

Algebraische Konzepte und ihre Zusammenhänge im Schul- und Hochschulcurriculum verstehen lernen – Design-Prinzipien zur Anregung des Vereinheitlichens mathematischen Wissens im Mathematiklehramtsstudium

LENA WESSEL, PADERBORN & ANNA DELLORI, PADERBORN

Zusammenfassung: Viele Mathematik-Lehramtsstudierende sehen während ihres Studiums kaum Verbindungen zwischen den Inhalten fachmathematischer Lehrveranstaltungen und ihrem späteren Beruf als Mathematiklehrkraft. Wir beschäftigen uns in diesem Beitrag mit theoretischen Ansätzen, um Verbindungen zwischen lokaler und nicht-lokaler Mathematik durch integrierte Lernumgebungen für angehende Lehrkräfte im Inhaltsbereich abstrakter Algebra zu stärken. Dafür werden Design-Prinzipien (Sequenzierung und Darstellungsvernetzung) formuliert sowie initiierte Lernprozesse zu algebraischen Konzepten (Neutralelement und Inverse) im Zusammenspiel mit Vereinheitlichungsprozessen analysiert.

Abstract: Students in teacher education programs at university level often experience lack of connections between the mathematics classes they take and their future mathematics teaching. In this paper, we consider theoretical approaches for minimizing these gaps by strengthening connections between local and non-local mathematics in teaching-learning arrangements of abstract algebra for future teachers. We draw on the design principles (sequencing and relating representations) and analyze initiated learning processes of algebraic concepts from an integrated perspective of unifying.

1. Fachwissen als Lerngegenstand im Mathematiklehramt

1.1 Fachwissen und seine Herausforderungen

Mathematisches Fachwissen als zentraler Lerngegenstand im Mathematik-Lehramtsstudium wird im deutschen Kontext weitestgehend festgelegt in den KMK Standards (KMK, 2019). Mit der Frage, welche Funktionen mathematisches Fachwissen in der Mathematik-Lehramtsausbildung und im späteren Beruf hat, beschäftigen sich Forschende auf theoretischer und empirischer Ebene bereits seit langem (z. B. Shulman, 1986; Blömeke et al., 2015; Überblick für Mathematik bei Hoffmann, 2022). Zur Klärung der professionellen Kompetenz gibt es zum einen Ansätze über Dispositionen und zum anderen über

die Performanz der (zukünftigen) Lehrkräfte. Im Professionsmodell von Blömeke et al. (2015, siehe Abb. 1) wird die Lücke zwischen diesen gegensätzlichen Perspektiven auf die professionelle Kompetenz durch die Prozesse bei der Bewältigung von situationsspezifischen Aufgaben geschlossen.

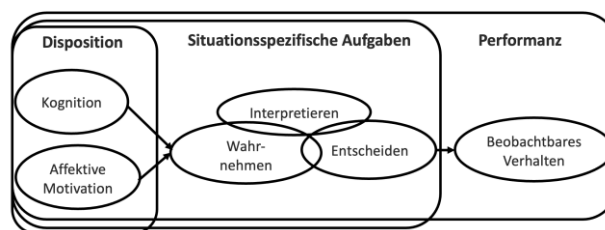


Abb. 1 Professionsmodell nach Blömeke et al. (2015, S. 7)

Als Teil der kognitiven Facette wird das Fachwissen typischerweise als *Content Knowledge* konzeptualisiert (Shulman, 1987) und anderen Facetten, wie z. B. dem Pädagogischen Wissen, gegenübergestellt. Je nach zu Grunde gelegtem theoretischen Modell lassen sich hier weitere Ausdifferenzierungen vornehmen, wie z. B. die feineren Facetten im *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) bei Ball et al. (2008) (genauer in Abschnitt 1.2) oder die Konzeptualisierung des *School-related content knowledge* (Dreher et al., 2018).

Unabhängig von der gröberen oder feineren Konzeptualisierung herrscht Konsens, dass Fachwissen als Teil der Kognition als Ressource für die Bewältigung situationsspezifischer Anforderungen und Aufgaben dient (siehe situationsspezifische Aufgaben bei Blömeke et al., 2015 in Abb. 1). Diese Ressourcenfunktion liefert eines der Argumente für die umfangreichen Studienanteile in Fachmathematik. Mit den genannten theoretischen Konstrukten hat die Kompetenz- und Expertiseforschung zur Lehrkräfteprofession bereits einen wichtigen Beitrag im Diskurs geleistet, denn die Konstrukte können normativ und deskriptiv als Sprach- und Denkmittel in der Diskussion um aktuelle Innovationsfragen und Kohärenzbemühungen (s. u.) herangezogen werden.

Neben dem Aspekt Lerngegenstand zu sein, kann Fachwissen für Studierende des gymnasialen Lehramtsstudiums auch zur Herausforderung in der Studienbewältigung oder Studienidentifikation werden. Die Nicht-Bestehensquoten in vielen Veranstaltungen

gen sind im Vergleich zu anderen Fächern überdurchschnittlich hoch, was gleichermaßen für die überdurchschnittlich hohen Abbruchquoten in Mathematikstudiengängen gilt (Neugebauer et al., 2019). Hinzu kommen Motivations- und Sinnhaftigkeitsherausforderungen, die durch die Entkopplung von späteren Anforderungen im Beruf ausgelöst werden können und die wiederum zum Studienabbruch über alle fachlichen Leistungsniveaus hinweg führen können. Konkret besteht diese (nicht erst jetzt aktuell gewordene) Herausforderung im Mathematik-Lehramtsstudium auch darin, dass Studierende während ihres Studiums wenig bis kaum Verbindungen zwischen den Inhalten fachmathematischer Lehrveranstaltungen und ihrem späteren Beruf als Lehrkraft sehen (Mischau & Blunck, 2006; Ticknor, 2012). Dieses Problem der zweiten Diskontinuität kann dadurch verstärkt werden, dass die universitären Lehrveranstaltungen mit ihren typischen Verortungen in Fachwissenschaft, Fachdidaktik und Bildungswissenschaften den Wissens- und Kompetenzaufbau bei Studierenden in diesen Bereichen häufig getrennt voneinander adressieren (Überblick zur mathematiklehramtspezifischen Kritik in Leuders, 2019). Diese strukturellen Verortungen (für die es z. B. studienorganisatorisch gute Gründe gibt) sind aus lerntheoretischer Perspektive unabhängig vom Fach Mathematik eher ungünstig, da sie zu ungewünschten Trennungen von Wissensbereichen und Wissensarten im Lernprozess führen (van Merriënboer & Kirschner, 2018; für Mathematik diskutiert in Leuders, 2019). Das bei Merriënboer und Kirschner (2018) diskutierte Phänomen der mangelnden Bezugsherstellung wird u. a. von Prediger (2013) aus fachdidaktischer Perspektive beschrieben. Sie fasst zusammen, dass Mathematik-Lehramtsstudierende häufig Schwierigkeiten zeigen, ihr mathematisches Fachwissen als Ressource für (hypothetisches) unterrichtsbezogenes Handeln zu aktivieren.

Prediger (2013) macht weiterhin wie bereits Klein (1908) deutlich, dass Studierende unabhängig von ihrem (fachlichen) Leistungsniveau bei der Aktivierung und Anwendung ihres mathematischen Wissens für fachdidaktisches Handeln gezielte Unterstützung benötigen. Dass diese Unterstützung für Studierende in der Gestaltung von Lerngelegenheiten notwendigerweise mitgedacht werden sollte, ist lernpsychologisch nicht überraschend. In ihrer Instruktionstheorie (4CID) fordern van Merriënboer und Kirschner (2018) deshalb auch die Integration von verschiedenen Wissensbereichen und -arten bei

der Entwicklung von Lerngelegenheiten für professionelles Handeln in komplexen Situationen wie dem Lehrberuf.

In den letzten Jahren wurden diverse Kohärenzbemühungen vorgeschlagen, die sich auf verschiedene Ebenen des Mathematik-Lehramtsstudiums beziehen. Auf Ebene der Lehramtsprüfungsordnungen und Studiengangsorganisation wurden z. B. an einigen Standorten Brückenveranstaltungen im Lehramt eingeführt („Mathematik neu denken“ Beutelspacher et al., 2011; „Einführung in mathematisches Denken und Arbeiten“ Hilgert et al., 2015; u. w. Halverscheid et al., 2022). Auf Ebene einzelner Lehrveranstaltungen oder Aufgabendesigns werden Schnittstellenaufgaben oder Unterrichtsvignetten eingesetzt (z. B. Prediger, 2013; Bauer, 2013; Hoffmann, 2022; zur Typisierung von Schnittstellenaufgaben siehe Weber & Lindmeier, 2022).

Eine zunehmende Anzahl an Innovationen zur Überwindung der zweiten Diskontinuität ist primär im Inhaltsbereich der Analysis oder bezogen auf die Praktik des Beweisens zu beobachten. Hingegen ist der Inhaltsbereich Algebra weniger stark vertreten (mit Ausnahmen wie z. B. Wasserman, 2014). Insgesamt ist bekannt, dass derartige Lehrinnovationen einen Einfluss auf die wahrgenommene doppelte Diskontinuität haben können (Eichler & Isaev, 2023; Weber et al., 2022). Deutlich weniger Klarheit herrscht allerdings darüber, welche Lernprozesse angeregt werden und welche Wirkungen die Lehrinnovationen haben. Es benötigt somit weitere Fokussierung auf themenspezifische sowie lernprozessbezogene empirische Forschung.

In diesem Beitrag fokussieren wir für die beschriebene Forschungslücke auf ausgewählte Inhalte höherer Algebra, denn erstens handelt es sich hierbei um einen typischen Studienanteil des fachlichen Curriculums im gymnasialen Lehramt, für den zweitens empirische Belege für die fehlende Kohärenzwahrnehmung vorliegen (Ticknor, 2012), und für den drittens empirische Vorarbeiten, v. a. auch Entwicklungsforschungsstudien als Grundlage vorliegen (Larsen et al., 2013). Letztere können zur Erforschung der prozessbezogenen Wirkungen adaptiert werden.

1.2 Spezifizierung der Lerngegenstände für Mathematiklehramtsstudierende

Eine Besonderheit der schulischen mathematischen Curricula liegt im spiralförmigen Aufbau der Inhalte. Für die Gestaltung von Mathematikunterricht sollten neue Inhalte stets im Sinne des Spiralprinzips an

Vorwissen und vorherige Inhalte anknüpfen (Bruner, 1996). In der Konsequenz benötigen Mathematiklehrkräfte im Sinne des *Knowledge of Content and Curriculum* (Ball et al., 2008; *curricular knowledge* bei Shulman, 1987) einen fundierten Überblick über die Inhalte der verschiedenen Jahrgangsstufen, deren spezifische Bezüge untereinander sowie in Richtung der erweiterten Curriculumsspirale auf das, was nach der schulischen Mathematik z. B. in einem mathemathikhaltigen Studium folgt (im MKT konzeptualisiert als *Horizon Content Knowledge*, siehe auch Abschnitt 1.2.1). Das Bewusstsein für längsschnittliche Kohärenz (*longitudinal coherence*) betont Ma (2010) als eines von vier zentralen Kriterien für Mathematikprofessionswissen von Lehrkräften auf der Grundlage empirischer Vergleiche des Professionswissens US-amerikanischer und chinesischer Lehrkräfte:

Teachers with PUFM (profound understanding of fundamental mathematics, L.W) are not limited to the knowledge that should be taught in a certain grade; rather, they have achieved a fundamental understanding of the whole elementary mathematics curriculum. With PUFM, teachers are ready at any time to exploit an opportunity to review crucial concepts that students have studied previously. They also know what students are going to learn later, and take opportunities to lay the proper foundation for it (Ma, 2010, S. 104).

Die Frage, inwiefern die konsequente Anbindung an Vorwissen tatsächlich eine Gelingensbedingung für nachhaltigeres Lernen darstellt, ist methodisch hochanspruchsvoll zu untersuchen. Auch aus diesem Grund ist die empirische Datenlage auf Lernenebene hier (noch) eher dünn (Ausnahme z. B. Dhunny & Angateeah, 2019) und es wird auf theoretische Argumentationen zurückgegriffen. Während sich Mas (2010) empirische Untersuchungen auf den Primarstufenunterricht beziehen, zeigt eine qualitative Rekonstruktion im Kontext einer Lehrkräfteprofessionalisierungsstudie, dass es für Mathematiklehrkräfte der Sekundarstufe I mit unterrichtspraktischen Erfahrungen im Schuldienst unterschiedlicher Länge sehr herausfordernd zu sein scheint, curriculare Bezüge zwischen den mathematischen Inhalten verschiedener Schulstufen wahrzunehmen (Rösike, 2021). Weitere Untersuchungen in diesem Professionalisierungskontext weisen darauf hin, dass Entscheidungen tendenziell auf einer kurzfristigen Bewältigungsperspektive und der Orientierung fußen, das unterrichtliche Geschehen kurzfristig so zu steuern, dass alle Lernenden die gestellten Aufgaben bearbeiten können (Überblick in Prediger et al., 2022).

Neben den vertikalen Beziehungen der Inhalte im Spiralcurriculum ist es Konsens, dass Lehrkräfte auch

innerhalb eines Inhaltsbereichs, den sie unterrichten (werden), die Bezüge der jeweiligen Wissensarten und Wissensfacetten zueinander überblicken können müssen. Sie sollten also für einen entsprechenden Begriff über ein adäquates Begriffsnetz verfügen, dass sich aus den verschiedenen Wissensfacetten spinnt. Theoretisch argumentieren Silverman und Thompson (2008) in diesem Zusammenhang für das Kriterium der Vernetzung von Konzepten, mathematischen Ideen und Denkweisen (*connectedness* bei Ma, 2010) als notwendige Bedingung für das Gelingen eines verstehensorientierten Mathematikunterrichts. Dies begründen sie damit, dass ein fachlich korrektes, reichhaltiges Netz von Begriffen, Konzepten, Verfahren, Sätzen und ihren Beweisen eine notwendige Bedingung dafür darstellt, dass eine Lehrkraft in einer Unterrichtssituation fachlich treffsicher handeln kann.

