Das Grundvorstellungskonzept in der Hochschulgeometrie – Eine Diskussion anhand des Konzepts der parallelen Geraden

ANJA FETZER, TÜBINGEN & WALTHER PARAVICINI, TÜBINGEN

Zusammenfassung*: Die Theorie der Grundvorstellungen hat in der deutschen Mathematikdidaktik eine lange Tradition. Trotz umfangreicher Forschung in unterschiedlichen Bereichen der Schulmathematik ist die Rolle der Grundvorstellungen an der Hochschule und insbesondere in der Hochschulgeometrie nicht geklärt. Darum stellt dieser Beitrag Grundvorstellungen zu parallelen Geraden vor und beschreibt sie in unterschiedlichen geometrischen Kontexten (z. B. auf der Sphäre). Hierfür wurden verschiedene Zugänge verwendet. Es zeigt sich, dass die Frage nach der Anschlussfähigkeit von Grundvorstellungen Schwierigkeiten aufdecken kann, denen Studierende beim Übergang von euklidischer zu nicht-euklidischer Geometrie begegnen.*

Abstract*: The theory of „Grundvorstellungen" (engl. GVs) is well established in German research of didactics of mathematics. Besides the broad investigation in different areas of school mathematics, the role of GVs in tertiary education and especially in higher geometry is still an open question. To clarify this issue, we identified GVs for parallel lines using different approaches. This article presents the results focusing on the description of the different GVs in distinct geometric contexts (e.g., on a sphere). It turns out that the question of connectivity of GVs can reveal difficulties students have to face in the transition from euclidean to non-euclidean geometry.*

1. Einleitung

Spätestens seit vom Hofe (1995b) ist der Begriff der Grundvorstellung fester Bestandteil der deutschen Mathematikdidaktik: „Grundvorstellungen beschreiben Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten und dem Phänomen der individuellen Begriffsbildung" (vom Hofe, 1995a, S. 6). Wichtig hierbei sind insbesondere die Sinnkonstituierung, der „Aufbau psychologischer Repräsentation" (vom Hofe, 1995a, S. 6) und die „Fähigkeit zur Anwendung eines Begriffs auf die Wirklichkeit" (vom Hofe, 1995a, S. 6). Grundvorstellungen tragen demnach wesentlich zur Begriffsbildung bei, indem sie dem Individuum ermöglichen, den Kern des mathematischen Inhalts zu verstehen (vom Hofe, 1992).

Während es viele Forschungsbeiträge zu Grundvorstellungen in der Mathematik des Primar- und Sekundarbereichs gibt, lässt sich im Bereich der Geometrie (Sträßer, 2015) sowie im Bereich der Hochschulmathematik (Clüver & Salle, 2020) eine Forschungslücke erkennen.

Zweifelsohne sind ein adäquates Begriffsverständnis und tragfähige Vorstellungen für Lernende der Hochschulmathematik genauso wichtig wie für Schüler:innen, insbesondere beim Arbeiten auf konzeptueller Ebene sowie beim Beweisen (Weber et al., 2020).

Eigenschaften mathematischer Konzepte ändern sich in Abhängigkeit vom mathematischen Kontext. Insbesondere in der Geometrie müssen schon bestehende Konzepte oftmals neu überdacht werden, wenn man die euklidische Geometrie verlässt (Asmuth & Rips, 2006). Studierende müssen, aufgrund der entstehenden Konflikte, ihre bestehenden Vorstellungen und ihr Vorwissen im Sinne des Conceptual Change (Vosniadou & Verschaffel, 2004) hinterfragen und neu organisieren.

Das Wissen über Vorstellungen von Studierenden und Grundvorstellungen kann somit notwendige Umbrüche und mögliche Schwierigkeiten im Lernprozess aufdecken und daher ein Gewinn für die Didaktik der Hochschulgeometrie sein. Der Beitrag zeigt dies am Beispiel des Konzepts der parallelen Geraden auf.

Die Grundvorstellungen für parallele Geraden wurden anhand stoffanalytischer Betrachtungen, der Analyse von Schulbüchern und Vorlesungsskripten, empirischer Ergebnisse und der Betrachtung der Anschlussfähigkeit in verschiedenen geometrischen Kontexten formuliert. Dieser Artikel legt den Fokus auf die Beschreibung der Grundvorstellungen und die Frage nach deren Anschlussfähigkeit in der nicht-euklidischen Geometrie.

2. Theoretischer Hintergrund

2.1 Fachdidaktischer Hintergrund

2.1.1 Grundvorstellungen

Vom Hofe (1992) betrachtet Grundvorstellungen auf *normativer, deskriptiver* und *konstruktiver Ebene*. Auf normativer Ebene wird die Sicht der Lehrperson eingenommen, um anhand der Frage, welche Grundvorstellungen Schüler:innen aufbauen sollten, Leitlinien für die Unterrichtsgestaltung zu formulieren. Demgegenüber wird auf deskriptiver Ebene die Perspektive hin zu den Lernenden gewechselt, um deren individuelle Vorstellungen sowie mögliche Fehlvorstellungen zu analysieren. Auf konstruktiver Ebene wird der Aufbau tragfähiger Grundvorstellungen sowie die Beseitigung möglicher Divergenzen zwischen normativer und deskriptiver Ebene beleuchtet. Solche Divergenzen können entstehen, wenn tatsächliche Vorstellungen der Lernenden nicht mit Grundvorstellungen übereinstimmen (vom Hofe, 1992).

Individuelle Vorstellungen fassen wir nach Bender (1991) als „(innere) anschauliche Repräsentationen eines Objekts, einer Situation, einer Handlung usw., deren sensorische Grundlagen im Langzeitgedächtnis gespeichert sind und die in bewußten Prozessen aktiviert werden“ (Bender, 1991, S. 52). Sie unterscheiden sich von Grundvorstellungen dahingehend, dass sie nicht unbedingt tragfähig sein müssen sowie nicht zwingend den Aspekt der Sinnkonstituierung und den der Anwendung auf die Wirklichkeit erfüllen müssen.

Fehlvorstellungen definieren wir nach Roos (2020) als „Vorstellungen, die von der mathematischen Norm abweichen” (Roos, 2020, S. 33). Fehlvorstellungen können gemeinsam mit den beim Individuum ausgebildeten Grundvorstellungen als Teil der individuellen Vorstellungen gesehen werden.

Ebenso unterscheidet vom Hofe (2014) *primäre* und *sekundäre Grundvorstellungen*. Primäre Grundvorstellungen „haben ihre Wurzeln in gegenständlichen Handlungserfahrungen aus der Vorschulzeit” (vom Hofe, 2014, S. 1267) und somit einen hohen Realitätsbezug. Kinder können primäre Grundvorstellungen zu einem mathematischen Begriff entwickeln, ohne diesen explizit zu kennen (Klinger, 2019). So können sie Vorstellungen zu Parallelität anhand von Alltagserfahrungen, wie z. B. das Aufhängen eines Bilderrahmens, entwickeln. Sekundäre Grundvorstellungen resultieren aus Unterweisung, haben einen abstrakteren Charakter und zielen auf eine innermathematische Sinnkonstituierung „mit Hilfe von mathematischen Darstellungsmitteln […] oder symbolischen Darstellungen” (vom Hofe, 2014, S. 1267). In späteren Publikationen werden primäre Grundvorstellungen weiter gefasst und als solche Grundvorstellungen definiert, „die für das Übersetzen zwischen Mathematik und Realität erforderlich sind“ (Klinger, 2019, S. 65). In diesem Sinne helfen sie beim „Mathematisieren eines realen Modells bzw. beim Interpretieren der mathematischen Ergebnisse in einem Sachzusammenhang“ (Salle & Clüver, 2021, S. 557).

Während das Grundvorstellungskonzept in seinen Anfängen vor allem auf sehr grundlegende Inhalte der Mathematik, die bereits zu einem frühen Zeitpunkt gelernt werden, angewandt wurde, erweiterte sich der Anwendungskontext und damit einhergehend das Konzept selbst im Laufe der Zeit (vom Hofe, 1992). So schafften Greefrath et al. (2016) einen umfangreichen Beitrag zu Grundvorstellungen zu elementaren Begriffen der Analysis in der Sekundarstufe II.

2.1.2 Grundvorstellungen in der Hochschule

Neue Forschungsperspektiven sind aktuell Grundvorstellungen in der Hochschulanalysis (z. B. Clüver & Salle, 2020; Roos, 2020). Clüver und Salle (2020) verweisen darauf, dass „in Bezug auf das Mathematiklehren und -lernen an der Hochschule […] die Rolle des Grundvorstellungskonzeptes […] bislang weitestgehend ungeklärt [ist]” (Clüver & Salle, 2020, S. 1329).

Gleichzeitig argumentieren sie für die Bedeutsamkeit des Grundvorstellungskonzepts in der Hochschulanalysis, die sich aus dem Vorwissen und den Vorstellungen, die Studierende aus der Schulzeit mitbringen, und die Einfluss auf den Lernprozess an der Hochschule haben, ergibt: „Zusammenfassend besteht weitestgehend Einigkeit darüber, dass in der Schulzeit aufgebaute Vorstellungen – und damit auch Grundvorstellungen – die im concept image verankert sind, eine Rolle beim Lernen von Analysis an der Hochschule spielen” (Clüver & Salle, 2020, S. 1330).

Hierbei meint *concept image* „the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and structures” (Tall & Vinner, 1981, S. 152). In Abgrenzung dazu ist die *concept definition* eine sprachliche, d. h. in Wörtern ausgedrückte, Spezifizierung des Konzepts. Diese kann vom Lernenden anhand einer Definition selbst rekonstruiert sein (*personal concept definition*) oder ihm vorgegeben werden (Tall & Vinner, 1981). Die *personal concept definition* ist demnach ein „Ausdruck in Form von Wörtern des eigenen (Evoked) Concept Image zum spezifischen Zeitpunkt der Verbalisierung bzw. Verschriftlichung der Definition“ (Klinger, 2019, S. 68). Grundvorstellungen stehen nach Klinger (2019) insofern mit der Theorie von *concept image* und *concept definition* in Zusammenhang, als dass sie aufgefasst als mentale Repräsentationen auf deskriptiver Ebene im *concept image* verankert sind. Das heißt, beim Lernenden ausgebildete Grundvorstellungen gehören zur mit einem Konzept assoziierten kognitiven Struktur und sind somit Teil des *concept images*.

Roos (2020, S. 22f) sieht die Relevanz im dynamischen Aspekt der Grundvorstellungen, der im Übergang von Schule zu Hochschule durch Erweiterung der mathematischen Gebiete und der damit einhergehenden Verallgemeinerung von Konzepten besonders zum Tragen kommt. Gemeint ist damit, dass sich die Tragfähigkeit von Vorstellungen und damit die Grundvorstellungen je nach mathematischem Kontext und je nach Zielgruppe dynamisch verändern. Dabei betrachtet Roos (2020) die Relation des mathematischen Bereichs und des Gültigkeitsbereichs und führt daraus resultierend die Begriffe der *partiellen* und *allgemeinen Grundvorstellung* ein (Roos, 2020, S. 24). Partielle Grundvorstellungen sind „Grundvorstellungen, die einschränkende Voraussetzungen im betrachteten Anwendungsbereich haben” (Roos, 2020, S. 24), wohingegen allgemeine Grundvorstellungen „im betrachteten Anwendungsbereich ohne weitere Voraussetzungen gültig sind” (Roos, 2020, S. 24). Die Bezeichnungen sind relativ zum betrachteten Themengebiet: Was in der Schulmathematik eine allgemeine Grundvorstellung ist, kann in einem Kontext der Hochschulmathematik nur noch partiell gültig sein (Roos, 2020, S. 23 f.). Gerade dieser Wechsel von allgemeiner zu partieller Grundvorstellung erfordert von Lernenden das Überdenken und Anpassen der eigenen Vorstellung und kann somit eine Herausforderung im Lernprozess darstellen (Roos, 2020, S. 26f).

Die bisherige Forschung zu Grundvorstellungen in der Hochschule beschränkt sich auf die Analysis. Die angeführten Punkte für die Relevanz des Konzepts gelten aber gleichermaßen für die Geometrie.

2.1.3 Grundvorstellungen in der Geometrie

Sträßer (2015) begründet die besondere Relevanz von Grundvorstellungen in der Geometrie unter Verweis auf die „Bedeutung der Geometrie für das Individuum” (Sträßer, 2015, S. 6) und die „gesellschaftlich relevanten Anwendungsfelder” (Sträßer, 2015, S. 6). Geometrische Grundbegriffe finden sich im Alltag und der Lebenswelt des Individuums wieder und sind somit in die menschliche Erfahrung eingebettet. Daraus ergibt sich die Notwendigkeit, die inhaltliche Bedeutung der Grundbegriffe zu klären, was zu Grundvorstellungen führt. Grundvorstellungen unterstützen die Sinnkonstituierung und verdeutlichen somit den gesellschaftlichen Nutzen der Geometrie (Sträßer, 2015, S. 7f). Auch Filler und Lambert (2013) verweisen auf den „zentrale[n] Stellenwert der Herausbildung von Grundbegriffen und Grundvorstellungen” (Filler & Lambert, S. 34). Dem entgegen steht der Mangel an Forschung in diesem Bereich (Sträßer, 2015, S. 9). Mitursache hierfür könnten die Schwierigkeiten sein, die sich beim Identifizieren bzw. Formulieren von Grundvorstellungen zu geometrischen Themen ergeben, weil die Grenze zwischen Grundvorstellung und dem geometrischen Konzept selbst aufgrund der schon vorhandenen Anschauung verschwimmt (Ludwig et al., 2015, S. V).

