende der Schullaufbahn* (S. 135–197). Springer VS. https://doi.org/10.1007/978-3-322-83411-9_5

Beck, J., Günster, S., Roos, A.-K., Siller, H.-S., Weigand, H.-G., Kuzniak, A., Nechache, A. & Vivier, L. (2020). Grundvorstellungen zur Ableitung – eine empirische Untersuchung in Frankreich und Deutschland. In H.-S. Siller, W. Weigel & J. F. Wörler (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020* (S. 1321–1324). WTM. https://doi.org/10.17877/DE290R-21222

Borji, V., Font, V., Alamolhodaei, H. & Sánchez, A. (2018). Application of the Complementarities of Two Theories, APOS and OSA, for the Analysis of the University Students' Understanding on the Graph of the Function and its Derivative. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14*(6), 2301–2315. https://doi.org/10.29333/ejmste/89514

Brown, J. S., Collins, A. S. & Duguid, P. (1989). Situated Cognition and the Culture of Learning. *Educational Researcher, 18*(1), 32–42. https://doi.org/10.3102/0013189X018001032

Büchter, A. & Henn, H. W. (2010). *Elementare Analysis: Von der Anschauung zur Theorie*. Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-8274-2680-2

Bürger, H. & Malle, G. (2000). Funktionsuntersuchungen mit Differentialrechnung. *mathematik lehren*, *103*, 56–59.

Danckwerts, R. & Vogel, D. (2006). *Analysis verständlich unterrichten: Mathematik Primär- und Sekundarstufe*. Spektrum.

Döring, N. & Bortz, J. (2016). *Forschungsmethoden und Evaluation* (3. Aufl.). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-41089-5

Dresing, T. & Pehl, T. (2018). *Praxisbuch Interview, Transkription & Analyse: Anleitungen und Regelsysteme für qualitativ Forschende* (8. Aufl.). www.audiotranskription.de/praxisbuch

Elschenbroich, H.-J. (2015). Anschauliche Differentialrechnung mit der Funktionenlupe. *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, *68*(5), 273–277.

Engelbrecht, J., Harding, A. & Potgieter, M. (2000). Undergrate students' performance and confidence in procedural and conceptual mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *36*(7), 701–712.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Reidel.

Feudel, F. (2020). *Die Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler*. Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-26478-9

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V. & Weigand, H.-G. (2016a). *Didaktik der Analysis: Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe.* Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-48877-5

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V. & Weigand, H.-G. (2016b). Aspects and „Grundvorstellungen" of the concepts of derivative and integral: Subject matter-related didactical perspectives of concept formation. *Journal für Mathematik-Didaktik, 37*(1), 99–129. https://doi.org/10.1007/s13138-016-0100-x

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V. & Weigand, H.-G. (2023). Mathematics students' characteristics of basic mental models of the derivative. *Journal für Mathematik-Didaktik, 44*(1), 1–27. https://doi.org/10.1007/s13138-022-00207-9

Griesel, H., vom Hofe, R. & Blum, W. (2019). Das Konzept der Grundvorstellungen im Rahmen der mathematischen und kognitionspsychologischen Begrifflichkeit in der Mathematikdidaktik. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *40*(1), 123–133. https://doi.org/10.1007/s13138-019-00140-4

Hafner, T. (2012). *Proportionalität und Prozentrechnung in der Sekundarstufe I. Empirische Untersuchung und didaktische Analysen*. Vieweg & Teubner. https://doi.org/10.1007/978-3-8348-8668-2

Hahn. S. (2008). *Bestand und Änderung: Grundlegung einer vorstellungsorientierten Differentialrechnung*. Didaktisches Zentrum.

Hahn, S. & Prediger, S. (2008). Bestand und Änderung – Ein Beitrag zur Didaktischen Rekonstruktion der Analysis. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *29*(3/4), 163–198. https://doi.org/10.1007/BF03339061

Hähkiöniemi, M. (2006). *The role of representations in learning the derivative* [Dissertation]. University of Jyväskylä.

Helfferich, C. (2011). *Die Qualität qualitativer Daten: Manual für die Durchführung qualitativer Interviews* (4. Aufl.). Springer VS. https://doi.org/10.1007/978-3-531-92076-4

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knolwedge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Hrsg.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics* (S. 1–27). Erlbaum.