1.2.1 Reshapings des lokalen mathematischen Verständnisses durch nicht-lokale Mathematik

Ball et al. (2008, S. 403) konzeptualisieren *horizon content knowledge* (HCK) u. a. als

awareness of how mathematical topics are related over the span of mathematics included in the curriculum.

Eingeordnet wird *horizon content knowledge* im MKT-Modell zwar in der Facette von Fachwissen, es wird aber gleichzeitig eingeräumt, dass es sich hierbei um einen Einordnungsvorschlag handelt, der weiter empirisch zu untersuchen ist, da *horizon content knowledge* auch quer zu allen anderen Wissensfacetten liegen könnte (Ball et al., 2008). Als Alternative zum *horizon content knowledge* entwickelt Wasserman (2018a) das Konstrukt des *knowledge of non-local mathematics for teaching* zur Theoriebildung im Zusammenhang des Innovierens fachwissenschaftlicher Lehre für Mathematiklehramtsstudierende.

Wasserman (2018a) unterscheidet dafür die lokale von der nicht-lokalen mathematischen Umgebung. Während sich die lokale Umgebung auf diejenigen mathematischen Inhalte bezieht, die eine Lehrkraft unterrichtet bzw. unterrichtet wird (siehe Abb. 2, ausgedrückt durch die Person in der Mitte), ist die nicht-lokale mathematische Umgebung diejenige, die auf zwei Weisen in Relation zum jeweiligen Unterrichtsgegenstand betrachtet wird: einerseits zeitlich (im fachlich-strukturellen und damit für einen Lehramtsstudierenden auch biografischen Sinne) und andererseits fachlich bzgl. ihrer Nähe zueinander („the degree of interdependence between them“ Wasserman, 2018a, S. 118).

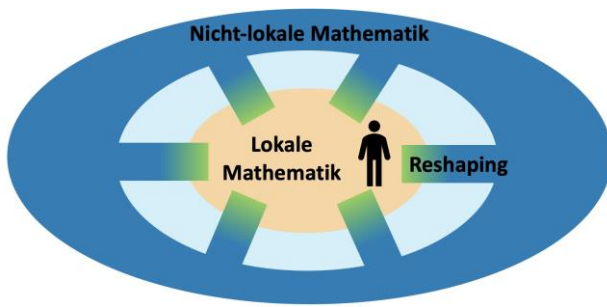


Abb. 2 Mathematische lokale und nicht-lokale Umgebungen (Abbildung nach Wasserman, 2018a, S. 118)

Das bedeutet, dass die mathematischen Umgebungen (lokal und nicht-lokal) jeweils relational vom Unterrichtsgegenstand ausgehend zu sehen sind. Welcher Inhalt folglich innerhalb einer lokalen oder nicht-lokalen Umgebung liegt, ist variabel und in Abhängigkeit vom (hypothetischen) unterrichtlichen Lerngegenstand genauer zu spezifizieren.

Ein Beispiel für den Zusammenhang der lokalen und nicht-lokalen Umgebungen kann am Beispiel der Lösbarkeit einschrittiger Gleichungen und der algebraischen Struktur der Gruppe erläutert werden. Entsprechend des Kernlehrplans werden im Schulunterricht von Klasse 7 einschrittige Gleichungen wie z. B. $x + 12 = 7$ gelöst. Dieser lokale Inhalt (aus der lokalen Umgebung) ist mit dem nicht-lokalen Inhalt der algebraischen Struktur einer Gruppe (aus der nicht-lokalen Umgebung) vernetzt, denn es sind gerade die Gruppenaxiome, die eine eindeutige Lösung der einschrittigen Gleichung erlauben.

Das Potenzial einer stärkeren expliziten Vernetzung lokaler und nicht-lokaler Inhalte in der universitären Lehrkräfteausbildung sieht Wasserman (2018a) im vermuteten *Reshaping* des Verständnisses der lokalen Mathematik von (angehenden) Lehrkräften sowie den damit verbundenen potentiellen Wirkungen auf die Qualität von Unterricht:

helping pre-service and in-service teachers see the *connections* to the local content they (will) teach, especially in ways that fundamentally alter their understanding of that local content, and then providing *explicit ways* that such knowledge might influence their actions as a teacher could help foster the development of nonlocal mathematical knowledge for teaching. (Wasserman, 2018a, S. 127).

Das *Reshaping* mathematischen Verständnisses wird von Serbin (2021) nach Lee (2018) mit den vier Facetten „vertiefen“, „erweitern“, „vereinheitlichen“ und „stärken“ genauer operationalisiert. Hierbei handelt es sich um Prozesse, die im Bereich der Kognition bereits aufgebautes Verständnis auf unterschiedliche Weise verändern können (Lee, 2018):

- In der *Vertiefung* des Verständnisses eines Konzepts im Sinne der Begriffsbildung (z. B. Vertiefung des Konzepts Neutralelement von Prozess zum Objektdenken).
- In der *Erweiterung* der Anwendungsbereiche, in dem das Konzept angewendet werden kann (z. B. Erweiterung des Konzepts des Neutralelements, mit der Identität als Neutralelement der Symmetrieabbildungen).
- In dem *Vereinheitlichen* scheinbar zusammenhangsloser mathematischer Objekte unter einer übergreifenden mathematischen Idee bzw. Konzept (z. B. Vereinheitlichen der Null, Eins und Identität als Neutralelemente).
- In der *Stärkung* der Verbindung zwischen verschiedenen Konzepten (z. B. Stärkung des Zusammenhangs von Neutralelement und Inversen).

Für die Rekonstruktion von Vertiefungsprozessen werden in anderen Studien die Begriffsentwicklungsstufen der APOS-Theorie (Dubinsky, 1991) genutzt. Fokussiert man die Facette des Vereinheitlichen als einen Teilprozess des *Reshapings*, so können zur Beschreibung des Grads des Vereinheitlichen die Entwicklungsstufen von Verbindungen mentaler Objekte nach Piaget und Garcia (1989) herangezogen werden (Lee, 2018; Serbin, 2021). Die Entwicklungsstufen beschreiben verschiedene Grade der hergestellten Verbindungen: Auf der „Intra-Stufe“ liegt noch eine isolierte Betrachtung von Objekten vor; auf der nächsthöheren „Inter-Stufe“ werden erste Gemeinsamkeiten von Objekten erkannt. Die Trans-Stufe beschreibt den höchsten Grad der hergestellten Verbindung, denn in dieser werden Gemeinsamkeiten der Objekte erkannt und aus mathematisch-struktureller Perspektive reflektiert. Die drei Stufen dienen im empirischen Teil der Beschreibung der Vereinheitlichung lokaler und nicht-lokaler Objekte (siehe auch Tab. 2 in Abschnitt

1.2.2 Lehramtsspezifische Spezifizierung von Lerngegenständen in der höheren Algebra

Für den Inhaltsbereich höherer Algebra beschäftigen sich theoretische, eher stoffdidaktische Arbeiten, sowie empirische (Entwicklungsforschungs-)Studien mit Überlegungen zur Relevanz und Umsetzung stärkerer Vernetzung der hochschulischen Inhalte mit schulischen Aspekten (Überblick in Wasserman, 2018b). Neben schulbezogenen Analysen der Zusammenhänge zwischen Schul- und Hochschulalgebra aus theoretisch stoffdidaktischer Perspektive

(Wasserman, 2016; Leuders, 2016) werden Bezüge empirisch rekonstruiert aus der Perspektive von Lehrkräften (Gray, 2021) sowie Mathematiker:innen und Mathematikdidaktiker:innen (Souminen, 2018). Während aus den Antworten von Befragungen innerhalb letzterer Gruppe eine ausführliche, nach Konzepten systematisierte Übersicht möglicher Vernetzungen entstanden ist, zeigen Studien mit Lehramtsstudierenden und Lehrkräften ein anderes Bild: Für Studierende besteht trotz der theoretischen Zusammenhänge tendenziell eine hohe Diskrepanz zwischen Schul- und Hochschulalgebra (Cuoco, 2001, S. 169). Dies kann bei Studierenden die Wahrnehmung verstärken, dass Universitätsveranstaltungen zur höheren Algebra für das spätere berufliche Handeln kaum relevant sind.

Um universitäre Lehre diesbezüglich zu innovieren, rekonstruiert Wasserman (2016) diejenigen algebraischen Konzepte und Themenbereiche höherer Algebra, die mit theoretisch-stoffdidaktischer Argumentation für Mathematikunterricht in der Sekundarstufe besonders relevant zu sein scheinen. Als Ergebnis seiner Analysen nennt er die Inhaltsbereiche „arithmetische Eigenschaften“, „Inverse“, „Strukturen von Mengen“ und „Lösen von Gleichungen“ als besonders relevante Inhalte für Lehrkräfte und somit für Lehrkräfteaus- und -weiterbildung im Bereich der Algebra. Diese Themenliste sowie die von Souminen (2018) rekonstruierten, für schulbezogene Vertiefungen potentiell fruchtbaren fachlichen Inhalte können Lehrende und (Entwicklungs-)Forschende in der Lehrkräfteausbildung leiten, theoretisch fundiert zu entscheiden, welchen Themen aus der Perspektive von Professionsorientierung im Lehramt größere Aufmerksamkeit geschenkt werden sollte.

Zur Frage der empirisch rekonstruierten Lernstände und Lernprozesse bei Studierenden in den genannten Bereichen kann jedoch kaum auf Studien speziell mit Lehramtsstudierenden zurückgegriffen werden. Bezieht man sich auf die empirischen Studien hochschulischer Forschung insgesamt, liefert vor allem Forschung in US-amerikanischen Universitätskontexten Einsichten in typische Lernstände und Schwierigkeiten von Studierenden mit diesen Lerngegenständen, auf die wir im Folgenden detaillierter eingehen.

Gleichungen lösen und Gruppenaxiome

In einer qualitativen Rekonstruktionsstudie mit Studierenden zu Inhalten der Gruppentheorie beobachten Weber und Larsen (2008), dass Studierende häufig Gruppenaxiome unverstanden wiedergeben. Als

Konsequenz wurde eine umfangreiche Entwicklungsforschung zum Lehren und Lernen der Gruppenaxiome mittels eines vorstellungsbasierten Zugangs über Symmetrieabbildungen durchgeführt (Überblick bei Larsen et al., 2013).

Ein weiteres Problem beim Lernen höherer Algebra besteht darin, dass Studierende nicht zwingend auf ihr Wissen der elementaren Algebra aufbauen und deshalb häufig keine zentralen gemeinsamen Ideen der Algebra identifizieren können (Cook, 2012, zitiert nach Souminen, 2018). Um diesem Problem entgegenzuwirken, sollten Lernpfade so strukturiert werden, dass an Vorerfahrungen des Lösens einschrittiger Gleichungen angeknüpft und hieran die Gruppenaxiome herausgearbeitet werden (Wasserman, 2014). Aus fachlicher Perspektive ist dieser Zugang produktiv, da er einen Zugang zu einem äquivalenten Axiomensystem der Gruppe mit dem Lösbarkeitsaxiom liefert (Hilgert et al., 2015). Dies begünstigt die Vorstellung der Gruppe als algebraische Struktur, die das Lösen von Gleichungen ermöglicht. Empirisch hat sich gezeigt, dass dieser Zugang positive Wirkungen auf das Wissen über Strukturen der Mathematik sowie auf Überzeugungen und Praktiken im Zusammenhang mit dem tatsächlichen Unterrichten haben kann (Wasserman, 2014). Als Teilergebnis einer Spezifizierung und Strukturierung des Lerngegenstandes für Lehramtsstudierende kombinieren wir daher in einer Lernumgebung diesen an die Schulalgebra anknüpfenden Zugang zu Gruppenaxiomen über das Lösen von Gleichungen mit vorstellungsbasiertem Arbeiten mit Symmetrieabbildungen (siehe Abschnitt 3).

Aufgrund der Relevanz individueller Bedeutungskonstruktionen für den Aufbau konzeptuellen Verständnisses (Freudenthal, 1991) auch im Bereich höherer Algebra diskutieren wir im Folgenden den Forschungsstand zu mentalen Repräsentation von abstrakten mathematischen Objekten, die wir als Vorstellungen bezeichnen (Prediger, 2008). Es werden zunächst jeweils Vorstellungen zu den einzelnen Konzepten Neutralelement und Inverse vorgestellt. Im Anschluss daran wird auf Vorstellungen der beiden Konzepte im Zusammenhang eingegangen.

Neutralelement

Für das neutrale Element formuliert Leuders (2015) als relevant aufzubauende Vorstellung:

Es gibt ein ‚neutrales Objekt‘, welches bei Verknüpfung die Wirkung aller anderen Objekte nicht beeinflusst. (Leuders, 2015, S. 223)

In der englischsprachigen Literatur wird diese Vorstellung des Neutralelements als „do-nothing-element“ bezeichnet (Serbin, 2023). Die „Keine-Wirkung-Vorstellung“ (<N: Keine Wirkung>)¹ erweist sich als fruchtbar, z. B. bei der Rekonstruktion der Gruppenaxiome aus Erfahrungen mit der Hintereinanderausführung von Symmetrieabbildungen (Larsen, 2013) sowie bei der Bestimmung von inversen Funktionen und Matrizen (Bagley et al., 2015). Ebenfalls kann diese Vorstellung von Neutralelementen produktiv für die Erklärung zur Lösung von Gleichungen genutzt werden. Zudem beschreibt Serbin (2023), dass Studierende das Neutralelement in Zusammenhang mit den Konzepten Binäroperation und Menge beschreiben. Damit ist gemeint, dass die Studierenden bei der Betrachtung des Neutralelements zum einen auf die Menge, aus der das Element kommt, und zum anderen auf die Binäroperation, von der das Neutralelement abhängig ist, fokussieren (Serbin, 2023).

