Vorstellungen von Lehramtsstudierenden zum Grenzwertbegriff

CHRISTOPH ABLEITINGER, WIEN; STEFAN GÖTZ, WIEN & ROLAND STEINBAUER, WIEN

***Zusammenfassung**: Belastbare Vorstellungen der Mathematiklehrer:innen zu tiefliegenden mathematischen Konzepten sind eine unabdingbare Voraussetzung für einen qualitativ hochwertigen Mathematikunterricht, der gleichzeitig sinnstiftend für die Schüler:innen ist. In der Regel gibt es zu bestimmten mathematischen Begriffen mehrere (normative) Grundvorstellungen, die verschiedene Facetten des in Rede stehenden mathematischen Konzepts beleuchten. Im Artikel werden fachdidaktische Konzepte von Vorstellungen von Lernenden diskutiert und auf den Grenzwertbegriff von Folgen angewandt. Dazu wird eine empirische Studie vorgestellt, in der die vor und nach einer Intervention (Besuch einer didaktisch ausgerichteten Analysislehrveranstaltung) schriftlich geäußerten Vorstellungen von Lehramtsstudierenden erhoben und klassifiziert wurden. Es zeigt sich, dass explizites Thematisieren normativer Grundvorstellungen zu einer signifikanten (wenn auch geringen) Qualitätssteigerung im Sinne dieses Konzepts führt.*

***Abstract:** Reliable ideas about deep mathematical concepts of mathematics teachers are an indispensable prerequisite for high-quality mathematics lessons that are also meaningful for the students.There are several (normative) basic ideas ("Grundvorstellungen") for certain mathematical concepts, which illuminate different facets of the mathematical concept in question. In this article, didactic concepts of ideas of learners are discussed and applied to the concept of the limit of sequences. For this purpose, an empirical study is presented, which collects and classifies student teachers' written formulations before and after an intervention (attendance of a didactically oriented analysis course). It turns out that explicitly addressing normative basic ideas ("Grundvorstellungen") leads to a significant (albeit small) increase in quality in terms of this concept.*

1. Einleitung

Der Grenzwertbegriff als *der* zentrale Begriff der Analysis ist eminent mit dem Begriff des „Unendlichen" verbunden und hat eine Jahrtausende alte Entwicklungsgeschichte. Seine heute gebräuchliche Formulierung in der Mathematik geht auf Karl Weierstraß (1815 – 1897) zurück und verdichtet das lange Ringen um diese Begrifflichkeiten in einer formalen Definition, die für das technische Hantieren mit Grenzwerten unerlässlich ist. Allerdings blendet diese Definition (zumindest scheinbar) in ihrer abstrakten Nüchternheit viele intuitive und präformale Vorstellungen aus bzw. versteckt diese geradezu. Daher hat naturgemäß auch die Diskussion über das Lehren und Lernen des Grenzwertbegriffs eine lange Geschichte (Abschnitt 2.2). Für den Sekundarschulbereich liegen dazu umfangreiche empirische Untersuchungen vor (Friedrich, 2001; Hahn & Prediger, 2008; Marx, 2013; Moormann, 2009). Unser Beitrag reiht sich in die aktuelle Erweiterung des Forschungsfeldes in Richtung Hochschuldidaktik (vgl. Ostsieker, 2020) ein.

Eine wichtige Frage in der Lehramtsausbildung ist, wie sie den Aufbau von belastbaren Konzepten und Vorstellungen zu zentralen Begriffen der (Schul-) Mathematik effizient erreichen bzw. fördern kann. Insbesondere soll und muss die Lehramtsausbildung dies unter den erschwerten Bedingungen von wenig zur Verfügung stehender Zeit und mangelnden Ressourcen für die fachliche bzw. fachdidaktische Ausbildung bewältigen. In den Lehramtscurricula fehlt (oft) der Raum, um durch umfangreiches Operieren Erfahrungen zu sammeln, und damit einen verständigen Umgang mit den Begriffen zu erreichen, wie es im Fachstudium (eher) üblich ist. Dazu kommt noch, dass weiterführende Themen (der Analysis, z. B. Topologie oder Funktionalanalysis) in der Lehramtsausbildung nicht mehr angesprochen werden können, so dass oft die Sinnstiftung analytischer Konzepte zu kurz kommt (etwa Cauchy-Folgen, vgl. Bender, 1991a). Dazu zeigt die Empirie (Cornu, 2002; Williams, 1991), dass Lehramtsstudierende zwar oft über formales Wissen verfügen, aber nur unzureichend entsprechende Vorstellungen aufbauen können. Auf ähnliche Befunde führen auch theoretische Reflexionen, wie z. B. jene in Bender (1991a, S. 243).

In dieser Arbeit befassen wir uns mit der Thematik, welche Repräsentationen und inhaltlichen Bedeutungen Lehramtsstudierende mit dem Grenzwertbegriff verbinden und wie sich diese im Laufe der Ausbildung verändern. Dazu analysieren wir Vorstellungen, die Universitätsstudierende zum Grenzwertbegriff einer Folge schriftlich vor und nach einer fachdidaktischen Intervention in Form einer Vorlesung äußern.

2. Historischer Abriss und Forschungsstand

2.1 Zur Genese des Grenzwertbegriffs in Forschung und Lehre

Der Grenzwertbegriff ist in seiner Entwicklung eng mit dem Unendlichkeitsbegriff verbunden. Dementsprechend traten in der historischen Entwicklung dynamische Sichtweisen, die mit dem Begriff des potentiell Unendlichen korrelieren, im Widerstreit mit statischen Sichtweisen auf, die mit dem aktual Unendlichen in Beziehung gesetzt werden können (Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm & Weigand, 2016, Abschnitt 3.1.1). Mit einer Verbindung beider Sichtweisen machte Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857) den Grenzwertbegriff für Folgen zu einem Grundbegriff der Analysis (Greefrath et al., 2016, Abschnitt 3.1.2), indem er in seinem Lehrbuch „Cours d'Analyse" von 1821 formuliert: „Wenn die einer variablen Zahlengröße successive beigelegten Werthe sich einem bestimmten Werthe beständig nähern, so daß sie endlich von diesem Werthe so wenig verschieden sind, als man irgend will, so heißt die letztere die *Grenze* aller übrigen." (zitiert nach Weigand, 2016, S. 139, Hervorhebung ebd.).

Ebenso standen in der historischen Entwicklung intuitive Vorstellungen mit formalen Zugängen zum Grenzwertbegriff im Gegensatz (Greefrath et al., 2016, Abschnitte 3.1.2, 3.1.3). Gegen Ende des 19. Jahrhunderts setzte sich in der Analysis ein streng formaler Zugang durch, der sich den stärker intuitiv orientierten früheren Darstellungen als überlegen erwies (vgl. Weigand, 1993, S. 52 f.). Seither gehört die rein statische ε-N-Definition des Grenzwerts von Folgen zum Kern der gesamten Analysis und der Grenzwertbegriff wird im Rahmen von universitären Analysis-Vorlesungen ausschließlich in dieser Form eingeführt.

Gleichzeitig mit ihrer formalen und technischen Überlegenheit blendet die ε-N-Definition notwendigerweise intuitive und – in weiterer Folge – historisch-genetische Aspekte des Grenzwertbegriffs völlig aus (vgl. z. B. Weigand, 2016, Abschnitt 3.2), was auch als Ursache für Schwierigkeiten beim Erlernen der Begrifflichkeit angesehen werden kann (ebd., Abschnitt 2.4). Wegen dieser formal aufwändigen aber notwendigen Denkweisen zur (exakten) Grundlegung des Grenzwertbegriffs dauerte es trotz der von Felix Klein (1849 – 1925) angetriebenen Meraner Reform von 1905 bis etwa zur Mitte des 20. Jahrhunderts, dass der Analysisunterricht flächendeckend im deutschsprachigen Raum im Schulkanon etabliert war. Im Rahmen von New Math wurde dann in den 1960ern der Grenzwertbegriff auf sehr formale Weise in der Schule unterrichtet (z. B. Laub, 1979, Abschnitt 3.10), was später aufgrund allgemein konstatierter Verständnisschwierigkeiten durch einen intuitiveren Zugang ersetzt wurde (Tietze, Klika & Wolpers, 1997, Abschnitt 7.1.2). Heute wird im Schulunterricht flächendeckend der auf Serge Lang (1927 – 2005) und Emil Artin (1898 – 1962) zurückgehende, propädeutische Grenzwertbegriff verwendet, siehe dazu auch Blum (1979), Blum und Kirsch (1979), Weigand (2016, S. 152) und BMBWF (2019, S. 14). In diesem Zugang wird vorbereitend auf die Differentialrechnung ein intuitiver Grenzwertbegriff für Funktionen eingeführt und Folgen verlieren somit einen Großteil ihrer Berechtigungen im Schulunterricht. Erst in der jüngeren Diskussion (vgl. Weigand, 2016 und die dort zitierte Literatur) werden Folgen wieder verstärkt ins Spiel gebracht, vor allem um im Anschluss an den und als Ergänzung zum propädeutischen Grenzwertbegriff tragfähige (Grund-)Vorstellungen zum Grenzwertbegriff (Greefrath et al., 2016, S. 105 f.) aufzubauen, die in Richtung eines fachwissenschaftlich adäquaten Verständnisses zielen. Dies bedeutet für die Lehramtsausbildung auf der Sekundarstufe, dass der Grenzwertbegriff in der gesamten Analysis (über den Folgengrenzwert hinaus) sowohl fachlich als auch fachdidaktisch nachhaltig verankert werden muss. In diesem Zusammenhang ist es angezeigt, Vorstellungen von Lehramtsstudierenden empirisch zu erheben und mit tragfähigen Grundvorstellungen zu vergleichen.

2.2 Untersuchungen zu Vorstellungen zum Folgengrenzwert

Die in Abschnitt 2.1 angesprochene Verbindung zwischen dem Grenzwertbegriff und unendlichen Prozessen spiegelt sich zumindest implizit auch in vielen der empirischen Arbeiten zur Thematik wider. In einer frühen Pionierarbeit stellte Fischbein (1978) die oft widersprüchlichen Konzeptionen dar, die Lernende mit dem Begriff des Unendlichen verbinden. In seinen empirischen Studien konnte er nachweisen, dass intuitive Konzeptionen von Schüler:innen zum Grenzprozess stärker auf die Unendlichkeit des Prozesses fokussieren, als auf die Endlichkeit des Grenzwerts. Dazu berichtet bzw. reflektiert Monaghan (1986, 2001) über Studien zu Konzeptionen vor allem von Schüler:innen im Alter von 16 bis 18 Jahren zum Unendlichen. Für unseren Beitrag ist bedeutsam, dass er den Einfluss der konkreten Fragestellungen in empirischen Untersuchungen betont, da diese unterschiedliche Aspekte der widersprüchlichen Konzeptionen der Versuchspersonen aktivieren können und so das Untersuchungsergebnis beeinflussen. Um dies in der vorliegenden Untersuchung zu unterbinden, wurde ein neutral formulierter Schreibimpuls gegeben (Abschnitt 5.3). Darüber hinaus stellt Monaghan (ebd.) fest, dass die inhärent inkonsistenten und instabilen Konzeptionen zum Unendlichen von Schüler:innen durch die im anglikanischen Raum üblichen first-year Calculus-Kurse kaum verändert werden (können). Ergänzend dazu wird in der vorliegenden Arbeit untersucht, ob eine fachdidaktische Intervention zu einer Veränderung der Vorstellungsäußerungen zum Grenzwert einer Folge führt. Dieser wurde bei unseren Proband:innen im Rahmen einer im deutschsprachigen Raum üblichen, axiomatisch-deduktiven Analysisausbildung grundgelegt.

In einem theoretischen Überblicksartikel, in dem er frühere empirische Ergebnisse reflektiert, konstatiert Cornu (2002, S. 154): “Different investigations which have been carried out show only too clearly that the majority of students do not master the idea of a limit, even at a more advanced stage of their studies. This does not prevent them from working out exercises, solving problems and succeeding in their examinations!” In diesem Zusammenhang wird wiederholt festgestellt, dass bei Problembearbeitungen nicht alleine auf die formale Definition zurückgegriffen wird, sondern dass auch intuitive Vorstellungen und (Alltags-)Assoziationen eine Rolle spielen. In den “spontaneous conceptions” oder “spontaneous ideas” kommen frühe Vorerfahrungen zum Ausdruck, die eine Lösungsfindung mehr oder weniger stark beeinflussen: “This phenomenon is well-known in the empirical and theoretical development of scientific concepts […], but it is only in the last decade that it has been fully realized that exactly the same forces operate in the apparent logic of mathematics.” (Cornu, 2002, S. 154). Es bleibt zu untersuchen, ob das explizite Reflektieren über mathematische Begriffe und Konzeptbildungen intuitive Vorstellungen bzw. (Alltags-)Assoziationen nachhaltig zugunsten fachlich tragfähiger Vorstellungen in den Hintergrund treten lässt.

Cornu betont vier kognitive Hürden beim Erlernen des Grenzwertbegriffs (“epistimological obstacles”): “The failure to link geometry with numbers” (ebd., S. 159), “The notion of the infinitely large and infinitely small” (ebd., S. 160), “The metaphysical aspect of the notion of limit” und “Is the limit attained or not?” (ebd., S. 161). Insbesondere die erste und die vierte genannte Hürde finden sich auch in unserem Beitrag wieder: vgl. Abschnitt 6.3 und Tabelle 4 in Abschnitt 5.4. Abschließend hält Cornu fest, dass in der Lehre eine klare Exposition des Grenzwertbegriffs für einen verständigen Umgang nicht ausreicht, sondern “It is far more important that the students are made aware of the complexity of the notion and to reflect on their own ideas and epistemological obstacles.” (ebd., S. 165). Auch dieses Resümee motiviert die vorliegende Untersuchung.

