In welcher Weise unterstützen Schulbücher Vorstellungsumbrüche beim Lernen von Bruchzahlen? – Eine Schulbuchanalyse

PATRICIA HECK RIBEIRAS, FREIBURG; ANDREAS OBERSTEINER, MÜNCHEN; GERALD WITTMANN, FREIBURG

***Zusammenfassung**: Beim Übergang von natürlichen Zahlen zu Bruchzahlen müssen Lernende einen Conceptual Change vollziehen, da manche der von den natürlichen Zahlen vertrauten Eigenschaften weiterhin gültig sind, während andere ihre Allgemeingültigkeit verlieren. In der vorliegenden Analyse wurden drei Schulbuchreihen der Klassen 5 bis 7 daraufhin untersucht, ob und in welcher Weise sie Lerngelegenheiten bezüglich Gemeinsamkeiten und Unterschieden zwischen natürlichen Zahlen und Bruchzahlen bieten. Es gab unter insgesamt 11439 Kodierungen keinen expliziten Hinweis auf Unterschiede und lediglich 23 explizite Hinweise auf Gemeinsamkeiten zwischen den Zahlbereichen. In größerer Anzahl finden sich nur implizite Lerngelegenheiten.*

***Abstract:** When making the transition from natural numbers to fractional numbers, learners need to perform a conceptual change. The reason is that although some of the familiar properties of natural numbers are still valid for fractional numbers while others do not generally hold any more. This study investigated how three textbook editions for grade 5 to grade 7 offer learning opportunities regarding commonalities and differences between the domains of natural numbers and fractional numbers. Among 11439 codings, there were no explicit references to differences and only 23 explicit references to commonalities between natural numbers and fractional numbers. In contrast, there was a larger number of implicit learning opportunities.*

1. Einleitung

Von der Grundschule bis zum Ende der Sekundarstufe müssen Schülerinnen und Schüler mehrere Zahlbereichserweiterungen von den natürlichen Zahlen bis hin zu den reellen Zahlen meistern. Dabei stellt der Übergang von den natürlichen Zahlen zu den Bruchzahlen eine besonders große Herausforderung dar, wie bekannte Fehler dokumentieren (Behr, Wachsmuth & Post, 1985; Carraher, 1993; 1996; Eichelmann, Narciss, Schnaubert & Melis, 2012). Eine Ursache für diese Schwierigkeiten sind die beim Übergang von natürlichen Zahlen zu Bruchzahlen notwendigen Vorstellungsumbrüche, die nicht von allen Schülerinnen und Schülern vollzogen werden (Prediger, 2008). Das Vollziehen von Vorstellungsumbrüchen ist ein langfristiger Prozess, den Schülerinnen und Schüler häufig nicht alleine und aus sich selbst heraus meistern können. Im Gegenteil: Es sind gezielte Lerngelegenheiten im Unterricht notwendig. Im vorliegenden Beitrag werden deshalb Schulbücher daraufhin analysiert, in welcher Weise sie entsprechende Lerngelegenheiten anbieten.

2. Theoretischer Hintergrund

Im Folgenden schließt die Bezeichnung Bruchzahlen, wie im schulischen Kontext üblich, die positiven rationalen Zahlen sowie die Dezimalbrüche ein (Padberg, Danckwerts & Stein, 1995, S. 67).

2.1 Vorstellungsumbrüche beim Lernen von Bruchzahlen

Gemeinsamkeiten und Unterschiede von natürlichen Zahlen und Bruchzahlen sind in der Literatur ausführlich beschrieben (Hefendehl-Hebeker & Prediger, 2006; Obersteiner, Dresler, Bieck & Moeller, 2019; Padberg & Wartha, 2017; Prediger, 2008; Vamvakoussi & Vosniadou, 2004). Die vorliegende Studie betrachtet vier Aspekte, bezüglich derer sich für den Lernprozess relevante Gemeinsamkeiten oder aber Unterschiede zeigen: die symbolische Repräsentation, der Größenvergleich, die Operationen und das Dichtliegen (Anhang, Tab. 1).