Inverse

Inverse und Inversenbildung gehören nach Piaget (1970) zu den fundamentalen psychologischen Prozessen, die ein Individuum ausüben können sollte (zitiert nach Plaxco, 2015). Für das mathematische Konzept der Inversen arbeiten Cook et al. (2022) mittels eines Literaturreviews drei verschiedene Kategorien von Vorstellungen (im Original „ways of reasoning“ nach Harel, 2008) heraus. Dabei wird sowohl schul- als auch hochschulbezogene Forschung zum Inversenkonzept berücksichtigt.

Erstens können *Inverse als Operation* aufgefasst werden. Hierfür ist kennzeichnend, dass die Operation angewendet wird, um die Wirkung der ursprünglichen Operation umzukehren (<I: Umkehrung>) (Cook et al., 2022). Diese Vorstellung der Umkehrung, z. B. die Subtraktion als Umkehrung der Addition, wird besonders im schulischen Kontext adressiert (Padberg & Wartha, 2017).

Zweitens können *Inverse als Element* aufgefasst werden. Hierfür beschreiben Cook et al. (2022) als ein kennzeichnendes Merkmal, dass bei dieser Sichtweise die Inversen mit einer Prozedur assoziiert werden. Diese Prozedur beschreibt, wie ein gegebenes Element manipuliert werden muss, um das Inverse zu erhalten (Cook et al., 2022). Die inversen Elemente werden als eine Manipulation des ursprünglichen Elements interpretiert (I: <Manipulation>). Die Prozedur ist dabei abhängig von der algebraischen Struktur. Zum Beispiel ist in $(\mathbb{Z}, +)$ das Hinzufügen eines negativen Vorzeichens die assoziierte Prozedur (McGowen & Tall, 2013). Eine zu starke Fokussierung

auf die prozedurale Manipulation birgt die Gefahr, dass die assoziierte Prozedur nicht nur mit den inversen Elementen verknüpft wird, sondern für Studierende die Prozedur gleichzeitig das Konzept darstellt (Wasserman, 2017).

Es ist auch möglich, Inverse als Elemente aufzufassen und dabei die Prozedur der Manipulation nicht vordergründig zu betrachten. Findell (2001) beschreibt, dass es für seine Studierenden natürlich erscheint, immer in Paaren von inversen Elementen zu denken wie z. B. $\{1, 5\}$ in $(\mathbb{Z}_6, +)$ (I: <Paar>). Die Beziehung zwischen dem ursprünglichen Element und dem inversen Element kann einseitig oder beidseitig betrachtet werden. Häufig wird das inverse Element nur einseitig als Gegenteil des ursprünglichen Elements gesehen. Es ist jedoch wünschenswert, dass die Beziehung als wechselseitig wahrgenommen wird (Plaxco, 2015, S. 80).

Drittens können Inverse in Zusammenhang mit Binäroperation und Menge betrachtet werden (Cook et al., 2022). Wird explizit berücksichtigt, dass sowohl das Element als auch das inverse Element in der entsprechenden Menge liegen müssen, wird das Konzept der Inversen im Zusammenhang mit dem Konzept der Menge betrachtet. Entsprechend wird bei einer Fokussierung auf die Abhängigkeit des zugehörigen inversen Elements von der Binäroperation ein Zusammenhang zum Konzept der Binäroperation hergestellt.

Zudem scheint es relevant, auch die Vorstellungen im Zusammenhang von Neutralelement und Inversen zu berücksichtigen (<Zusammenhang N & I>) (Cook et al., 2022; Serbin, 2023). Aus Perspektive der inversen Elemente beinhaltet dies das ausdrückliche Bewusstsein, dass zwei Elemente dann und nur dann zueinander invers sind, wenn ihre Verknüpfung das Neutralelement ergibt (Cook et al., 2022; Leuders, 2015). Aus Perspektive des neutralen Elements wird dieses als Ergebnis der Verknüpfung von zwei zueinander inversen Elementen verstanden (Serbin, 2023). Diesbezüglich beschreibt Serbin (2023) die spezielle Vorstellung des Neutralelements als Ergebnis dessen, was man erhält, nachdem ein Inverses etwas umgekehrt hat. Bei Einordnung dieser Vorstellung in die bisherige Literatur wird das Neutralelement mit der Idee der Umkehrung von Operationen (eine Vorstellung des Inversenkonzepts) koordiniert. Aus diesem Grund klassifizieren wir diese Vorstellung als eine besondere Ausprägung der Vorstellungen zum Zusammenhang von Neutralelement und Inversen.

Im Spiralcurriculum kommen Inverse und Neutralelemente an verschiedenen Stellen immer wieder vor (Greer, 2012; Wasserman, 2016), sodass Lehramtsstudierende und Lehrkräfte mit diesen flexibel und beziehungsreichhaltig umgehen können sollten. Diese Flexibilität bezieht sich zum einen auf die Vernetzung der verschiedenen Vorstellungen nach Cook et al. (2022) und Serbin (2023). Diese postulieren, dass die verschiedenen Vorstellungen eine wichtige Rolle für das Verstehen der Konzepte des Neutralelements und der Inversen über verschiedene algebraische Kontexte hinweg spielen. Zum anderen sollten neutrale Elemente und Inverse aus verschiedenen Zahlbereichen bzw. algebraischen Strukturen (bei Brüchen, bei negativen Zahlen, bei Funktionen etc.) miteinander vernetzt werden. Allerdings hat sich in empirischen Studien gezeigt, dass die Studierenden Schwierigkeiten bei entsprechend diesen Vernetzungen zeigen (z. B. Bagley et al., 2015; Zazkis & Kontorovich, 2016; Wasserman, 2017; Serbin, 2021; Serbin, 2023). Für die Entwicklung von Lernumgebungen bedeutet dies, dass Studierende explizite Lerngelegenheiten zur Vernetzung erhalten sollten.

Für die Spezifizierung von Lerngegenständen im Lehramtsstudium mit besonderen Intentionen des Stärkens von Bezügen in fachlichen Lehrveranstaltungen liegen bislang kaum Studien im Kontext der Mathematiklehramtsausbildung vor, die die ausgelösten Lernprozesse zum Konzept des Neutralelement und Inversen sowie deren Vernetzungen genauer in den Blick nehmen. Die Perspektive auf Lernprozesse ist jedoch notwendig, um Design-Entscheidungen auf Grundlage der Analyse von Wirkungen und Gelingensbedingungen treffen zu können.

Bezogen auf die Lücken theoretisch konsolidierter Design-Prinzipien und damit verbunden der Notwendigkeit zum besseren Verständnis der Gestaltung von Aktivitäten für das integrierte Lernen lokaler und nicht-lokaler Mathematik beschäftigen wir uns daher auf der Ebene der Entwicklungsprodukte mit der Forschungsfrage

- F1. Nach welchen Design-Prinzipien können im Inhaltsbereich höherer Algebra Lernumgebungen zur Anregung von Vereinheitlichungsprozessen (als ein Teilprozess des *Reshapings*) der lokalen durch nicht-lokale Mathematik gestaltet werden?

Parallel ist auf Forschungsebene von Interesse, die initiierten Lehr-Lern-Prozesse der Lehramtsstudierenden besser zu verstehen und beschreiben zu können:

- F2. Welche Prozesse der Vorstellungsentwicklung, insbesondere zum Neutralelement und Inversen, sowie Prozesse des Vereinheitlichens (als Facette des *Reshaping*) können rekonstruiert werden?

Erste Anregungen zur Klärung der Design-Frage (F1) geben Vorarbeiten aus US-amerikanischen Studien. Dort ist der Lehrkontext mit nicht-lehramtsspezifischen Studiengängen zwar etwas anders, aber in ihren Zielen verfolgen die Forschenden ähnliche Interessen und Forschungsfragen, weshalb eine Übertragung auf den deutschen Kontext erfolgsversprechend scheint und im folgenden Abschnitt begonnen werden soll. Der Abschnitt 2 dient daher der Darlegung theoretischer Grundlagen, bevor in Abschnitt 4.1 die logischen Strukturen vorgeschlagener Design-Prinzipien (Prediger, 2019) zusammengefasst und in Abschnitt 4.2 in ihrer Umsetzung diskutiert werden.

2. Ansätze zum Wie: Design-Prinzipien zur Gestaltung integrierter Lernpfade

Dieser Abschnitt gliedert sich nach den theoretischen Fundierungen für den strukturellen Aufbau von Lernumgebungen im Groben (Design auf Makro-Ebene in Abschnitt 2.1) und denjenigen für konkreteres Aufgabendesign im Kleineren auf Mikro-Ebene (Abschnitt 2.2).

2.1 Design auf Makro-Ebene: Prinzip der Sequenzierung zur Strukturierung eines Lernpfads

Zum Aufbau von *knowledge of non-local mathematics for teaching* schlagen Wasserman et al. (2017) ein Instruktionsdesign vor, entlang dessen Lernumgebungen mit Situationen oder konkreten Fragestellungen aus dem schulischen Mathematikunterrichtskontext beginnen. Diese Phase bezeichnen sie als *Building Up*. Ausgehend vom *Building Up* werden in der Phase des *Learning* diejenigen fachmathematischen Inhalte vermittelt bzw. Kompetenzen erworben, die für die Bearbeitung der unterrichtsbezogenen Situation nach theoretischen und stoffdidaktischen Überlegungen relevant und hilfreich sein können. Daran anschließend wird in der Phase des *Stepping Down* wieder zur Unterrichtssituation zurückgekehrt (Erprobte Lernumgebungen zum Beispiel zur Analysis in Wasserman et al., 2017; zur Algebra u. a. in Wasserman, 2018b u. v. a.). Ziel dieses Aufbaus ist es, die Verbindungen zwischen dem Unterrichten schulischer Mathematik, schulischer Mathematikinhalte und der über den lokalen Bereich hinausgehenden hochschulischen Mathematik herzustellen (siehe auch drei Ebenen in Abb. 3).

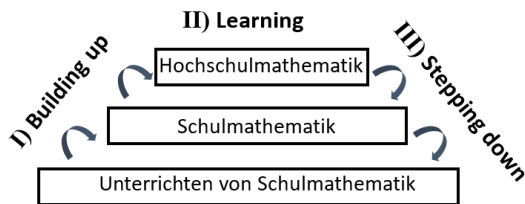


Abb. 3 Instruktionsmodell zur Sequenzierung in Building Up, Learning und Stepping Down (nach Wasserman et al., 2017)

Mit ihrem Instruktionsmodell konkretisiert die Forschendengruppe Überlegungen von Silverman und Thompson (2008) zur Entwicklung von *Mathematical Knowledge for Teaching*, bei dem der Aufbau eines fundierten Verständnisses des schulischen mathematischen Inhalts sowie dessen *Reshaping* intendiert ist (siehe dazu auch Abschnitt 1.2.1).

Diese Sequenzierung von Lernumgebungen kann lehr-lernpsychologisch gestützt werden: Wenn vernetztes Wissen und reichhaltige Verbindungen zwischen Wissensbereichen und Wissensaspekten aufgebaut werden sollen, braucht es explizite Lerngelegenheiten, die diese Verbindungen im hypothetischen Lernpfad mitdenken (van Merriënboer & Kirschner, 2018). Diese Argumentationskette ist lernpsychologisch nicht überraschend, denn Transferprozesse wie die Anwendung theoretisch erworbenen Wissens (z. B. abstrakte hochschulmathematische Begriffe wie der Gruppenbegriff) auf praxisbezogene Anforderungssituationen benötigen explizite und sorgfältig gestufte Lerngelegenheiten, da jedes erworbene Wissen an die Erwerbssituation (i. d. R. also an die fachinhaltliche Lehrveranstaltung) gebunden ist (Brown et al., 1989 zum *situated learning*). In den Phasen des *Building Up* und *Stepping Down* sollte es sich deshalb um authentische, unterrichtsbezogene Handlungsanforderungen als Ausgangs- bzw. Bezugspunkte für die *Learning* Phase handeln. Sie sollen die *Learning* Phase zur nicht-lokalen Mathematik motivieren und dazu beitragen, dass Studierende die Relevanz und Sinnhaftigkeit hochschulischer Inhalte (i. d. R. nicht-lokaler Mathematik) wahrnehmen und in ihrer Anwendung erleben können. Als Kriterien zur Auswahl fordern Wasserman et al. (2019) ebenso wie Prediger (2013), dass es sich um authentische Anforderungssituationen handeln sollte.

Im Inhaltsbereich Algebra rekonstruieren Wasserman und Galarza (2018) die Änderungen von zwei Lehrkräften in ihren Reaktionen auf die unterrichtliche Handlungsanforderung im Vergleich vom *Building Up* und *Stepping Down* in nach dem Sequenzierungsprinzip strukturierten Lernumgebungen. Durch

Kontrastierungen der Reaktionen wurden Änderungen sichtbar gemacht und in vier Typen charakterisiert: (1) die direkte Einbindung von Ideen, die in der Lernumgebung behandelt wurden; (2) eine stärkere Betonung spezifischer mathematischer Ideen; (3) eine stärkere Betonung mathematischer Begründungen; (4) Berücksichtigung zuvor unbehandelter Bezüge.

Zu den weiteren berichteten kognitiven Wirkungen der unterrichtlichen Handlungsanforderung als Ausgangspunkt der Lernumgebungen unterstützen die Interview-Daten von Wasserman und Galarza (2018) die Beobachtung von Prediger (2013), dass explizite Impulse zur Aktivierung des Fachwissens hilfreich scheinen.

Langfristige Wirkungen, also zum Beispiel inwiefern die Chancen auf späteren, unaufgeforderten Transfer des erworbenen Wissens und Könnens in tatsächlichen Unterrichtssituationen mit solchen Lerngelegenheiten erhöht werden können, sind aufgrund der methodischen Herausforderungen kaum untersucht. Die Forschendengruppe um Wasserman untersucht z. B. den Job „Teaching with attention to scope“, also des Explizierens von Gültigkeitsbereichen mathematischer Aussagen im Unterricht, bzgl. der Wirkungen ihres Moduls zur reellen Analysis (Wasserman et al., 2019). Die Triangulation von Interview- und Videodaten nach bzw. aus Unterricht zeigt, dass alle teilnehmenden Studierenden wiederholt im Unterrichtsdiskurs Gültigkeitsbereiche explizieren (mehrfach in einzelnen Unterrichtsstunden und über Stunden hinweg) und zwar über verschiedene Inhaltsbereiche (z. B. Funktionen oder Geometrie). Zudem setzen sie die Praktik vorrangig um, wenn sie mathematische Aussagen präzisieren, den Anwendungs- und Geltungsbereich einer Aussage explizieren oder Grenzen und Ausnahmen für diesen nennen.