Einen umfassenden Überblick mit Beiträgen verschiedener Autor:innen zu Grundvorstellungen in der Geometrie sammeln Ludwig et al. (2015). Ullmann (2015) etwa beschreibt Grundvorstellungen zur Schulgeometrie an sich und nicht zu einzelnen geometrischen Konzepten, die dabei helfen können, die Frage nach dem Sinn der Schulgeometrie zu beantworten; z. B. „Geometrie als Schule des rechten Sehens“ (Ullmann, 2015, S. 17). Für Winkel (Dohrmann & Kuzle, 2014, 2015), Kreise und Kugeln (Henn & Filler, 2015; Rembowski, 2015), Würfel (Rembowski, 2015), Tangente (Biza et al., 2008) sowie gleichschenklige und rechtwinklige Dreiecke (Roth, 2011) bestehen Beschreibungen von Grundvorstellungen. Henn und Filler (2015) gehen der Frage nach, wie Grundbegriffe wie „Punkt” oder „Gerade” in Schulbüchern definiert werden (Henn & Filler, 2015, S. 152ff) und bezeichnen dies als „Grundvorstellungen von Basisobjekten der Geometrie“ (Henn & Filler, 2015, S. 152). In Roth (2012) wird eine Unterrichtseinheit vorgestellt, die dazu führen soll, dass die Schüler:innen „Grundvorstellungen zu Begriffen geometrischer Körper aufbauen” (Roth, 2012, S. 13). Welche Grundvorstellungen das aber genau sein sollen, bleibt offen. Zählt man das Konzept der Vektoren zur Geometrie, so lassen sich hier einige Beiträge finden (Henn & Filler, 2015, S. 8f; Kaufmann, 2021; Mai et al., 2017). Der Fokus von Kaufmann (2021) z. B. liegt auf der Identifikation individueller Vorstellungen zu den Konzepten „Gerade”, „Vektor” und „Vektorgleichung”. Mai et al. (2017) identifizieren ebenfalls Vorstellungen zu Vektoren, nutzen hierbei aber nicht den Begriff der Grundvorstellung, sondern den der concept definition. Hattermann (2015) beschäftigt sich mit Grundvorstellungsumbrüchen beim Übergang zur 3D-Geometrie, wobei er explizit auf Grundvorstellungen zum Kreis und zur Lotgeraden eingeht. Dieser Zugang ist besonders dahingehend interessant, dass der Übergang von 2D zu 3D und die damit einhergehenden Umbrüche eventuell Ähnlichkeiten zum Übergang von euklidischer zu nicht-euklidischer Geometrie aufweisen.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass Forschung zu Grundvorstellungen in der Geometrie nicht so systematisch vorangetrieben wurde wie z. B. in der Analysis. Die meisten der oben genannten Beiträge haben gemein, dass Grundvorstellungen häufig ohne Verweis auf deren Herleitung aufgeführt werden. Begründungen sind meist fachmathematischer Art, d. h., eine Vorstellung kann Grundvorstellung genannt werden, da sie einen mathematischen Sachverhalt mathematisch korrekt darstellt (z. B. Roth, 2011).

2.2 Die hochschulmathematischen Kontexte

In der Geometrie, wie sie an der Hochschule gelehrt wird, ist ein zentraler Anspruch an den Begriff der Parallelität von Geraden, dass er sich in einer Vielzahl unterschiedlicher mathematischer Kontexte bewährt. In der sphärischen, hyperbolischen oder projektiven Geometrie aber sind Begriffe wie Winkel oder Abstand, die euklidischen Eigenschaften paralleler Geraden zu Grunde liegen, nicht mehr sinnvoll interpretierbar. Wir skizzieren hier kurz einige wichtige dieser mathematischen Kontexte, um danach die Tragfähigkeit der unterschiedlichen Vorstellungen zu Parallelität an diesen Kontexten messen zu können. Bei der Darstellung konzentrieren wir uns dabei teilweise auf paradigmatische Beispiele und verzichten auf größere Allgemeinheit[1].

Die Auswahl der Kontexte orientiert sich dabei an zentralen Themen von Geometrievorlesungen an deutschen Universitäten, die sich (auch) an Studierende des gymnasialen Lehramts richten. Hierzu haben wir Skripte einschlägiger Vorlesungen (Berchtold, 2016; Kasten & Vogel, 2017; Paravicini, 2021; Radloff, 2020) und prominent veröffentlichte deutschsprachige Bücher (Agricola & Friedrich, 2015; Berchtold, 2017; Eschenburg, 2020) für solche Vorlesungen aus den letzten Jahren analysiert, bis eine theoretische Sättigung der auftretenden geometrischen Kontexte eingetreten ist.

Aus der linearen Algebra heraus liegt es nahe, Geraden als eindimensionale affine Untervektorräume im $\mathbb{R}^n$ zu betrachten; eine Gerade g ist also gegeben durch

$$g = v_0 + \mathbb{R}v,$$

wobei $v_0 \in \mathbb{R}^n$ und $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist. Hierbei bezeichnet man den Vektor v als Richtungsvektor.

In diesem Zusammenhang nennt man zwei Geraden *parallel*, wenn ihre Richtungsvektoren linear abhängig voneinander sind (wenn die Gerade „dieselbe Richtung haben“). Hierbei ist insbesondere der Fall $n = 2$ interessant; dieser wird auch *affine (Koordinaten-)Ebene* über $\mathbb{R}$ genannt (vgl. Abb. 1).

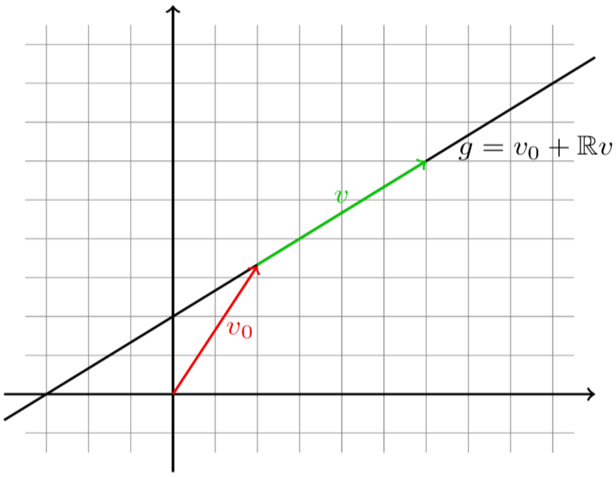

Abb. 1: Gerade als eindimensionaler affiner Untervektorraum in affiner Koordinatenebene über R.

Die affine Ebene ist ein Beispiel einer *Inzidenzebene*: Die darin liegenden Punkte und Geraden erfüllen die Inzidenzaxiome:

(I_1) Durch je zwei verschiedene Punkte verläuft genau eine Gerade.

(I_2) Auf jeder Geraden liegen mindestens drei Punkte.

(I_3) Es gibt mindestens drei Punkte, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

Jede Menge von Punkten und Menge von Teilmengen davon, welche wir Geraden nennen und welche den obigen Axiomen gehorchen, heißt schon Inzidenzebene. Auch in dieser „verarmten“ Struktur kann man einen Begriff von Parallelität definieren:

Sind g und h Geraden einer Inzidenzebene, so nennen wir sie *parallel*, wenn $g = h$ gilt oder g und h keinen gemeinsamen Punkt haben.

Man kann ohne großen Aufwand einsehen, dass für die affine Koordinatenebene von oben die beiden diskutierten Parallelitätsbegriffe zusammenfallen. Mehr noch: In der affinen Koordinatenebene gilt das folgende Axiom (P), welches die gebräuchlichste Form des *Parallelenaxioms* ist:

(P) Ist g eine Gerade und P ein Punkt, so gibt es genau eine Gerade h, welche parallel zu g ist und durch P verläuft (vgl. Abb. 2.)

In einer Inzidenzebene, in welcher dieses Axiom

(P) gilt, ist Parallelität von Geraden eine Äquivalenzrelation. Die zugehörigen Äquivalenzklassen nennen wir *Parallelenbündel* – jedes dieser Bündel können wir (abstrakt) als *Richtung* der enthaltenen Geraden interpretieren. In diesem Sinne ist der Begriff der Richtung einer Geraden mit dem Parallelenaxiom verknüpft.

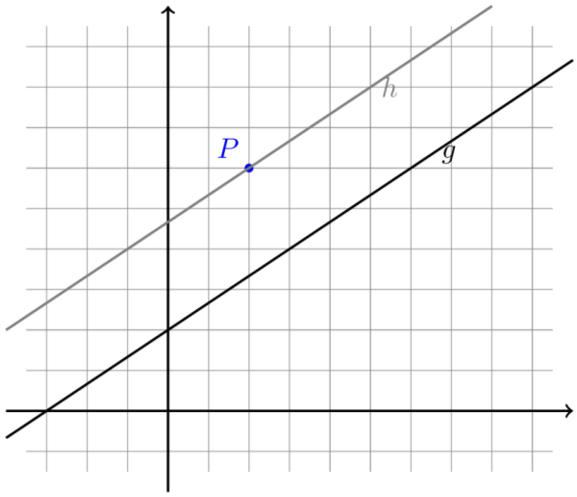

Abb. 2: Veranschaulichung des euklidischen Parallelenaxioms.

Weitere Beispiele von Inzidenzebenen, in denen (P) gilt, erhält man, indem man im obigen Beispiel den Körper $\mathbb{R}$ durch einen beliebigen Körper ersetzt. Insbesondere kann man so interessante Beispiele endlicher Geometrien konstruieren, die wir als weiteren relevanten Kontext heranziehen könnten, wovon wir aus Platzgründen aber absehen müssen.

Eine andere Geometrie hat *die hyperbolische Ebene* (Agricola & Friedrich, 2015, S. 154ff): Als Modell für eine hyperbolische Ebene betrachten wir die obere Halbebene (vgl. Abb. 3):

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} |\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

Geraden sind hier definiert als (euklidische) Kreisbögen in $\mathbb{H}$ mit Mittelpunkt auf der Realachse

$$K_{m,r} = \{z \in \mathbb{H} | |z - m| = r\}, m \in \mathbb{R}, r > 0,$$

oder als (euklidische) Parallelen in $\mathbb{H}$ zur Imaginärachse.

$$l_a = \{z \in \mathbb{H} | \mathrm{Re}(z) = a\}, a \in \mathbb{R}.$$

Auch in der hyperbolischen Geometrie gelten die Axiome (I_1) bis (I_3), nicht jedoch das Parallelenaxiom (P): Zu jeder Geraden g und jedem Punkt P, der nicht auf g liegt, gibt es in der hyperbolischen Ebene unendlich viele Geraden, die durch P gehen und g nicht schneiden.

Die hyperbolische Ebene hat über die bloße Inzidenz von Punkten und Geraden hinaus noch eine reichhaltige Struktur: Man kann in offensichtlicher Weise Halbgeraden und Strecken definieren; zwischen Geraden kann man kanonisch Winkel definieren, und es gibt auch einen passenden Abstandsbegriff (der allerdings nicht mit dem euklidischen Abstandsbegriff übereinstimmt).

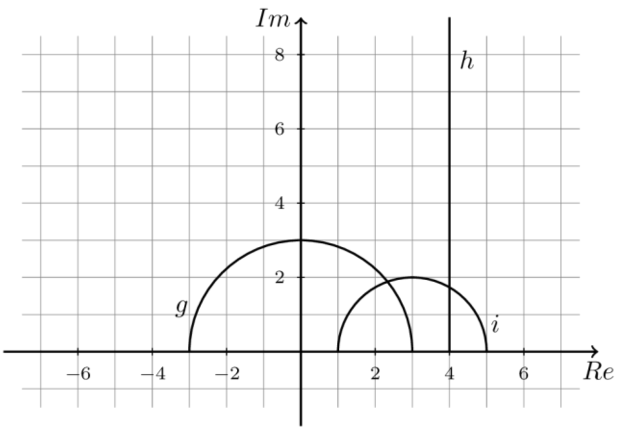

Abb. 3: Die obere Halbebene als Modell der hyperbolischen Ebene.

Als weiteren geometrischen Kontext betrachten wir die *sphärische Geometrie* (z. B. Agricola & Friedrich, 2015, S. 188ff): Die Menge $\mathbb{S}^2$ der sphärischen Punkte ist die (euklidische) Einheitssphäre im $\mathbb{R}^3$, also die Oberfläche der dreidimensionalen euklidischen Kugel mit Radius 1 um den Ursprung:

$$\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1\}.$$

Sphärische Geraden sind Großkreise auf $\mathbb{S}^2$, also Kreise auf der Sphäre mit maximalem Radius (sie entstehen durch Schnitte mit $\mathbb{S}^2$ von euklidischen Ebenen, die durch den Mittelpunkt von $\mathbb{S}^2$ gehen). Man beachte, dass sich je zwei verschiedene sphärische Geraden in zwei Punkten schneiden (vgl. Abb. 4).

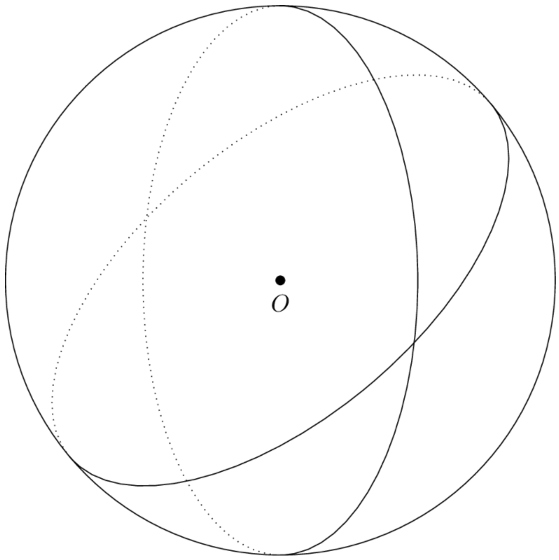

Abb. 4: Zwei sich schneidende Großkreise auf der Sphäre.