Bezüglich der *symbolischen Repräsentation* besteht ein wesentlicher Unterschied zwischen den Zahlbereichen darin, dass diese bei natürlichen Zahlen im dezimalen Stellenwertsystem eindeutig ist, während eine Bruchzahl durch unendlich viele äquivalente Brüche oder Dezimalbrüche (die sich in der Anzahl der Endnullen unterscheiden) dargestellt werden kann.

Hinsichtlich des *Größenvergleichs* besteht zunächst eine Gemeinsamkeit darin, dass für beide Zahlbereiche die Kleiner-Relation gilt, alle Zahlen also der Größe nach geordnet werden können. Während der Größenvergleich bei natürlichen Zahlen und Dezimalbrüchen stellenweise von links nach rechts möglich ist, ist bei gemeinen Brüchen weder ein stellenweises Vorgehen noch ein direkter Vergleich der Zähler oder Nenner für eine Kleiner-Relation aussagekräftig.

Der Aspekt *Operationen* umfasst sowohl das prozedurale als auch das konzeptuelle Wissen diesbezüglich (Lenz, Dreher, Holzäpfel & Wittmann, 2020).

Beim *prozeduralen Wissen* weist das Addieren und Subtrahieren gleichnamiger Brüche, das quasikardinal erfolgen kann, formal eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Rechnen mit natürlichen Zahlen auf. Bei der Multiplikation von Bruchzahlen wird die Operation in Zähler und Nenner separat durchgeführt, was eine Ähnlichkeit zum Rechnen mit natürlichen Zahlen darstellt. Das Addieren und Subtrahieren von Dezimalbrüchen geschehen formal analog zum stellengerechten Rechnen mit natürlichen Zahlen – mit dem Unterschied, dass bei Dezimalbrüchen keine Rechtsbündigkeit gegeben ist und die Anzahl der Nachkommastellen zu berücksichtigen ist. Wesentlich anders als bei den natürlichen Zahlen wird hingegen das Addieren und Subtrahieren ungleichnamiger Brüche ausgeführt, da diese zunächst gleichnamig gemacht werden müssen. In Bezug auf das *konzeptuelle Wissen* besteht die Gemeinsamkeit, dass Addition und Subtraktion sowie Multiplikation und Division in beiden Zahlbereichen jeweils Umkehroperationen darstellen. Die Vorstellungen „Addition vergrößert“ und Addition als Zusammenfassen oder Hinzufügen sowie „Subtraktion verkleinert“ und Subtraktion als Wegnehmen oder Ergänzen sind in beiden Zahlbereichen passend. Darüber hinaus kann die Multiplikation sowohl zweier natürlicher Zahlen als auch einer Bruchzahl mit einer natürlichen Zahl als wiederholte Addition aufgefasst werden. Es gibt aber auch Unterschiede: Die Multiplikation zweier Bruchzahlen kann im Allgemeinen nicht als wiederholte Addition betrachtet werden, und die bei den natürlichen Zahlen passenden Vorstellungen „Multiplizieren vergrößert“ sowie „Dividieren verkleinert“ gelten bei Bruchzahlen ebenfalls im Allgemeinen nicht mehr. Bei der Division von Bruchzahlen bleibt die Grundvorstellung des Aufteilens tragfähig, während die Grundvorstellung des Verteilens nicht mehr in allen Fällen gültig ist.

Das *Dichtliegen* von Bruchzahlen bezeichnet einen Unterschied beider Zahlbereiche: Während es bei natürlichen Zahlen jeweils einen eindeutig bestimmten Vorgänger und Nachfolger gibt und zwischen zwei natürlichen Zahlen nur endlich viele weitere natürliche Zahlen liegen, gibt es bei den Bruchzahlen keinen eindeutigen Vorgänger oder Nachfolger, und zwischen zwei Bruchzahlen liegen stets unendlich viele weitere.