Klinger, M. (2018). *Funktionales Denken beim Übergang von der Funktionenlehre zur Analysis: Entwicklung eines Testinstruments und empirische Befunde aus der gymnasialen Oberstufe*. Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-20360-3

Kollhoff, S. (2021). *Analyse von Transferprozessen in der Entwicklung des Bruchzahlbegriffs: Theoretische Rahmung und empirische Untersuchung*. Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-33981-4

Krummheuer, G. & Naujok, N. (1999). *Grundlagen und Beispiele Interpretativer Unterrichtsforschung*. Springer VS. https://doi.org/10.1007/978-3-322-95191-5

Kuckartz, U. & Rädiker, S. (2022). *Qualitative Inhaltsanalyse. Methoden, Praxis, Computerunterstützung* (5. Aufl.). *Grundlagentexte Methode*. Beltz Juventa.

Lenz, K., Wittmann, G. & Holzäpfel, L. (2019). Aufgaben als Lerngelegenheiten für konzeptuelles und prozedurales Wissen zu Brüchen – Eine vergleichende Schulbuchanalyse. *Mathematica Didactica*, *42*(2), 105–122. https://doi.org/10.18716/ojs/md/2019.1140

Litteck, K., Rolfes, T. & Heinze, A. (2023). Eine empirische Studie zum Erwerb des Ableitungsbegriffs auf Basis der Prozess-Objekt-Dualität. In IDMI-Primar Goethe Universität Frankfurt (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2022. 56. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* (S. 1013–1016). WTM. http://dx.doi.org/10.17877/DE290R-23296

Malle, G. (2000). Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. *mathematik lehren*, *103*, 8–11.

Malle, G. (2003). Vorstellungen vom Differenzenquotienten fördern. *mathematik lehren*, *118*, 57–62.

Moormann, M. (2009). *Begriffliches Wissen als Grundlage mathematischer Kompetenzentwicklung: Eine empirische Studie zu konzeptuellen und prozeduralen Aspekten des Wissens von Schülerinnen und Schülern zum Ableitungsbegriff* [Dissertation]. Ludwig-Maximilians-Universität München. https://doi.org/10.5282/edoc.10887

Müller-Hill, E. (2017). Eine handlungsorientierte didaktische Konzeption nomischer mathematischer Erklärung. *Journal für Mathematik-Didaktik, 38,* 167–208. https://doi.org/10.1007/s13138-017-0115-y

Nagle, C., Moore-Russo, D., Viglietti, J. & Martin, K. (2013). Calculus students' and instructors' conceptualizations of slope: A comparison across academic Levels. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *11*(6), 1491–1515. https://doi.org/10.1007/s10763-013-9411-2

Niedersächsisches Kultusministerium (Hrsg.). (2018). *Kerncurriculum für das Gymnasium - gymnasiale Oberstufe, die Gesamtschule - gymnasiale Oberstufe, das Berufliche Gymnasium, das Abendgymnasium, das Kolleg: Mathematik*. https://cuvo.nibis.de/cuvo.php?p=download&upload=208

Orhun, N. (2013). Assessing conceptual understanding in mathematics. Using derivative function to solve connected problems. *Turkish Online Journal of Distance Education*, *14*(3), 138–151.

Pfeifer, W. (1993). *Etymologisches Wörterbuch des Deutschen* (2. Aufl.). Akademie.

Pielsticker, F., Hoffart, E. & Witzke, I. (2021). Kontextspezifität von Wissen im Mathematikunterricht der Grundschule im Umgang mit neuen Medien. Beobachtungen am Beispiel des Einsatzes der 3D-Druck-Technologie im Geometrieunterricht. *Mathematica Didactica*, *44*(2), 1–21. https://doi.org/10.18716/ojs/md/2021.1218

Prediger, S. (2010). „Aber wie sag ich es mathematisch?“: Empirische Befunde und Konsequenzen zum Lernen von Mathematik als Mittel zur Beschreibung von Welt. In D. Höttecke (Hrsg.), *Entwicklung naturwissenschaftlichen Denkens zwischen Phänomen und Systematik. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik in Dresden* (S. 6–20). LIT.

Prediger, S., Barzel, B., Leuders, T. & Husmann, S. (2011). Systematisieren und Sichern: Nachhaltiges Lernen durch aktives Ordnen. *mathematik lehren*, *164*, 2–9.