Auch wenn die sphärische Geometrie (I_1) verletzt (durch antipodale Punkte laufen unendliche viele verschiedene Geraden (d. h. Großkreise)), gibt es eine reichhaltige Struktur mit kanonischen Begriffen von Winkeln, Strecken, Flächeninhalten etc. Insbesondere gibt es einen offensichtlichen sphärischen Abstandsbegriff, welcher über die Länge von verbindenden Großkreisabschnitten (also sphärischen Strecken) definiert werden kann. Als strukturerhaltende Transformationen der Sphäre betrachtet man in der Regel die Gruppe der Isometrien bezüglich des so definierten sphärischen Abstands; diese Gruppe kann auf kanonische Weise mit der reellen orthogonalen Gruppe $O(3)$ identifiziert werden.

Als letzten Kontext betrachten wir die reelle projektive Ebene $\mathbb{R}P^2$. Ähnlich wie in der sphärischen Geometrie schneiden sich auch hier verschiedene Geraden immer (jedoch in einem einzelnen Schnittpunkt). Es gibt sehr diverse Zugänge zur reellen projektiven Ebene, die unterschiedliche Eigenschaften der projektiven Geometrie jeweils unterschiedlich transparent machen. Wir stellen hier aus Platzgründen nur denjenigen vor, der am nächsten an der euklidischen Geometrie ist: $\mathbb{R}P^2$ als projektiven Abschluss der reellen affinen Ebene $\mathbb{R}^2$.

Wir konstruieren $\mathbb{R}P^2$, indem wir zur Menge $\mathbb{R}^2$ der affinen Punkte noch „unendlich ferne" Punkte hinzufügen: Hierbei fügen wir für jede mögliche Richtung, die affine Geraden haben können, (also für jedes Parallelenbündel) jeweils einen „unendlich fernen" Punkt hinzu; diese zusätzlichen Punkte bilden die sogenannte *Ferngerade*. Wir erhalten somit $\mathbb{R}P^2$ als Vereinigung von $\mathbb{R}^2$ und der Ferngeraden (Eschenburg, 2020, S. 27 f.). Die projektiven Geraden in diesem Modell von $\mathbb{R}P^2$ sind die affinen Geraden in $\mathbb{R}^2$, jeweils ergänzt um den durch ihre Richtung festgelegten unendlich fernen Punkt (und die Ferngerade ist natürlich auch eine projektive Gerade). Gemäß dieser Konstruktion schneiden sich je zwei verschiedene Geraden, entweder schon in $\mathbb{R}^2$ oder eben „im Unendlichen" auf der Ferngerade.

Ein bedeutender Unterschied zur affinen Geometrie ist, dass in der projektiven Geometrie sehr viel allgemeinere Transformationen als „strukturerhaltend" angesehen werden (Eschenburg, 2020, S. 30 ff.). Die sogenannten „projektiven Abbildungen" sind alle Bijektionen von $\mathbb{R}P^2$ auf sich selbst, welche projektive Geraden auf projektive Geraden abbilden (so kann übrigens auch die Ferngerade auf jede andere projektive Gerade transportiert werden – sie ist also in diesem Sinne eine Gerade wie jede andere).

In all diesen Kontexten erfahren verschiedene Vorstellungen zur Parallelität von Geraden sehr unterschiedliche Erweiterungen, welche wir in Kapitel 4.3 zur Verdeutlichung der Tragfähigkeit der Vorstellungen analysieren werden.

3. Forschungsfragen und Methode

3.1 Forschungsfragen

Wie wir im vorherigen Kapitel sehen konnten, stellt sich innerhalb der Hochschulgeometrie die Theorie der Grundvorstellungen als besonders interessant für das Konzept der parallelen Geraden dar. Die Studierenden lernen neue geometrische Räume kennen und müssen dabei ihre Vorstellungen, die für sie selbstverständlich sind, überdenken. So kann es schwierig sein, zu akzeptieren, dass zwei Geraden im projektiven Raum, die augenscheinlich dieselbe Richtung haben, nicht parallel sind. Die Frage nach Grundvorstellungen und deren Anschlussfähigkeit beim Übergang von euklidischer zu nichteuklidischer Geometrie ist also durchaus lohnenswert.

Auch Asmuth und Rips (2006) haben festgestellt, dass im Besonderen die „Hyperbolic geometry […] an interesting target for study of conceptual change because of its conceptual similarities and dissimilarities to Euclidean geometry" (Asmuth & Rips, 2006, S. 30) ist. Das Konzept der hyperbolischen Geometrie ist in vielen Punkten inkonsistent mit dem zuvor erlernten Wissen über die euklidische Geometrie, was zu Schwierigkeiten führen kann, neue Informationen in die schon vorhandenen Vorstellungen widerspruchsfrei zu integrieren. In ihrer Studie zeigt sich, dass verschiedene Einführungen in die hyperbolische Geometrie[2], in unterschiedlichem Umfang eine „tendency to respond on the basis of prior Euclidean knowledge rather than the new hyperbolic information" (Asmuth & Rips, 2006, S. 33) hervorrufen.

Gerade dieser Punkt ist für das Konzept der parallelen Geraden relevant. In der Schule lernen die Schüler:innen bereits eine Vielzahl an Eigenschaften des Konzepts kennen, und es ist davon auszugehen, dass sie unterschiedliche Präferenzen für diese Eigenschaften haben sowie die Präferenz auch nach Aufgabenkontext variiert. Während die Eigenschaften in der Schulgeometrie noch alle äquivalent sind, ist dies in nicht-euklidischen Räumen nicht mehr der Fall. Dies kann dazu führen, dass Lernende Probleme haben, das Konzept der parallelen Geraden in die nicht-euklidische Geometrie zu übertragen. Deshalb sollten individuelle Vorstellungen sowie Grundvorstellungen zu parallelen Geraden sowie deren Anschlussfähigkeit in verschiedenen geometrischen Räumen beleuchtet werden. In diesem Artikel fokussieren wir uns auf die normative Ebene, was zu folgenden Forschungsfragen führt:

(FF1) Wie können Grundvorstellungen für das Konzept der parallelen Geraden in der Hochschulgeometrie charakterisiert werden?

(FF2) Als wie anschlussfähig erweisen sich die jeweiligen Vorstellungen in der nicht-euklidischen Geometrie?

3.2 Vorgehen

Wir bestimmen die **mathematischen Kontexte**, für die Grundvorstellungen formuliert werden sollen, und beschreiben diese sachanalytisch (vgl. Kapitel 2.2). Dies entspricht der Bestimmung der Gültigkeitsbereiche im Verfahrensrahmen von Salle und Clüver (2021). In unserem Fall umfasst der Gültigkeitsbereich mehrere geometrische Kontexte, die wiederum jeweils einzeln als eigener Gültigkeitsbereich aufgefasst werden können.

Zudem werden **Schulbücher und Vorlesungsskripte** im Hinblick auf parallele Geraden analysiert und Kategorien aufgestellt, die einen ersten Ansatz für mögliche Grundvorstellungen liefern (vgl. Kapitel 4.1). Dabei werden Definitionen für parallele Geraden sowie deren beschriebene Eigenschaften betrachtet, was der Analyse der notwendigen mathematischen Grundlagen im zweiten Schritt des Verfahrensrahmens von Salle und Clüver (2021) entspricht. In diesem Zug werden durch die Schulbuchbeispiele zudem typische Situationen, in denen Parallelität im Alltag verwendet wird identifiziert.

Ergänzend werden **empirische Ergebnisse** aus einem offenen Fragebogen einbezogen (vgl. Kapitel 4.2). Die Einbeziehung der deskriptiven Ebene an dieser Stelle hat mehrere Gründe. Schon Freudenthal (1974) argumentierte für den Einbezug der Lernendenperspektive in der mathematikdidaktischen Forschung, da diese Sachanalysen sinnvoll ergänzen und bereichern können. Somit kann die vorherige Sachanalyse im Sinne der didaktischen Rekonstruktion (Prediger, 2005), durch die Ergebnisse des offenen Fragebogens und deren Gegenüberstellung um weitere Erkenntnisse zu parallelen Geraden erweitert werden. Auch Salle und Clüver (2021) stellen in ihrem Verfahrensrahmen fest, dass „empirische Ergebnisse [..] zudem auch *Ausgangspunkt* für die Bildung der Klassen sein [können], wenn beispielsweise bereits *vor* der sachanalytischen Präzisierung Vorschläge für empirisch gewonnene Vorstellungen vorliegen" (Salle & Clüver, 2021, S. 567). Dass dies in der Praxis tatsächlich relevant ist, zeigte sich z. B. bei Hilken (2021), in deren Seminar durch Studierende ein bisher in der Literatur noch nicht beschriebener Zugang zur Krümmung ebener Raumkurven (Zugang über parallele Kurven) erarbeitet wurde (Hilken, 2021, S. 39). Durch den Einbezug des Fragebogens könnten also weitere Zugänge und Vorstellungen zu parallelen Geraden gefunden werden, die bei der vorherigen Sachanalyse noch nicht aufgetaucht sind.

Auf Basis der verschiedenen Analysen werden mögliche Grundvorstellungen formuliert und anschließend der dynamische Aspekt des Konzepts fokussiert. D. h., die möglichen Grundvorstellungen werden vor den verschiedenen geometrischen Kontexten bzw. Gültigkeitsbereichen betrachtet und auf ihre **Tragfähigkeit** hin analysiert (vgl. Kapitel 4.3). Dafür müssen auch immer wieder Definitionen und Eigenschaften paralleler Geraden in verschiedenen Kontexten und deren Zusammenhänge analysiert werden (vgl. Schritt 2 bei Salle & Clüver, 2021). In Gesprächen mit Expert:innen werden darauf aufbauend die möglichen Grundvorstellungen immer wieder überarbeitet.

Durch die Analyse der Tragfähigkeit kann schließlich abhängig vom geometrischen Kontext entschieden werden, wann eine Vorstellung tatsächlich eine Grundvorstellung ist und, ob es sich um eine partielle oder allgemeine Grundvorstellung nach Roos (2020) handelt. Dadurch kann gleichzeitig der Frage nach der Aufwärtskompatibilität (Clüver & Salle,

2020) der Vorstellungen von der euklidischen hin zur nicht-euklidischen Geometrie nachgegangen und Forschungsfrage zwei beantwortet werden. Der Bezugsrahmen wird währenddessen immer wieder eingeschränkt bzw. erweitert (z. B. werden parallele Geraden auf der hyperbolischen Ebene auf grenzparallele Geraden eingeschränkt), wie es auch im vierten Schritt im Verfahrensrahmen von Salle und Clüver (2021) beschrieben wird. Aus dieser Analyse gehen zudem direkt notwendige Grundvorstellungsumbrüche bei Erweiterung der geometrischen Kontexte hervor.

Weiterhin werden die benötigten fachlichen Voraussetzungen für die jeweiligen Grundvorstellungen geklärt.

Zuletzt wird argumentiert, inwieweit es sich bei den formulierten Grundvorstellungen um **primäre bzw. sekundäre Grundvorstellungen** handelt. Hierfür wird unter anderem die Alltagsnähe der Vorstellungen betrachtet, indem z. B. analysiert wird, ob im Fragebogen im Zusammenhang mit bestimmten Kategorien, häufig Beispiele aus dem Alltag genannt wurden. Wie schon in Kapitel 2.1 erwähnt, hat sich die Definition primärer Grundvorstellungen im Laufe der Zeit verändert. Wir legen hier die weiter gefasste Definition zugrunde und betrachten primäre Grundvorstellungen auch als solche, die eine Übersetzungsfunktion zwischen Mathematik und Realität haben.

4. Formulierung von Grundvorstellungen

4.1 Analyse von Schulbüchern und Vorlesungsskripten

Da wir zunächst Schulbücher betrachten, starten wir mit dem Gültigkeitsbereich der euklidischen Geometrie. Mit dem Lambacher Schweizer und Elemente der Mathematik[3] wurden die in Baden-Württemberg gängigsten Schulbücher ausgewählt. Zudem wurde ein Vorlesungsskript zur Linearen Algebra (Markwig, 2011) analysiert. Jedes Schulbuch wurde einzeln untersucht und es wurde notiert, an welchen Stellen das Konzept der parallelen Gerade vorkommt, wie es definiert und mittels welcher Eigenschaften charakterisiert wird. Auch wurde identifiziert, in welchen (außerschulischen) Kontexten parallele Geraden z. B. in Übungsaufgaben auftauchen.

Es zeigte sich zunächst, dass das Konzept der parallelen Geraden je nach Schulstufe aus sehr unterschiedlichen Blickwinkeln betrachtet wird. In der fünften Klasse werden parallele Geraden zunächst über den Abstand definiert und dann als weitere Eigenschaften eine gemeinsame Orthogonale sowie der fehlende Schnittpunkt vorgestellt. Die Schüler:innen verwenden zur Überprüfung auf Parallelität in erster Linie das Geodreieck, das in engem Zusammenhang sowohl zur Definition über den Abstand als auch zur Orthogonalen steht. In der Sekundarstufe II wird das Thema nochmals im Rahmen der Analytischen Geometrie aufgegriffen. Hier wird die gegenseitige Lage von Geraden und damit insbesondere auch Parallelität anhand der Parameterdarstellung von Geraden bestimmt. Dabei werden die Richtungsvektoren der jeweiligen Geraden auf lineare (Un)Abhängigkeit überprüft. Hier steht also die Richtung der Geraden in Bezug auf Parallelität im Vordergrund.