2.2 Design auf Mikro-Ebene: Prinzip der lokalen und nicht-lokalen Darstellungsvernetzung

In der mathematikdidaktischen Theorie spielen Darstellungen und Darstellungswechsel vor allem auf Unterrichtsebene eine wichtige Rolle, da sie dem Mathematiklernen in verschiedenen Funktionen dienen. Darstellungen und Darstellungsvernetzungen haben sich als unverzichtbar für den Vorstellungs- und Begriffsaufbau in mathematischen Lehr-Lernprozessen erwiesen (z. B. Lesh, 1979; Duval, 2006). Neue Darstellungen stellen aber gleichzeitig auch immer einen zusätzlichen Lerngegenstand dar (z. B. Goldin & Shteingold, 2001). Es ist somit für ein

spezifisches Thema jeweils didaktisch zu reflektieren, welche Darstellungen im Unterricht eingeführt werden und welche Aktivitäten Lernende im Sinne spezifischer darstellungsbezogener Lernziele mit diesen zu bewältigen haben. Als theoretische Konstrukte für die Beschreibung der kognitiven Aktivitäten erweisen sich Duvals (2006) Unterscheidung von *Treatments* und *Conversions* als hilfreich: Wechsel innerhalb einer Darstellungsebene (bei Duval eines semiotischen Systems), also z. B. von einer grafischen Darstellung in eine andere grafische Darstellung, werden als *Treatments* bezeichnet, wobei der Wechsel zwischen Darstellungsebenen *Conversions* darstellen und für Lernende oftmals eine große Herausforderung darstellen.

Bezogen auf unterrichtsbezogene Anforderungssituationen sind Darstellungswechsel und -vernetzungen darüber hinaus ein wichtiges Diagnoseinstrument z. B. zur Einschätzung von aufgebauten Vorstellungen mathematischer Konzepte. Das Prinzip der Darstellungsvernetzung ist deshalb ein wichtiges didaktisches Unterrichtsprinzip, das in der Lehrkräfteausbildung themenübergreifend und themenspezifisch behandelt wird. Als Design-Prinzip weiten Prediger und Wessel (2011) das Prinzip der Darstellungsvernetzung inklusive der verschiedenen sprachlichen Register aus und beforschen es bezogen auf die Potentiale zur fach- und sprachintegrierten Förderung beim Aufbau fachlicher Vorstellungen. In weiteren Entwicklungsforschungsstudien hat sich das Prinzip zum sprachbildenden Mathematikunterricht auch für andere Themen bewährt, u. a. auch für abstraktere Inhalte der Sekundarstufe II.

In der hochschulischen Mathematikdidaktik zeigt sich die darstellungsbezogene Forschung bislang weniger breit aufgestellt im Vergleich zur Forschung auf Unterrichtsebene. Für die Gestaltung von Diagnoseaufgaben zur Untersuchung des Gradienten-Verständnisses im Mehrdimensionalen nutzen Moreno-Arotzeno et al. (2021) *Treatments* und *Conversions* und erheben mit entsprechenden Test-Items die Kompetenz von Studierenden (verschiedener mathematikhaltiger Studiengänge) zur Bewältigung dieser. Dafür spezifizieren sie zunächst im Detail die verschiedenen grafischen Darstellungen, die sich aufgrund der Mehrdimensionalität ergeben. Dies ermöglicht den Forschenden einerseits eine feinere empirische Rekonstruktion der Kompetenzen zu Darstellungsvernetzungen und leistet andererseits einen Beitrag zur Explizierung und Spezifizierung des fachlichen Lerngegenstandes aus der Perspektive der Darstellungsvernetzung. Letztere wird in hochschulischen Mathematiklehrbüchern zwar implizit

berücksichtigt, aber bislang kaum empirisch beforscht.

Empirische Studien (Hazzan, 2001; Findell, 2001) im Bereich hochschulischen Algebralernens mit einem Fokus auf die Intensivierung von Verstehensorientierung experimentieren zum Beispiel mit der grafischen Darstellung der Operations- und Gruppentafeln. Diese sind dann als durchgängiges Design-Element für die Anregung von *Guided reinvention*-Prozessen zu Konzepten wie Assoziativität, Kommutativität und Gruppeneigenschaften explizit in empirisch erprobten Lehr-Lernmaterialien implementiert (Weber & Larsen, 2008). Sie übernehmen darin vor allem die Unterstützung des Vorstellungsaufbaus, indem algebraische Strukturen über Kontexte hinweg sichtbar gemacht werden. Durch systematisches Untersuchen der Gemeinsamkeiten und Unterschiede kann dies wiederum die Entwicklung abstrakterer Begriffe, wie z. B. den für Studierende häufig konzeptuell herausfordernden Isomorphie-Begriff, unterstützen (Weber & Larsen, 2008).

Über verschiedene Inhalte und Altersstufen hinweg zeigt sich also das Potential von Darstellungsvernetzungen zur Integration von Lernzielen auf verschiedenen Ebenen oder aus verschiedenen Bereichen. Durch das Liften des Prinzips der Darstellungsvernetzung auf hochschulisches Lernen ergeben sich im Kontext der Mathematiklehrkräftebildung zusätzliche Vernetzungsebenen, die in Aktivitäten adressiert werden können: Zur Gestaltung genuin fachmathematischer Lernprozesse können Darstellungsvernetzungen zur Anregung und Unterstützung des verstehensorientierten Lernens dienen. Darstellungen können dabei zusätzlich als verbindende Elemente zwischen lokalen und nicht-lokalen Inhalten dienen und erhalten damit eine Vernetzungsfunktion. Bezogen auf Forschungsfrage (F1) zur Anregung von Vereinheitlichungsprozessen der lokalen durch nicht-lokale Mathematik gehen wir davon aus, dass Vernetzungen lokaler und nicht-lokaler Darstellungen, eine Anregung von *Reshaping*-Prozessen leisten kann und entsprechende Vernetzungsaktivitäten damit zum Aufbau des *non-local knowledge for teaching* fruchtbar gemacht werden können. Unseres Wissens sind diese Vernetzungen für die verschiedenen hochschulischen Lerngegenstände jedoch bislang kaum systematisch empirisch beforscht, noch gibt es ein theoretisches Modell zur Spezifizierung der möglichen Vernetzungen.

In Abb. 4 werden daher die resultierenden Vernetzungsmöglichkeiten zusammengefasst, wenn die Darstellungsebenen (symbolisch, grafisch, verbal) im

Sinne des Modells von Prediger und Wessel (2011) mit den lokalen und nicht-lokalen Umgebungen gekreuzt werden.

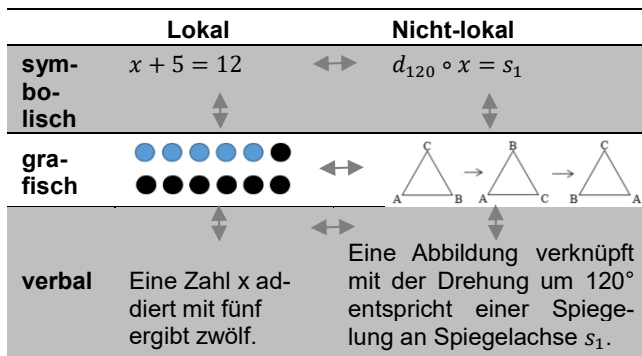


Abb. 4: Mögliche Vernetzungsebenen lokaler und nicht-lokaler Darstellungen am Beispiel

Empirische Studien zum Potential von Darstellungsvernetzungsaktivitäten in der Lehrkräfteausbildung zum Aufbau von *non-local knowledge for teaching* liegen zwar noch nicht vor, betrachtet man im Bereich des hochschulischen Algebralernens jedoch ausgewählte Lehrbücher, so finden sich zum Beispiel bei Leuders (2016) vielfältige, darstellungsreiche Aktivitäten und es werden lokale wie auch nicht-lokale Darstellungen genutzt.

Theoretisch gestützt werden kann der Ansatz durch allgemeine lehr-lerntheoretische Überlegungen zu den kognitiven Aktivitäten beim Kontrastieren und Vergleichen der vielfältigen Darstellungen: Prozesse, in denen Personen Unterschiede und Gemeinsamkeiten analysieren, unterstützen die Explizierung charakteristischer Eigenschaften eines Konzepts (Lipowsky et al., 2019; Gentner, 2010), dies hat positive Wirkungen auf das Lernen (Alfieri et al., 2013).

3. Forschungsdesign und Methoden

3.1 Datenerhebungen und Studienteilnehmende

Das in diesem Beitrag beschriebene Projekt ist verortet im Paradigma lehr-lernprozessorientierter fachdidaktischer Entwicklungsforschung (Prediger & Link, 2012) auf Hochschulebene. Ausgehend von der theoretisch fundierten Spezifizierung und Strukturierung der Lerngegenstände in den integrierten Perspektiven fachlichen Lernens bei gleichzeitiger Verbindung lokalen und nicht-lokalen Wissens wurden drei Lernumgebungen (à 90 Min) entwickelt und erprobt. Eine dieser Lernumgebungen (zum „Gleichungen Lösen“) wird in Kap. 4 detaillierter mit Blick auf die Bearbeitung von Forschungsfrage 1 erläutert.

Bislang sind alle Aktivitäten und Materialien in zwei Zyklen von Design-Experimenten im Laborsetting am Standort Paderborn erprobt worden. Die Entwicklung der Analysekatoren und Tiefen-Auswertungen zur Formulierung lokaler Theorien (Prediger, 2019) bezieht sich auf die Daten aus dem zweiten Erprobungszyklus mit $n = 10$ Studierenden (in Summe 1355 Min. Videomaterial, 420 Min. davon zur Lernumgebung „Gleichungen lösen“). Alle Design-Experimente wurden von der Zweitautorin des Beitrags durchgeführt, videografiert und mit MaxQDA transkribiert. Die Teilnehmenden der Design-Experimente des zweiten Zyklus sind Studierende im Lehramt Gymnasium und Gesamtschule an der Universität Paderborn im ersten bis dritten Semester des *Master of Education*.

Als Ergebnis auf Entwicklungsebene werden in Abschnitt 4.1 die Design-Prinzipien sowie exemplarisch für den Lerngegenstand „Gleichungen lösen“ der entwickelte integrierte Lernpfad und die zugehörigen Lernziele in Abschnitt 4.2. dargestellt. Die Aktivitäten dieser Lernumgebung sind zudem diejenigen, die als Grundlage zur Analyse der initiierten Lehr-Lernprozesse genutzt werden.

3.2 Methoden zur Analyse der Lehr-Lernprozesse

Forschungsfrage (F2) zu initiierten Lehr-Lernprozessen bezieht sich auf das Ziel, Vorstellungen fachlicher Konzepte und ihrer Entwicklungsprozesse mit (potentiell ausgelösten) *Reshaping*-Prozessen in Beziehung zu setzen. Aufgrund der hohen Komplexität konzentrieren wir uns in diesem Beitrag zunächst auf das Vereinheitlichen als eine Facette, sowie auf eine der erprobten Lernumgebungen im Detail. Für diese nutzen wir die Methode der Qualitativen Inhaltsanalyse (Kuckartz & Rädiker, 2022) in einem mehrschrittigen Vorgehen, wobei wir hier die Kategorien der Vorstellungsanalyse bereits auf die Inhalte der Lernumgebung „Gleichungen lösen“ beziehen.

Schritt 1. In der Phase der Sequenzierung werden in den Transkripten Sinnabschnitte gebildet und Paraphrasierungen für die drei Phasen des *Building Up*, *Re-Learning* und *Stepping Down* vorgenommen. Für die jeweils gebildeten Sinnabschnitte werden die individuellen Vorstellungen zu den Konzepten und Vereinheitlichungsstufen kategoriengeleitet, in einem deduktiv-induktiven Vorgehen, in zwei Schritten analysiert:

Vorstellungen Neutralelement		Ankerbeispiele
<N: Keine Wirkung>	Das neutrale Element wird als ein Objekt verstanden, welches bei Verknüpfung die Wirkung aller anderen Objekte nicht beeinflusst.	Wenn du das mit der Identität verknüpfst, erhältst du ja wieder das //etwas// (L1 Gruppe 5 Pos. 384)
Wegfallen	Das neutrale Element wird als ein Symbol betrachtet, welches weggelassen werden kann. Hier wird auf der symbolischen Ebene eines Terms gedacht.	Er hat hier die Identität, die dann wegfällt. (L1 Gruppe 2, Pos. 581)
Vorstellungen Inverse Elemente		Ankerbeispiele
Inverse als Operation		
<I: Umkehrung>	Die Inversen werden als Operation verstanden, die angewendet wird, um den Effekt der ursprünglichen Operation umzukehren.	Das ist einfach, ich spiegel einmal hin, spiegel wieder zurück. (L1 Gruppe 4, Pos. 259)
Inverse als Element		
<I: Manipulation>	Inverse Elemente werden als Elemente aufgefasst, die durch die Manipulation eines ursprünglichen Elements entstanden sind. Damit werden die Inverse als das Ergebnis der Anwendung einer Prozedur verstanden.	Im Grunde genommen, wenn wir jetzt sagen, wir addieren hier immer das Negative drauf, dann haben wir ja quasi eine Regel, wo wir immer sagen, wir addieren immer und nehmen einfach das Neg/ und setzen ein minus davor. (L1 Gruppe 2, Pos. 606)
<I: Paar>	Ein inverses Element wird in Beziehung mit dem ursprünglichen Element betrachtet z. B. als das Gegenteil.	Das Pendant zur fünf für das neutrale Element ist ja minus fünf. (L1 Gruppe 2, Pos. 601)
Vorstellungen zum Zusammenhang Neutralelement und Inverse		Ankerbeispiele
<Zusammenhang N & I>	Der Fokus liegt auf einer gemeinsamen Betrachtung der Inversen und dem Neutralelement, z. B. durch Überlegungen, wie man die Wirkung eines Objektes neutralisieren kann, um das neutrale Element zu erreichen.	Und dann guckt der hier 120 habe ich [...]. Er guckt sich hier an, was brauche ich zur Identität? Nochmal eine Drehung um 240. (L1 Gruppe 1, Pos. 423)
Stufen des Vereinheitlichens		Ankerbeispiele
<Intra-Stufe>	Es liegt eine isolierte Betrachtung der lokalen und nicht-lokalen Konzepte und Objekte vor.	Lokal: Die Null fällt weg. (L1 Gruppe 5, Pos. 87) Nicht-lokal: Mhh. Ja. Ja, dass man die Identität wegfallen lassen kann. (L1 Gruppe 5, Pos. 383)
<Inter-Stufe>	Es werden erste Gemeinsamkeiten der lokalen und nicht-lokalen Konzepte und Objekte erkannt.	Emily: Achso ja. Das/ Identität macht nichts. Steffen: Macht nichts. Ist wie der letzte Schritt //mit der Null// Ja. Emily: //Ist wie plus Null, plus minus Null// (L1 Gruppe 1, Pos. 536-538)
<Trans-Stufe>	Es werden Gemeinsamkeiten der lokalen und nicht-lokalen Konzepte und Objekte erkannt und aus einer mathematisch strukturellen Perspektive reflektiert.	Weil wirklich jeder Schritt ist, dass nur weil man da mit reellen Zahlen rechnet und hier mit Abbildungen, [Emily zustimmend] äh, kann man da nicht genau das Gleiche machen, aber die Struktur von dem, was man macht, ist gleich. Wir suchen uns Inverse. Wir legen unsere Klammern um, [Emily zustimmend] wir rechnen zwei Dinge, verrechnen zwei Dinge miteinander, wir haben die Identität, also einmal die Null und einmal die Identität. (L1 Gruppe 1 Pos. 582)

Tab. 2: Ausschnitt aus dem Codierleitfaden für die Vorstellungen (Neutralelement & Inverse) und das Vereinheitlichen.

Schritt 2a: Analyse der individuellen Vorstellungen: Für diesen Beitrag beschränken wir uns auf die Konzepte zu inversen und neutralen Elementen mit den Analysekatoren in Tabelle 2. Die Kategorien in spitzen Klammern sind zunächst deduktiv aus theoretischen Vorarbeiten (siehe Abschnitt 1.2.2) formuliert und für die Analysezwecke dieses Beitrags angepasst worden. Die induktiv gewonnene Kategorie "Wegfallen" zum Neutralelement wird im späteren Abschnitt 4 schließlich auch mit spitzen Klammern genutzt, um deutlich zu machen, dass es sich um

eine aus den Daten rekonstruierte Kategorie handelt. Die Kategorie <Zusammenhang N & I> ist nicht disjunkt zu den Kategorien zum Neutralelement und Inversen zu sehen, sondern kann mit diesen doppelt codiert werden.

Schritt 2b: Analyse der Vereinheitlichungsprozesse mit drei Stufen des Vereinheitlichens nach Piaget und Garcia (1989): Mit Kodierung der <Intra-Stufe>, <Inter-Stufe> und <Trans-Stufe> können jeweils unterschiedliche Grade von Vereinheitlichungen der behandelten Konzepte operationalisiert werden (siehe Tabelle 2 und Abschnitt 1.2.1).

Schritt 3: Triangulation der Vorstellungsentwicklungen und Analyse der Umstrukturierungsprozesse durch Fallvergleiche und Fallkontrastierungen der Studierendenpaare.

Die genannten kategoriengeleiteten Analyseschritte beziehen sich für die Bearbeitung von (F2) zunächst vorrangig auf die initiierten Lehr-Lern-Prozesse der *Building Up*- und *Re-Learning*-Phasen. Die Aktivitäten und initiierten Prozesse der *Stepping Down*-Phase betrachten wir in Abschnitt 5 dann explorativ und zeigen auf, wie die nächsten Schritte zur systematischen Analyse aussehen können.

4. Design-Prinzipien, intendierte Lernpfade und initiierte Lernprozesse am Beispiel einer Lernumgebung

4.1 Design-Prinzipien und intendierte Effekte

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Bearbeitung der Forschungsfrage auf Entwicklungsebene („Nach welchen Design-Prinzipien können im Inhaltsbereich höherer Algebra Lernumgebungen zur Anregung von Vereinheitlichungsprozessen (als ein Teilprozess des *Reshapings*) der lokalen durch nicht-lokale Mathematik gestaltet werden?). Dazu erläutern wir zunächst jeweils die logische Struktur der beiden, in den Lernumgebungen realisierten Design-Prinzipien (Prediger, 2019 zur logischen Struktur von Design-Prinzipien im Allgemeinen), bevor in Abschnitt 4.2 entsprechende Aktivitäten zur exemplarischen Implementierung diskutiert werden.

Ausgehend von theoretischen und empirischen Analysen zu Zusammenhängen der Hochschul- und Schulalgebra (Gray, 2021; Suominen, 2018) wurden zu den Inhaltsbereichen „Gleichungen lösen“, „Arithmetische Eigenschaften“ und „Inverse und Umkehroperationen“ (Dellori & Wessel, 2023) integrierte Lernumgebungen entwickelt, da sich diese Inhalte als potentiell produktiv für die Anregung von *Reshaping*-Prozessen lokaler mathematischer Inhalte erwiesen haben.

4.1.1 Prinzip der Sequenzierung

Studierende im gymnasialen Lehramt begegnen Gruppeneigenschaften typischerweise in den Studienanfängervorlesungen zur Linearen Algebra. Hinzu kommen Vertiefungs- oder Didaktikseminare, in denen sich die Studierenden im Laufe ihres Studiums mit Gruppen und Gleichungen Lösen in verschiedenen algebraischen Strukturen beschäftigen. Für Studierende im *Master of Education* scheint es deshalb sinnvoll, das Prinzip der Sequenzierung nach Was-

serman et al. (2017) in der Learning Phase zu modifizieren und zu implementieren als „Sequenzierung von Lernumgebungen in einem Drei-Schritt des *Building Up*, (*Re*-)Learning und *Stepping Down*“ (DP1). Die theoretischen Überlegungen und empirischen Erprobungen des Sequenzierungsprinzips in Vorgängerstudien liefern eine Argumentation und Struktur wie in Abb. 5 zusammengefasst:

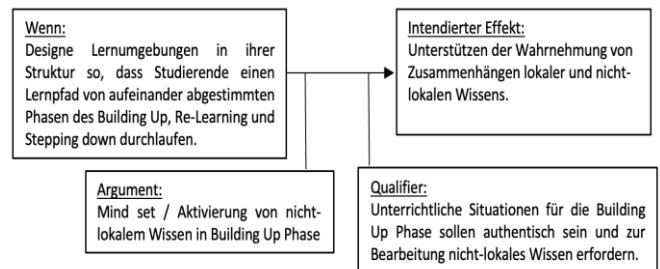


Abb. 5 Logische Struktur Prinzip der Sequenzierung (DP 1)

4.1.2 Prinzip der lokalen und nicht-lokalen Darstellungsvernetzung

Das Prinzip der lokalen und nicht-lokalen Darstellungsvernetzung (DP 2) ergibt sich aus den theoretischen Überlegungen und empirischen Einsichten aus Vorgängerstudien (siehe Kap. 2) und macht sich die verschiedenen Darstellungsebenen (grafisch, symbolisch, verbal) in den lokalen oder nicht-lokalen Umgebungen zu Nutze, um Vereinheitlichungsprozesse anzuregen. Aufforderungen zum Kontrastieren und Vergleichen dienen dabei als theoretisch und empirisch fundiertes Design-Element zur Anregung von Vernetzungsaktivitäten.

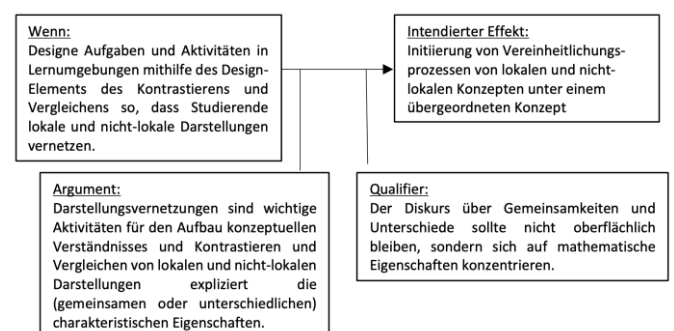


Abb. 6 Logische Struktur Prinzip der lokalen und nicht-lokalen Darstellungsvernetzung (DP 2)

Lernziele	Die Studierenden ...
	<ul style="list-style-type: none"> vereinheitlichen die einzelnen Schritte zum Lösen einfacher linearer Gleichungen als Anwendungen der Gruppenaxiome vereinheitlichen die Elemente Eins & Identität (und weitere Beispiele) unter dem Konzept des Neutralelements vereinheitlichen die Elemente (-5) (neuer Zyklus $\frac{5}{2}$) und d_{240} unter dem math. Konzept der Inversen Elemente vereinheitlichen die Umformungen $(x + 5) + (-5) = x + (5 + (-5))$ (neuer Zyklus $(x \cdot \frac{2}{5}) \cdot \frac{5}{2} = x \cdot (\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2})$) und $d_{240} \circ (d_{120} \circ x) = (d_{240} \circ d_{120}) \circ x$ unter der Eigenschaft der Assoziativität vertiefen ihr Verständnis der fachlichen Konzepte Neutralelement, Inverse Elemente, (Kommutativität und Assoziativität) vertiefen ihr Verständnis der algebraischen Struktur der Gruppe wenden vertieftes Verständnis nicht-lokalen Wissens in einer unterrichtsplanungsbezogenen Anforderungsanalyse an
Aktivitäten im hypothetischen Lernpfad	
Building Up	<ul style="list-style-type: none"> vollziehen eine Lernendenbearbeitung zu $x+5=12$ nach (neuer Zyklus $x \cdot \frac{2}{5} = \frac{5}{3}$) stellen Vermutungen über Gemeinsamkeiten und Unterschiede mit $d_{120} \circ x = s_1$ auf
(Re-) Learning	<ul style="list-style-type: none"> bestimmen die Hintereinanderausführung von Symmetrieabbildungen in einer Gruppentafel vollziehen eine Bearbeitung zu $d_{120} \circ x = s_1$ nach kontrastieren und vergleichen Lösungsschritte beim Gleichungen Lösen stellen Voraussetzungen für das Lösen einer allg. Gleichung $x * a = b$ auf
Stepping Down	<ul style="list-style-type: none"> nehmen Stellung zur Aussage „So viel anders war das gar nicht.“ beurteilen und adaptieren einen Schulbuchauszug zu günstigen Strategien zum Gleichungen lösen

Tab. 3: Überblick zur Lernumgebung „Gleichungen lösen“ (Lernziele und Aktivitäten)

Building Up	(Re)-Learning
Überprüfen Sie auf Korrektheit und beschreiben Sie die Schritte des Lösungsprozesses.	
Julia:	Niklas:
$x + 5 = 12$ $(x + 5) + (-5) = 12 + (-5)$ $x + (5 + (-5)) = 12 + (-5)$ $x + 0 = 12 + (-5)$ $x = 12 + (-5)$ $x = 7$	$d_{120} \circ x = s_1$ $\Leftrightarrow d_{240} \circ (d_{120} \circ x) = d_{240} \circ s_1$ $\Leftrightarrow (d_{240} \circ d_{120}) \circ x = d_{240} \circ s_1$ $\Leftrightarrow id \circ x = d_{240} \circ s_1$ $\Leftrightarrow x = d_{240} \circ s_1$ $\Leftrightarrow x = s_2$
(Re)-Learning	
Sei M eine beliebige Menge mit der Binäroperation $*$: $M \times M \rightarrow M$. Geben Sie Voraussetzungen an, die zum eindeutigen Lösen einer einfachen linearen Gleichung $x * a = b$ mit $a, b \in M$ notwendig sind.	
Stepping Down	
Beurteilen und adaptieren Sie den Merkkasten.	
<p>➤ Günstige Strategie für das Lösen von Gleichungen mit x</p> <ol style="list-style-type: none"> Alle Terme mit x auf eine Seite Alle Terme ohne x auf die andere Seite und zusammenfassen x muss alleine stehen: $x = \blacksquare$ Probe (Neue Wege 7, 2014, S. 170) 	

Abb. 7: Material & Aktivitäten nach Phasen der Sequenzierung

4.2 Realisierung der Design-Prinzipien

Im Folgenden beschreiben wir die Umsetzung der Design-Prinzipien anhand des intendierten Lernpfads zur Lernumgebung „Gleichungen lösen“. Analog wurden für zwei weitere Lernumgebungen („Arithmetische Eigenschaften“ und „Inverse und

Umkehroperationen“) integrierte Lernziele und hypothetische Lernpfade entwickelt, die hier jedoch aus Platzgründen nicht ausführlich dargestellt werden können. Die Lernziele und Aktivitäten im hypothetischen Lernpfad sind in Tabelle 3 aufgelistet (erste Adaptionen für den „neuen“ Erprobungszyklus in Klammern bei ausgewählten Lernzielen). Zur Lernzielformulierung haben sich die *Reshaping*-Facetten nach Lee (2018) als Operatoren bewährt.

In Abbildung 7 stellen wir gekürzt dar, welche konkreten Aufgabenstellungen in den Design-Experimenten (jeweils im Laborsetting mit zwei Studierenden) eingesetzt wurden. Auf diese beziehen sich dann auch die Analysen in Abschnitt 4 und 5.