Ähnlich äußert sich Bender (1991a) in einer theoretischen Arbeit unter Berücksichtigung vorliegender empirischer Erkenntnisse über „Grundvorstellungen und -verständnisse“ (GVV, vgl. Bender, 1991b) von Schüler:innen, aber auch von Mathematikstudierenden beim Erlernen des Folgen- und Grenzwertbegriffs. Dabei geht er insbesondere auf „Fehlvorstellungen und -verständnisse“ (FVV) ein und identifiziert als eine wesentliche Ursache derselben dynamische Vorstellungen, die er aus didaktischer aber auch aus fachmathematischer Perspektive kritisiert. Sie führen nämlich zu einer Überbetonung des unendlichen Grenz*prozesses* auf Kosten der Endlichkeit des Grenzwertes (vgl. Fischbein, 1978). Insbesondere konstatiert er ein Scheitern beim Bemühen „die dynamischen Vorstellungen in den entscheidenden Phasen der Begriffsbildung auszuschalten und sie dann wieder zuzulassen“ (Bender, 1991a, S. 239). Weiterhin stellt er die Bedeutung dynamischer Sichtweisen auch aus fachlicher Perspektive in Frage, da Permutationen konvergenter Folgen denselben Grenzwert besitzen. Um diesbezügliche FVV zu vermeiden, propagiert er die Verwendung der bzw. des GVV „das Wesentliche einer Folge“, womit die gemeinsame Eigenschaft aller Hauptstücke einer Folge[1] gemeint ist (Bender, 1991a, Abschnitt 3).

Eine weitere Quelle für FVV sieht Bender in der Doppelnatur der Schreibweise „lim“, die eine Aufforderung darstellt, einen Grenzprozess durchzuführen und andererseits dessen Ergebnis bezeichnet. Fehlt die Akzeptanz der Lernenden für die Existenz des Ergebnisses unendlicher Prozesse (im Sinne eines aktual Unendlichen), so kommt es hier zwangsläufig zu Missverständnissen. „Die Rede vom Grenzübergang unterstützt FVV, wenn man dabei an das Ergebnis des Durchlaufens der Folge denkt; sie ist nur treffend als Bezeichnung für den Übergang von der Menge der konvergenten Folgen (Definitionsbereich) in die Menge der Grenzwerte (Wertebereich).“ (Bender, 1991a, S. 242). Abschließend betont Bender die Wichtigkeit, sinnstiftende Grundvorstellungen im Mathematikunterricht, aber auch im Hochschulstudium auszubilden. Die Früchte dieser Aufgabe zu erfassen ist ein Motiv für die vorliegende Studie.

Vorstellungen zu „unendlichen Prozessen“ untersucht auch Marx (2006, 2013) in einer empirischen, qualitativen Studie von Schüler:innenkonzeptionen. Mit Hilfe zweier Aufgabenstellungen (einem geometrischen Problem und einem Zahlenrätsel) wird untersucht, welche Präkonzepte Schüler:innen der zehnten Schulstufe (d. h. in einer Population, in deren Unterricht der Grenzwertbegriff von Folgen nicht expliziert wurde) von „unendlichen Prozessen“ und vor allem ihrem Ergebnis haben. Marx identifiziert zwei zusammenhängende Grundfragen von Schüler:innen bei der Konzeptualisierung unendlicher Prozesse: (1)

In welcher Relation stehen unendliche Prozesse zu Erfahrungen im Kontext konkreter physischer Handlungen? (2) Was soll unter dem Ergebnis eines unendlichen Prozesses verstanden werden? Frage (2) kann im Kontext von Folgen, die ja „einen unendlichen Prozess […] modellieren“ (Marx, 2013, S. 93), in die Fragen „Hat die Folge einen Grenzwert? Falls ja, welchen?“ (ebd.) übersetzt werden. Der Grenzwertbegriff „verbindet (im Falle der Existenz) Folgen mit ihrem Grenzwert“ (ebd.), vgl. auch Bender (1991a) und oben. Die Schüler:innenäußerungen bezüglich der Beziehungen endlicher (Erfahrungs-) Prozesse mit unendlichen Prozessen analysiert Marx insbesondere im Kontext der „Basic Metaphor of Inifinity“ (BMI) nach Lakoff und Núñez (2000). Dieser Ansatz mit linguistischem Hintergrund beschreibt mit Hilfe einer Metapher den Zusammenhang zwischen endlichen und unendlichen Prozessen, sowie analog zwischen dem potentiell Unendlichen und dem aktual Unendlichen. Ob dieses Spannungsfeld unendlicher Prozess – endlicher Grenzwert („Ergebnis“) auch bei Studierenden des Lehramts eine Rolle spielt, ist ein Gegenstand dieser Untersuchung.

Roh (2008) untersucht die Rolle von Studierendenvorstellungen zum Grenzwert und dabei insbesondere ihren Einfluss auf das Verständnis der formalen Grenzwertdefinition. In Interviews sollten die Proband:innen beurteilen, ob zwei vorgelegte Aussagen (unendlich viele bzw. fast alle Folgenglieder in einer beliebigen Umgebung) die Konvergenz einer Zahlenfolge korrekt beschreiben und ihre Entscheidungen begründen (Roh, 2008, S. 222). Je nach Entscheidung, welche der Aussagen (eine der beiden oder keine; beide wurden von niemandem als richtig empfunden) als korrekt eingestuft wird, identifiziert er drei Sichtweisen der Studierenden: Grenzwerte als Asymptoten, Grenzwerte als Häufungswerte und die korrekte Vorstellung. Um eine solche Beeinflussung durch eine konkrete Vorgabe zu vermeiden (vgl. Monaghan, 1986 und 2002; siehe oben in diesem Abschnitt), wählen wir wie erwähnt für unsere Untersuchung ein methodisches Vorgehen, bei dem die Studierenden direkt nach ihren primär vorhandenen Vorstellungen zum Grenzwert in einem universitären Setting befragt werden (Abschnitt 5.3).

Die Studie von Roh (2008) ist für unsere Arbeit aber auch insofern relevant, als sie zeigen konnte, dass das Verstehen der formalen Definition davon abhängt, ob die davor erworbenen Vorstellungen zum Grenzwert mit der Definition kompatibel sind.

3. Forschungsfragen

Der Aufbau und das Vorhandensein geeigneter Vorstellungen ist zentral für das Erlernen und Verstehen des Grenzwertbegriffs (Abschnitt 2.2). Propädeutisch oder in Alltagszusammenhängen erworbene Vorstellungen können das Erlernen und den flexiblen Umgang mit der fachlich zentralen ε-N-Definition des Grenzwerts unterstützen, bei fehlender Tragfähigkeit aber auch behindern (Roh, 2008). Es liegt also nahe, den vorliegenden Forschungsstand bezüglich Vorstellungen von Schüler:innen zum Grenzwertbegriff zu erweitern, indem diese Vorstellungen bei Studierenden des Lehramts erhoben werden. Diese sollen möglichst unbeeinflusst von der Fragestellung ermittelt (Abschnitt 2.2) und über die reine Deskription hinaus auf ihre Tauglichkeit als Fundament des formalen Begriffs analysiert werden. Kernfrage dieses Artikels im Sinne einer ersten Annäherung an das Ergründen vorhandener Vorstellungen zum Grenzwert einer Folge ist, wie Lehramtsstudierende den Grenzwertbegriff nach ihrer Schul- bzw. Fachausbildung im Studium (schriftlich) beschreiben. Zusätzlich zu den in Abschnitt 2.2 referierten Studien wird untersucht, wie die Qualität der erhobenen Formulierungen mit der Beurteilung der Leistungen der Studierenden in der zugehörigen Fachvorlesung korreliert und in wie weit diese durch den Besuch einer entsprechenden Schulmathematikveranstaltung verändert bzw. verbessert werden kann. Explizit:

1) Welche Vorstellungen äußern Studierende im Lehramt nach dem Besuch der fachlichen Lehrveranstaltung „Analysis in einer Variable für das Lehramt“ zum Grenzwertbegriff (einer Folge) und wie lassen sich diese kategorisieren?
2) Welche Korrelation zeigt sich zwischen diesen geäußerten Vorstellungen und der Beurteilung der fachlichen Leistungen der Studierenden in der Analysis (in der Folge als „Fachwissen“ bezeichnet)?
3) Wie verändern sich diese geäußerten Vorstellungen durch die fachdidaktische Lehrveranstaltung „Schulmathematik Analysis“, in der (normative) Grundvorstellungen zum Grenzwert einer Folge explizit thematisiert werden?

Um die geäußerten Formulierungen der Studierenden in bestehende fachdidaktische Konzepte zu Vorstellungen einordnen zu können, folgt ein Abriss über die theoretischen Grundlagen (concept image, concept definition und Grundvorstellungen). Dabei dienen die in der Literatur formulierten Grundvorstellungen (Greefrath et al., 2016, S. 105 f.) als Linse, durch die die von uns erhobenen Studierendenformulierungen betrachtet werden.

4. Theoretische Konzepte zu Vorstellungen von Lernenden

4.1 Concept Image und Concept Definition

Für die theoriegeleitete Beantwortung der Forschungsfragen in Abschnitt 3 verwenden wir als übergeordneten begrifflichen Rahmen die Dualität von concept image und concept definition nach Tall und Vinner (1981, S. 152): Der Ausdruck "concept image" beschreibt dabei "the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes." (oranges Rechteck in Abbildung 1), welche durch unterschiedliche Erfahrungen ausgebaut bzw. verändert wird. Zu diesen Erfahrungen gehören das propädeutische Wissen zum betreffenden Begriff aus früheren Lernsituationen, aber auch Alltagserfahrungen mit dem Begriff (vgl. Abschnitt 2.2), metaphorisches Wissen usw. Cornu (2002, S. 154) spricht in diesem Zusammenhang von präformalen Vorstellungen ("spontaneous conceptions"), die in die Konzeptbildung mathematischer Begriffe miteinfließen (unteres Rechteck in Abbildung 1). Dazu kommt noch: "When a student participates in a mathematics lesson, these ideas do not disappear – contrary to what may be imagined by most teachers. These spontaneous ideas mix with newly acquired knowledge, modified and adapted to form the students *[sic!]* personal conceptions." (Cornu, 2002, S. 154). Diesen Belegen folgend fassen wir die spontaneous conceptions daher als echte Teilmenge des concept images auf (Abbildung 1). Sie wirken im Unterricht bzw. im individuellen Lernprozess insofern, als sie mit dem neu zu erwerbenden Wissen interagieren und so zur Entstehung bzw. Veränderung der concept images der Lernenden beitragen. Das concept image zu einem Begriff kann dabei latent wirken und ist durch externe Reize veränderbar. Zudem können unterschiedliche Situationen oder Impulse von außen dazu führen, dass nur bestimmte Teile des concept images aktiviert werden (evoked concept image, Tall & Vinner, 1981, S. 152).

Auf der anderen Seite steht die sogenannte "concept definition", die beschrieben wird als "form of words used to specify that concept" (Tall & Vinner, 1981, S. 152). Dabei wird unterschieden zwischen einer "formal concept definition" (ebd.), wenn sie vom Großteil der wissenschaftlichen Gemeinschaft akzeptiert wird, und einer "personal concept definition" (ebd.), wenn es sich um eine durch eine Person individuell rekonstruierte und in eigenen Worten formulierte „Definition" des Begriffs handelt, die unter Umständen auch fehlerhaft sein kann (Abbildung 1 oben). Diese personal concept definition generiert ihr eigenes concept image (das Tall und Vinner (1981, S. 153) "concept definition image" nennen: Pfeil in Abbildung 1), d. h. sie führt zu Bildern des Begriffs und zu Vorstellungen über den Begriff, die sich von den Vorstellungen, die die Person aus Vorerfahrungen erworben hat, durchaus unterscheiden können. Die durch die concept definition induzierten Vorstellungen können dabei mit anderen Teilen des concept images verbunden sein, es kann aber auch zu Inkohärenzen kommen. Generell ist also von Interesse, concept images von Lernenden (das gilt für Schüler:innen wie für Studierende) sichtbar zu machen und sie bei Lernanlässen auf ihre Tauglichkeit zur Bearbeitung von Aufgaben oder zur Lösung von Problemen zu prüfen und auf ihre Kompatibilität mit der formal concept definition zu hinterfragen.

Ist diese Tauglichkeit nicht gegeben, dann müssen Änderungen bei den concept images der Lernenden herbeigeführt werden. Die Ausgangslage wird im "model of cognitive change" bei Williams (1991, S. 220) beschrieben. Es wird dabei das individuelle Wissen von Lernenden mit Paradigmenwechseln in der Wissenschaft verglichen (vgl. Abschnitt 2). Drei Motive bzw. Bedingungen werden für einen Konzeptwechsel genannt (ebd.): Erstens muss eine Unzufriedenheit mit den vorhandenen Konzepten gegeben sein, zweitens müssen verständliche Alternativen vorliegen und diese müssen drittens als gewinnbringend wahrgenommen werden. Es müssen also (kognitive) Dissonanzen detektiert werden und alternative Konzepte müssen individuell überzeugen. Ob diese Bedingungen allerdings eintreten bzw. schon erfüllt sind, hängt von einigen Faktoren ab: "These include epistemological and metaphysical commitments (e.g., beliefs about what constitutes successful proof and what constitutes mathematical truth), knowledge of other fields (e.g., competing conceptions of limit and the use of the word *limit* in other contexts), the nature of the problems students encounter, and the presence of analogies and metaphors as an aid to understanding." (ebd.).