Die Kontexte, in denen parallele Geraden auftauchen, lassen sich in mathematische sowie alltagsbezogene Kontexte aufteilen.

Mathematische Kontexte sind zunächst in den unteren Klassenstufen das Falten, das Zeichnen mit Geodreieck sowie das Erkennen paralleler Geraden in geometrischen Figuren (wie z. B. dem Parallelogramm oder der Raute). Zudem tauchen in der Mittelstufe parallele Geraden im Kontext Linearer Gleichungssysteme mit zwei Variablen und deren Lösbarkeit auf. Die Gleichungssysteme werden geometrisch interpretiert und zeichnerisch gelöst. Im Rahmen der Analytischen Geometrie in der Sekundarstufe II taucht das Konzept der parallelen Geraden, wie oben schon erwähnt, im Zusammenhang mit der gegenseitigen Lage von Geraden und der linearen (Un)abhängigkeit von Vektoren auf. Die Verwendung paralleler Geraden zum Lösen geometrischer Probleme kommt sowohl in der Sekundarstufe I als auch II vor. So muss z. B. gezeigt werden, dass es sich bei einer Figur um ein Parallelogramm handelt.

Hinsichtlich der Alltagskontexte werden die Schüler:innen in der Sekundarstufe I zunächst auf Kontexte aus ihrer Umwelt, in denen parallele Geraden auftauchen, hingewiesen oder sollen diese suchen. Folgende Kontexte tauchen auf: Der schiefe Turm von Pisa, Bahnschienen, das Notensystem, Liniennetze, das Aufhängen eines Bilderrahmens, das Klassenzimmer, der Stadtplan von Mannheim, der Jägerzaun, Kanten von Kerzen und das Anlegen vom Reihen beim Gärtnern. Im Zusammenhang mit Linearen Gleichungssystem tauchen Aufgaben zur Berechnung von Mengen und Preisen (z. B. beim Einkaufen oder der Gasverbrauch) oder zum Modellieren (Wann holt ein Verkehrsmittel ein anderes ein), wobei die Gleichungssysteme hier meist lösbar und damit nicht durch parallele Geraden darstellbar sind. Innerhalb der analytischen Geometrie sind typische Aufgaben die des Prüfens der Kollision von Objekten (beliebte Kontexte sind hier der Schiffs- und der Flugverkehr) oder Aufgaben, bei denen parallel verlaufende Sonnenstrahlen mittels Vektoren modelliert werden müssen.

An der Hochschule tauchen parallele Geraden in der Linearen Algebra auf. Betrachtet man den Faktorraum V/U, wobei $V = \mathbb{R}^n$ und U ein eindimensionaler Unterraum von V, so kann dieser als Menge aller zu U paralleler Geraden geometrisch interpretiert werden.

In der Hochschulgeometrie ist das Konzept der parallelen Geraden von besonderer Bedeutung und historisch gesehen war es ausschlaggebend für die Definition neuer geometrischer Räume. Im 19. Jhdt. konnte gezeigt werden, dass es Geometrien gibt, die alle Axiome der euklidischen Geometrie erfüllen, nicht jedoch das Parallelenaxiom (Trudeau, 1998, S. 185ff). Die Definition, die für Parallelität zugrunde gelegt wird, ist diejenige über den Schnittpunkt: Zwei Geraden sind parallel zueinander, wenn sie in derselben Ebene liegen und sich nicht schneiden oder sie identisch sind. Trotz dieser wesentlichen Rolle des Konzepts der parallelen Geraden, wird das Konzept in der Hochschulgeometrie in der Regel nur knapp über die Schnittpunkteigenschaft eingeführt und alternative Vorstellungen dazu werden nicht explizit reflektiert (Berchthold, 2016; Kasten & Vogel, 2017; Radloff 2020).

Durch die obige Analyse werden auch notwendige Vorkenntnisse deutlich. Zum Beispiel benötigen Schüler:innen Kenntnisse über Geraden, Abstand, Richtung, Winkel sowie Transversalen. Wie tief diese Kenntnisse sein müssen, unterscheidet sich aber je nach geometrischem Kontext und Zeitpunkt im Lernprozess. In der Sekundarstufe I reicht eine weniger formale Definition von Abstand, da hier Abstand und Parallelität hauptsächlich mit Hilfe des Geodreiecks überprüft werden. In den nicht-euklidischen Geometrien hingehen wird eine formale mathematische Definition benötigt, um einsehen zu können, dass in der Hyperbolischen Ebene Äquidistanten und parallele Geraden nicht dasselbe sind.

Basierend auf dieser Analyse wurden folgende erste Kategorien gebildet: Gleicher Abstand, Gemeinsame Orthogonale, Gleiche Richtung, Kein Schnittpunkt, Kein Schnittpunkt oder unendlich viele Schnittpunkte, Gleiche Richtung und kein gemeinsamer Punkt, Faktorraum. Die Unterscheidung zwischen „Kein Schnittpunkt“ und „Kein Schnittpunkt oder unendlich viele Schnittpunkte“ haben wir getroffen, da in den Schulbüchern identische Geraden explizit zu parallelen Geraden gezählt werden, während sie in der Hochschulmathematik zum Teil ausgeschlossen werden (Berchthold, 2016, Def. 2.2.24). Da in der Sekundarstufe II Parallelität von Geraden in „parallel“ und „echt parallel“ unterteilt wird, haben wir uns dazu entschlossen, zwischen den Kategorien „Gleiche Richtung“ und „Gleiche Richtung und kein gemeinsamer Punkt“ zu unterscheiden.

4.2 Empirische Ergebnisse

Der offene Fragebogen umfasste mehrere Fragen und Aufgaben zu geometrischen Konzepten. Die Studierenden mussten den Fragebogen als Übungsblatt verpflichtend bearbeiten, während die Teilnahme an der Studie freiwillig war. Die für diesen Artikel relevante Aufgabe aus dem Fragebogen lautet: „Was sind parallele Geraden?”. Die Studierenden sollten sie beantworten und dabei mehrere Möglichkeiten beschreiben. Für die Antworten wurden die Kategorien aus der Schulbuchanalyse herangezogen und induktiv erweitert.

Der Fragebogen soll einerseits Auskunft über die individuellen Vorstellungen und damit auch mögliche Fehlvorstellungen und Schwierigkeiten der Studierenden geben. Andererseits kann er auch Einblicke der Bedeutung des Konzepts für Studierende im Alltag bzw. der Realität geben und relevante Phänomene für die Formulierung von Grundvorstellungen liefern. Er soll somit als sinnvolle Ergänzung im Prozess der Formulierung der Grundvorstellungen dienen.

4.2.1 Teilnehmer:innen

Die erste Erhebung fand zu Beginn des Wintersemesters 20/21 an der Universität Tübingen statt. Es nahmen 42 Studierende an der Befragung teil, die zu diesem Zeitpunkt am Anfang einer Geometrie-Vorlesung standen. Die meisten studierten im Bachelor of Education und befanden sich zum Zeitpunkt der Befragung im fünften Semester. Eine zweite Erhebung fand im Sommersemester 21 an der Universität Göttingen statt. Teilnehmer:innen waren Studierende, die die Vorlesung „Einführung in die Mathematikdidaktik” besucht haben. Auch hier gaben die meisten an, im Bachelor of Education zu studieren. Der größte Teil befand sich zum Zeitpunkt der Befragung im vierten Semester. Der

Fragebogen wurde zu Beginn des Semesters ausgegeben. Er wurde hier von 29 Studierenden ausgefüllt. Insgesamt haben also 71 Studierende an der Befragung teilgenommen.

4.2.2 Auswertung

Die Auswertung der Antworten des offenen Fragebogens erfolgte mittels einer inhaltlich strukturierenden Qualitativen Inhaltsanalyse nach Kuckartz (2018, S. 129ff), deren Ablauf aus sieben Phasen besteht (vgl. Kuckartz, 2018, Abb. 16, S. 132).

Es wurden die aus der Schulbuchanalyse entstandenen Kategorien als deduktive Kategorien verwendet. Im weiteren Vorgehen wurden die gebildeten Kategorien gemeinsam mit einer wissenschaftlichen Hilfskraft induktiv am Material angepasst und erweitert. Das finale Kategoriensystem wurde durch eine Drittkodiererin, die zuvor mit etwa 10% des Materials geschult wurde, überprüft. Die Intercoder-Reliabilität wurde mittels Cohens Kappa berechnet und weist mit $\kappa = 0{,}92$ eine sehr hohe Übereinstimmung nach Landis und Koch (1977) auf. Der Kategorienleitfaden befindet sich im Anhang.

4.2.3 Ergebnisse

Der finale Kategorienleitfaden umfasst folgende Kategorien: Gleicher Abstand, Gemeinsame Orthogonale, Gleiche Richtung, Kein Schnittpunkt, Kongruenzabbildung, Affine Vektorräume, Identische Geraden sind parallel, Identische Geraden sind nicht parallel, Schnittpunkt im Unendlichen, Gemeinsame Ebene, Skalarprodukt der Richtungsvektoren ergibt 0.

Diese Kategorien wurden mit den Kategorien aus dem Schulbuch abgeglichen und alle Kategorien, die sich als nicht tragfähig erwiesen, nicht weiter berücksichtigt, sodass folgende Kategorien übrigblieben: Gleicher Abstand, Gemeinsame Orthogonale, Gleiche Richtung, Kein Schnittpunkt, Kongruenzabbildung, Identische Geraden sind parallel und Identische Geraden sind nicht parallel.

Man kann zunächst feststellen, dass fast alle Kategorien, die im Kern mathematisch tragfähig sind, sich mit den Kategorien aus der Analyse in Kapitel 4.1 decken. Die Unterscheidung, ob identische Geraden zu parallelen Geraden zählen oder nicht, wurde nicht mehr in den Kategorien selbst vorgenommen (Kein Schnittpunkt vs. Kein Schnittpunkt oder unendliche viele Schnittpunkte). Hierfür wurden zwei neue Kategorien hinzugefügt, da sich dies beim Auswerten als einfacher erwies.

Die Faktorraum-Kategorie kam bei den Antworten der Studierenden nicht mehr vor. Hinzu kam die Kategorie „Kongruenzabbildung“. Unter diese Kategorie fielen Antworten, bei denen die Studierenden verschiedene Kongruenzabbildungen angaben, aus denen parallele Geraden entstehen. Zwar gab es hier Antworten, die nur bedingt tragfähig sind, wie z. B. die Geradenspiegelung, da diese parallele Geraden voraussetzt und somit zirkulär ist, die Kongruenzabbildung, die aber am häufigsten angegeben wurde, war die der Verschiebung. Die Vorstellung, dass parallele Geraden aus einer Verschiebung hervorgehen, ist tragfähig und wurde bei der Analyse der Schulbücher und Skripte nicht gefunden.

Die Kategorie der gemeinsamen Orthogonalen, die aus beiden Analysen hervorging, ist mathematisch gesehen ein Spezialfall der Transversalen zu parallelen Geraden, bei der Stufen- und Wechselwinkel übereinstimmen. Dieser Fall kam auch einmal in den Antworten beim Fragebogen vor:

> Zwei Geraden sind genau dann parallel zueinander, wenn diese den gleichen Winkel bezüglich eine [sic!] dritten Gerade besitzen, die beide Geraden durchkreuzt. [045]

Eine Abstrahierung dieser Kategorie zu einer allgemeineren Vorstellung wäre demnach sinnvoll.

Folgende Alltagsbeispiele wurden genannt: Eisenbahnschienen, Beispiele aus dem Verkehr wie Fahrbahnränder oder Landebahnen, gegenüberliegende Seiten verschiedener Objekte wie ein Blatt Papier oder ein Quadrat, Fenster- und Türrahmen, die Straßen von New York City, Leitern. Die Eisenbahnschienen kamen ebenfalls in den Schulbüchern vor sowie das Straßenbeispiel, wobei im Schulbuch die Stadt Mannheim verwendet wurde.

Auf Basis dieser Analysen haben wir folgende mögliche Grundvorstellungen formuliert: Die Abstandsvorstellung, die Schnittpunktvorstellung, die Richtungsvorstellung, die Gekoppelte Winkel-Vorstellung, die Verschiebungsvorstellung und die Faktorraumvorstellung.

4.3 Tragfähigkeit in verschiedenen Kontexten

Die möglichen Grundvorstellungen werden in den folgenden Kapiteln auf ihre Anschlussfähigkeit in den verschiedenen geometrischen Kontexten untersucht, um schließlich zu entscheiden, wann es sich um eine (allgemeine bzw. partielle) Grundvorstellung handelt.

4.3.1 Die Abstandsvorstellung

Die Abstandsvorstellung beruht auf folgender Vorstellung zu parallelen Geraden: Parallele Geraden haben in jedem Punkt denselben Abstand zueinander. Fachlich präzise kann man diese Vorstellung zum Beispiel anhand von Metriken fassen: Der Abstand von einem Punkt m zu einer Teilmenge N in einem metrischen Raum (X, d) ist definiert als

$$d(m, N) = inf\{d(m, n) | n \in N\}.$$

Zwei Geraden g und h sind in der euklidischen Geometrie genau dann parallel, wenn

$$d(P, h) = d(P', h) \text{ für alle } P, P' \in g,$$

wobei wir hier den euklidischen Abstand betrachten. Wir sagen in diesem Fall, dass alle Punkte von g äquidistant zu h seien. Ebenso sind dann alle Punkte von h äquidistant zu g – kurz: g und h sind äquidistant.