Auch wenn die Darstellung der Lernziele und Aktivitäten hier vollständig für die drei Phasen der Lernumgebung zum „Gleichungen lösen“ erfolgt, ist eine systematische Analyse der Erreichung anwendungsbezogener Lernziele, d.h. inwiefern die Studierenden ihr erworbenes, nicht-lokales Wissen in der *Stepping Down*-Phase aktivieren, nur in Ansätzen Gegenstand dieses Beitrags (siehe Abschnitt 5).

4.3 Einblicke in initiierte Vorstellungsentwicklungen und Prozesse des Vereinheitlichens

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Forschungsfrage, welche Prozesse der Vorstellungsentwicklungen und Vereinheitlichungen, als ein Teilprozess des *Reshapings*, durch die Aktivitäten der

Lernumgebung initiiert und aus den Transkripten rekonstruiert werden können. Dazu kontrastieren wir die Fälle von Antje und Maja mit Steffen und Emily für die Konzepte der inversen und neutralen Elemente und fokussieren auf die Stufen des Vereinheitlichens als Facette des *Reshapings* (siehe Abschnitt 3).

Der nachfolgende Transkriptausschnitt von Antje und Maja ist ein Zusammenschnitt aus der Bearbeitung der Aktivitäten „Julias Lösung analysieren“ (*Building Up*), Niklas Lösung analysieren“ (*Re-Learning*), „Kontrastieren und Vergleichen“ (*Re-Learning*).

Antje und Maja diskutieren Julias Lösung	
A	Ok. ... Also wir haben zuerst mit .. plus minus fünf
63	eigentlich addiert.
M	Mhm. [<i>zustimmend</i>] Auf beiden Seiten der Gleichung einfach, ne?
64	
A	[...] Einfach nur/ Ja, die Klammern anders gesetzt. .. Aber es ist addieren. Es ist ja eigentlich egal .. wie rum man das macht. Also [...], passt das.
68	
A	[...] die Null wegfallen lassen und dann die rechte Seite erst gelöst.
70	
A 87	Die Null fällt weg.
Antje und Maja diskutieren Niklas Lösung	
A	Mhh. Ja. Ja, dass man die Identität wegfallen lassen kann. ...
383	
M	Ja, wenn du etwas mit der Identität erhältst/ [...]
384	[<i>Antje zustimmend</i>] Wenn du das mit der Identität verknüpfst, erhältst du ja wieder das // [<i>Antje sagt gleichzeitig „x“</i>] // etwas
A	//x//
385	
A	Einfach so, ne? [schreibt " $id \circ x = x$ " hinter die Gleichung]
386	
Antje und Maja kontrastieren und vergleichen Julias und Niklas Lösungen	
M	Kommt da auch sowas rein, wie, weiß ich nicht, so, nein, das neutrale Element? Dass man in beiden Fällen das neutrale Element hat? Bei der/ bei der Addition haben wir ja, ist ja Null das neutrale Element der Addition. [<i>Antje zustimmend</i>] Und bei der Verknüpfung hätten wir ja das, die Identität.
409	
M	//Das wäre ja eine Gemeinsamkeit.// [...]
411	
A	Aber es sind unterschiedliche. ... //
413	
I	Warum würdest du es zu Gemeinsamkeiten packen?
415	
M	Weil / Wir haben ja unterschiedliche, ich sage mal jetzt, Operationen. Sonst könnte man ja auch sagen: Ja, wir haben einmal eine Verknüpfung und wir haben einmal eine konkrete Mathe-Operation, diese Addition. Aber das/ beide haben ja das neutrale Element. Das ist ja eigentlich/ Also für mich ist es halt das Gleiche, nur halt bezogen auf die Rechenoperation, die man hat.
416	

Tab. 4: Antje und Maja

Im Abschnitt #63 bis #87 sprechen Antje und Maja über die von Julia durchgeführten Schritte zum Lö-

sen der Gleichung. Bzgl. der mathematischen Umgebungen befinden sie sich auf lokaler Ebene des hypothetischen Unterrichtsgegenstandes in symbolischer Darstellung. Zum Neutralelement aktiviert vor allem Antje die Vorstellung des <N: Wegfallens> in #70 („die Null wegfallen lassen“) und #87 („Die Null fällt weg“). Maja stimmt Antje diesbezüglich stets zu, formuliert ihre Denkweise jedoch nicht explizit verbalsprachlich.

Der Diskurs in Abschnitt #383 bis #386 bezieht sich auf die nicht-lokale Umgebung des Verknüpfens von Symmetrieabbildungen. Die Umformungen der Gleichungen liegen in symbolischer Darstellung vor. Antje äußert in #383 erneut eine Vorstellung des <N: Wegfallens>, hier jedoch bezogen auf die Identität als Neutralelement der Verknüpfung von Symmetrieabbildungen (#383 „Ja, dass man die Identität wegfallen lassen kann.“). Maja stimmt Antje erneut zu und ergänzt im Denken einer Vorstellung von <N: keine Wirkung>: „Wenn du das [etwas] mit der Identität verknüpfst, erhältst du ja wieder das etwas“ (#384).

Ab #409 sammeln die Studentinnen Gemeinsamkeiten und Unterschiede bezogen auf Julias und Niklas Lösung, also bezogen auf den lokalen Unterrichtsgegenstand und den nicht-lokalen Inhalt der Symmetrieabbildungen. Der schriftlich vorliegende Impuls hierzu lautete: „Welche Gemeinsamkeiten und Unterschiede kann Niklas zwischen seinem Lösungsweg und dem von Julia feststellen?“. Maja fokussiert zunächst auf eine Gemeinsamkeit in #409: „In beiden Fällen das neutrale Element“, „Null (...) bei der Addition und bei der Verknüpfung (...) die Identität“, fügt allerdings später hinzu, dass „es halt das Gleiche [ist], nur halt bezogen auf die Rechenoperation, die man hat“ (#416), wobei sie mit „nur halt bezogen auf die Rechenoperation“ vermutlich über die unterschiedlichen Operationen reflektiert. Dies interpretieren wir aus ihrer Nutzung des „nur halt“ als eine Form der Einschränkung der Gemeinsamkeit.

Bezogen auf die rekonstruierten Vereinheitlichungsprozesse von Antje und Maja wird hier sichtbar, dass beide Studentinnen die Null und die Identität als Neutralelement bezüglich der jeweiligen Operation identifizieren. Während Maja mit ihrer Reflexion der übergeordneten mathematischen Struktur in #416 für das Konzept „Neutralelement“ vereinheitlichtes Wissen auf <Trans-Stufe> zeigt, verbleibt Antje bis zu diesem Zeitpunkt des Lernprozesses mit einem Bewusstsein für Gemeinsamkeiten und Unterschiede auf <Intra-Stufe>.

So wie bei Maja erfolgt die Vereinheitlichung auf <Trans-Stufe> bei vier der fünf Studierendenpaare erst in der Phase des Kontrastierens und Vergleichens. Nur Steffen und Emily stellen ohne den expliziten Anstoß durch die Aufgabenaufforderung eigenständig Zusammenhänge zwischen Aspekten der lokalen und nicht-lokalen Inhalte her, wie der folgende Transkriptausschnitt zeigt (Steffen in #537 und Emily in #538).

Steffen und Emily im Building Up	
S 52	Also beim Ersten hat sie halt rausgefunden, ja identifiziert, was sie da rausbauen muss.
E 67	Die Null //kann sie weglassen.//
S 68	//Die Null ist Null//
E 70	Weil Null ist Null und/
S 71	Ich mach mal plus Null ändert nichts.
Steffen und Emily stellen Beziehungen her	
E 536	Achso ja. Das/ Identität macht nichts.
S 537	Macht nichts. Ist wie der letzte Schritt// mit der Null.// Ja.
E 538	//Ist wie plus Null, plus minus Null.//
Steffen und Emily Kontrastieren & Vergleichen	
S 582	wir haben die Identität, also einmal die Null und einmal die Identität.
S 593	Die Null ist ein neutrales Element bezüglich der Addition. //Und die Identität// ist ein neutrales Element bezügliche dieser Verknüpfung.
E 595	Also das verändert halt quasi nichts, //wenn der die Identität anwendet oder plus minus Null rechnet.

Tab. 5: Steffen und Emily

In #67 rekonstruieren wir für Emily die Vorstellung des <N: Wegfallen> („Die Null kann sie weglassen“). Steffen bringt in #68 zudem einen Bezug zur Null ein, wobei wir hier davon ausgehen, dass er das neutrale Element über die Operation der Addition hinaus mit der Null (im Sinne eines Nullelements) identifiziert und bezeichnet. Weiter aktiviert er in #71 die Vorstellung <N: Keine Wirkung> („plus Null ändert nichts“). In #536 bis #538 wird auch für die Identität die Vorstellung <N: keine Wirkung> aktiviert (Emily in #536 „Die Identität macht nichts“), woraufhin Steffen den Vergleich zu Julias Lösung aus der *Building Up*-Phase zieht: „Ist wie der letzte Schritt// mit der Null“. Angeregt durch die Aktivität des Kontrastierens und Vergleichens fassen Emily und Steffen noch einmal zusammen und vereinheitlichen auf <Trans-Stufe> die Null als „ein neutrales Element bezüglich der Addition“ und „die Identität// ist ein neutrales Element bezüglich dieser Verknüpfung“ (Steffen in #593). Emily expliziert in #595 noch einmal die für beide Fälle gültige Vorstellung <N: keine Wirkung> („Also das verändert halt quasi nichts“).

Für eine typische Vorstellungsentwicklung zum Inversen betrachten wir noch einmal den Prozess von

Antje und Maja. In der *Building Up*-Phase stellt Antje in #63 (s.o.) mit Blick auf Julias Lösung fest: „Ok. ... Also wir haben zuerst mit .. plus minus fünf eigentlich addiert.“ Eine begründete Kategorisierung der Vorstellungen lässt sich zu Beginn des Prozesses noch nicht gut vornehmen. In der *Re-Learning*-Phase beschäftigen sich die beiden dann jedoch intensiv mit dem nicht-lokalen Gegenstand der Verknüpfung von Symmetrieabbildungen in symbolischer und grafischer Darstellung der Verknüpfungstafel. Angeregt durch das Verknüpfen von Spiegelungen stellen sie fest, dass sich „Operationen (...) irgendwie zum Teil gegenseitig aufheben können“ (<I: Umkehrung> bei Antje in #299, bei Maja in #309, siehe Tab. 6). Bezogen auf das Ergebnis der Verknüpfung einer Spiegelung mit derselben Spiegelung stellt Antje an der Verknüpfungstafel außerdem fest, dass sich dabei die Identität ergibt (#308), sodass Antjes Denken hier zusätzlich der Kategorie <Zusammenhang N & I> zugeordnet wird.

Antje und Maja füllen Verknüpfungstafel	
A 299	Ja, dass die Operationen eben dadurch, dass ich, ähm, eigentlich zweimal spiegele, hebt sich das auf. Und dass die sich somit irgendwie zum Teil gegenseitig aufheben können.
A 308	Aber die Spiegelungen zumindest heben sich gegenseitig auf. Deswegen haben wir hier die Identität jeweils in einer Diagonalen einmal.
M 309	Also weil hier haben wir gar keine Identität. [zeigt auf das obere rechte Viertel der Verknüpfungstafel] Es hebt sich vermutlich gar nichts auf.

Tab. 6: Antje und Maja füllen Verknüpfungstafel

Mit Blick auf initiierte Vorstellungsentwicklungen durch die Aktivität des Kontrastierens und Vergleichens der lokalen und nicht-lokalen Gleichungen und Lösungsschritte zeigt sich, dass die Vorstellung der <I: Umkehrung> auch zur Erläuterung von Julias Gleichungsumformungen aktiviert wird, wobei dabei weitere Vorstellungen sichtbar werden (siehe Tab. 7): Antje spricht in #442 davon, „die fünf (...) zu neutralisieren“ bzw. dass „mit der entgegengesetzten Operation“ (rekonstruierte Vorstellung <I: Paar>) gerechnet werden muss, „damit das im Prinzip aufgehoben wird“ (#452). In ihrer Argumentation bzgl. der Gemeinsamkeit, in der Julia und Niklas jeweils ein neutrales Element erreichen wollen (#456: „um eben auf das neutrale Element zu kommen jeweils. Aber in beiden Fällen wird es neutralisiert“), nutzen die beiden Studierenden zudem die Bezeichnungen des „Entgegengesetzten“ (#450) bzw. der „Gegenoperation“ (#456), „Gegenzahl“ (#468) und „entgegengesetzten Abbildung“ (#472). In der Gesamtschau deuten diese Stellen darauf hin, dass Antje und Maja ihre Vorstellungen (<I: Umkehrung>, <I: Paar> und <Zusammenhang N & I>) zu Inversen,

die sie sowohl im lokalen als auch nicht-lokalen Setting zur Deutung der inversen Elemente aktivieren, unter dem übergeordneten Konzept auf <Trans-Stufe> vereinheitlichen. Für Antje (in #468 und #472) gehen wir davon aus, dass sie ihre Vorstellung von Inversen (-(-5) als Gegenoperation im lokalen Kontext) durch die Auseinandersetzung mit der nicht-lokalen Mathematik erweitert und so ein Prozess im Sinne des *Reshapings* stattfinden konnte.

Antje und Maja Kontrastieren & Vergleichen	
A 442	Um die fünf auf der einen Seite, ähm, .. ich sag mal, zu neutralisieren.
M 450	Durch das Entgegengesetzte.
M 452	Und ich muss ja dann mit der entgegengesetzten Operation rechnen, damit das im Prinzip aufgehoben wird.
A 456	Ja, um eben auf das neutrale Element zu kommen jeweils. Aber in beiden Fällen wird es neutralisiert. Man könnte es auch als Gegenoperation bezeichnen
M 457	Nur dass wir, also dass Niklas etwas hinzufügt auf beiden Seiten, damit er auf das Gewünschte kommt. Und zwar auf das neutrale Element.
A 468	Sagt man nicht Gegen/, Nee, Gegenzahl sagt man nicht, ne?
A 470	Also die irgendwie wieder zur, zur Neutralität und damit zur Identität führen. Da wären das die entgegengesetzten Abbildungen.
A 472	Durch, ähm, ein Einfügen der Gegenzahl links beziehungsweise der entgegengesetzten Abbildung rechts.
M 473	Ich habe die Idee von inversen Elementen. Aber ich bin mir gerade nicht so sicher, was das ist.
A 474	Oh ja, so nennt man das. Das inverse Element.