Will man das concept image von Studierenden zum Grenzwertbegriff beschreiben und auf seine Tragfähigkeit hin prüfen, ist es hilfreich, sich zunächst Gedanken über erstrebenswerte Vorstellungen zum Grenzwert zu machen. Dabei hilft das Konzept der Grundvorstellungen (GV) nach vom Hofe (1995). Es dient als theoretische Basis zur Beschreibung der mentalen Repräsentationen mathematischer Begriffe (Abschnitt 4.2). Ursprünglich für den Einsatz in der Schuldidaktik entwickelt, übertragen wir das Grundvorstellungskonzept in den Kontext der Hochschuldidaktik (vgl. dazu Abschnitt 5.1). Grundvorstellungen beschreiben ganz allgemein die Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten und individuellen Begriffsbildungen. Diese sind sowohl für Schüler:innen als auch für zukünftige Lehrer:innen relevant.

Lehrer:innen werden in ihrer Ausbildung ebenso wie Schüler:innen mit für sie neuen mathematischen Konzepten konfrontiert, sodass sich genauso ein Spannungsfeld zwischen (normativen) Grundvorstellungen und individuellen mentalen Konstrukten bildet. Wir verwenden daher dieses Konzept in unserer Untersuchung als Werkzeug zur Klassifizierung und Beurteilung der Ausprägungsqualität (Maß für die Übereinstimmung mit der entsprechenden Grundvorstellung, siehe Abschnitt 5.4) der von den Studierenden geäußerten Vorstellungen. Die Auseinandersetzung mit Vorstellungen zu einem mathematischen Begriff hat eine *normative*, eine *deskriptive* und eine *konstruktive* Dimension (vom Hofe & Blum, 2016). Grundvorstellungen sind das Ergebnis einer fachlichen und stoffdidaktischen Analyse eines mathematischen Begriffs und sind als solche normativ (Salle & Clüver, 2021). Sie stellen das im Unterricht anzustrebende und im besten Fall zu erreichende Vorstellungsspektrum dar und haben insofern in der Vorschau Relevanz für die Unterrichtsplanung und -gestaltung (Weber, 2016). In unserer Untersuchung sollen sie als Referenzrahmen für die Beurteilung der Qualität der Studierendenvorstellungen genutzt werden. Grundvorstellungen stellen somit jenen Teil des concept images dar (vgl. vom Hofe & Blum, 2016, S. 237), der durch die Fachwissenschaft allgemein akzeptiert ist (siehe Abbildung 1: blau markiertes Rechteck). Schüler:innen- bzw. Studierendenvorstellungen beschreiben die individuellen mentalen Repräsentationen der Lernenden (oranges Rechteck in Abbildung 1), die auch Grundvorstellungen enthalten können und dem concept image entsprechen. Das Erkennen und Erfassen von Diskrepanzen zwischen (normativen) Grundvorstellungen und individuellen Vorstellungen hat höchste Bedeutung für die Lehr- und Unterrichtspraxis – sie liefern einen Ausgangspunkt für eine theoretisch fundierte Intervention im Lernprozess, die im besten Fall zu einer konstruktiven Auflösung der Diskrepanzen führt.

4.2 Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff

In der Literatur (Greefrath et al., 2016; Weigand, 2016) werden drei (normative) Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff von Folgen genannt und näher beschrieben. Die erste davon ist die Annäherungsvorstellung. Sie bezieht sich auf die Reihenfolgenvorstellung des Folgenbegriffs und liefert im Sinne der Vorstellung vom potentiell Unendlichen als einem prinzipiell beliebig fortsetzbaren Prozess die grundlegende Intuition für den Limesbegriff.

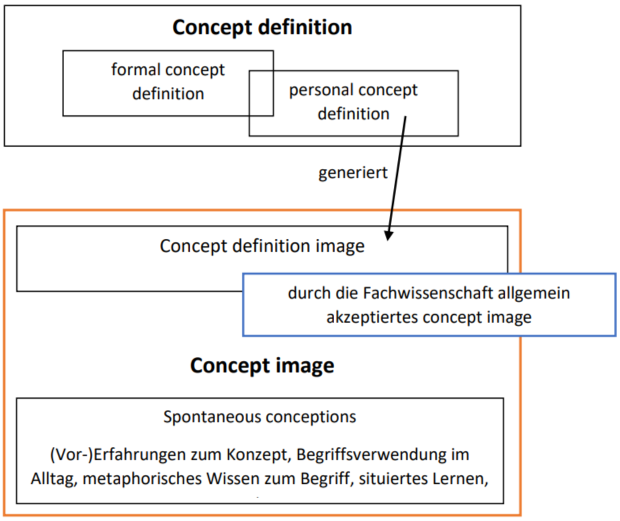


Abb. 1: Beziehungen zwischen concept definition und concept image (Tall & Vinner, 1981), Verbindungen zum Grundvorstellungskonzept (vom Hofe, 1995) sind farblich markiert (blau: normative Grundvorstellungen, orange: individuelle Lernendenvorstellungen, sie entsprechen dem concept image).

Eine Ausformulierung dieses intuitiven Zugangs ist (Greefrath et al., 2016, S. 105; Weigand, 2016, S. 144):

> *Annäherungsvorstellung (AV):* Das Zustreben oder Annähern der Werte der Folgenglieder an einen festen Wert oder ein Objekt liefert die Annäherungsvorstellung als intuitive Vorstellung vom Grenzwert.

Das mentale Bild der dynamischen Bewegung einer Folge hin zum Grenzwert wird üblicherweise schon in frühen Erfahrungen mit unendlichen Prozessen verankert, zeitlich meist deutlich vor einem formalisierten Zugang zum Grenzwertbegriff (Hitt & Lara-Chavez, 1999). Dieses Bild ist daher häufig integraler Bestandteil des concept images, mit dem Studierende an die Universität kommen. Es wirkt auch dann weiter, wenn sie die formale Grenzwertdefinition bereits kennengelernt und in Übungsaufgaben verwendet haben (Przenioslo, 2004). Das äußert sich in verbalen Formulierungen wie „nähert sich“ oder „kommt immer näher“, die der Präzision der Grenzwertdefinition bei genauer Betrachtung keinesfalls standhalten können (Cornu, 2002; Oehrtman, 2002; Tall & Vinner, 1981; Williams, 1991). Auch Formulierungen wie „kommt beliebig nahe“ können den Grenzwertbegriff letztlich nicht ausreichend exakt fassen (es könnte sich bloß um eine Teilfolge handeln). Mit der rein dynamischen Sichtweise gelingt es offenbar schwer, die formale Definition der Folgenkonvergenz richtig zu beschreiben (vgl. Bender, 1991a). Es braucht, und das zeigt auch die historische Entwicklung des Grenzwertbegriffs (vgl. Abschnitt 2.1), einen Perspektivenwechsel (Ableitinger & Heitzer, 2013).

Der dynamischen Sichtweise steht die statische Sichtweise entgegen, die den Prozess des fortgesetzten Durchlaufens einer Folge von ihrem Ende her denkt und damit die aktual unendliche Existenz des Grenzwerts zum Dreh- und Angelpunkt macht. Dieser Zugang ist es auch, der der formalen Definition des Grenzwertbegriffs im Rahmen der Analysis zugrunde liegt (vgl. Weigand, 2016). Die zweite Grundvorstellung zum Grenzwert kann konkret wie folgt formuliert werden (Greefrath et al., 2016, S. 105; Weigand, 2016, S. 144 f.):

> *Umgebungsvorstellung (UV):* Zu jeder noch so kleinen Umgebung um den Grenzwert liegen ab einem bestimmten Folgenglied alle weiteren Glieder in dieser Umgebung.

Diese Vorstellung bringt zum Ausdruck, dass zu jeder vorgegebenen Umgebung um den vermuteten Grenzwert eine natürliche Zahl (als Folgenindex interpretiert) zu finden ist, deren zugeordnetes Folgenglied und alle weiteren (!) der oben angeführten Bedingung genügen (Weigand, 2016). Ohne die Ausbildung dieser statischen Sichtweise ist die Begriffsbildung ohne Fundament, und die Grenzwertdefinition bleibt unverstanden (Ableitinger & Heitzer, 2013; Bender, 1991a). Der Grenzwertbegriff ist jedoch das unverzichtbare Fundament der Differential- und Integralrechnung. Ohne solide Vorstellungen zum Grenzwert ist tieferes, verständiges Eindringen in die Analysis nicht möglich.

Dazu gehören beispielsweise auch die Grenzwertsätze, für deren Verständnis eine weitere Grundvorstellung ausgebildet sein sollte, nämlich die Objektvorstellung (Greefrath et al., 2016, S. 106; Weigand, 2016, S. 145):

> *Objektvorstellung (OV):* Grenzwerte werden als mathematische Objekte – etwa (feste) Werte, Matrizen oder geometrische Objekte – angesehen, die durch eine Folge – etwa eine Zahlenfolge, eine Folge von Matrizen oder geometrischer Objekte – konstruiert oder definiert werden.

Als Beispiel soll hier die Euler'sche Zahl e genannt werden, die als Grenzwert der Folge $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ für $n \to \infty$ festgelegt werden kann. Im Vordergrund steht dann nicht mehr die Folge, die sich einer bestimmten Zahl nähert oder eine Umgebung um die Zahl, in der fast alle Folgenglieder liegen, sondern der Grenzwert selbst. Nachdem diese „Objektwerdung“ stattgefunden hat und der Grenzwert als eigenständiges Denkobjekt verstanden wird (welches durch eine konvergente Folge festgelegt ist), kann mit diesem Objekt weiter operiert werden (vgl. Arnon et al., 2014). Beispielsweise kann dann darüber gesprochen werden, dass sich die Grundrechnungsarten im Wesentlichen auf das Rechnen mit Folgengrenzwerten übertragen lassen (Arens et al., 2018, S. 184), dass also Grenzwert und Summe (resp. Differenz, Produkt, Quotient, so lange alle relevanten Nenner verschieden von Null sind) vertauscht werden dürfen. Die Objektvorstellung ist damit eine zentrale Vorstellung für das Operieren mit Grenzwerten und damit für den Aufbau der Analysis als Theorie.

5. Methode

5.1 Pilotanalyse anhand von Formulierungen aus der Literatur

Um die in unserer Untersuchung festgestellten Äußerungen von Studierenden zum Grenzwertbegriff zu klassifizieren, haben wir die drei Grundvorstellungen zum Grenzwert konvergenter Folgen nach Greefrath et al. (2016, S. 105 f.) herangezogen (vgl. Abschnitt 4.2). In diesem Abschnitt testen wir in einer unserer Untersuchung vorausgehenden Pilotanalyse die Passung dieser drei Grundvorstellungen exemplarisch an in der Literatur (vgl. Abschnitt 2.2) überlieferten empirisch festgestellten Äußerungen von Lernenden.

Wir beginnen mit der umfangreichen Arbeit von Cornu (2002), siehe Tabellen 1 und 2. Die ersten vier Einträge in Tabelle 1 stellen Bedeutungen der Phrase “tends towards” dar, die Student:innen *vor* ihrer formalen Ausbildung entwickelt haben und die auch *danach* bestehen bleiben. Die Einträge 5 bis 14 sind ebensolche Erklärungen für “limit”.

Tabelle 2 zeigt spontan geäußerte Modellvorstellungen zum Grenzwert einer Folge, die bei Studierenden *nach* ihrer formalen Ausbildung beobachtet wurden, siehe Cornu (2002, S. 155).

Das Behandeln konvergenter Folgen in formaler Weise hat darüber hinaus zwei individuelle Lernendenvorstellungen zu konvergenten Folgen hervorgebracht: monoton und dynamisch-monoton (Cornu, 2002, S. 155):

- “a convergent sequence is an increasing sequence bounded above (or decreasing bounded below)”
- “a convergent sequence is an increasing (or decreasing) sequence which approaches a limit”

Die erste Vorstellung kann mathematisch gesehen bekanntlich als Satz so formuliert werden: Jede monoton wachsende, nach oben beschränkte reelle Folge ist konvergent (Arens et al., 2018, S. 191). Die zweite hat zusätzlich noch die Beziehung einer konvergenten Folge und ihrem Grenzwert zum Inhalt. Monotone, beschränkte Folgen werden also als Prototypen von konvergenten Folgen gesehen.

	Formulierungen	**GV**	**Bemerkungen**
1	to approach (eventually staying away from it)	AV	Ob der Grenzwert erreicht wird oder nicht, ist ein offenbar entscheidendes Kriterium. Auffallend ist, dass die Beschreibungen ohne spezifische Attribute wie z. B. „beliebig nahe" auskommen.
2	to approach ... without reaching it	AV	
3	to approach ... just reaching it	AV	
4	to resemble (without any variation, such as "this blue tends towards violet")	AV	
5	an impassable limit which is reachable	AV	Auch hier steht das (Nicht-) Erreichen des Grenzwerts im Fokus, dazu kommt noch das „Überschreiten". Damit liegt offen, dass an eine Richtung beim Fortschreiten der Folge gedacht wird.
6	an impassable limit which is impossible to reach	AV	
7	a point which one approaches, without reaching it	AV, OV	Siehe 1 bis 4, allerdings mit erkennbarem Fokus auf das Grenz*objekt.*
8	a point which one approaches and reaches	AV, OV	
9	a higher (or lower) limit	OV	Grenzwert im Sinne von Grenze
10	a maximum or minimum	OV	
11	an interval	OV, UV	Lässt offen, ob das Intervall *schließlich erreicht und nicht mehr verlassen* wird (UV) oder *von Anfang an als Begrenzung der Folge* im Sinne der Beschränktheit gemeint ist.
12	that which comes 'immediately after' what can be attained	AV, OV	Hier ist eine Richtung unterstellt, und das Erreichen spielt ebenfalls eine zentrale Rolle.
13	a constraint, a ban, a rule	OV	Eine Vorschrift unterstreicht noch diese Vorstellung der Entsprechung einer realen Grenze.
14	the end, the finish	OV	Kann als Assoziation, als Belief (Leder, Pehkonen & Törner, 2002) gedeutet werden. "At the limit" bedeutet auch „(fast) am Ende sein".