Genauer gilt, dass zwei euklidische Geraden genau dann äquidistant sind, wenn sie keinen Schnittpunkt haben (Fall: Abstand > 0) oder identisch sind (Fall: Abstand = 0). Im euklidischen Raum ist es also möglich, parallele Geraden über den Abstand zu definieren; es handelt sich um eine allgemeine Grundvorstellung.

Fachliche Voraussetzungen für die Abstandsvorstellung sind die eines (nicht zwingend formalen) Abstandsbegriffs. Für die Berechnung des Abstands sollte auch das Wissen, dass zwei parallele Geraden eine gemeinsame Orthogonale haben, vorhanden sein. Die Abstandsvorstellung ist also vermutlich eng verbunden mit der Gekoppelten Winkel-Vorstellung bzw. der einer gemeinsamen Orthogonalen.

In der hyperbolischen, sphärischen und projektiven Geometrie gibt es jeweils kanonische Abstandsbegriffe. Um diese Kontexte besser analysieren zu können, führen wir das Konzept der *Äquidistante* ein: Im euklidischen Raum zusammen mit der euklidischen Metrik ist dies die Ortslinie aller Punkte, die zu einer gegebenen Geraden einen gegebenen konstanten Abstand haben und auf einer Seite der Geraden liegen – als Äquidistante einer euklidischen Geraden erhält man offenbar eine zur ursprünglichen Geraden parallele Gerade.

In der hyperbolischen, sphärischen sowie projektiven Geometrie erhält man als Äquidistante im Allgemeinen keine Gerade und damit auch insbesondere keine parallele Gerade. Ferner gibt es in der hyperbolischen und sphärischen Geometrie eine klare Definition der beiden Seiten einer Geraden, in der reellen projektiven Ebene gibt es jedoch keine Seiten, weshalb wir in diesem Fall unter einer Äquidistanten die gesamte Menge aller Punkte mit einem gegebenen Abstand verstehen.

Der hyperbolische Abstand $d_{\mathbb{H}}(P, Q)$ zweier Punkte P und Q in $\mathbb{H}$ lässt sich zwar einigermaßen kompakt in Formeln ausdrücken, aber für uns reicht es hier zu wissen, dass der hyperbolische Abstand zweier Punkte sehr viel größer ist als ihr euklidischer Abstand, wenn sie nahe an der reellen Achse liegen, und sehr viel kleiner als ihr euklidischer Abstand, wenn sie weit weg von der reellen Achse liegen[4].

Betrachtet man nun die Äquidistante zu einer hyperbolischen Geraden g durch einen Punkt P, der nicht auf g liegt, so ist diese keine hyperbolische Gerade. Geht man andersherum von zwei gegebenen parallelen Geraden in $\mathbb{H}$ aus und berechnet den Abstand zwischen diesen, so stellt man fest, dass dieser nicht überall gleich ist. Die Implikation, dass zwei Geraden, wenn sie keinen Schnittpunkt haben, überall denselben Abstand haben, gilt im Hyperbolischen also nicht. In der Hyperbolischen Geometrie ist die Abstandsvorstellung somit weder partiell noch allgemein.

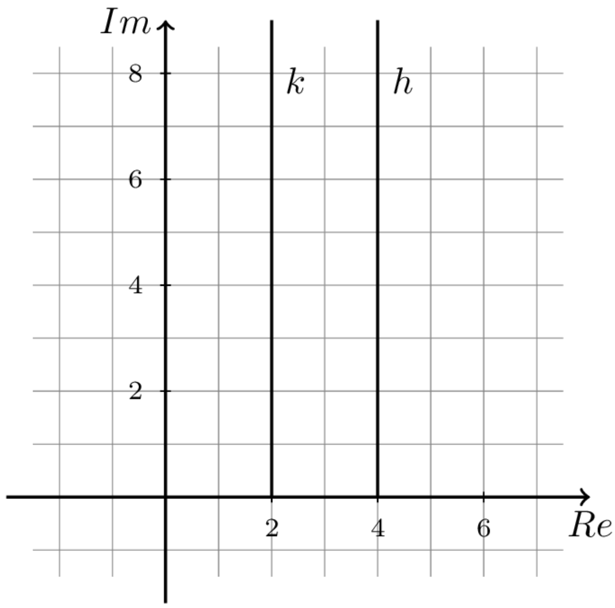

Abb. 5: Zwei hyperbolische Geraden mit Abstand 0.

Was zusätzlich zu Verständnisschwierigkeiten bei den Lernenden führen könnte, ist, dass es in der hyperbolischen Ebene parallele Geraden mit Abstand 0 geben kann, die nicht identisch sind, da dies dem intuitiven Abstandsverständnis aus der euklidischen Geometrie widerspricht (vgl. Abb. 5).

Auf der Sphäre gelangt man durch die Abstandsvorstellung ebenfalls zu einem anderen geometrischen Konzept: Geraden auf der Sphäre sind durch *Groß-*

kreise, also Kreise, die durch den Schnitt der Sphäre mit der Ursprungsebene entstehen, gegeben. Der sphärische Abstand zwischen zwei Punkten A und B entspricht der Länge der kürzeren Verbindung der Punkte entlang des durch sie festgelegten Großkreises und lässt sich mit Hilfe der Winkelfunktionen berechnen:

$$d_{\mathbb{S}^2}(A,B) = arccos(\langle OA, OB \rangle)$$

Betrachtet man hier die Äquidistante zu einer gegebenen Geraden g durch einen gegebenen Punkt P, der nicht auf g liegt, so erhält man einen *Kleinkreis* auf der Sphäre, also insbesondere keine Gerade und somit auch keine parallele Gerade. Die einzigen parallelen Geraden, die auf der Sphäre existieren, sind identische Geraden. Diese haben überall den Abstand 0. Auf der Sphäre sind also für Geraden g und h äquivalent:

- g und h sind parallel.
- g und h sind identisch.
- g und h haben überall denselben Abstand (nämlich 0).

In der sphärischen Geometrie zeigt sich also, dass die Abstandsvorstellung für den Spezialfall der identischen Geraden tragfähig und in diesem Sinne auch eine allgemeine Grundvorstellung ist. Sie kann aber auch zu Missverständnissen und Schwierigkeiten im Lernprozess führen, da Äquidistanten im Allgemeinen keine Geraden sind.

In unserem Modell von $\mathbb{R}P^2$ betrachten wir die projektive Ebene als projektiven Abschluss der affinen Koordinatenebene $\mathbb{R}^2$. Auf der affinen Ebene haben wir zwar den euklidischen Abstand, aber dieser kollidiert mit dem Standpunkt der projektiven Geometrie. Zwei affine Geraden, die euklidisch äquidistant sind, sind als euklidische Geraden parallel, aber projektiv schneiden sie sich ja auf der Ferngeraden. Mit projektiven Abbildungen kann man den Schnittpunkt auch in die affine Ebene transportieren, das heißt, projektiv betrachtet sind (verschiedene) affin parallele und affin sich schneidende Geraden nicht zu unterscheiden. Die einzige Art, wie Geraden projektiv parallel sein können, ist, dass sie identisch sind. In diesem Sinne kann die Abstandsvorstellung in der projektiven Geometrie also nicht tragfähig sein.

Ein Grund, warum der euklidische Abstand in der projektiven Geometrie nicht weiterhilft, ist, dass er unter projektiven Abbildungen nicht invariant ist: Zu je zwei Paaren verschiedener Punkte in der projektiven Ebene gibt es eine projektive Abbildung, die das erste Paar auf das zweite Paar abbildet. Es kann also keine nicht-triviale Metrik auf $\mathbb{R}P^2$ geben, die unter projektiven Abbildungen invariant ist!

Da in der euklidischen Geometrie der Begriff der Äquidistanten und der parallelen Geraden zusammenfällt, ist die Definition von parallelen Geraden über ihren Abstand in der Schule recht prominent. Zwar wird diese Definition erst durch schulische Unterweisung eingeführt, es ist aber zu vermuten, dass Kinder schon vorunterrichtliche Handlungen mit Parallelität erfahren, ohne den Begriff zu kennen, bei denen sie den konstanten Abstand wahrnehmen. So z. B. beim Hochsteigen auf einer Leiter oder dem Zugfahren. Das wird gestützt durch die Tatsache, dass in den offenen Fragebögen die Kategorie „Gleicher Abstand" (gemeinsam mit „Kein Schnittpunkt") am häufigsten mit Alltagsbeispielen genannt wird. Ein Beispiel hierfür ist folgende Antwort:

> Parallele Geraden könnte man sich an einer Leiter vorstellen. Die senkrechten Balken der Leiter sind parallel zueinander, weil der Abstand der waagrechten Balken immer gleich ist. [059]

Somit lässt sich die Abstandsvorstellung den primären Grundvorstellungen zuordnen.

4.3.2 Die Richtungsvorstellung

Die Richtungsvorstellung kann folgendermaßen formuliert werden: Parallele Geraden haben dieselbe Richtung. Bei dieser Vorstellung besteht die Gefahr eines Zirkelschlusses: Studierende könnten auf die Nachfrage „Was bedeutet es denn, dass zwei Geraden dieselbe Richtung haben?" antworten: „Dass sie parallel sind.".

Hieraus gibt es zwei Auswege: Einerseits kann man definieren, was die „Richtung" einer Geraden im Einzelfall sein soll. Andererseits kann man die Minimalvoraussetzungen dafür, dass man von einer gemeinsamen „Richtung" überhaupt sprechen kann, abstrakt klären.

Zum ersten Zugang: In der euklidischen Geometrie kann man die Richtung einer Geraden im $\mathbb{R}^n$ über ihre Parameterdarstellung definieren. Genauer: Im $\mathbb{R}^n$ untersucht man die Richtungsvektoren von Geraden in Parameterdarstellung auf lineare Abhängigkeit, um ihre Parallelität zu prüfen.

In der euklidischen Ebene ist die Aussage, dass zwei Geraden dieselbe Richtung haben, äquivalent zur

Aussage, dass sie sich nicht schneiden oder identisch sind. Hier ist die Richtungsvorstellung daher eine allgemeine Grundvorstellung.

Zum zweiten Zugang: In der euklidischen Ebene (und allgemeiner in affinen Koordinatenebenen) ist Parallelität eine Äquivalenzrelation. Die Richtung einer Geraden kann somit als Äquivalenzklasse dieser Relation aufgefasst werden: Die Richtung einer Geraden ist dann die Menge der zu ihr parallelen Geraden, also ihr Parallelenbündel.

Dieses Verständnis von Richtung setzt das euklidische Parallelenaxiom (P) voraus, da dieses die Transitivität sichert. Der Vorteil ist, dass diese Auffassung von Richtung auch in beliebigen, insbesondere auch endlichen affinen Koordinatenebenen trägt, da hier ja (P) gilt und Parallelität eine Äquivalenzrelation ist.

Fachliche Voraussetzungen sind dementsprechend für den ersten Zugang die Kenntnis von Vektoren, der Parameterdarstellung und der Linearen (Un)Abhängigkeit. Für den zweiten Zugang muss das Wissen über Äquivalenzrelationen vorhanden sein.

Bevor wir die Tragfähigkeit der Richtungsvorstellung in verschiedenen Kontexten analysieren, sei zur Abgrenzung angemerkt, dass es in Bezug auf euklidische Geraden noch eine weitere Interpretation von „Richtung" gibt, welche wir zur besseren Unterscheidung „Orientierung" nennen wollen. Jede euklidische Gerade kann kanonisch auf zwei verschiedene Weisen orientiert werden, was anschaulich bedeutet, dass der Gerade einer der beiden möglichen „Durchlaufsinne" zugeordnet wird. Offenkundig trägt die Orientierung von Geraden nicht besonders viel zu einer Vorstellung von Parallelität von euklidischen Geraden bei, sie kann aber helfen, zumindest noch einen Teil der Vorstellung ins Hyperbolische zu retten.

Da Parallelität von Geraden im Hyperbolischen im Allgemeinen keine Äquivalenzrelation definiert, da die Transitivität nicht gegeben ist, muss die Menge der betrachteten parallelen Geraden eingeschränkt werden. Hierzu beobachten wir zunächst, dass hyperbolische Geraden auf kanonische Weise jeweils zwei „Enden" haben. Damit sind im Falle der hyperbolischen Geraden in Form euklidischer Halbkreise die beiden Schnittpunkte der zugehörigen Kreise mit der reellen Achse gemeint, im Falle der hyperbolischen Geraden in Form euklidischer Halbgeraden sind der Schnittpunkt der zugehörigen Geraden mit der reellen Achse sowie der Punkt ∞ gemeint.

Sei g eine hyperbolische Gerade, $P \in \mathbb{H}$ ein Punkt, sodass $P \notin g$. Die beiden zu g parallelen Geraden durch P, die mit dem Lot auf g in P den kleinsten bzw. größten Winkel bilden, heißen *Grenzparallelen* zu g. Sie haben mit g jeweils eines der beiden Enden gemein. Grenzparallele Geraden sind also diejenigen parallelen Geraden zu g, die g am nächsten sind.