Tab. 7 Antje und Maja beim Kontrastieren und Vergleichen

5. Diskussion und Ausblick

Bevor wir die Ergebnisse aus Abschnitt 4 diskutieren, möchten wir mit einem Blick auf Studierendenbeurteilungen des Merkkastens aus der *Stepping Down*-Phase (siehe Abb. 7) aufzeigen, wie unterschiedlich die Beurteilungen und vorgenommenen Adaptionen dabei sein können bzgl. der Aktivierung und des Einbezugs von Erkenntnissen aus der *Re-Learning*-Phase. Hierbei handelt es sich um eine erste Kontrastierung ohne systematische Kategorisierung, mit dem Ziel, *Reshaping*-Prozesse zu identifizieren. Damit meinen wir im Folgenden Stellen, an denen wir vermuten, dass die Studierenden Wissen aktivieren, das in den Aktivitäten des Vergleichens und Kontrastierens der lokalen und nicht-lokalen Gleichungslösungen funktional aufgebaut wurde zur Bewältigung der spezifischen unterrichtsbezogenen Anforderungssituation des *Stepping Downs*. Wie in Abschnitt 4 betrachten wir wieder die Studierendenpaare Antje und Maja sowie Steffen und Emily.

Antje und Maja ziehen zur Analyse vorrangig fachdidaktisches Wissen heran und kritisieren, dass der Merkkasten kein Beispiel und keine Möglichkeit zur Sicherung des inhaltlichen Denkens (z. B. durch ein Waage-Modell) enthält. In ihrer Diskussion stellen sie wie auch Emily und Steffen fest, dass im Merkkasten nicht darauf eingegangen wird, „wie“ Terme „auf die andere Seite kommen können“. Dieser Aspekt wird in den weiteren Adaptionenüberlegungen unterschiedlich umfangreich bearbeitet. Während Antje und Maja nur kurz andiskutieren, dass sie die Formulierung „indem du die entgegengesetzte Operation verwendest“ ergänzen könnten (dies aber in der Adaption nicht tun), zeigen Steffen und Emily in ihren Überlegungen einen Fokus auf das Operieren mit Elementen und die Vorstellung der <I: Umkehrung> (Steffen in #789, Emily in der Sprechweise des „rückgängig Machens“ in #790).

Steffen und Emily in der Stepping Down-Phase	
S 789	Aber ich sage, ich hier habe ich eine fünf addiert. Ok. Das ist ja irgendeine Operation. Und dann sage ich: Jetzt habe ich die alle. .. Wie werde ich die denn wieder los? Also, kann ich die wieder umkehren? Sind die umkehrbar?
E 790	//Ja. Dass man quasi, quasi wie, wie mache ich das rückgängig
S 791	Dann suche ich mir, also wie/ Immer noch nichts gerechnet. Die [Pause 4 Sek.] Darf ich sagen, die inversen Operationen oder lieber die Umkehroperationen? So die anwenden? Was ist da schöner?

Tab. 8 Steffen und Emily beurteilen den Merkkasten

Für ihre anschließende Adaption gehen Steffen und Emily davon aus, dass der Merkkasten in Abb. 7 zwar für den aktuellen Lerngegenstand (und somit lokalen Inhalt) der einschrittigen Gleichungen „vielleicht“ funktioniere, sich aber nicht als anschlussfähig erweist für spätere Gleichungen lösen in anderen Zahlbereichen (Steffen in #741: „Und dann kommen die irgendwann in die, weiß ich auch nicht, neun oder so. Und dann stehen da auf einmal, steht da x Drittel. Ja. Was mache ich denn jetzt?“).

Als Produkt des Beurteilens und Adaptierens notieren sie schließlich die Schritte in Abb. 8. Damit wollen sie für die Lernenden explizieren, dass diese zunächst die Operation identifizieren und Umkehrungen für „auf x angewandte Operationen“ finden. Hier rekonstruieren wir für Emily und Steffen eine deutliche Denkweise der Inverse als Operation (siehe Abschnitt 1.2.2 und Tab. 2).

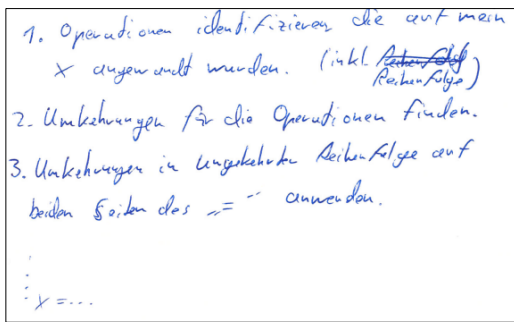


Abb. 8: Adaptierter Merkkasten von Steffen und Emily

Interpretiert man die bei Emily und Steffen besonders gut erkennbare Fokussierung auf Inverse als Operation, die im *Stepping Down* auch bei Antje und Maja rekonstruiert werden konnte, vor dem Hintergrund der vorherigen Aktivitäten des Vergleichens und Kontrastierens von Julias und Niklas Gleichungslösungen, so kann man vermuten, dass die Auseinandersetzung mit den nicht-lokalen Inhalten in der *Re-Learning*-Phase den Aufbau dieses operationsfokussierten Blicks der Studierenden unterstützt haben könnte. In den weiteren Analysen sollen die rekonstruierten Vorstellungen mit *Reshaping*-Prozessen und den Prozessen im *Stepping Down* in Beziehung gesetzt werden, da in dieser Phase Veränderungen im Fachwissen funktional im Sinne eines *non-local knowledge for teaching* werden können.

Für die Gestaltung von Aktivitäten in den *Building Up* und *Re-Learning*-Phasen zeigen die Prozessdaten, dass eine nach den Prinzipien der Sequenzierung und Darstellungsvernetzung designte Lernumgebung zum „Gleichungen lösen“ tatsächlich Prozesse des Vorstellungsaufbaus mit gleichzeitigen Prozessen des *Reshapings* anregen kann. Die ersten Einblicke weisen darauf hin, dass Studierende Wissen aus den lokalen und nicht-lokalen mathematischen Umgebungen in Aktivitäten des Kontrastierens und Vergleichens explizit aufeinander beziehen. Dieses Vereinheitlichen auf Trans-Stufe stärkt einerseits den Grad der *Connectedness* (Ma, 2010) in den Begriffsnetzen der Studierenden und kann so dem Aufbau von *non-local knowledge for teaching* dienen. Die explizite Anregung im Sinne des Design-Prinzips der Darstellungsvernetzung scheint eine wirkungsvolle Unterstützung, da Studierende nicht zwingend selbstständig Vereinheitlichungen auf dem Grad der Trans-Stufe vornehmen. Einschränkend zu berücksichtigen ist dabei allerdings, dass die bisher im Detail analysierten Aktivitäten und Prozesse durch Übergänge auf der symbolischen Darstellungsebene initiiert wurden. Abhängig vom Lerngegenstand könnten sich spezifische Ebenen als besonders relevant erweisen. Darauf deuten erste Auswertungen

zu den Konzepten der Assoziativität und Kommutativität hin. Die Erweiterung des Prinzips der Darstellungsvernetzung um die lokalen und nicht-lokalen Ebenen (siehe Abb. 4) erhält durch diese Studie neben der theoretischen Konsolidierung auch eine empirische Fundierung. Es kann für andere Lerngegenstände (auch in anderen Studiengängen) bei der Gestaltung von Lernumgebungen als ergänzendes Prinzip auf Aufgabenebene herangezogen werden.

Eine flächendeckende Analyse der Vorstellungen und Herausforderungen (typische Fehlvorstellungen) steht zwar noch aus. Das analytische Vorgehen, bei dem zunächst die beiden Ebenen der Vorstellungsentwicklung und des Vereinheitlichens getrennt betrachtet werden, und dann wieder aufeinander bezogen werden, hat sich jedoch in diesem Kontext der algebraischen Inhalte bereits bewährt.

Als Inhalte der weiteren Lernumgebungen sind die Vorstellungsentwicklungen zu den Begriffen der Kommutativität, Assoziativität und Umkehrfunktion noch genauer zu untersuchen. Alle Lernumgebungen werden außerdem auch bezogen auf die initiierten weiteren Facetten des *Reshaping* analysiert (Vertiefen, Erweitern, Stärken, vgl. Lee, 2018), um die Wirkungen der Design-Prinzipien abzusichern und Gelingensbedingungen zu rekonstruieren. Mit diesen Analysen kann dann auch die *Stepping Down*-Phase systematischer in den Blick genommen werden bzgl. der von den Studierenden aktivierten Wissens-elemente für die und bei der Bearbeitung der situationsspezifischen Anforderungssituation.

Mit der noch kleinen, universitätsspezifischen Stichprobe, sowie der Fokussierung der Analysen auf eine Lernumgebung sind weitere Limitationen der Studie zu nennen. Anschließende Erprobungs- und Auswertungszyklen im Sinne der iterativen Entwicklungsforschungszyklen können diese Limitationen adressieren. Sie sind zudem notwendig, um mit empirisch konsolidierten Lehr-Lernmaterialien in Anschlussstudien auch Wirksamkeiten untersuchen zu können, für die in diesem Forschungsfeld aktuell noch das notwendige Verständnis der Wirkungen von Lehr-Designs und entsprechende Erhebungsinstrumente fehlen.

Anmerkungen

¹ Die spitzen Klammern indizieren die spätere Nutzung als Analysekategorien in Abschnitten 3 und 4.

Danksagung

Wir danken den Studierenden für die Teilnahme an den Design-Experimenten sowie den Gutachtenden und Herausgebern für die hilfreichen und konstruktiven Anmerkungen und Kommentare.

Literatur

- Alfieri, L., Nokes-Malach, T. J. & Schunn, C. D. (2013). Learning Through Case Comparisons: A Meta-Analytic Review. *Educational Psychologist*, 48(2), 87–113. <https://doi.org/10.1080/00461520.2013.775712>
- Bagley, S., Rasmussen, C. & Zandieh, M. (2015). Inverse, composition, and identity: The case of function and linear transformation. *The Journal of Mathematical Behavior*, 37, 36–47. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2014.11.003>
- Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Bauer, T. (2013). Schnittstellen bearbeiten in Schnittstellenaufgaben. In C. Ableitinger, J. Kramer & S. Prediger (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung. Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik* (S. 39–56). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-01360-8_3
- Beutelspacher, A., Danckwerts, R., Nickel, G., Spies, S. & Wickel, G. (2011). *Mathematik Neu Denken: Impulse für die Gymnasiallehrerbildung an Universitäten*. Vieweg+Teubner Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-3-8348-8250-9>
- Blömeke, S., Gustafsson, J.-E. & Shavelson, R. J. (2015). Beyond Dichotomies. *Zeitschrift für Psychologie*, 223(1), 3–13. <https://doi.org/10.1027/2151-2604/a000194>
- Brown, J. S., Collins, A. & Duguid, S. (1989). Situated Cognition and the Culture of Learning. *Educational Researcher*, 18(1), 32–42.
- Bruner, J. S. (1996). *The Culture of Education*. Harvard Univ. Press. <https://doi.org/10.4159/9780674251083>
- Cook, J. P., Richardson, A., Strand, S., Reed, Z. & Melhuish, K. (2022). How do students think about inverses across contexts? Theory-building via a standalone literature review. In S. S. Karunakaran & A. Higgins (Hrsg.), *Proceedings of the 24th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (S. 124–134).
- Cullinane, M. J. (2005). Motivating the notions of binary operation and group in an abstract algebra course. *PRIMUS*, 15(4), 339–348. <https://doi.org/10.1080/10511970508984127>
- Cuoco, A. A. (2001). Mathematics for teaching. *Notices of the American Mathematical Society*, 48(2), 168–174. <https://www.ams.org/journals/notices/200102/fea-cuoco.pdf>
- Dellori, A. & Wessel, L. (2023). Entwicklung und Erprobung von professionsorientierten Lernumgebungen zur Wissensvernetzung in der Algebra. In IDMI-Primar Goethe-Universität Frankfurt (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2022. 56. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* (S. 665–668). WTM. <https://doi.org/10.37626/GA9783959872089.0>
- Dhunny, R. H. & Angateeah, K. (2019). Impact of spiral teaching on quadratics: Action research with grade 11 students in Mauritius. In G. Hine, S. Blackley & A. Cooke (Hrsg.), *Proceedings of the 42nd annual conference of the mathematics education research group of Australasia* (Perth: MERGA) (S. 220–227).
- Ding, M., Li, X. & Capraro, M. M. (2013). Preservice elementary teachers' knowledge for teaching the associative property of multiplication: A preliminary analysis. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(1), 36–52. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.09.002>
- Dreher, A., Lindmeier, A., Heinze, A. & Niemand, C. (2018). What kind of content knowledge do secondary mathematics teachers need? A conceptualization taking into account academic and school mathematics. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 39, 319–341. <https://doi.org/10.1007/s13138-018-0127-2>
- Dubinsky, E. (1991) Reflective abstraction in advances mathematical thinking. In D. O. Tall (Hrsg.), *Advanced mathematical thinking* (S. 95–123). Kluwer.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 103–131. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>
- Findell, B. R. (2001). *Learning and understanding in abstract algebra*. University of New Hampshire.
- Gentner, D. (2010). Bootstrapping the mind: analogical processes and symbol systems. *Cognitive Science*, 34(5), 752–775. <https://doi.org/10.1111/j.1551-6709.2010.01114.x>
- Goldin, G. A. & Shteingold, N. (2001). Systems of Representations and the Development of Mathematical Concepts. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Hrsg.), *The Roles of Representation in School Mathematics* (S. 1–13). NCTM.
- Gray, C. (2021). *Exploring Mathematical Connections Preservice Teachers Make Between Abstract Algebra and Secondary Mathematics: Implications for Learning and Teaching* [Dissertation, University of New Hampshire], University of New Hampshire (Bd. 2573).
- Greer, B. (2012). Inversion in mathematical thinking and learning. *Educational Studies in Mathematics*, 79(3), 429–438. <https://doi.org/10.1007/s10649-011-9317-2>
- Hadar, N. & Hadass, R. (1981). Between associativity and commutativity. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 12(5), 535–539. <https://doi.org/10.1080/0020739810120504>
- Halverscheid, S., Kersten, I. & Schmidt-Thieme, B. (2022). *Bedarfsgerechte fachmathematische Lehramtsausbildung. Analyse, Zielsetzungen und Konzepte unter heterogenen Voraussetzungen*. Springer.
- Harel, G. (2008). What is Mathematics? A Pedagogical Answer to a Philosophical Question. In B. Gold & H. Simons (Hrsg.), *Proof and Other Dilemmas* (S. 265–290). Mathematical Association of America.
- Hazzan, O. (2001). Reducing abstraction: The case of constructing an operation table for a group. *The Journal of Mathematical Behaviour*, 20(2), 163–172. [https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(01\)00067-0](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(01)00067-0)