Tab. 1: Formulierungen nach Cornu (2002, S. 154 f.) und ihre Zuordnung(en) zu Grundvorstellungen

In Williams (1991) sollten die Proband:innen sechs Aussagen zum *Funktions*grenzwert mit „falsch" oder „richtig" beurteilen. Die verwendeten Formulierungen "A limit describes how a function moves as *x* moves toward a certain point." und "A limit is an approximation that can be made as accurate as you wish." lassen sich eindeutig der Annäherungsvorstellung zuordnen. Die Formulierung "A limit is a number that the *y*-values of a function can be made arbitrarily close to by restricting *x*-values." ist klar der Umgebungsvorstellung zuordenbar (ebd., S. 221).

Bei Marx (2013) geht es um Vorstellungen von Schüler:innen zu unendlichen Prozessen. Zum Beispiel wird an ein Quadrat mit der Seitenlänge 1 (dm) ein Rechteck mit Basis der gleichen Länge 1 (dm), aber halber Höhe angeschlossen. Dem folgte ein Rechteck wieder mit gleicher Basislänge, aber seine Höhe wird abermals halbiert usw. Die Frage lautet: „Wie groß ist die Fläche aller Rechtecke zusammen?" (Marx, 2013, S. 81). Eine Schülerin beschreibt dies so: „Dass es immer kleiner wird, der Abstand zwischen dem Gesamtwert und zwei, dass es nie zwei erreichen wird, dass man aber irgendwann in der Realität, nicht im Mathematischen, sondern in der Realität, sagen

	Formulierungen	GV	Bemerkungen
1	the final terms always have the same value	AV	
2	the values cannot pass *l* [Anm.: the limit]	AV	
3	u_n tends to *l*	AV	Von Cornu (2002, S. 155) als dynamische (“dynamic”) Vorstellungen benannt.
4	u_n approaches *l*	AV	
5	the distance from u_n to *l* becomes small	AV	
6	the values approach a number more and more closely	AV	
7	the u_n are in an interval near *l*	UV	Von Cornu (2002, S. 155) als statische (“static”) Vorstellungen benannt.
8	the u_n are grouped round *l*	UV	
9	the elements of the sequence end up by being found in a neighbourhood of *l*	UV	

Tab. 2: Formulierungen nach Cornu (2002, S. 155) und ihre Zuordnung zu Grundvorstellungen

würde, das ist jetzt gleich zwei. […]“ (ebd., S. 80). Auch hier spielt also die Annäherungsvorstellung die entscheidende Rolle.

In Roh (2008) konnten drei unterschiedliche Typen von Vorstellungen herausdestilliert werden, die den Übergang von der Annäherungsvorstellung zur Umgebungsvorstellung konkretisieren, siehe Tabelle 3.

Insgesamt zeigt sich, dass das Konzept der drei Grundvorstellungen (Abschnitt 4.2) weit genug gefasst ist, um verschiedenste empirisch festgestellte Formulierungen von Lernenden zu klassifizieren. Es wird weiterhin in den Tabellen 1 bis 3 sichtbar, dass eine Binnendifferenzierung der Formulierungen nach ihrer Qualität angebracht ist.

5.2 Das Umfeld der Studie

Das Lehramtsstudium Mathematik wird in Österreich seit dem Studienjahr 2016/17 durch den sogenannten „Verbund Nord-Ost“ (neben drei anderen Verbünden) angeboten, in dem die Universität Wien mit den pädagogischen Hochschulen der Umgebung kooperiert (PH Wien, PH Niederösterreich, KPH Wien/Krems). Dabei handelt es sich um eine gemeinsame Ausbildung für beide Sekundarstufen *aller* Schulformen.

Im Curriculum ist vorgesehen, dass alle fachmathematischen Vorlesungen und Übungen getrennt von den Lehrveranstaltungen für Fachstudierende angeboten werden. Zu einigen der zentralen Fachvorlesungen (Geometrie und lineare Algebra, Analysis, Stochastik) sind ergänzend sogenannte Schulmathematikvorlesungen vorgesehen, die sich auf die entsprechende Fachvorlesung beziehen sollen/können, wobei hier der Fokus auf schulrelevanten Aspekten liegt. Diese werden im Curriculum wie folgt beschrieben: „Die Studierenden erkennen die Relevanz der fachmathematischen Konzepte für den Schulunterricht und können diese dort angemessen verwenden. […] Die Studierenden können in diesem Gebiet fachdidaktische Konzepte anwenden […], sie kennen typische Fehlvorstellungen und passende Interventionsmöglichkeiten.“ (Universität Wien, 2016). Die zu einer Fachvorlesung gehörige Schulmathematikvorlesung findet dabei immer im Folgesemester statt, sodass eine inhaltliche Verzahnung der beiden Vorlesungen naheliegt (Ableitinger, Kittinger & Steinbauer, 2020; Götz, 2013; Götz & Süss-Stepancik, 2017).

	Formulierungen	GV	Bemerkungen
1	the terms of the sequence approached a certain value, but none of the terms of the sequence was equal to the value	AV	Grenzwert wird nicht erreicht
2	infinitely many terms of a given sequence were located close to a certain value	UV	Grenzwert als Häufungswert
3	finitely many terms of the sequence outside any error bound	UV	korrekte Vorstellung

Tab. 3: Formulierungen nach Roh (2008, S. 225, 227, 228) und ihre Zuordnung zu Grundvorstellungen

$\boxed{33}$ **Gute und schlechte Verbalisierungen der Grenzwertdefinition.** Im Unterricht ist es von fundamentaler Bedeutung — mit der formalen Grenzwertdefinition im Kopf — gute von weniger guten Verbalisierungen unterscheiden und sich guter bedienen zu können. Beurteilen Sie vor diesem Hintergrund die folgenden Sprechweisen, die den Sachverhalt $\frac{1}{n} \to 0$ ausdrücken (sollen).

(1) $\frac{1}{n}$ strebt für n gegen ∞ gegen 0.

(2) $\frac{1}{n}$ ist schließlich beliebig nahe bei 0.

(3) $\frac{1}{n}$ kommt mit wachsendem n der 0 beliebig nahe.

(4) $\frac{1}{n}$ kommt mit wachsendem n der 0 immer näher.

(5) $\frac{1}{n}$ kommt mit wachsendem n der 0 immer näher, ohne sie je zu erreichen.

Abb. 2: Übungsaufgabe: Formulierungen zum Grenzwert (nach Danckwerts & Vogel, 2006, S. 26)

Im Studienjahr der Untersuchung 2018/19 wurde die Vorlesung „Schulmathematik Analysis“ im Team Fachmathematiker/Fachdidaktikerin Roland Steinbauer/Evelyn Süss-Stepancik neu konzipiert und gehalten. Wir beschreiben hier die Grundzüge der damit erfolgten Intervention zwischen den beiden Befragungszeitpunkten (Abschnitt 3, Abschnitt 5.3). Die Grundkonzeption der Vorlesung bestand in einer an fachlichen Inhalten festgemachten Verknüpfung von fachmathematischen Aspekten, fachdidaktischer Reflexion und unterrichtspraktischen Erwägungen. Der Grenzwertbegriff wurde anhand von Iterationsprozessen motiviert und nach einer fachmathematischen Klärung bzw. Wiederholung wurden der statische und der dynamische Aspekt und die drei Grundvorstellungen (Greefrath et al., 2016, Abschnitt 3.5.2) sowie ihre Zusammenhänge explizit diskutiert. Danach wurden Unterrichtszugänge vorgestellt und das Thema wurde mit einem Exkurs „Über das Unendliche“ abgerundet, in dem explizit auf die Begriffsbildungen des potentiell und aktual Unendlichen in ihrer Beziehung zur Annäherungsvorstellung und Umgebungs- bzw. Objektvorstellung eingegangen wurde. Insbesondere wurde die „Entzauberung des Unendlichen“ mittels der statischen ε-N-Definition thematisiert (Steinbauer, 2021). Für Details siehe die Rohversion des Vorlesungsmanuskripts von Steinbauer und Süss-Stepancik (2019, Abschnitt D, §2). In den begleitenden Übungen wurden etwa mehr oder weniger passende Formulierungen der Grenzwertdefinition besprochen (siehe Abbildung 2), Schulbuchdefinitionen verglichen, sowie Vorstellungen und Fehlvorstellungen anhand der Bewegungsparadoxien des Zenon von Elea diskutiert.

Die vorliegende Studie wurde im Rahmen des hochschuldidaktischen Projekts BELLA (Beliefs zum Lernen und Lehren von Analysis) durchgeführt, in dem die Autoren mit Fachdidaktikerinnen der Universität Wien (A. Anger) und der Pädagogischen Hochschule Niederösterreich (E. Süss-Stepancik, jetzt PH Wien) kooperieren.

BELLA – Beliefs zum Lernen und Lehren von Analysis

Ein entscheidendes Kriterium für guten Mathematikunterricht ist laut aktuellen Forschungsbefunden die Art und Weise, wie die verschiedenen Fachbegriffe im Bewusstsein der Lehrkraft repräsentiert sind; es geht also um die „Bilder im Kopf“.

Wir wollen in dieser Untersuchung herausfinden, welche Vorstellungen Sie mit verschiedenen Begriffen der Analysis verbinden und wie sich diese im Laufe Ihrer Ausbildung verändern.
Die Fragen sind selbstverständlich fachlicher Natur, allerdings gibt es nicht immer eine richtige bzw. eine falsche Antwort. Bitte versuchen Sie, die Fragen möglichst spontan zu beantworten und missverstehen Sie diese *nicht* als Testfragen.

Fragebogen 1A: Vorstellungen zur Analysis

Bitte ergänzen Sie die folgenden Sätze z. B. formal, verbal und/oder bildlich.

1. Unter dem *Grenzwert einer Folge* stelle ich mir vor ...

Abb. 3: Für die Studie relevanter Teil des Fragebogens

5.3 Datengewinnung

Die Lehramtsstudierenden wurden im Sinne eines Prätest-Posttest-Designs in der ersten und der letzten Vorlesungseinheit zur Schulmathematik Analysis eingeladen einen Fragebogen auszufüllen. Die Zeitpunkte waren also so gewählt, dass die Befragung

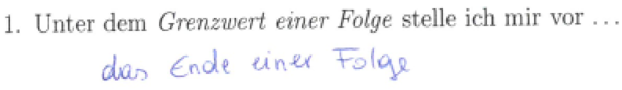
1) nach Ende der Fachausbildung und vor Beginn der schulmathematischen Ausbildung zur Analysis und
2) nach Ende der Schulmathematik-Ausbildung Analysis

stattfand. Im ersten Teil des Fragebogens wurden Vorstellungen im Sinne von schriftlich geäußerten Statements zu Kernbegriffen der (eindimensionalen) Analysis erhoben, während der zweite Teil dem fachlichen Wissen über ebendiese Konzepte der Analysis gewidmet war und nur zum Zeitpunkt (1) erhoben wurde. Zusätzlich wurde auch die Note auf die Fachvorlesungsprüfung „Analysis in einer Variable für das Lehramt" miterhoben. Im Anschluss wurde eine verbundene Stichprobe ($n = 59$) aus jener Gesamtheit von Proband:innen hergestellt, die beide Fragebögen bearbeitet hatten.

Hier berichten wir über die Auswertung der Fortsetzung des Satzanfangs „Unter dem *Grenzwert einer Folge* stelle ich mir vor …" (Abbildung 3). Der Einleitungstext und der Schreibimpuls wurden so gestaltet, dass die in diesem Setting – im Hörsaal sitzend, vor Beginn bzw. nach Ende der entsprechenden Lehrveranstaltung – evozierten Vorstellungen der Proband:innen zum Vorschein kommen. Diese materialisieren sich in Äußerungen, für die sich die Studierenden in der dargelegten Situation entscheiden. Keinesfalls sollte die Aufgabenstellung im Sinne einer fachinhaltlichen Prüfungsfrage nach der Definition des Grenzwerts missverstanden werden, was auch im Einleitungstext explizit angesprochen wurde (Abbildung 3). In der Schulmathematik-Lehrveranstaltung zur Analysis wurden – wie in Abschnitt 5.2 erwähnt – die Grundvorstellungen zum Grenzwert einer Folge nach Greefrath et al. (2016, S. 105 f.) vorgestellt und im Kontext diskutiert, ohne jedoch eine als „universell richtige" zu kennzeichnen. Die Formulierung „… stelle ich mir vor …" in Abbildung 3 sollte gerade darauf anspielen, enthält aber eine stark individuelle Komponente. Der begonnene Satz sollte zudem verhindern, dass eine der Grundvorstellungsformulierungen aus der Vorlesung reproduziert wird, was – wie unsere Daten bestätigen – auch nicht auftrat (Abschnitt 6.). Gleichzeitig ist der Schreibimpuls offen genug, um keine der bei den Proband:innen zu vermutenden eventuell widersprüchlichen Konzeptionen (siehe Abschnitt 4.1) *speziell* zu aktivieren und so das Ergebnis unserer Untersuchung durch die Fragestellung zu präjudizieren, vgl. Monaghan (2001).