Betrachtet man nun *orientierte* Geraden, so wird eines der beiden Enden zum „Startpunkt" und eines zum „Endpunkt" der orientierten Geraden. Nun ist die Transitivität für die Relation „grenzparallel mit selbem Endpunkt" erfüllt und es handelt sich somit um eine Äquivalenzrelation (Reflexivität und Symmetrie sind offensichtlich). Die Richtung von einer orientierten Geraden g kann also wieder als Äquivalenzklasse dieser Äquivalenzrelation definiert werden, d. h. als die Menge aller orientierten Geraden, die grenzparallel zu g mit selbem Endpunkt sind.

Folglich ist die Richtungsvorstellung in der hyperbolischen Geometrie eine partielle Grundvorstellung, da sie eingeschränkt auf das Konzept der grenzparallelen orientierten Geraden tragfähig ist: Zueinander grenzparallele orientierte Geraden mit demselben Endpunkt haben dieselbe Richtung.

In der sphärischen Geometrie müssen verschiedenen Geraden verschiedene Richtungen zugeschrieben werden: Da sie sich schneiden und sich im Schnittpunkt kreuzen (und nicht etwa tangential berühren), würde man den beiden Geraden sicher nicht dieselbe Richtung zuordnen. Das heißt, nur identische Geraden haben dieselbe Richtung, und in diesem Sinne ist die Richtungsvorstellung in der sphärischen Geometrie eine allgemeine Grundvorstellung (wenn auch keine besonders produktive).

In der reellen projektiven Ebene hängt die Tragfähigkeit der Richtungsvorstellung vom verwendeten Modell der projektiven Ebene ab. In unserem Modell von $\mathbb{R}P^2$ können projektive Geraden als Abschlüsse affiner Geraden, d. h. Geraden und ihre Richtung als unendlich ferner Punkt verstanden werden. Dieser Zugang veranschaulicht, warum sich projektive Geraden in der projektiven Ebene immer schneiden: Entweder sie haben unterschiedliche Richtungen und schneiden sich in einem affinen Punkt (dann würden sie sich auch im affinen Raum schneiden) oder sie haben dieselbe Richtung und schneiden sich im unendlich fernen Punkt. Der projektive Raum wurde also genau so konstruiert, dass sich alle Geraden schneiden, indem ihre Richtungen als Punkte zum affinen Raum „hinzugefügt“ wurden. Die Richtung kann also nicht mehr als Kriterium für Parallelität (im Sinne von „Geraden sind parallel, wenn sie dieselbe Richtung haben“) verwendet werden. Die Aussage, dass zwei Geraden keinen Schnittpunkt haben oder identisch sind, ist nicht äquivalent zur Aussage, dass sie dieselbe Richtung haben. Folglich ist die Richtungsvorstellung in unserem Modell der projektiven Geometrie weder eine allgemeine noch partielle Grundvorstellung, sondern nicht mehr tragfähig.

Es gibt andere Modelle der projektiven Geometrie, bei denen klarer ist, dass der affine Begriff von Richtung keine Anwendung findet und dass nur identische Geraden dieselbe Richtung haben – ähnlich wie im sphärischen Fall. Hier könnte man wie im sphärischen Fall argumentieren, dass die Richtungsvorstellung doch tragfähig ist. Da dies aber offenbar modellabhängig ist, wollen wir hier nicht von einer allgemeinen Grundvorstellung sprechen.

In der euklidischen Geometrie tritt die Auffassung paralleler Geraden als Geraden gleicher Richtung vor allem in der Vektorrechnung, also in innermathematischen Zusammenhängen auf. Darum handelt es sich um eine sekundäre Grundvorstellung. Sie verbindet das Konzept der parallelen Geraden mit den Begriffen Richtung und Vektoren sowie mit der Parameterdarstellung von Geraden und der Interpretation linear abhängiger Vektoren als Vektoren, die dieselbe Richtung haben. In der Sekundarstufe II dient die Vorstellung im Rahmen von Modellierungsaufgaben (z. B. Kollision von Flugzeugen) auch der Übersetzung zwischen Mathematik und Realität und kann somit auch den primären Grundvorstellungen zugeordnet werden.

4.3.3 Die Schnittpunktvorstellung

Die Schnittpunktvorstellung lautet: Parallele Geraden haben keinen Schnittpunkt oder sind identisch. Durch sie lässt sich die Frage nach Parallelität häufig rechnerisch beantworten, indem man durch Gleichsetzen von Geradengleichungen prüft, ob es einen x-Wert gibt, für den zwei Geradengleichungen denselben Funktionswert besitzen, also ob es einen Schnittpunkt der Geraden gibt. Fachliche Voraussetzung ist sehr allgemein nur das Wissen über die Beziehung, die zwischen zwei Geraden bestehen kann, also über deren Inzidenz.

Die Schnittpunktvorstellung hebt sich in zweierlei Hinsicht von den übrigen Grundvorstellungen ab: Einerseits liegt ihr die Definition von Parallelität von Geraden zugrunde, wie sie von der mathematischen Community und insbesondere in der Hochschulgeometrie anerkannt wird (sie stellt die Basis-Definition in allen in 2.2 zitierten Skripten und Büchern dar). Diese liegt auch der Formulierung der verschiedenen Parallelenaxiome zugrunde. Andererseits unterscheidet sich die Schnittpunktvorstellung von den restlichen Vorstellungen durch ihren hohen Abstraktionsgrad. „Kein Schnittpunkt” bedeutet, dass sich zwei Geraden niemals schneiden. Das kann anschaulich (zumindest in der euklidischen Geometrie) in keiner Skizze eingesehen werden. Dadurch eignet sich die Vorstellung nicht zur Lösung von Alltagsproblemen. Schneiden sich zwei Strecken nicht, folgt daraus nicht unbedingt, dass die zugehörigen Geraden parallel zueinander sind.

In der euklidischen Geometrie handelt es sich in der Ebene um eine allgemeine Grundvorstellung, da sie, wie weiter oben schon erwähnt, auf der allgemein anerkannten Definition von Parallelität von Geraden basiert. In höheren Dimensionen muss zusätzlich die einschränkende Voraussetzung gelten, dass die Geraden in einer gemeinsamen Ebene liegen, um die Möglichkeit windschiefer Geraden auszuschließen. Deswegen würde man hier von einer partiellen Grundvorstellung sprechen.

In der projektiven und hyperbolischen Geometrie verhält es sich analog zur euklidischen Geometrie: In der Ebene stellte die Schnittpunktvorstellung eine allgemeine, in höheren Dimensionen eine partielle Grundvorstellung dar. Grund dafür ist wieder, dass die Konstruktion des projektiven und hyperbolischen Raums auf die Definition von Parallelität über den Schnittpunkt zurückgeht. In der projektiven Ebene folgt hieraus, dass sich zwei Geraden immer schneiden und es (bis auf identische Geraden) keine parallelen Geraden gibt. In der hyperbolischen Ebene gibt es zu einer Geraden g und einem Punkt P, der nicht auf g liegt, unendliche viele Geraden, die g nicht schneiden und auf denen P liegt, woraus sich ergibt, dass es unendlich viele parallele Geraden durch P zu g gibt. In der von uns betrachteten sphärischen Geometrie muss nicht nach Ebene und Raum unterschieden werden, daher ist die Schnittpunktvorstellung hier immer eine allgemeine Grundvorstellung. Da sich zwei Großkreise immer schneiden, gibt es auf der Sphäre (bis auf identische Geraden) keine parallelen Geraden.

Der hohe Abstraktionsgrad der Schnittpunktvorstellung legt eine Einordnung als sekundäre Grundvorstellung nahe. Durch die Verbindung mit anderen mathematischen Begriffen wie Gleichungssystemen und der Vorstellung, dass durch Lösen dieser Gleichungssysteme, Schnittpunkte bestimmt werden können, hat die Schnittpunktvorstellung einen sekundären Charakter. Die Vorstellung wird aber auch in Bezug zu konkreten Alltagserfahrungen gesetzt, wie aus den Daten der Fragebögen hervorgeht:

> Geraden kann man sich vorstellen wie Bahnschienen, diese schneiden sich auch niemals und besitzen immer den gleichen Abstand. [061]

4.3.4 Die Verschiebungsvorstellung

Der Verschiebungsvorstellung liegt die Vorstellung zugrunde, dass parallele Geraden durch Anwenden einer Translation ineinander überführt werden können.

Diese Vorstellung ist im Euklidischen tragfähig. Es ist nicht völlig trivial, an dieser Stelle einen begrifflichen Zirkelschluss zu vermeiden und Parallelverschiebungen unter den Kongruenzabbildungen zu charakterisieren, ohne dabei Parallelität von Geraden in der Definition zu benutzen (eine zu einfache Definition wäre etwa, dass Parallelverschiebungen solche Kongruenzabbildungen sind, die jede Gerade auf eine dazu parallele Gerade abbilden).

Im Kontext der linearen Algebra kann man Verschiebungen wie folgt definieren:

> Ist $v \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor im $\mathbb{R}^n$, so definieren wir $\varphi_v: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto x + v$.

Für jede Gerade g in $\mathbb{R}^n$ ist dann $\varphi_v(g)$ die um den Vektor v verschobene Gerade, welche in der Tat parallel zu g ist, und alle zu g parallele Geraden lassen sich auf diese Weise gewinnen. Die Verschiebungsvorstellung hat also den Vorteil, in diesem Sinne konstruktiv zu sein.

Die zugrundeliegenden Verschiebungen lassen sich auch konkret umsetzen, etwa indem man ein Lineal als Repräsentation einer Geraden mit zwei Händen auf einem Tisch parallel verschiebt. Hierbei fällt auch auf, dass diese Vorstellung einen dynamischen Aspekt hat, da sich die Verschiebung kontinuierlich ausführen lässt.

Möchte man parallele Geraden über Geradenspiegelungen konstruieren, wie einige Studierende angaben, so muss die Spiegelachse parallel zur Ausgangsgerade liegen. Folglich ist dieser Zugang wegen des innewohnenden Zirkelschlusses nur wenig fruchtbar, denn man müsste ja dazu schon wissen was eine parallele Gerade ist.

Wie tragfähig ist nun die Verschiebungsvorstellung in nicht-euklidischen Kontexten?

In der sphärischen Geometrie gibt es Kongruenzabbildungen, die die Rolle von Verschiebungen spielen könnten, im engeren Sinne nicht. Sind zwei Punkte P und Q auf der Sphäre nicht diametral, so gibt es zwar eine hervorgehobene Kongruenzabbildung, die P auf Q abbildet, nämlich eine Drehung um die Achse, die senkrecht auf der Ebene steht, die durch P, Q und den Mittelpunkt der Sphäre geht. Aber jede orientierungserhaltende Kongruenzabbildung der Sphäre, die nicht die Identität ist, ist von dieser Form. Das heißt, wir sollten entweder alle diese Kongruenzabbildungen als „Verschiebungen“ akzeptieren, und dann wären alle Geraden in diesem Sinne untereinander „parallel“. Oder wir sagen, dass nur die identische Abbildung unseren Anforderungen als „Verschiebung“ genügt, und dann ist jede Gerade nur zu sich selbst parallel.

In der hyperbolischen Geometrie ist die Lage noch etwas komplexer. Es gibt zwar den Begriff einer hyperbolischen Verschiebung (oder Translation): Dies sind Kongruenzabbildungen der hyperbolischen Ebene, welche eine hyperbolische Gerade auf sich selbst abbilden (und dabei auch deren Orientierung respektieren) – man kann sie sich als eine Art Verschiebung der gesamten Ebene entlang dieser Geraden vorstellen.

Aber solche Translationen haben nur einige der aus dem Euklidischen gewohnten Eigenschaften, andere aber auch nicht: Etwa können sie Geraden auf andere Geraden abbilden, die einen Schnittpunkt mit der Ausgangsgeraden haben oder auch nicht. Im Allgemeinen ist die Hintereinanderausführung zweier Translationen auch keine Translation mehr. Die Verschiebungsvorstellung ist somit im Hyperbolischen nicht mehr wiederzuerkennen.

Ähnlich wie für die Richtungsvorstellung hängt die Tragfähigkeit der Verschiebungsvorstellung vom verwendeten Modell der projektiven Ebene ab. Wir betrachten $\mathbb{R}P^2$ als projektiven Abschluss der affinen Koordinatenebene $\mathbb{R}^2$ – was im Wesentlichen bedeutet, dass wir in der projektiven Ebene eine projektive Gerade als besonders hervorheben (in diesem Fall die Ferngerade), wobei andere Modelle in dem Sinn symmetrischer sind, dass keine Gerade so eine hervorgehobene Rolle spielt.

In unserem Fall können wir die affinen Verschiebungen betrachten (im projektiven Bild also diejenigen projektiven Abbildungen, welche die Ferngerade punktweise fixieren). Verschobene Geraden sind dann im Affinen parallel, schneiden sich aber nach wie vor im Unendlichen. Und die Hervorgehobenheit der Ferngerade ist keine inhärente Struktur der projektiven Ebene: Mittels projektiver Abbildungen kann man diese mit jeder anderen projektiven Gerade vertauschen, sodass dann auch die Verschiebungen nach dieser Transformation ganz andere, ungewohnte Eigenschaften haben. Zusammenfassend kann man sagen, dass in unserem Modell die Verschiebungsvorstellung nicht tragfähig ist.

In anderen, symmetrischeren Modellen der reellen projektiven Ebene wird deutlicher, dass es keinen kanonischen Begriff von Verschiebung gibt (der also nicht von einer Fixgeraden abhängt). Für die Tragfähigkeit der Verschiebungsvorstellung in diesen anderen Modellen ließe sich argumentieren, jedoch würde man vermutlich der Vorstellung nicht den Rang einer allgemeinen Grundvorstellung im Projektiven zubilligen.