- Hilgert, J., Hoffmann, M. & Panse, A. (2015). *Einführung in mathematisches Denken und Arbeiten: Tutoriell und transparent*. Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-45512-8>
- Hoffmann, M. (2022). *Von der Axiomatik bis zur Schnittstellen-aufgabe: Entwicklung und Erforschung eines ganzheitlichen Lehrkonzepts für eine Veranstaltung Geometrie für Lehramtsstudierende* [Dissertation, Universität Paderborn]. <https://doi.org/10.17619/UNIPB/1-1313>
- Eichler, A. & Isaev, V. (2023). Improving Prospective Teachers' Beliefs About a Double Discontinuity Between School Mathematics and University Mathematics. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 44, 117-142. <https://doi.org/10.1007/s13138-022-00206-w>
- Klein, F. (1908). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Teil I: Arithmetik, Algebra, Analysis*. Teubner.
- KMK (2019). Beschluss der Kultusministerkonferenz: Ländergemeinsame inhaltliche Anforderungen für die Fachwissenschaften und Fachdidaktiken in der Lehrerbildung. Beschluss vom 16.10.2008. Abgerufen unter https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2008/2008_10_16-Fachprofile-Lehrerbildung.pdf
- Körner, H. (2014). *Mathematik neue Wege. Arbeitsbuch für Gymnasien*. 7. Schroedel.
- Kuckartz, U. & Rädiker, S. (2022). *Qualitative Inhaltsanalyse. Methoden, Praxis, Computerunterstützung: Grundlagentexte Methoden* (5. Aufl.). Beltz Juventa.
- Larsen, S. (2010). Struggling to disentangle the associative and commutative properties. *For the Learning of Mathematics*, 30(1), 37–42. <http://www.jstor.org/stable/20749437>
- Larsen, S. (2013). A local instructional theory for the guided reinvention of the group and isomorphism concepts. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32, 712-725. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.04.006>
- Larsen, S., Johnson, E. & Bartlo, J. (2013). Designing and scaling up an innovation in abstract algebra. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(4), 693–711. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.02.011>
- Lee, Y. (2018). *University students' school mathematics understanding and its growth in their learning of collegiate mathematics: Through the lens of a transformative transition framework*. The Pennsylvania State University.
- Lee, Y. & Heid, M. K. (2018). Developing a Structural Perspective and Its Role in Connecting School Algebra and Abstract Algebra: A Factorization Example. In N. Wasserman (Hrsg.), *Research in Mathematics Education. Connecting abstract algebra to secondary mathematics, for secondary mathematics teachers* (S. 291–318). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-99214-3_14
- Lesh, R. (1979). Mathematical learning disabilities. In R. Lesh, D. Mierkiewicz & D. G. Kantowski (Hrsg.), *Applied mathematical problem solving* (S. 111–180). Columbus.
- Leuders, T. (2016). *Erlebnis Algebra*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-46297-3>
- Leuders, T. (2019). Kohärenz und Professionsorientierung in der universitären Lehrerbildung. Hochschuldidaktische Impulse durch das 4C/ID Modell. In J. Kreutz, T. Leuders & K. Hellmann (Hrsg.), *Professionsorientierung in der Lehrerbildung. Kompetenzorientiertes Lehren nach dem 4-Component-Instructional-Design-Modell* (S. 7–24). Springer VS. https://doi.org/10.1007/978-3-658-25046-1_2
- Lipowsky, F., Hess, M., Arend, J., Böhnert, A., Denn, A.-K., Hirstein, A. & Rzejak, D. (2019). Lernen durch Kontrastieren und Vergleichen - Ein Forschungsüberblick zu wirkmächtigen Prinzipien eines verständnisorientierten und kognitiv aktivierenden Unterrichts. *Unterrichtsqualität*, 373-402.
- Ma, L. (2010). *Knowing and teaching elementary mathematics. Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Routledge.
- McGowen, M. & Tall, D. (2013). Flexible Thinking and Met-behaves: Impact on learning mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32, 527–537. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.06.004>
- Mischau, A. & Blunck, A. (2006). Mathematikstudierende, ihr Studium und ihr Fach: Einfluss von Studiengang und Geschlecht. *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 14(1). <https://doi.org/10.1515/dmvm-2006-0022>
- Moreno-Arotzena, O., Pombar-Hospitaler, I. & Barragués, J. I. (2021). University student understanding of the gradient of a function of two variables: an approach from the perspective of the theory of semiotic representation registers. *Educational Studies in Mathematics*, 106(1), 65–89. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-09994-9>
- Neugebauer, M., Heublein, U. & Daniel, A. (2019). Studienabbruch in Deutschland: Ausmaß, Ursachen, Folgen, Prävention. *Zeitschrift Für Erziehungswissenschaft*, 22(5), 1025-1046. <https://doi.org/10.1007/s11618-019-00904-1>
- Padberg, F. & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Bruchrechnung*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-52969-0>
- Piaget, J. & Garcia, R. (1989). *Psychogenesis and the history of science*. Columbia University Press.
- Plaxco, D. (2015). *Relating understanding of inverse and identity to engagement in proof in abstract algebra*. [Dissertation, Virginia Polytechnic Institute and State University]. <https://search.proquest.com/openview/0023a5fc81eea66a8e2fcc561fc5efbc/1?pq-origsite=gscholar&cbl=18750>
- Prediger, S. (2013). Unterrichtsmomente als explizite Lernanlässe in fachinhaltlichen Veranstaltungen: Ein Ansatz zur Stärkung der mathematischen Fundierung unterrichtlichen Handelns. In C. Ableitinger, J. Kramer & S. Prediger (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung: Ansätze zu Verknüpfungen der fachinhaltlichen Ausbildung mit schulischen Vorerfahrungen und Erfordernissen* (S. 151–168). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-01360-8_9
- Prediger, S. (2019). Theorizing in Design Research: Methodological reflections on developing and connecting theory elements for language-responsive mathematics classrooms. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 15, 5–27. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i15.265>
- Prediger, S., Götze, D., Holzäpfel, L., Rösken-Winter, B. & Selter, C. (2022). Five principles for high-quality mathematics teaching: Combining normative, epistemological, empirical, and pragmatic perspectives for specifying the content of

- professional development. *Frontiers in Education*, 7, 969212. <https://doi.org/10.3389/educ.2022.969212>
- Prediger, S. & Link, M. (2012). Fachdidaktische Entwicklungsforschung – Ein lernprozessfokussierendes Forschungsprogramm mit Verschränkung fachdidaktischer Arbeitsbereiche. Formate Fachdidaktischer Forschung. In H. Bayrhuber, U. Harms, B. Muszynski, B. Ralle, M. Rothgangel, L.-H. Schön, H. J. Vollmer & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Empirische Projekte–historische Analysen–theoretische Grundlegungen. Fachdidaktische Forschungen (Bd. 2)* (S. 29–46). Waxmann.
- Prediger, S. & Wessel, L. (2011). Darstellen – Deuten – Darstellungen vernetzen. Ein fach- und sprachintegrierter Ansatz für mehrsprachige Lernende im Mathematikunterricht. In S. Prediger & E. Özdil (Hrsg.), *Mathematiklernen unter Bedingungen der Mehrsprachigkeit – Stand und Perspektiven der Forschung und Entwicklung* (S. 163–184). Waxmann.
- Rösike, K.-A. (2021). *Expertise von Lehrkräften zur mathematischen Potenzialförderung*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-36077-1>
- Serbin, K. S. (2021). *Prospective Teachers' Knowledge of Secondary and Abstract Algebra and their Use of this Knowledge while Noticing Students' Mathematical Thinking*. [Dissertation, Virginia Tech]. <https://vtechworks.lib.vt.edu/handle/10919/104563>
- Serbin, K. S. (2023). Prospective teachers' unified understanding of the structure of identities. *The Journal of Mathematical Behavior*, 70, <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2023.101066>
- Shulman, L. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1–23. <https://doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r5645411>
- Silverman, J. & Thompson, P. W. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(6), 499–511. <https://doi.org/10.1007/s10857-008-9089-5>
- Suominen, A. L. (2018). Abstract Algebra and Secondary School Mathematics Connections as Discussed by Mathematicians and Mathematics Educators. In N. H. Wasserman (Hrsg.), *Connecting Abstract Algebra to Secondary Mathematics, for Secondary Mathematics Teachers* (S. 149–173). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-99214-3_8
- Ticknor, C. S. (2012). Situated learning in an abstract algebra classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 81(3), 307–323. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9405-y>
- Tirosh, D., Hadass, R. & Movshovitz-Hadar, N. (1991). Overcoming overgeneralizations: The case of commutativity and associativity. In F. Furinghetti (Hrsg.), *Proceedings of the Fifteenth Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (S. 310–315).
- Wasserman, N. H. (2014). Introducing Algebraic Structures through Solving Equations: Vertical Content Knowledge for K-12 Mathematics Teachers. *PRIMUS*, 24(3), 191–214. <https://doi.org/10.1080/10511970.2013.857374>
- Wasserman, N. H. (2016). Abstract Algebra for Algebra Teaching: Influencing School Mathematics Instruction. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 16(1), 28–47. <https://doi.org/10.1080/14926156.2015.1093200>
- Wasserman, N. H. (2017). Making Sense of Abstract Algebra: Exploring Secondary Teachers' Understandings of Inverse Functions in Relation to Its Group Structure. *Mathematical Thinking and Learning*, 19(3), 181–201. <https://doi.org/10.1080/10986065.2017.1328635>
- Wasserman, N. H. (2018a). Knowledge of nonlocal mathematics for teaching. *The Journal of Mathematical Behavior*, 49, 116–128. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.11.003>
- Wasserman, N. H. (2018b). *Connecting Abstract Algebra to Secondary Mathematics, for Secondary Mathematics Teachers*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-99214-3_8
- Wasserman, N. H., Fukawa-Connelly, T., Villanueva, M., Mejia-Ramos, J. P. & Weber, K. (2017). Making Real Analysis Relevant to Secondary Teachers: Building Up from and Stepping Down to Practice. *PRIMUS*, 27(6), 559–578. <https://doi.org/10.1080/10511970.2016.1225874>
- Wasserman, N. H. & Galarza, P. (2018). Exploring an Instructional Model for Designing Modules for Secondary Mathematics Teachers in an Abstract Algebra Course. In N. H. Wasserman (Hrsg.), *Connecting Abstract Algebra to Secondary Mathematics, for Secondary Mathematics Teachers* (S. 335–361). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-99214-3_16
- Wasserman, N. H., Weber, K., Fukawa-Connelly, T. & McGuffey, W. (2019). Designing advanced mathematics courses to influence secondary teaching: fostering mathematics teachers' "attention to scope". *Journal of Mathematics Teacher Education*, 22, 379–406. <https://doi.org/10.1007/s10857-019-09431-6>
- Weber, B.-J., Heinze, A. & Lindmeier, A. (2022). Can school-related mathematical problems affect the perceived double discontinuity? In C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez & N. Planas (Hrsg.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 4, S. 314). PME.
- Weber, K. & Larsen, S. (2008). Teaching and Learning Group Theory. In C. Rasmussen & M. P. Carlson (Hrsg.), *Making the Connection: Research and Teaching in Undergraduate Mathematics Education* (S. 139–152). Mathematical Association of America. <https://doi.org/10.5948/UPO9780883859759.012>
- Weber, B. & Lindmeier, A. (2022). Typisierung von Aufgaben zur Verbindung zwischen schulischer und akademischer Mathematik. In V. Isaev, A. Eichler & F. Loose (Hrsg.), *Professionsorientierte Fachwissenschaft. Kohärenzstiftende Lerngelegenheiten für das Lehramtsstudium Mathematik* (S. 95–122). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-63948-1_6
- Wessel, L. & Leuders, T. (2022). Profession-specific curriculum design in mathematics teacher education: Connecting disciplinary practice to the learning of group theory. In R. Biehler, M. Liebendörfer, G. Gueudet, C. Rasmussen & C. Winsløw (Hrsg.), *Practice-oriented research in tertiary mathematics education* (S. 349–368). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-14175-1_17
- van Merriënboer, J. J. G. & Kirschner, P. A. (2018). *Ten steps to complex learning: A systematic approach to four-component instructional design* (3. Auflage). Routledge.
- Zaslavsky, O. & Peled, I. (1996). Inhibiting Factors in Generating Examples by Mathematics Teachers and Student Teachers:

The Case of Binary Operation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(1), 67.
<https://doi.org/10.2307/749198>

Zazkis, R. & Kontorovich, I. (2016). A curious case of superscript (- 1): Prospective secondary mathematics teachers explain. *The Journal of Mathematical Behavior*, 43, 98-110.
<https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.07.001>

Anschrift der Verfasserinnen

Lena Wessel
Universität Paderborn
Institut für Mathematik
Warburger Straße 100
33098 Paderborn
lena.wessel@uni-paderborn.de

Anna Dellori
Universität Paderborn
Institut für Mathematik
Warburger Straße 100
33098 Paderborn
anna.dellori@math.uni-paderborn.de