Das Problem einer gewissen sozialen Erwünschtheit kann im gewählten Setting allerdings nicht gänzlich vermieden werden. Auch ist klar, dass nicht das gesamte Vorstellungsspektrum der Proband:innen bei dieser Art von Erhebung zum Vorschein kommen muss. Vielmehr sollten die Studierenden dazu angehalten werden, sich in relativ knapper Zeit für eine Formulierung zu entscheiden, um nachvollziehen zu können, was sie bei ihren Vorstellungen leitet. Eine umfassende Erhebung der concept images der Studierenden müsste auf indirekte Weise erfolgen und soll zukünftigen Studien vorbehalten bleiben.

Eine tatsächlich geäußerte Vorstellung zeigt Abbildung 4. Manchmal wurden „Bilder im Kopf" auch graphisch manifestiert, siehe Abbildungen 5 und 9 und Abschnitt 6.3.


1. Unter dem *Grenzwert einer Folge* stelle ich mir vor …

das Ende einer Folge

Abb. 4: Eine erhobene Studierendenantwort

5.4 Datenanalyse

Die Auswertung der in den Fragebögen erhobenen Äußerungen erfolgte zuerst getrennt durch einen Fachdidaktiker und einen Fachmathematiker. In gemeinsamen Diskussionen einigte sich das Team dann auf jeweils eine Codierung. Auf einen Reliabilitätstest wurde verzichtet, da die hier durchgeführte Auswertung eine Auseinandersetzung und finale Integration fachlicher und fachdidaktischer Perspektiven verlangt. Allerdings wurde das gesamte Datenmaterial auf diese Weise analysiert und klassifiziert, um die Kontinuität der Codierung zu gewährleisten.

In einem ersten Schritt fokussierte die Analyse auf einen Abgleich der Vervollständigungen des Satzanfangs „Unter dem *Grenzwert einer Folge* stelle ich mir vor …" mit den Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff (vgl. Abschnitt 4.2; Greefrath et al., 2016, S. 105 f.). Das war in den meisten Fällen aufgrund der verbalen Formulierungen leicht konsensual zu entscheiden. Ein Beispiel eines Grenzfalls ist die Äußerung „beliebig nahe annähern bei Wahl eines Folgenglieds", die schließlich als Annäherungsvorstellung codiert wurde. Ausschlaggebend dabei war, dass „beliebig nahe" zwar eine Assoziation an die Umgebungsvorstellung hervorrufen mag, sie aber hier die Qualität der Annäherung beschreibt und nicht auf das Enthaltensein von Folgengliedern in einer Umgebung abzielt.

Code/ Kategorie	**Qualität der Ausprägung**	**Beispielformulierungen AV**	**Beispielformulierungen UV**	**Beispielformulierungen OV**
U	Unspezifisch (Antwort ermöglicht keinen Zugriff auf die Vorstellung)	Wert, der angestrebt wird	*Folgenglieder liegen um den GW*	Limes; eine Zahl
1 (F)	Fehlvorstellung erkennbar	Grenze für Annäherung (Stoppschild); erreichen diesen nie	in Umgebung liegen die meisten Folgenglieder	das Ende einer Folge
1	GV naiv ausgedrückt	nähert sich im Unendlichen an	alle Folgenglieder müssen nahe am GW liegen und dort hineinpassen	*Ziel einer Folge*
2	GV schwach ausgeprägt/ungenau formuliert	kommt immer näher; nähert sich (mit wachsendem n) an	ab einem n bleiben alle Folgenglieder in einer Umgebung	*Zahl, deren Nachkommastellen man mit der Folge berechnen kann*
3	GV vorhanden, nicht korrekt formuliert	kommt unendlich nahe	ab einem n bleiben alle Folgenglieder in jeder Umgebung	*Zahl, die durch die Folge auf beliebig viele Nachkommastellen angegeben werden kann*
4	GV klar ausgeprägt und adäquat formuliert	kommt schließlich beliebig nahe	in beliebig kleiner Umgebung liegen fast alle Folgenglieder	*Zahl, die durch diese Folge konstruiert ist*

Tab. 4: Codierleitfaden für die Qualität der Ausprägung der AV, der UV und der OV, *kursiv*: Beispielformulierungen, die nicht direkt aus den Studierendenantworten gewonnen wurden (GW steht für „Grenzwert“)

In einem zweiten Schritt wurde die Qualität der Ausprägung der Grundvorstellung (siehe Abschnitt 4.1) jeweils in ein System aus sechs Kategorien aufsteigender Qualität einsortiert. Dabei sind diese Qualitätskategorien induktiv aus der Analyse der Studierendenantworten festgelegt worden. Am Ende wurde nochmals die Passung aller Äußerungen zum vollständigen Kategoriensystem geprüft. Sie sind mit Beispielformulierungen für die AV, die UV und die OV in Tabelle 4 angegeben. Die zugeordneten Codes sind rangskaliert. Für einige der Ausprägungen, insbesondere für die Objektvorstellung, konnten keine Beispielformulierungen aus den Studierendenantworten extrahiert werden. Um einen vollständigen Codierleitfaden zu generieren, wurden fehlende Formulierungen durch eine Sachanalyse der Autoren ergänzt (in Tabelle 4 kursiv). Leitend war bei der Erstellung dieses Codierleitfadens die Analyse, inwieweit die Vorstellungen den Grenzwert tatsächlich im mathematischen Sinne charakterisieren. Dazu gehörten die Suche nach Gegenbeispielen zu bestimmten Formulierungen (beispielsweise kommt die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ nicht nur ihrem Grenzwert 0 *immer näher*, sondern etwa auch der Zahl -1) und die Einschätzung der festgestellten Defizite in Hinblick auf die Definition des Grenzwerts einer Folge. Die Formulierung „ab einem n bleiben alle Folgenglieder in jeder Umgebung“ in Tabelle 4 zum Code 3 geht nicht auf die Abhängigkeit des gesuchten Folgenindex n_0 von der Größe der ε-Umgebung ein. Zumindest implizit kommt dies in der zitierten Formulierung zum Code 4 sehr wohl zum Ausdruck.

Die Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff (Greefrath et al., 2016, S. 105 f.) wurden nach fundierter Sachanalyse formuliert und können als Ziel verstanden werden, das im Lernprozess anzustreben ist. Es ist daher aus didaktischer Sicht sinnvoll, sich zunächst ein Bild davon zu machen, wie weit einzelne Äußerungen von Lernenden von diesen Vorstellungen noch entfernt sind. Darüber soll die vorgenommene Bewertung der Qualität der geäußerten

Studierendenvorstellungen Auskunft geben. Für unsere Studie ist zudem interessant, inwieweit sich die Qualität dieser Vorstellungen durch die Interventionen der Lehrveranstaltung „Schulmathematik Analysis“ verändern lässt bzw. verändert wurde.

Bei der Analyse der Studierendenantworten wurden ähnliche Äußerungen zu geglätteten Formulierungen zusammengefasst und diese nicht nur in die Kategorien U bzw. 1 (F) bis 4 aus Tabelle 4 einsortiert, sondern auch innerhalb der Kategorien der Qualität nach gereiht. Es gibt also in jeder Kategorie ein Kontinuum von Vorstellungen leicht unterschiedlicher Qualität. In die Zelle UV der Kategorie 3 wurden beispielsweise folgende Formulierungen eingeordnet (nach aufsteigender Qualität gereiht): „in einer Epsilon-Umgebung liegen fast alle Folgenglieder", „ab einem *n* bleiben alle Folgenglieder in jeder Umgebung“, „Ab einem bestimmtem Index liegen alle weiteren FG in beliebiger Epsilon-Umgebung um den GW“ (FG … Folgenglieder, GW … Grenzwert).

Weiterhin wurden alle geäußerten Fehlvorstellungen erfasst, kategorisiert, mit 1 (F) codiert und mit den in der Literatur beschriebenen einschlägigen (Fehl-) Vorstellungen von Schüler:innen (Marx, 2013) verglichen. Werden bei einer Antwort mehrere (Fehl-) Vorstellungen zur selben Grundvorstellung geäußert, dann wurde diese Formulierung insgesamt mit dem Median der einzelnen zugeordneten Codes bewertet.

6. Ergebnisse

6.1 Exemplarische Veränderungen geäußerter individueller Vorstellungen

In diesem Abschnitt greifen wir einige gehäuft festgestellte Veränderungen im Auftreten und in der Ausprägungsqualität der drei Grundvorstellungen (Greefrath et al., 2016, S. 105 f.) zwischen Prä- und Posttest auf und beleuchten diese durch eine qualitative Analyse jeweils eines repräsentativen Beispiels. Dieser Abschnitt liefert demnach eine Teilantwort auf die dritte Forschungsfrage in Abschnitt 3 nach der Veränderung der geäußerten Vorstellungen durch die Intervention. Im Folgenden bezeichnen wir mit AV-Formulierung eine Äußerung, die der Annäherungsvorstellung zugeordnet worden ist (Abschnitt 5.4). Analoges gilt für UV und OV.

Eine quantitative Analyse unserer Ergebnisse erfolgt in Abschnitt 6.2.

6.1.1 Steigerungen in der Ausprägungsqualität von AV-Formulierungen

Eine häufig festgestellte Änderung war eine Steigerung der Ausprägungsqualität von AV-Formulierungen: Bei insgesamt 14 Proband:innen (24 %) konnte eine solche Änderung beobachtet werden, bei sieben Proband:innen (12 %) sogar eine Steigerung um mindestens eine Kategorie (vgl. Tabelle 4). Elf Proband:innen (19 %) steigerten ihre Formulierungen von einer Ausprägungsqualität von 1 oder 1,5 auf einen Wert von mindestens 2. Eine solche Steigerung ging oft einher mit dem Verschwinden der Äußerung der Fehlvorstellung, wonach der Grenzwert nicht erreicht werden dürfe. Exemplarisch für eine solche Veränderung betrachten wir die Äußerungen von Proband:in KA0703. Im Prätest wurde eine AV mit 1,5 codiert: Abbildung 5 (eine mit 2 bewertete Formulierung „Der Wert dem sich die Folge annähert“ und die mit 1 (F) codierte Fehlvorstellung „aber den sie nie wirklich erreicht“).

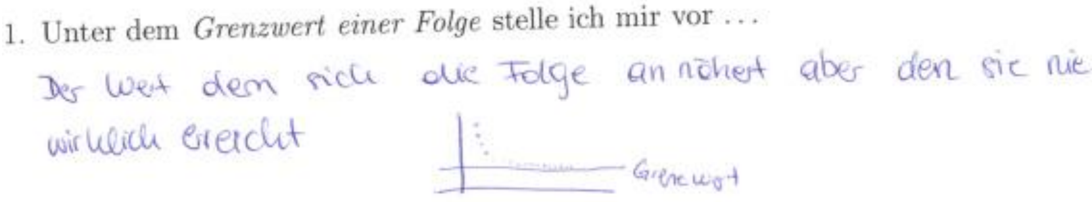
Die graphische Darstellung in Abbildung 5 deutet zusätzlich auf eine stark ausgeprägte Prototypenvorstellung hin: monotone, beschränkte Folgen. Das Wort „wirklich“ in der verbalen Formulierung legt eine Unsicherheit in Bezug auf unendliche Prozesse nahe.

Im Posttest äußerte Proband:in KA0703 die mit 3 codierte AV-Formulierung „Wert dem sich die Folgeglieder beliebig nähern“: Abbildung 6. Zusätzlich zur verbesserten AV wird eine durchschnittlich gut ausgeprägte (Codierung: 2) UV-Formulierung „Folgeglieder liegen in ε-Umgebung v. diesem Wert“ ergänzt.

6.1.2 Veränderung von AV-Äußerungen niedriger Qualität zu UV-Äußerungen höherer Qualität

Eine weitere häufig beobachtete Veränderung war die von einer AV- zu einer UV-Formulierung. Genauer konnte bei zwölf Proband:innen (20 %) beobachtet werden, dass beim Prätest ausschließlich eine als AV codierte Äußerung erfolgte und beim Posttest eine als UV codierte, wobei bei vier Proband:innen zusätzlich eine AV-Formulierung bestehen blieb. Dabei konnte bei acht Proband:innen (14 %) eine Veränderung von einer mit U, 1 oder 1,5 codierten AV-Formulierung zu einer mit mindestens 2 codierten UV-Formulierung beobachtet werden. Umgekehrt fallen von den insgesamt sechs Proband:innen (10 %), die beim Posttest eine mit 3 oder 4 codierte UV-Formulierung äußerten, fünf in diese Kategorie. Exemplarisch greifen wir hier Proband:in IR0216 heraus, die beim Prätest die mit 1 codierte AV-Formulierung „Zahl, der sich die Folgenglieder annähern“ äußerte: Abbildung 7.

Beim Posttest wurde eine mit 4 codierte UV-Formulierung „GW ist Zahl […] in dessen beliebig kleiner Umgebung fast alle Folgenglieder liegen“ notiert: Abbildung 8.