2.2 Unterstützung eines Conceptual Change

Empirische Studien zeigen, dass die genannten Unterschiede der beiden Zahlbereiche zu Schwierigkeiten führen (Obersteiner et al., 2019; Prediger, 2008). Insbesondere lassen sich typische Fehlermuster damit erklären, dass Schülerinnen und Schüler die notwendigen Vorstellungsumbrüche nicht vollständig vollzogen haben, sondern beim Umgang mit Bruchzahlen auf bekannte Eigenschaften und Gesetzmäßigkeiten der natürlichen Zahlen zurückgreifen (Alibali & Sidney, 2015; Ni & Zhou, 2005; Vamvakoussi, Van Dooren & Verschaffel, 2012; DeWolf & Vosniadou, 2011).

Die Notwendigkeit einer gezielten Unterstützung zur Bewältigung der Vorstellungsumbrüche kann mit der Theorie des Conceptual Change (Konzeptwechsel) begründet werden. Die Grundannahme ist hierbei, dass Lernen nicht nur in der Erweiterung vorhandener Wissensbestände besteht, sondern mitunter eine Veränderung bereits verinnerlichter Vorstellungen und Prozeduren erfordert (Posner, Strike, Hewson & Gertzog, 1982; Prediger, 2005; Vamvakoussi, Vosniadou & Van Dooren, 2013; Vosniadou & Verschaffel, 2004).

Ein Conceptual Change gelingt besser, wenn Unzufriedenheit mit vorhandenen Konzepten besteht und wenn neue Konzepte für das Lernen sinnvoller scheinen, wenn sie passendere Erklärungen liefern oder wenn sie vielfältiger angewendet werden können als die bisherigen Konzepte (Posner et al., 1982; vgl. Vosniadou, 2012). Ein Konzeptwechsel kann dementsprechend durch einen kognitiven Konflikt angestoßen werden. Durch einen äußeren Anreiz entsteht für Lernende ein kognitives Ungleichgewicht zwischen der äußeren Erfahrung und ihren vorhandenen individuellen Konzepten und damit der Bedarf, bestehende Konzepte zu revidieren.

Eine instruktionale Möglichkeit, einen kognitiven Konflikt bei Lernenden zu erzeugen, ist das Bereitstellen geeigneter Lernaufgaben in Verbindung mit expliziten Hinweisen auf die Notwendigkeit eines Konzeptwechsels (Braithwaite & Siegler, 2018; Tippett, 2010). Beispielsweise zeigten Lernende der 8. und 11. Klassenstufe nach dem Bearbeiten eines Texts mit expliziten Hinweisen auf das Dichtliegen von Bruchzahlen eine höhere Testleistung als eine Kontrollgruppe (Vamvakoussi, 2017). In einer Studie von Lem, Onghena, Verschaffel und Van Dooren (2017) erhielten Lernende explizite Hinweise in Texten, um Fehlvorstellungen festzustellen, zu widerlegen und anschließend durch fachlich korrekte Konzepte zu ergänzen bzw. zu ersetzen. Lernende, die mit solchen Texten arbeiteten, erzielten signifikant bessere Ergebnisse als Lernende, welche einen Text ohne explizite Hinweise erhielten.

Neben der Erzeugung eines kognitiven Konflikts bezüglich der zu verändernden Konzepte können an geeigneten Stellen auch explizite Hinweise auf *Gemeinsamkeiten* zwischen bisherigen und zu erlernenden Konzepten lernförderlich sein. Beispielsweise zeigten Sidney und Alibali (2015; 2017), dass die Aktivierung *geeigneter* Grundvorstellungen zur Division natürlicher Zahlen einen positiven Einfluss auf eine darauffolgende Bearbeitung von Divisionsaufgaben zu Brüchen hatte.