Renkl, A. (2015). Wissenserwerb. In E. Wild & J. Möller (Hrsg.), *Pädagogische Psychologie* (S. 3–24). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-41291-2_1

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S. & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology*, *93*(2), 346–362. https://doi.org/10.1037/0022-0663.93.2.346

Rolfes, T. (2018). *Funktionales Denken. Empirische Ergebnisse zum Einfluss von statischen und dynamischen Repräsentationen*. Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-22536-0

Rolfes, T., Roth, J. & Schnotz, W. (2013). Der Kovariationsaspekt von Funktionen in der Sekundarstufe I. In G. Greefrath, F. Käpnick & M. Stein (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013.* (S. 834–837). WTM.

Roth, J. (2005). *Bewegliches Denken im Mathematikunterricht*. Hildesheim: Franzbecker.

Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung: Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *mathematik lehren, 199,* 2–9.

Salle, A. & Clüver, T. (2021). Herleitung von Grundvorstellungen als normative Leitlinien: Beschreibung eines theoriebasierten Verfahrensrahmens. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *42*(2), 553–580. https://doi.org/10.1007/s13138-021-00184-5

Salle, A. & vom Hofe, R. (2020). Graphisch in die Analysis: Transferprozesse bei der Entwicklung des Ableitungs- und Integralbegriffs. *mathematik lehren, 218,* 39–43.

Schneider, M. (2006). *Konzeptuelles und prozedurales Wissen als latente Variablen: Ihre Interaktion beim Lernen mit Dezimalbrüchen* (Dissertation, Technische Universität Berlin).

Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (Hrsg.) (2015). Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife: Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012. https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf

Stölting, P. (2008). *Die Entwicklung funktionalen Denkens in der Sekundarstufe I: Vergleichende Analysen und empirische Studien zum Mathematikunterricht in Deutschland und Frankreich* [Dissertation]. Universität Regensburg & Université Paris Diderot. https://doi.org/10.5283/epub.10725

Tiedemann, K. (2020). Praktiken des Beschreibens – Zu Funktionen der Sprache bei der Erarbeitung des Teilschrittverfahrens im Zahlenraum bis 100. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *41*(1), 11–41. https://doi.org/10.1007/s13138-020-00161-4

Ubuz, B. (2007). Interpreting a graph and constructing its derivative graph: stability and change in students' conceptions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 38(5), 609–637. https://doi.org/10.1080/00207390701359313

vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Springer Spektrum.

vom Hofe, R. & Blum, W. (2016). ‚Grundvorstellungen' as a category of subject-matter didactics. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *37*(1), 225–254. https://doi.org/10.1007/s13138-016-0107-3

Wartha, S. (2007). *Längsschnittliche Untersuchungen zur Entwicklung des Bruchzahlbegriffs*. Franzbecker.

Weber, C. (2007). *Mathematische Vorstellungen bilden: Praxis und Theorie von Vorstellungsübungen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II*. h.e.p. https://doi.org/10.5167/uzh-111439

Weber, E., Retterrath, K. & Bauer, C. (2016). Mit Vollgas in die Differenzialrechnung. *mathematik lehren, 199,* 25–28.

Zandieh, M. J. (1997). *The evolution of student understanding of the concept of derivate*. [Dissertation]. Oregon State University.

Zandieh, M. J. (2000). A theoretical framework for analyzing student unterstanding of the concept of derivative. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld & J. Kaput (Hrsg.), *Research in Collegiate Mathematics Education IV. CBMS Issues in Mathematics Education* (S. 103–127). American Mathematics Society.

Zaslavsky, O., Sela, H. & Leron, U. (2002). Being sloppy about slope: The effect of changing the scale. *Educational Studies in Mathematics, 49*, 119–140. https://doi.org/10.1023/A:1016093305002

Anschrift der Verfasser*innen

Tomma Jetses (geb. Clüver)
Universität Bielefeld
Institut für Didaktik der Mathematik
Universitätsstraße 25
33615 Bielefeld
tomma.jetses@uni-bielefeld.de

Alexander Salle
Universität Bielefeld
Institut für Didaktik der Mathematik
Universitätsstraße 25
33615 Bielefeld
alexander.salle@uni-bielefeld.de

Malte Mikoleit
Universität Osnabrück
Institut für Mathematik
Albrechtstraße 28a
49076 Osnabrück
mmikoleit@uni-osnabrueck.de