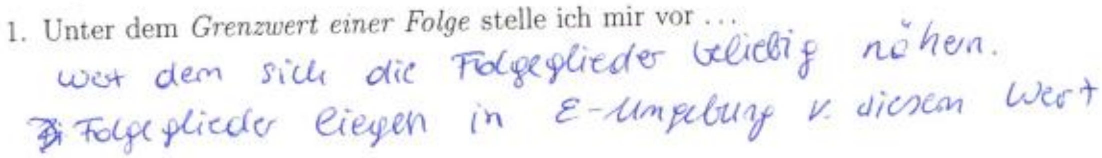


1. Unter dem *Grenzwert einer Folge* stelle ich mir vor ...

Der Wert dem sich die Folge annähert aber den sie nie wirklich erreicht

Grenzwert

Abb. 5: Proband:in KA0703, Prätest



1. Unter dem *Grenzwert einer Folge* stelle ich mir vor ...

Wert dem sich die Folgeglieder beliebig nähern.

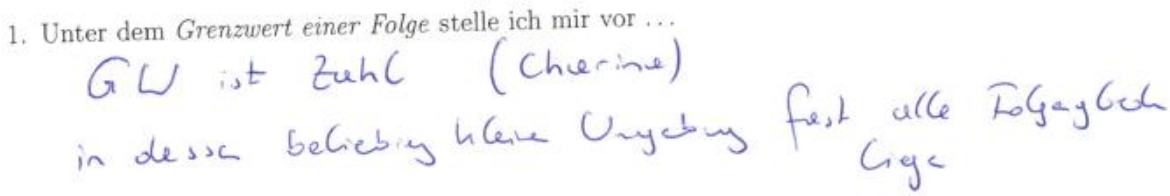
~~Di~~ Folgeglieder liegen in ε-Umgebung v. diesem Wert

Abb. 6: Proband:in KA0703, Posttest

1. Unter dem *Grenzwert einer Folge* stelle ich mir vor ...

Zahl, der sich die Folgeglieder annähern

Abb. 7: Proband:in IR0216, Prätest



1. Unter dem *Grenzwert einer Folge* stelle ich mir vor ...

GW ist Zahl (Chierine)

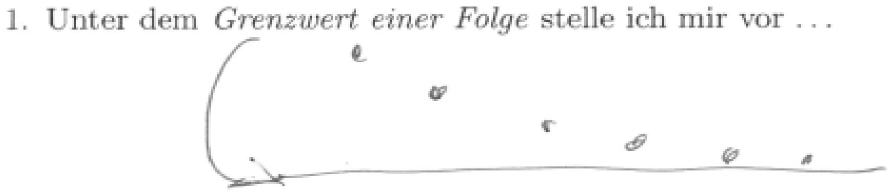
in dessen beliebig kleiner Umgebung fast alle Folgeglieder liegen

Abb. 8: Proband:in IR0216, Posttest

6.1.3 Entwicklung einer AV-Formulierung

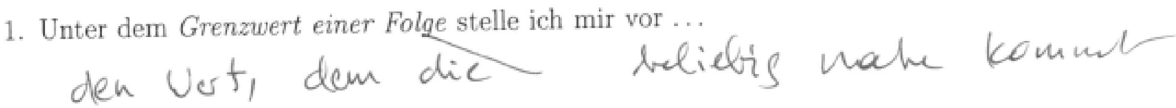
Eine weitere auffällige Änderung ergab sich bei sieben Proband:innen (12 %). Hier konnte eine Veränderung von gar keiner verbal geäußerten Vorstellung beim Prätest zu einer AV-Formulierung beim Posttest festgestellt werden. Exemplarisch seien hier die Äußerungen von Proband:in MA2428 herausgegriffen. Beim Prätest ist als einziges eine graphische Darstellung angegeben, die eine monotone (vermutliche) Nullfolge zeigt, wobei der Grenzwert nicht extra bezeichnet ist: Abbildung 9.

Beim Posttest konnte die mit 3 codierte AV-Formulierung „den Wert, dem die Folge beliebig nahe kommt." festgestellt werden: Abbildung 10.



1. Unter dem *Grenzwert einer Folge* stelle ich mir vor ...

Abb. 9: Proband:in MA2428, Prätest



1. Unter dem *Grenzwert einer Folge* stelle ich mir vor ...

den Wert, dem die beliebig nahe kommt

Abb. 10: Proband:in MA2428, Posttest

6.2 Quantitative Ergebnisse

In diesem Abschnitt werden die zentralen quantitativen Ergebnisse hinsichtlich der Häufigkeit bzw. der Ausprägungsqualität der in den Studierendenäußerungen sichtbaren Grundvorstellungen dargestellt. Wir beantworten dabei nacheinander die Forschungsfragen aus Abschnitt 3.

6.2.1 Forschungsfrage 1

Welche Vorstellungen äußern Studierende im Lehramt nach dem Besuch der fachlichen Lehrveranstaltung „Analysis in einer Variable für das Lehramt" zum Grenzwertbegriff (einer Folge) und wie lassen sich diese kategorisieren?

In Abbildung 11 sind die absoluten Häufigkeiten der den drei GV (Abschnitt 4.2) zugeordneten Studierendenäußerungen in ihren jeweiligen Qualitätsausprägungen zu den beiden Erhebungszeitpunkten (1) und (2) (Abschnitt 5.3) angegeben. Dabei zeigen sich folgende Auffälligkeiten: Die AV wird zu beiden Zeitpunkten mit Abstand am häufigsten sichtbar. Dies überrascht insofern, als ja die Standarddefinition der Analysis auf die UV referenziert. Diese konnte im Prätest nur drei Mal aus den Studierendenäußerungen rekonstruiert werden, was sich auf immerhin 14 Zuordnungen nach der Schulmathematik-Lehrveranstaltung erhöht. Des Weiteren zeigt sich deutlich, dass die der AV zugeordneten Äußerungen durchwegs niedrige Ausprägungsqualität aufweisen und insgesamt keine voll zufriedenstellende Formulierung genannt wurde. Dem gegenüber weisen die der UV zugeordneten Studierendenformulierungen insbesondere zum Zeitpunkt (2) eine wesentlich höhere Qualität auf.

Tabelle 5 unterstreicht diesen Eindruck. Die erste Zeile gibt die absoluten Häufigkeiten der zugeordneten GV zu den beiden Zeitpunkten an. In der Zeile darunter wird der Median der Ausprägungsqualität der den entsprechenden GV zugeordneten Studierendenäußerungen angegeben, wobei die Kategorie U (unspezifisch) unberücksichtigt blieb. Es konnten alle verbleibenden Studierendenäußerungen einer oder zwei der drei GV zugeordnet werden. In manchen der Studierendenäußerungen finden sich zwei Formulierungen zu ein und derselben Vorstellung in unterschiedlicher Ausprägungsqualität. In diesem Fall wurde der Median der entsprechenden Codes gebildet (Abschnitt 5.4). Der Median spiegelt im Gegensatz zu Abbildung 11 nur beim Prätest wieder, dass die Ausprägungsqualität der UV deutlich über jener der AV liegt, egal zu welchem Zeitpunkt.

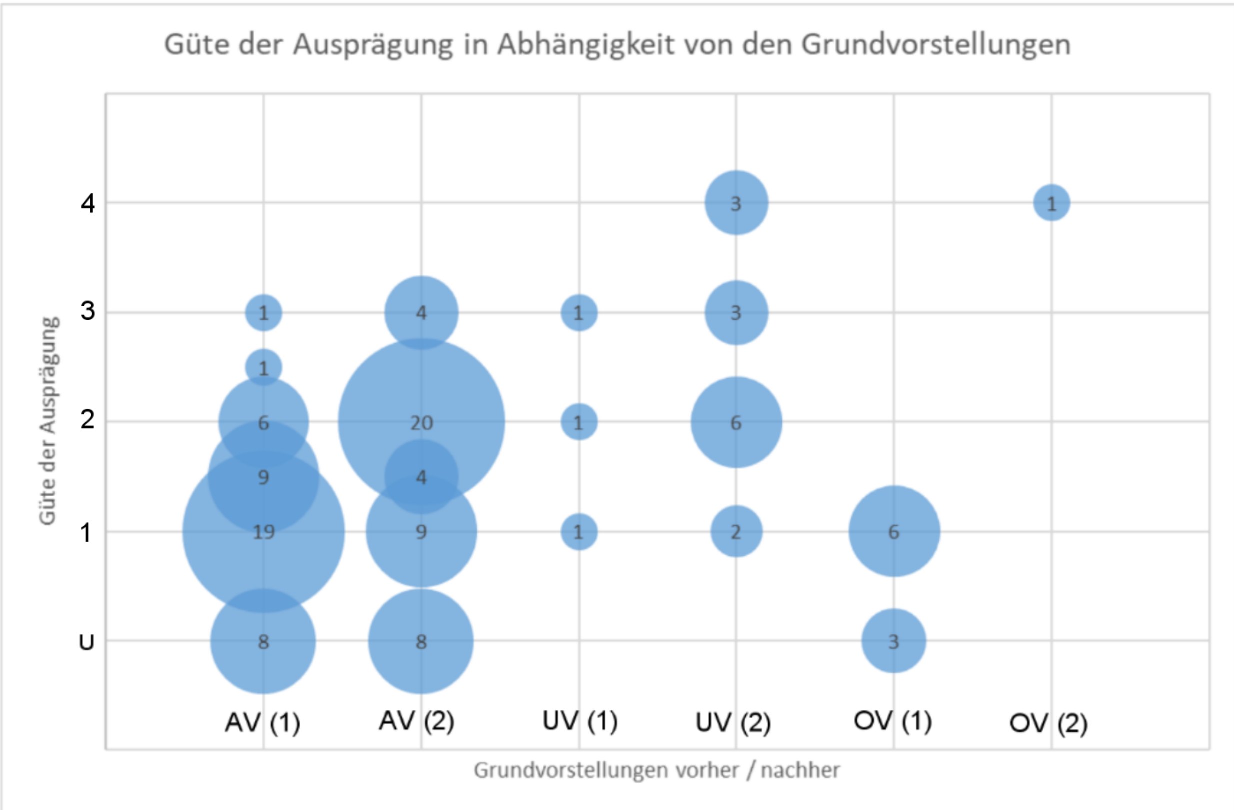


Abb. 11: Blasendiagramm für Güte und Anzahl von den Grundvorstellungen zugeordneten Äußerungen im Prä- und Posttest

	AV (1)	AV (2)	UV (1)	UV (2)	OV (1)	OV (2)
Abs. Häufigkeit	44	45	3	14	9	1
Median (ohne U)	1	2	2	2	1	4

Tab. 5: Absolute Häufigkeiten und Median der Qualitätsausprägungen der den drei GV zugeordneten Studierendenäußerungen zu den beiden Erhebungszeitpunkten (1) und (2)

In dieses Bild fügt sich weiterhin die Tatsache, dass Fehlvorstellungen in unseren Daten vor allem im Zusammenhang mit der AV geäußert wurden. Auch konnten einige der wesentlichen von Marx (2013) festgestellten Schüler:innen-Fehlvorstellungen in unserer Untersuchung wiedergefunden werden, z. B: Limes als Grenze/Schranke der Annäherung (zwölf Nennungen im Prätest/zehn im Posttest), die nicht überschritten/erreicht werden kann (13/acht), Limes als letztes Folgenglied (eins/zwei). Insgesamt muss festgestellt werden, dass ca. 1/3 der Proband:innen Fehlvorstellungen äußern, die denen von Schüler:innen ähneln und die durch die Lehramtsausbildung nicht ausreichend korrigiert werden konnten.

Die OV konnte insgesamt nur selten bzw. in unspezifischer Form aus den Studierendenäußerungen rekonstruiert werden, so dass eine Interpretation hinsichtlich ihrer Qualität nicht sinnvoll erscheint.

6.2.2 Forschungsfrage 2

Welche Korrelation zeigt sich zwischen diesen (in Abschnitt 6.2.1 beschriebenen) geäußerten Vorstellungen und der Beurteilung der fachlichen Leistungen der Studierenden in der Analysis („Fachwissen“)?

Neben der Erhebung der geäußerten Vorstellungen zum Grenzwert im Prä- und Posttest wurden die Proband:innen wie in Abschnitt 5.3 erwähnt auch nach der Note auf die Prüfung der Fachvorlesung „Analysis in einer Variable für das Lehramt“ gefragt. Teilweise war diese Information erst zum zweiten Erhebungszeitpunkt verfügbar, weil manche der Studierenden die Prüfung erst während des Semesters absolviert haben, in dem die Intervention (Schulmathematik-Lehrveranstaltung) stattgefunden hat. Die Berechnung der Rangkorrelation zwischen Vorlesungsnote und Ausprägungsqualität der geäußerten Vorstellungen zum Grenzwert im Prätest (unabhängig von der zugeordneten GV) ergibt ein KENDALL`sches Tau von $\tau = -0{,}30$ ($p = 0{,}04$) und damit eine signifikante, mittlere negative Korrelation. Das bedeutet, dass Proband:innen mit gutem Fachwissen auch eher passende Vorstellungen zum Grenzwert äußern. Dieser Zusammenhang verschwindet fast zur Gänze, wenn man die Korrelation zwischen Vorlesungsnote und Formulierungsqualität im Posttest berechnet ($\tau = -0{,}09$, nicht signifikant).

Die Ergebnisse der vorliegenden Studie deuten einerseits darauf hin, dass der Aufbau von Fachwissen Hand in Hand mit der Entwicklung adäquater Formulierungen zu einem Begriff geht. Andererseits lässt sich die Qualität der Vorstellungsformulierungen von Studierenden mit zunächst nur schwachem oder mittlerem Fachwissen durch geeignete Interventionen (z. B. explizites Thematisieren von Grundvorstellungen bzw. typischen Fehlvorstellungen) auch nachträglich noch steigern (Abschnitt 6.2.1). Das leitet über zur Beantwortung der dritten Forschungsfrage.