Werden Verschiebungen als abstrakte Kongruenzabbildungen aufgefasst, hat diese Grundvorstellung eher Aspekte einer sekundären Grundvorstellung. Um zu dieser eher sekundären Vorstellung zu gelangen, bedarf es allerdings eines konsistenten Begriffs der Parallelverschiebung (als Kongruenzabbildung), beispielsweise wie oben skizziert.

4.3.5 Die Gekoppelte Winkel-Vorstellung

Für die Gekoppelte Winkel-Vorstellung betrachtet man zusätzlich zu den beiden Geraden, die man auf Parallelität hin prüfen möchte, eine weitere Gerade, die die beiden schneidet, also eine Transversale. Hierbei entstehen Stufen- und Wechselwinkel. Die „Gekoppelte Winkel-Vorstellung" baut darauf auf, dass man die Parallelität an diesen Stufenwinkeln festmachen kann.

Schon Euklid hat festgestellt, dass die Kongruenz der Stufenwinkel impliziert, dass die beiden Ausgangsgeraden sich nicht schneiden. Das Parallelenaxiom (P) formuliert Euklid im Wesentlichen so, dass es direkt die Umkehrung impliziert: Sind die Ausgangsgeraden parallel, so sind die Stufenwinkel kongruent. In der Tat ist diese Umkehrung nicht nur eine Folgerung aus (P), sondern man kann sie als äquivalente Umformulierung des Parallelenaxioms ansehen (Trudeau, 1998, S. 187).

Das heißt, in der euklidischen Ebene stellt der Satz, dass zwei Geraden genau dann parallel sind, wenn die Stufen- (oder alternativ die Wechselwinkel) kongruent sind, eine fachlich korrekte Definition dar und es handelt sich hier um eine allgemeine Grundvorstellung.

Sind die Stufenwinkel bei einer gegebenen Transversale rechte Winkel, so liegt offenbar ein Spezialfall zum oben Gesagten vor und die beiden euklidischen Geraden sind parallel. Andersherum ist die Parallelität der Geraden in der euklidischen Ebene äquivalent zur Existenz einer solchen gemeinsamen Orthogonalen. Hier könnte man auch von einer Orthogonalenvorstellung sprechen, wie auch die empirischen Ergebnisse nahelegen.

Diese Vorstellung ist die einzige unter den von uns gefundenen Vorstellungen, für die man Vorwissen zu Winkeln (oder zumindest zur Orthogonalität) mitbringen muss.

In der sphärischen Geometrie gilt:

- Je zwei verschiedene Geraden schneiden sich.
- Sie haben eine gemeinsame Orthogonale.
- Für andere Transversalen ist der Stufenwinkelsatz in der Regel verletzt.

Insgesamt ist diese Gekoppelte Winkel-Vorstellung hier also nicht fruchtbar.

Unser Standardmodell der reellen projektiven Ebene enthält die euklidische Ebene als Teilstruktur, aber hier gemessene gleiche Stufenwinkel führen nicht dazu, dass sich Geraden nicht schneiden, da sie dies auf der Ferngeraden tun, auch wenn sie affin parallel wären. Im Allgemeinen werden ferner Winkel unter projektiven Abbildungen nicht erhalten. Die Gekoppelte Winkel-Vorstellung ist hier also nicht tragfähig.

In der hyperbolischen Geometrie gilt eine der beiden Implikationen des Stufenwinkelsatzes: Sind Stufenwinkel gleich, so schneiden sich die Ausgangsgeraden nicht (dies würde ja auch zu Dreiecken mit mehr als 180 Grad Innenwinkelsumme führen). Allerdings gibt es Geraden, die sich nicht schneiden und bei denen Stufenwinkel nicht gleich sind, und solche, die sich nicht schneiden, aber keine gemeinsame Orthogonale haben. Ferner kann die Differenz der Stufenwinkel je nach Transversale variieren. Für die hyperbolische Geometrie ist also die hier diskutierte Vorstellung zwar nicht allgemein, aber immerhin partiell in dem Sinne, dass die Gleichheit von Stufenwinkeln hinreichend für Parallelität ist, wenn auch nicht notwendig.

Wegen der inhärenten Quantifizierung (man muss Winkel messen können) ist die allgemeine Gekoppelte Winkel-Vorstellung sicher eine sekundäre Grundvorstellung. Bei der Orthogonalenvorstellung könnte man argumentieren, dass Beispiele rechter Winkel in unserer Lebenswelt ubiquitär und so unmittelbar erfahrbar sind (Kanten eines Blattes Papier, Straßenkreuzungen etc.) sowie eine Übersetzungsrolle zwischen Mathematik und Realität haben. So wird bspw. auf einer Werkbank ein Brett orthogonal zu einem Lineal positioniert, um parallel zu sägen. In diesem Sinne kann man hier auch von einer primären Grundvorstellung sprechen.

4.3.6 Die Faktorraumvorstellung

Die Faktorraumvorstellung ergibt sich hauptsächlich aus der Analyse der Vorlesungsskripte. Betrachtet man den Vektorraum $\mathbb{R}^n$ und darin einen 1-dimensionalen Unterraum, so sind die Elemente des entstehenden Faktorraums parallele Geraden. Man kann diese Elemente auch als affine Unterräume bzw. als Verschiebungen desselben Untervektorraums auffassen.

Der Faktorraum ist definiert als

$$V/U \coloneqq \{[v] | v \in V\},$$

wobei V Vektorraum, U Unterraum und $[v]$ Äquivalenzklasse der Äquivalenzrelation $\sim$, die folgendermaßen definiert ist:

$$v_1 \sim v_2 : \Leftrightarrow v_1 - v_2 \in U \text{ für } v_1, v_2 \in U.$$

D. h., v_1 und v_2 sind äquivalent, wenn sie sich um einen Vektor aus U unterscheiden bzw. wenn die Gerade durch v_1 und v_2 parallel zu U ist.

Fachliche Voraussetzungen für diese Grundvorstellung sind dementsprechend umfangreich: Benötigt wird die Kenntnis von Vektor- und Faktorräumen, von Abbildungen (insbesondere der Verschiebungsabbildung) sowie von Äquivalenzrelationen.

Da für diese Vorstellung Definitionen und Konzepte Voraussetzung sind, die nur für Vektorräume definiert sind, ist sie nur im Kontext der Linearen Algebra sinnvoll und hier eine allgemeine Grundvorstellung. Damit stellt sich die Faktorraumvorstellung für die nicht-euklidische Geometrie als nicht anschlussfähig heraus.

Bei der Faktorraumvorstellung handelt es sich eindeutig um eine sekundäre Grundvorstellung. Sie verbindet den Begriff der parallelen Geraden mit „bestehenden Vorstellungen und Darstellungen weiterer mathematischer Begriffe" (Greefrath et al. 2016, S. 19): Vektorraum, Unterraum, Faktorraum und der Vorstellung von eindimensionalen Unterräumen als Geraden.

Für die Faktorraumvorstellung ist anzumerken, dass das Konzept der parallelen Geraden durch die Übersetzung in die Sprache der Linearen Algebra abstrakter und weniger anschaulich wird. Es stellt sich die Frage, ob hier die Forderung der Sinnkonstituierung erfüllt wird. Gleichzeitig könnte hier eine Sinnkonstituierung in Richtung einer formaleren Ebene stattfinden. Naheliegender wäre es aber, die geometrische Interpretation durch parallele Geraden als Grundvorstellung für das Konzept des Faktorraums zu formulieren.

5. Diskussion

Alle Vorstellungen sind in der euklidischen Geometrie tragfähig und daher Grundvorstellungen. In den betrachteten nicht-euklidischen Kontexten unterscheiden sich die Vorstellungen danach, ob sie „verfeinert" werden müssen oder komplett „kollabieren". So muss z. B. in der hyperbolischen Geometrie das Konzept der parallelen Geraden auf grenzparallele Geraden eingeschränkt werden, damit die Richtungsvorstellung hier tragfähig ist. In der projektiven Geometrie hingegen gibt es keine Möglichkeit, die Richtungsvorstellung so zu verfeinern, dass sie in diesem Kontext anschlussfähig ist. Sie ist dort keine Grundvorstellung. Die Betrachtung der Anschlussfähigkeit der verschiedenen Vorstellungen kann in der Hochschulgeometrie als Teil des Prozesses der Formulierung von Grundvorstellungen gesehen werden und gleichzeitig Umbrüche aufdecken, die Studierende im Sinne des Conceptual Change überwinden müssen.

Zudem stellt der Einbezug empirischer Ergebnisse durch den Fragebogen in der Formulierung der Grundvorstellungen eine sinnvolle Ergänzung dar, da so eine weitere Grundvorstellung (die Verschiebungsvorstellung) formuliert werden konnte.

Für die Hochschulmathematik zeigt sich, wie schon Roos (2020) betont hat, dass der dynamische Aspekt der Grundvorstellungen eine besondere Rolle spielt. In den mathematischen Gebieten findet eine Erweiterung um verschiedene Kontexte statt, insbesondere in der Geometrie zeigt sich das anhand der nicht-euklidischen Geometrie. Grundvorstellungen zu mathematischen Konzepten müssen somit immer vor dem jeweiligen Kontext betrachtet und hier auf Tragfähigkeit überprüft werden.

	Euklidische Ebene	Sphäre	Projektive Ebene	Hyperbolische Ebene
Abstandsvorstellung	✓	✓ ✗	✓ ✗	✗
Richtungsvorstellung	✓	✓	✗	✔
Schnittpunktvorstellung	✓	✓	✓	✓
Verschiebungsvorstellung	✓	✗	✗	✗
Gekoppelte-Winkel-Vorstellung	✓	✗	✗	✔
Faktorraumvorstellung	✓	✗	✗	✗

Tab. 1: Übersichtstabelle zur Tragfähigkeit der Grundvorstellungen.

Legende: Grüne Haken ✓ bedeuten, dass die Grundvorstellung in dem angegeben Raum tragfähig ist. Graue Haken ✔ stehen für bedingte Tragfähigkeit und rote Kreuze ✗ dafür, dass die Grundvorstellung nicht tragfähig ist.

Die Unterteilung in partielle und allgemeine Grundvorstellungen (Roos, 2020) findet nicht nur auf Aussage-Ebene, sondern auch auf begrifflicher Ebene statt: Begriffe divergieren, wie sich anschaulich anhand der Begriffe „parallele Geraden" und „Äquidistante" in der hyperbolischen Geometrie zeigt.

Zudem liegt der Fokus in der normativen Ebene auf sekundären Grundvorstellungen, wie schon Clüver und Salle (2020) erwähnt haben. Der Umfang mathematischer Inhalte und Konzepte nimmt in der Hochschule zu. Das Erkennen von Zusammenhängen zwischen diesen wird für das Begriffsverständnis und eine Sinnkonstituierung immer relevanter. Der Realkontext verliert dabei an Bedeutung. Die Sinnkonstituierung findet also zunehmend „innermathematisch" statt.

Für weitere Forschung zu Grundvorstellungen in der Hochschulmathematik sollte darauf geachtet werden, mögliche Grundvorstellungen in verschiedenen Kontexten zu betrachten und sie dort auf ihre Tragweite bzw. Anschlussfähigkeit zu überprüfen.

Dieser Beitrag zeigt zudem die Relevanz des Grundvorstellungskonzepts für den Lernprozess von Studierenden und die universitäre Lehre auf. Die Formulierung der Grundvorstellungen und dabei insbesondere die Analyse der Tragfähigkeit in verschiedenen geometrischen Kontexten können Umbrüche aufdecken, die die Studierenden leisten müssen. Mögliche Schwierigkeiten im Lernprozess können so im Voraus antizipiert werden.

In der Lehre kann der Fokus bei der Einführung der nicht-euklidischen Geometrie z. B. auf die Vorstellungsumbrüche gelegt werden. Spezifische Aufgaben, die die Anschlussfähigkeit der Grundvorstellungen in den Blick nehmen, können vorlesungsbegleitend für ein besseres Verständnis gestellt werden. Studierenden kann so dabei geholfen werden, ihre bestehenden Vorstellungen neu zu ordnen und auftretende Konflikte zu lösen.

6. Zusammenfassung und Ausblick

In Tabelle 1 wird die Tragfähigkeit der verschiedenen Grundvorstellungen in den jeweiligen mathematischen Kontexten zusammenfassend dargestellt.

Für den Lernprozess von Studierenden ergibt sich, dass sie in Bezug auf das Konzept der parallelen Geraden in der Hochschulgeometrie Umbrüche leisten und ihre Vorstellungen neu organisieren müssen. Die Identifikation von Grundvorstellungen und damit einhergehend der Grundvorstellungsumbrüche ist somit für die Lehre in der Hochschulgeometrie relevant.

Ein nächster Schritt könnte die Skizzierung geeigneter Lernwege für Studierende sowie die Anfertigung von Arbeitsmaterialien für die Überwindung der Umbrüche und die Ausbildung von Grundvorstellungen in der nicht-euklidischen Geometrie sein.

Die Schulbuchanalyse hat gezeigt, dass die Studierenden bereits in der Schule die Möglichkeit haben, eine Vielzahl an Eigenschaften paralleler Geraden (in der euklidischen Ebene, ohne dass dies explizit gemacht wird) kennenzulernen und unter Umständen eine Vielzahl an Vorstellungen mit in die Hochschule und insbesondere in die Hochschulgeometrie bringen. Es ist davon auszugehen, dass sie unterschiedliche Präferenzen für die verschiedenen Zugänge und eben auch für die später resultierenden Grundvorstellungen haben, die Präferenz aber auch in starkem Maße vom Aufgabenkontext abhängt. So ist z. B. zu erwarten, dass in Kontexten, in denen Geraden in der Parameterdarstellung auftauchen, eher der Zugang über die Richtung gewählt wird. Auch die Auswertung des Fragebogens hat gezeigt, dass es unterschiedliche Präferenzen gibt, da die Kategorien unterschiedlich oft vorkommen. Für zukünftige Forschung stellt sich daher die Frage, ob gewisse Grundvorstellungen bei Studierenden dominant sind und mit welchen Vorstellungen sie an die Hochschule kommen. Um dies zu klären und mögliche Fehlvorstellungen aufzudecken, wurde ein geschlossener Fragebogen entwickelt, der derzeit ausgewertet wird.