6.2.3 Forschungsfrage 3

Wie verändern sich diese (in Abschnitt 6.2.1 beschriebenen) geäußerten Vorstellungen durch die fachdidaktische Lehrveranstaltung „Schulmathematik Analysis“, in der (normative) Grundvorstellungen zum Grenzwert einer Folge explizit thematisiert werden?

In Abschnitt 6.1 wurden bereits exemplarisch typische Veränderungen in der Ausprägungsqualität der Formulierungen, die einer bestimmten Grundvorstellung zugeordnet wurden, aufgezeigt. Weiterhin wurde ein Wechsel der zugeordneten Grundvorstellungen inklusive einer Änderung der Ausprägungsqualität der Formulierungen festgestellt. Nun sollen die in Abbildung 11 augenscheinlichen Veränderungen auch statistisch belegt werden.

Generell zeigt sich im Vergleich von Prä- und Posttest eine hochsignifikante Verbesserung der Ausprägungsqualität der Studierendenformulierungen, unabhängig von der jeweils zugeordneten Grundvorstellung (WILCOXON-Rangsummentest, $p = 3{,}5 \cdot 10^{-5}$). Es zeigt sich also, dass die Intervention in der Schulmathematik-Lehrveranstaltung deutliche Wirkung gezeigt hat. Allerdings ist zu bedenken, dass hier von einem sehr niedrigen Qualitätsniveau im Prätest gestartet wurde und auch am Ende der Schulmathematik-Lehrveranstaltung nur ein schwach mittelmäßiges Niveau erreicht werden konnte. Betrachtet man die Teilmenge der Proband:innen, die sowohl beim Prä- als auch beim Posttest der Annäherungsvorstellung zuzuordnende Formulierungen geäußert haben, ergibt sich ebenfalls eine hochsignifikante Steigerung ($p = 0{,}001$, Abbildung 11).

Bei zwölf Studierenden war im Prätest eine Annäherungsvorstellung und im Posttest eine Umgebungsvorstellung (in vier Fällen in Verbindung mit einer

Annäherungsvorstellung) rekonstruierbar (Abschnitt 6.1.2). Es war damit die häufigste beobachtete Verschiebung zwischen zwei zugeordneten Grundvorstellungen. Das ist insofern bemerkenswert, als die Umgebungsvorstellung diejenige Vorstellung ist, die vom fachmathematischen Standpunkt aufgrund ihrer Trag- und Ausbaufähigkeit die erstrebenswerte(ste) Vorstellung ist (Abschnitt 4.2). Auch hier konnte die Intervention also einen Beitrag leisten. Umgekehrt ist eine Teilstichprobengröße von $n = 12$ zu klein, um eine signifikante Veränderung der mit den geäußerten Vorstellungen verbundenen Qualitätsausprägung nachweisen zu können. Analoges gilt für die in Abbildung 11 erkennbare Qualitätssteigerung innerhalb der Umgebungsvorstellung. Nachdem beim Prätest überhaupt nur drei Studierende eine dieser Vorstellung zuzuordnende Formulierung gewählt haben, waren es beim Posttest immerhin 14 Proband:innen (Abschnitt 6.2.1). Für eine statistische Auswertung sind diese Anzahlen nicht aussagekräftig genug.

6.3 Bildhafte Vorstellungen zum Grenzwert

Unabhängig von der Analyse der verbalen Äußerungen haben wir bildhafte Äußerungen der Studierenden erfasst und analysieren sie hier qualitativ. Es sind im Prätest 15 Zeichnungen zur Illustration des Grenzwertes einer konvergenten Folge skizziert worden, im Posttest 17. Nur acht Proband:innen haben zu beiden Testzeitpunkten ihre jeweilige(n) Vorstellung(en) (auch) bildhaft manifestiert. Die dargestellten Folgen sind zum überwiegenden Teil als ihre monotonen Graphen (zwölf im Prä- bzw. 13 im Posttest), exemplarisch in Abbildung 12, gezeichnet.

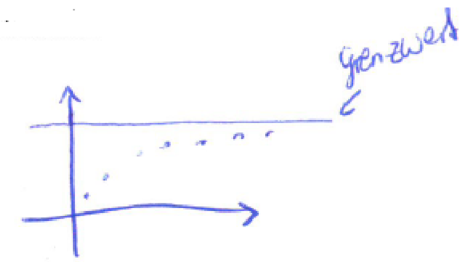


Abb. 12: Zeichnung von Proband:in CH1516 im Prätest zum Grenzwert einer Folge

Selten sind „Spaziergänge in $\mathbb{R}$“ zu verzeichnen, also alleinige Darstellungen der Funktionswerte einer Folge auf der Zahlengeraden: zwei im Prätest, zwei im Posttest, einmal von derselben Proband:in, siehe Abbildung 13. Auch hier kann den aufgezeichneten Folgen Monotonie unterstellt werden, der Grenzwert erscheint als (unüberwindliche) „Mauer“ (vgl. Tabelle 1).

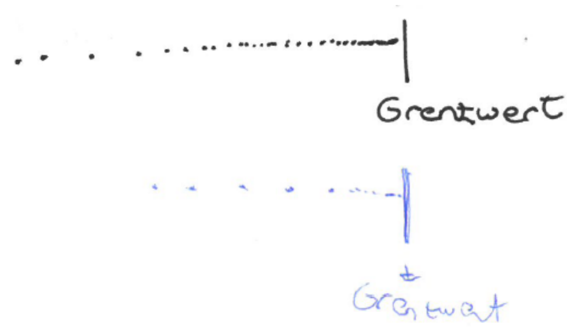


Abb. 13: Zeichnungen von Proband:in KA1313 im Prä- und Posttest zum Grenzwert einer Folge

Auffällig ist weiterhin, dass der „Epsilonschlauch“ im Prätest nur einmal auftaucht, im Posttest dagegen viermal. In Abbildung 14 sind die beiden Zeichnungen von Proband:in RE1318 zu sehen. Die Bezeichnung der Schlauchbreite verschwindet zugunsten der Grenzwertbezeichnung in diesem Fall, was eine Veränderung der Fokussierung der Proband:in vermuten lässt.

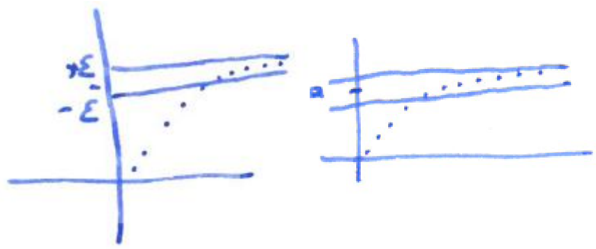


Abb. 14: Zeichnungen von Proband:in RE1318 im Prä- und Posttest zum Grenzwert einer Folge

6.4 Fehlvorstellungen

Sowohl im Prä- als auch im Posttest wurden Äußerungen genannt, die eindeutig verschiedenen Fehlvorstellungen zugeordnet werden konnten. Diese wurden zu Kategorien zusammengefasst und die absoluten Häufigkeiten ihres Auftretens erfasst. Einen Überblick dazu gibt Tabelle 6.

Die letzte Spalte „Formale Fehler“ zählt jene Äußerungen, bei denen eine falsche bzw. unvollständige Version der formalen Definition genannt wurde.

Es zeigt sich, dass bei den beiden häufiger auftretenden Kategorien eine leichte Abnahme der Häufigkeiten auftritt. Da aber ähnliche Fehlvorstellungen auch z. B. in Marx (2013) bei Schüler:innenäußerungen festgestellt wurden, weisen unsere Ergebnisse auf eine Permanenz von Fehlvorstellungen aus dem Schulunterricht hin, die auch durch das Studium im Allgemeinen, durch die Intervention im Besonderen, nicht beseitigt werden konnten. Für eine statistische Auswertung sind diese Zahlen allerdings nicht aussagekräftig genug.

	Nichterreichen des GW	GW als Schranke	GW als letztes Folgenglied	Formale Fehler
Abs. H. Prätest	13	12	1	2
Abs. H. Posttest	8	10	2	2

Tab. 6: Absolute Häufigkeiten der geäußerten Fehlvorstellungen zu den beiden Erhebungszeitpunkten

7. Reflexion und Diskussion

7.1 Conclusio

Zum Abschluss wollen wir unsere Ergebnisse diskutieren und einige Thesen und Überlegungen für die Gestaltung von Analysis-Veranstaltungen im Lehramtsstudium formulieren, die diese und Befunde aus der zitierten Literatur nahelegen. Sie sind nicht als zwingende Schlussfolgerungen zu verstehen, sondern ergeben sich kohärent aus unseren Daten und dem Bild, das frühere Untersuchungen zeichnen.

Zunächst lassen sich aus den hier dargestellten Daten folgende Rückschlüsse auf die Sichtbarkeit von Grundvorstellungen in den Studierendenäußerungen zum Grenzwertbegriff ziehen. Viele der in der Literatur zitierten Formulierungen ("to approach … without reaching it", siehe Tabelle 1 und das deutsche Pendant in Tabelle 4: „Grenze für Annäherung, erreichen diesen nie") finden sich auch in den Daten der vorliegenden Untersuchung. Es lassen sich am häufigsten Bezüge zur AV ausmachen (Abbildung 11). Da sie in der fachlichen Ausbildung nicht im Zentrum steht, muss davon ausgegangen werden, dass sie bereits im Laufe des Schulunterrichts oder eventuell schon davor im präformalen Stadium angelegt wurde. Zudem fällt es den Proband:innen schwer, die AV korrekt und verständnisvoll auszudrücken. Auch treten Fehlvorstellungen gehäuft im Kontext der AV auf (Tabelle 6). Insgesamt kann davon ausgegangen werden, dass eine dominante und nicht in entsprechender Ausprägungsqualität vorliegende AV das tiefe Verständnis des Grenzwertbegriffs erschwert, wenn nicht sogar effektiv verhindert (Tabellen 1 und 2). Eine Betonung der AV (dynamische Sicht) in den concept images und Vorstellungen behindert die Ausbildung der UV bzw. OV (statische Sicht), die aus fachmathematischer Sicht die zu präferierenden Vorstellungen sind. Ebenso ist aus fachdidaktischer Sicht ein umfassendes Verständnis des Grenzwertkonzepts nicht ohne eine belastbare UV denkbar. So betrachtet decken sich unsere Ergebnisse mit den Überlegungen von Bender (1991a), der die Rolle dynamischer Vorstellungen, die ja mit der AV essentiell verbunden sind, äußerst kritisch sieht. Die bei Marx (2013) aufgezeigte Grundfrage bei Schüler:innen zu unendlichen Prozessen „Was soll unter dem Ergebnis eines unendlichen Prozesses verstanden werden?" wird im von uns erhobenen Datenmaterial nicht beantwortet. Tatsächlich konnten kaum Äußerungen der OV zugeordnet werden, nach der Intervention sogar noch deutlich seltener als zuvor.

Unser Ergebnis lässt auf einen wenigstens teilweisen Erfolg der Intervention bei der UV schließen: Im Posttest konnte die UV häufiger zugeordnet werden und wurde von den Proband:innen in einer durchwegs höheren Ausprägungsqualität als die AV ausgedrückt (Abbildung 11). Dieses Resultat kann als Ergänzung zu den in Abschnitt 2.2 referierten Untersuchungen (Cornu, 2002; Roh, 2008) verstanden werden. Es erscheint daher fruchtbringend, folgende Elemente in die Gestaltung von Lehrveranstaltungen im Lehramt (je nach curricularen Umständen in fachdidaktischen/unterrichtspraktischen, aber auch fachlichen Vorlesungen und Übungen) einfließen zu lassen, um effizient eine belastbare UV auszubilden, bzw. überhaupt ein adäquates Vorstellungsreservoir jenseits der AV zu begründen:

- explizite Diskussionen der GV des Grenzwertbegriffs,
- explizite Diskussion dynamischer und statischer Aspekte und Sichtweisen,
- expliziter Verweis auf die Vorteile des statischen Aspekts im Hinblick auf die Existenz des Ergebnisses unendlicher Prozesse,
- explizite Diskussion der Vorstellungen des potentiell und des aktual Unendlichen, evtl. im historischen Kontext,
- explizites Thematisieren von guten und weniger guten Formulierungen der Grenzwertbedingung im Kontext der verschiedenen GV,
- explizites Ansprechen von häufigen Fehlvorstellungen, insbesondere das (Nicht-)Erreichen des Grenzwerts.
- Im Kontext von Fehlvorstellungen motivieren, von dynamischen auf statische Sichtweisen zu wechseln, um im Sinne der conceptual change theory (vgl. Abschnitt 4.1; Williams, 1991) die Fruchtbarkeit der neuen Vorstellung deutlich zu machen.

Weiterhin ist es im Licht der vorliegenden Studie sinnvoll, schon bei der Einführung des Folgenbegriffs entsprechende Weichenstellungen vorzunehmen und geeignete Vorstellungen zu implementieren. Insbesondere scheint eine Betonung des Rekursionsaspekts gegenüber dem Zuordnungsaspekt bzw. der Zuordnungsvorstellung (vgl. Danckwerts & Vogel, 2006, Abschnitt 2.1; Greefrath et al., 2016, Abschnitt 3.3) günstig zu sein. Damit einhergehend kann vermutet werden, dass die Darstellung von Folgen durch ihr Bild (vgl. Abbildung 13) im Hinblick auf das Ausbilden nichtdynamischer Vorstellungen zum Grenzwert einer Folge der Darstellung als Graph (vgl. Abbildung 12) überlegen ist. Dadurch werden an zeitlichen bzw. kinematischen Interpretationen von Folgen orientierte Vorstellungen unterdrückt und der Grundstein für eine statische Sichtweise wird gelegt. So kann der Grenzwertbegriff auch primär über die UV zugänglich gemacht werden, etwa durch das folgende Bild: alle Folgenglieder „fallen“ gleichzeitig von oben auf den Zahlenstrahl und man hat lediglich zu zählen, wie viele davon außerhalb einer beliebig vorgegebenen Epsilon-Umgebung zu liegen kommen.

Schließlich zeigt die in Rede stehende Untersuchung auch, dass gutes fachliches Vorwissen einhergeht mit der Formulierung von Vorstellungen hoher Ausprägungsqualität (Abschnitt 6.2.2). Dabei ist das Entstehen solcher Vorstellungen kein Automatismus, kann aber durch explizite Anregungen unterstützt werden. Daher erscheint auch eine möglichst enge Verknüpfung fachlicher und didaktischer Ausbildungsteile erstrebenswert. So können in der fachlichen Ausbildung etwa Referenzanker gesetzt werden und/oder vor allem in Übungen bereits Vorstellungen zur Grenzwertbedingung und Formulierungen derselben explizit thematisiert werden. Eine Vertiefung und Reflexion dieser Vorstellungen hinsichtlich ihrer Thematisierung und Umsetzung im Mathematikunterricht obliegt dann der fachdidaktischen bzw. schulpraktischen Ausbildung.

7.2 Limitationen

In der Untersuchung werden nur von Studierenden geäußerte Vorstellungen und geäußerte Fehlvorstellungen in den Blick genommen und analysiert. Damit ist der Versuch unternommen worden, Rückschlüsse auf zugrundeliegende Vorstellungen und Fehlvorstellungen zu ziehen. Inwieweit auf diese Weise tatsächlich (durch die Intervention) gebildete Grundvorstellungen eruiert worden sind, kann nicht in letzter Konsequenz beantwortet werden. Durch unser Studiendesign sind eben nur äußere Anzeichen (Spitze des Eisbergs) sichtbar gemacht worden. Im Lehrberuf ist es aber essenziell, mathematische Konzepte zu verbalisieren und insofern sind die hier untersuchten tatsächlichen Äußerungen der Studierenden sehr wohl von Belang.

Das Setting, in dem die Untersuchung durchgeführt wurde, nämlich eine universitäre Lehrveranstaltung, könnte Studierende dazu verleitet haben, fachlich bzw. sozial erwünschte Antworten zu geben und die tatsächlichen individuellen Vorstellungen hintanzuhalten. Allerdings haben die Auswertungen gezeigt, dass die eigentliche Definition des Grenzwerts einer Folge kaum verschriftlich worden ist. Auch die in der Vorlesung gebrachten Verbalisierungen adäquater Vorstellungen zum Grenzwertbegriff sind nicht festgestellt worden.

Schließlich muss offenbleiben, inwieweit die Äußerungen der Studierenden – gerade in Bezug auf die UV – tatsächlich von Vorstellungen zeugen oder ob sie „antrainierte“ Sprechweisen sein könnten, die in einer didaktischen Vorlesung auf einer Sprachebene deutlich werden, ggf. aber (noch) keine Vorstellungsausbildung mit sich bringen.

Anmerkung

[1] Für jedes natürliche N ist $(a_n)_{n\geq N}$ ein Hauptstück der Folge (a_n).

Danksagung

Wir danken Frau Antonia Spannagl für die Hilfe bei der statistischen Auswertung in Abschnitt 6.2.

Literatur

Ableitinger, C. & Heitzer, J. (2013). Grenzwerte unterrichten. Propädeutische Erfahrungen und Präzisierungen. *Mathematik lehren* 180, 2–10.

Ableitinger, C., Kittinger, H. & Steinbauer, R. (2020). Adressatenspezifische Gestaltung von Fachvorlesungen im Lehramt: eine Fallstudie als Anstoß für vertiefte Reflexionen. *mathematica didactica, 43*(2), 77–94. https://doi.org/10.18716/ojs/md/2020.1383

Arens, T., Hettlich, F., Karpfinger, C., Kockelkorn, U., Lichtenegger, K. & Stachel, H. (2018). *Mathematik* (4. Auflage). Berlin: Springer Spektrum.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). *APOS Theory. A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education.* New York: Springer. http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6

Bender, P. (1991a). Fehlvorstellungen und Fehlverständnisse bei Folgen und Grenzwerten. *MNU, 44*(4), 238–243.

Bender, P. (1991b). Ausbildung von Grundvorstellungen und Grundverständnissen – ein tragendes didaktisches Konzept für den Mathematikunterricht – erläutert an Beispielen aus den Sekundarstufen. In H. Postel, A. Kirsch & W. Blum (Hrsg.), *Mathematik lehren und lernen, Festschrift für Heinz Griesel* (S. 48–60). Hannover: Schroedel Schulbuchverlag.

Blum, W. (1979). Zum vereinfachten Grenzwertbegriff in der Differentialrechnung. *Der Mathematikunterricht, 25*(3), 42–50. Abgerufen von https://kobra.uni-kassel.de/bitstream/handle/123456789/2009060327921/BlumGrenzwertbegriff1979.pdf?sequence=1

Blum, W. & Kirsch, A. (1979). Zur Konzeption des Analysisunterrichts in Grundkursen. *Der Mathematikunterricht, 25*(3), 6–24. Abgerufen von https://kobra.uni-kassel.de/handle/123456789/2009060327933

BMBWF (2019). *Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik, gültig bis Wintertermin 2021. Inhaltliche und organisatorische Grundlagen zur Sicherung mathematischer Grundkompetenzen*. Abgerufen von https://www.matura.gv.at/srdp/mathematik

Cornu, B. (2002). Limits. In D. Tall (Hrsg.), *Advanced Mathematical Thinking* (S. 153–166). Mathematics Education Library, Vol. 11. New York et al.: Kluwer Academic Publishers. http://dx.doi.org/10.1007/0-306-47203-1_10

Danckwerts, R. & Vogel, D. (2006). *Analysis verständlich unterrichten*. München: Elsevier.

Fischbein, E. (1978). Intuition and mathematical education. *Osnabrücker Schriften zur Mathematik* 1, 148–176.

Friedrich, H. (2001). Eine Kategorie zur Beschreibung möglicher Ursachen für Probleme mit dem Grenzwertbegriff. *Journal für Mathematik-Didaktik, 22*, 207–230. https://doi.org/10.1007/BF03338936

Götz, S. (2013). Ein Versuch zur Analysis-Ausbildung von Lehramtsstudierenden an der Universität Wien. In G. Greefrath et al. (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013*, Band 1 (S. 364–367). Münster: WTM-Verlag. Abgerufen von http://www.mathematik.tu-dortmund.de/ieem/bzmu2013/Einzelvortraege/BzMU13-Goetz.pdf

Götz, S. & Süss-Stepancik, E. (2017). School Mathematics and Mathematical Training: Two Hotspots in the Curriculum Development for Teacher Education. *R&E-Source,* Special Issue #6: 13th International Congress on Mathematical Education (ICME-13), 4 pages. Abgerufen von https://journal.ph-noe.ac.at/index.php/resource/article/view/412

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V. & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis: Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe*. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-48877-5

Hahn, S. & Prediger, S. (2008). Bestand und Änderung – Ein Beitrag zur Didaktischen Rekonstruktion der Analysis. *Journal für Mathematik-Didaktik, 29*, 163–198. https://doi.org/10.1007/BF03339061

Hitt, F. & Lara-Chavez, H. (1999). Limits, continuity and discontinuity of functions from two points of view: That of the teacher and that of the student. In L. Bills (Hrsg.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, *19*(2), 49–54. Abgerufen von https://bsrlm.org.uk/wp-content/uploads/2016/02/BSRLM-IP-19-2-9.pdf

Lakoff, G. & Núñez, G. (2000). *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. New York: Basic Books.

Laub, J. (Hrsg.) (1979). *Lehrbuch der Mathematik für die Oberstufe der allgemeinbildenden höheren Schulen*, 2. Band. Arbeitsbuch für die 6. Klasse von J. Laub, J. Alexander, E. Hruby, W. Körperth, W. Kranzer, I. Lewisch & H. Vohla. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.

Leder, G.C., Pehkonen, E. & Törner, G. (Hrsg.) (2002). *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* Mathematics Education Library, Vol. 31. New York et al.: Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47958-3

Marx, A. (2006). *Schülervorstellungen zu ,,unendlichen Prozessen"*. Hildesheim, Berlin: Verlag Franzbecker.

Marx, A. (2013). Schülervorstellungen zu unendlichen Prozessen – Die metaphorische Deutung des Grenzwerts als Ergebnis eines unendlichen Prozesses. *Journal für Mathematik-Didaktik, 34,* 73–97. https://doi.org/10.1007/s13138-012-0047-5

Monaghan, J. (1986). *Adolescents' understanding of limits and infinity*. University of Warwick, UK: PhD thesis. Abgerufen von http://wrap.warwick.ac.uk/34626/

Monaghan, J. (2001). Young Peoples' Ideas of Infinity. *Educational Studies in Mathematics, 48*, 239–257. https://doi.org/10.1023/A:1016090925967

Moormann, M. (2009). *Begriffliches Wissen als Grundlage mathematischer Kompetenzentwicklung – Eine empirische Studie zu konzeptuellen und prozeduralen Aspekten des Wissens von Schülerinnen und Schülern zum Ableitungsbegriff*. Ludwig-Maximilians-Universität München: Dissertation. Abgerufen von https://edoc.ub.uni-muenchen.de/10887/1/moormann_marianne.pdf

Oehrtman, M. (2002). *Collapsing Dimensions, Physical Limitation, and other Student Metaphors for Limit Concepts: An Instrumentalist Investigation into Calculus Students' Spontaneous Reasoning*. The University of Texas: PhD thesis. Abgerufen von https://repositories.lib.utexas.edu/handle/2152/823

Ostsieker, L. (2020). *Lernumgebungen für Studierende zur Nacherfindung des Konvergenzbegriffs. Gestaltung und empirische Untersuchung*. Wiesbaden: Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-27194-7

Przenioslo, M. (2004). Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics, 55*, 103–132. https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000017667.70982.05

Roh, K.H. (2008). Students' images and their understanding of definitions of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics, 69*, 217–233. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9128-2

Salle, A. & Clüver, T. (2021). Herleitung von Grundvorstellungen als normative Leitlinien – Beschreibung eines theoriebasierten Verfahrensrahmens. *Journal für Mathematik-Didaktik, 42*, 553–580. https://doi.org/10.1007/s13138-021-00184-5

Steinbauer, R. (2021). Die Entzauberung des Unendlichen. *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der ÖMG*, Heft 53, 135–150. Abgerufen von http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/2021%20Band%2053/VortragSteinbauer.pdf

Steinbauer, R. & Süss-Stepancik, E. (2019). *Schulmathematik Analysis*. *Wintersemester 2018/19*. Universität Wien: Vorlesungsmanuskript, Rohversion. Abgerufen von https://www.mat.univie.ac.at/~stein/teaching/WS1819/smana-gesamt-2019-02-14.pdf

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151–169. https://doi.org/10.1007/BF00305619

Tietze, U.-P., Klika, M. & Wolpers, H. (1997). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 1: Fachdidaktische Grundfragen – Didaktik der Analysis*. Unter Mitarbeit von F. Förster. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.

Universität Wien (2016). *Mitteilungsblatt. Studienjahr 2015/16, 41. Stück. Curricula*. Abgerufen von http://www.univie.ac.at/mtbl02/2015_2016/2015_2016_246.pdf

vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg, Berlin, Oxford: Spektrum Akademischer Verlag.

vom Hofe, R. & Blum, W. (2016). "Grundvorstellungen" as a Category of Subject-Matter Didactics. *Journal für Mathematik-Didaktik, 37*(supplement issue 1), 225–254. https://doi.org/10.1007/s13138-016-0107-3

Weber, C. (2016). Making Logarithms Accessible – Operational and Structural Basic Models for Logarithms. *Journal für Mathematik-Didaktik, 37*(supplement issue 1), 69–98. https://doi.org/10.1007/s13138-016-0104-6

Weigand, H.-G. (1993). *Zur Didaktik des Folgenbegriffs*. Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik, Band 21. Herausgegeben von N. Knoche und H. Scheid. Mannheim et al.: BI Wissenschaftsverlag.

Weigand, H.-G. (2016). Zur Entwicklung des Grenzwertbegriffs unter stoffdidaktischer Perspektive. *Mathematische Semesterberichte, 63***,** 135–154. https://doi.org/10.1007/s00591-016-0161-4

Williams, S. (1991). Models of Limit Held by College Calculus Students. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*, 219–236. https://doi.org/10.2307/749075

Anschrift der Verfasser

Christoph Ableitinger
Universität Wien
Fakultät für Mathematik
Oskar Morgenstern-Platz 1
1090 Wien
christoph.ableitinger@univie.ac.at

Stefan Götz
Universität Wien
Fakultät für Mathematik
Oskar Morgenstern-Platz 1
1090 Wien
stefan.goetz@univie.ac.at

Roland Steinbauer
Universität Wien
Fakultät für Mathematik
Oskar Morgenstern-Platz 1
1090 Wien
roland.steinbauer@univie.ac.at