Anmerkungen

[1] Beispielsweise beschränken wir uns in der projektiven Geometrie auf die reelle projektive Ebene und klammern projektive Koordinatenebenen über anderen Körpern und höherdimensionale projektive Räume aus.

[2] Asmuth und Rips (2006) wählten zwei verschiedene Einführungen in die hyperbolische Geometrie: Der erste Zugang führte hyperbolische Postulate über die Eigenschaften von Geraden ein (z. B. hyperbolisches Parallelenaxiom). Der zweite Zugang führte dieselben Postulate über äquivalente Formulierungen mit geschlossenen Formen ein (z. B. Innenwinkelsumme eines hyperbolischen Dreiecks).

[3] Analysiert wurde Elemente der Mathematik 5 (2016), Elemente der Mathematik 10 (2016), Lambacher Schweizer 1 (2004), Lambacher Schweizer 3 (2005), Lambacher Schweizer 5 (2014), Lambacher Schweizer 6 (2004) und Lambacher Schweizer 10 (2016), Lambacher Schweizer Kursstufe (2009) und Lambacher Schweizer Kursstufe Basisfach (2019).

[4] Etwas genauer: die hyperbolische Länge von kleinen Kurvenstücken verhält sich antiproportional zu ihrem Abstand von der reellen Achse – und der Abstand zweier Punkte ist dann die hyperbolische Länge der kürzesten Verbindungskurve.

Danksagung

Wir bedanken uns herzlich bei Fabian Hagen für die Anfertigung der Abbildungen. Zudem bei allen Personen, die uns bei der Anfertigung dieses Artikels unterstützt haben, insbesondere bei Verena Spratte. Das Projekt wird gefördert von der Wilhelm Schuler-Stiftung.

Zusatzmaterial

Kategorienleitfaden

Literatur

Agricola, I. und Friedrich, T. (2015). *Elementargeometrie. 4., überarbeitete Auflage.* Springer Spektrum.

Asmuth, J. A. und Rips, L. J. (2006). Conceptual Change in Non-Euclidean Mathematics. *Proceedings of the Annual Meeting of the Cognitive Science Society*, *28*, 30–35.

Bauer, T., Gromes, W. & Partheil, U. (2016). Mathematik verstehen von verschiedenen Standpunkten aus – Zugänge zum Krümmungsbegriff. In A. Hoppenbrock, R. Biehler, R. Hochmut, H.-G. Rück (Hrsg.), *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase. Herausforderungen und Lösungsansätze* (S. 483–499). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-10261-6

Baum, M., Bellstedt, M., Buck, H., Dürr, R., Freudigmann, H. & Haug, F. (2004). *Lambacher Schweizer 1. Mathematik für Gymnasien*. Baden-Württemberg. Ernst Klett Verlag.

Bender, P. (1991). Ausbildung von Grundvorstellungen und Grundverständnissen - ein tragendes didaktisches Konzept für den Mathematikunterricht - erläutert an Beispielen aus den Sekundarstufen. In H. Postel, A. Kirsch, W. Blum (Hrsg.), *Mathematik lehren und lernen, Festschrift für Heinz Griesel* (S. 48–60). Hannover: Schroedel.

Berchtold, F. (2016*). Geometrie für Lehramtskandidaten.* [Skript]. Universität Konstanz.

Berchtold, F. (2017*). Geometrie.* Springer Spektrum.

Biza, I., Christou, C. & Zachariades, Z. (2008). Student perspectives on the relationship between a curve and its tangent in the transition from Euclidean Geometry to Analysis*, Research in Mathematics Education*, *10*(1), 53–70. https://doi.org/10.1080/14794800801916457

Brandt, D., Greulich, D., Jürgensen, T., Lind, D., Reimer, R., Schmitt-Hartmann, R. & Zimmermann, P. (2005). *Lambacher Schweizer 3. Mathematik für Gymnasien*. Baden-Württemberg. Ernst Klett Verlag.

Brandt, D., Greulich, D., Jürgensen-Engl, T., Reimer, R., Schmitt-Hartmann, R. & Zimmermann, P. (2004). *Lambacher Schweizer 6. Mathematik für Gymnasien*. Baden-Württemberg. Ernst Klett Verlag.

Buck, H., Freudigmann, H., Greulich, D., Sandmann, R. & Schatz, T. (2014). *Lambacher Schweizer 5. Mathematik für Gymnasien*. Baden-Württemberg. Ernst Klett Verlag.

Clüver, T. und Salle, A. (2020). Grundvorstellungen – sichere Brücken oder ungewisse Pfade in die Hochschulanalysis? In H.-S. Siller, W. Weigel, W. & J. F. Wörler (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020* (S. 1329–1332). WTM. http://dx.doi.org/10.17877/DE290R-21268

Dohrmann, C. & Kuzle, A. (2014). Unpacking Children's Angle "Grundvorstellungen": The Case of distance "Grundvorstellung" of 1° angle. In C. Nicol, P. Liljedahl, S. Oesterle & D. Allan (Hrsg.*), Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36*, Vol. 2 (S. 409–416). PME.

Dohrmann, C. & Kuzle, A. (2015). Winkel in der Sekundarstufe I – Schülervorstellungen erforschen. In: Ludwig, M., Filler, A., Lambert, A. (Hrsg.), *Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen*. Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-06835-6_3

Eschenburg, J.-H. (2020). *Geometrie – Anschauung und Begriffe.* Springer Spektrum.

Filler, A. und Lambert, A. (2014). Arbeitskreis Geometrie: „Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen

– Ziele und Visionen 2020". *Mitteilungen der GDM, 96*, 31–34.

Freudenthal, H. (1974). Sinn und Bedeutung der Didaktik der Mathematik, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 24*(7), 296-311.

Freudigmann, H., Greulich, D., Haug, F., Rauscher, M., Sandmann, R. & Schatz, T. (2016). *Lambacher Schweizer 10. Mathematik für Gymnasien*. Baden-Württemberg. Ernst Klett Verlag.

Freudigmann, H., Baum, M., Bellstedt, M., Brandt, D., Buck, H., Dürr, R., Greulich, D., Haug, F., Riemer, W., Sandmann, R., Schmitt-Hartmann, R., Zimmermann, P. & Zinser, M. (2009). *Lambacher Schweizer. Mathematik für Gymnasien. Kursstufe*. Baden-Württemberg. Ernst Klett Verlag.

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V. & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-48877-5

Greulich, D., Haug, F., Kölle, M., Rauscher, M., Roy, R., Sandmann, R. & Schatz, T. (2019). *Lambacher Schweizer. Mathematik für Gymnasien. Kursstufe Basisfach*. Baden-Württemberg. Ernst Klett Verlag.

Griesel, H., Postel, H., Suhr, F., Ladenthin, W. & Lösche, M. (Hrsg.) (2016). *Elemente der Mathematik*. Baden-Württemberg. 5. Schuljahr. Westermann Schroedel.

Griesel, H., Postel, H., Suhr, F., Ladenthin, W. & Lösche, M. (Hrsg.) (2016). *Elemente der Mathematik*. Baden-Württemberg. 10. Schuljahr. Westermann Schroedel.

Hattermann, M. (2015). Grundvorstellungsumbrüche beim Übergang zur 3D-Geometrie. In M. Ludwig, A. Filler & A. Lambert (Hrsg.), *Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen* (S. 75–86). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-06835-6_6

Henn, H. W. & Filler, A. (2015). *Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra*. Springer.

Hilken, L. (2021). Das Seminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen" – Untersuchungen zu mathematikbezogenen Überzeugungen und zur Vernetzung von Linearer Algebra und Analysis [Dissertation, Eberhard-Karls Universität Tübingen]. http://dx.doi.org/10.15496/publikation-60821

Kasten, H. und Vogel, D. (2017). *Einführung in die Geometrie – Sommersemester 2015*. [Skript]. Universität Heidelberg.

Kaufmann, S. H. (2021). Schülervorstellungen. In Schülervorstellungen zu Geradengleichungen in der vektoriellen Analytischen Geometrie (S. 17–26). Springer Spektrum.

Klinger, M. (2019). Grundvorstellungen versus Concept Image? Gemeinsamkeiten und Unterschiede beider Theorien am Beispiel des Funktionsbegriffs. In A. Büchter, M. Glade, R. Herold-Blasius, M. Klinger, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.), *Vielfältige Zugänge zum Mathematikunterricht* (S. 61–75). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-24292-3_5

Kuckartz, U. (2018). *Qualitative Inhaltsanalyse. Methoden, Praxis, Computerunterstützung*. Beltz Juventa.

Landis, J. R. & Koch, G. G. (1977). The Measurement of Observer Agreement for Categorical Data. *Biometrics, 33*(1), 159-174. https://doi.org/10.2307/2529310

Ludwig, A., Filler, A. & Lambert, A. (Hrsg.) (2015). *Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen.* Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-06835-6

Mai, T., Feudel, F. & Biehler, R. (2017). A vector is a line segment between two points? - Students' concept definitions of a vector during the transition from school to university. In T. Dooley & G. Gueudet (Hrsg.), *CERME 10*, Feb 2017, Dublin, Ireland. Hal-01941328

Markwig, T. (2011). *Grundlagen der Mathematik* (SoSe und WiSe 10/11). [Skript]. Technische Universität Kaiserslautern.

Paravicini, W. (2021). *Vorlesung Geometrie (WiSe 20/21).* [Skript]. Universität Tübingen.

Prediger, S. (2005). „Auch will ich Lernprozesse beobachten, um besser Mathematik zu verstehen." Didaktische Rekonstruktion als mathematikdidaktischer Forschungsansatz zur Restrukturierung von Mathematik. *mathematica didactica, 28*(1), 23-47.

Radloff, I. (2020). *Geometrie (VL und SE und mehr).* [Skript]. Universität Tübingen.

Rembowski, V. (2015). *Eine semiotische und philosophisch-psychologische Perspektive auf Begriffsbildung im Geometrieunterricht Begriffsfeld, Begriffsbild und Begriffskonvention und ihre Implikationen auf Grundvorstellungen*. (Dissertation, Mathematik). Universität des Saarlandes. http://dx.doi.org/10.22028/D291-26661

Roos, A. (2020). *Mathematisches Begriffsverständnis im Übergang Schule – Universität. Verständnisschwierigkeiten von Mathematik an der Hochschule am Beispiel des Extrempunktbegriffs*. Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-29524-0

Roth, J. (2011). Geometrie im Kopf – Bewegliches Denken nutzen und fördern. *Mathematik lehren, 167*, 28-31.

Roth, J. (2012). Geometrische Körper - Erkennen und Sortieren als Grundlage der Begriffsbildung. *Fördermagazin, 02*/2012. 13-17.

Salle, A. und Clüver, T. (2021). Herleitung von Grundvorstellungen als normative Leitlinien – Beschreibung eines theoriebasierten Verfahrensrahmens. *Journal für Mathematik-Didaktik, 42*, 553–580. https://doi.org/10.1007/s13138-021-00184-5

Sträßer, R. (2015). Grundbegriffe, Grundvorstellungen und Nutzungen der Geometrie. In M. Ludwig, A. Filler & A. Lambert (Hrsg.), *Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen* (S. 1–11). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-06835-6_1

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151-169.

Trudeau, R. (1998). *Die geometrische Revolution. Aus dem Amerikanischen von Christof Menzel.* Birkhäuser. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-7829-6

Ullmann, P. (2015). Grundvorstellungen zur Schulgeometrie. In M. Ludwig, A. Filler & A. Lambert (Hrsg.), *Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen* (S. 13–28). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-06835-6_2

Vom Hofe, R. (1992). Grundvorstellungen mathematischer Inhalte als didaktisches Modell. *Journal für Mathematik-Didaktik, 13(4)*, 345-364.

Vom Hofe, R. (1995a). Grundvorstellungen – Basis für inhaltliches Denken. *mathematik lehren, 78*, 4–8.

Vom Hofe, R. (1995b). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Spektrum Akademischer Verlag.

Vom Hofe, R. (2014). Primäre und sekundäre Grundvorstellungen. In J. Roth (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1267–1270). WTM.

Vosniadou, S. & Verschaffel, L. (2004). Extending the conceptual change approach to mathematics learning and teaching. *Learning and Instruction*, *14*, 445-451.

Weber, B. J. & Lindmeier, A. (2020). Viel Beweisen, kaum Rechnen? Gestaltungsmerkmale mathematischer Übungsaufgaben im Studium. *Mathematische Semesterberichte, 67*(2), 263–284. https://doi.org/10.1007/s00591-020-00274-4

Anschrift der Verfasser:innen

Anja Fetzer
Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Arbeitsbereich Mathematik und ihre Didaktik
Auf der Morgenstelle 10, C6A05
72076 Tübingen
fetzer@math.uni-tuebingen.de

Walther Paravicini
Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Arbeitsbereich Mathematik und ihre Didaktik
Auf der Morgenstelle 10, C6A08
72076 Tübingen
w.paravicini@uni-tuebingen.de