2.3 Bedeutung von Schulbüchern

Schulbüchern wird gemeinhin ein großer Einfluss auf die Gestaltung des Mathematikunterrichts zugeschrieben, weil sie den abstrakten Bildungsplan in konkrete Lehrabläufe übersetzen und somit einen wichtigen Leitfaden dafür bilden, wie Lehrkräfte die Inhalte arrangieren (Valverde, Bianchi, Wolfe, Schmidt & Houang, 2002). Damit sind Schulbücher von großer Bedeutung für die Vorbereitung von Lehrkräften (Pepin & Haggarty, 2001) und auch für deren Unterricht: So beeinflussen Schulbücher beispielsweise die Auswahl der zu bearbeitenden Aufgaben beim Lernen von Brüchen (Alajmi, 2012).

Beim Zahlbereich Brüche kann diese Bedeutung als besonders hoch angesehen werden, da angehende Lehrkräfte für die Primar- und Sekundarstufe in diesem Bereich selbst häufig Defizite zeigen. Dies betrifft sowohl das fachliche Wissen, wie das Lösen von Textaufgaben mit Brüchen oder das Verständnis des Dichtliegens (Depaepe et al., 2015), als auch das fachdidaktische Wissen hinsichtlich der Verwendung geeigneter Repräsentationen (Dreher, Kuntze & Lerman, 2016).

Daneben spielt das Schulbuch auch für Lernende eine relevante Rolle als Medium zur inhaltlichen Zusammenfassung der Unterrichtsthemen, zur Nachbereitung, zur Bearbeitung von Hausaufgaben und zur Prüfungsvorbereitung (Fuchs, Niehaus & Stoletzki, 2014, S. 127).

Vor diesem Hintergrund ist zu erwarten, dass das eingesetzte Schulbuch Einfluss auf die mathematische Kompetenzentwicklung der Lernenden nehmen kann. Empirisch zeigt sich diesbezüglich eine ambivalente Befundlage. So konnten zwei breit angelegte Studien im Rahmen von Mehrebenenanalysen keinen allgemeinen Einfluss des verwendeten Schulbuchs auf Schülerleistung aufzeigen (Blazer et al., 2019; Van Steenbrugge, Valcke & Desoete, 2013). In Bezug auf Bruchzahlen wiesen Braithwaite, Pyke und Siegler (2017) allerdings nach, dass typische Fehler von Lernenden im Umgang mit Bruchzahlen allein durch die Häufigkeit bestimmter Aufgabentypen, z. B. seltenes Vorkommen schwieriger Rechenoperationen in der Division, in Schulbüchern vorhergesagt werden können. Weiter konnten für den Mathematikunterricht der Grundschule signifikante Unterschiede in den mittleren Mathematikleistungen der Schülerinnen und Schülern in Abhängigkeit vom eingesetzten Schulbuch belegt werden (Agodini, Harris, Atkins-Burnett, Heaviside, Novak & Murphy, 2009; Sievert, van den Ham, Niedermeyer & Heinze, 2019).

2.4 Forschungsfragen

Zusammenfassend folgt aus einer theoretischen Perspektive der Bedarf, Lernende beim Übergang von natürlichen Zahlen zu Bruchzahlen explizit auf Gemeinsamkeiten einerseits und Unterschiede hinsichtlich der oben dargelegten Aspekte andererseits hinzuweisen. Inwiefern dies auch in Schulbüchern realisiert wird, ist bislang nicht systematisch untersucht. Es ergeben sich deshalb zwei Forschungsfragen:

- Welche Lerngelegenheiten bieten Schulbücher, um einen Conceptual Change bezüglich der Vorstellungsumbrüche von natürlichen Zahlen zu Bruchzahlen zu unterstützen?
- In welchem Umfang finden sich solche Lerngelegenheiten in Schulbüchern?

3. Methodisches Vorgehen

Die Studie folgt einer quantitativen Inhaltsanalyse in Anlehnung an Kuckartz (2018), der auf Mayring (2015) rekurriert. Es galt zunächst, ein geeignetes Kategoriensystem zu entwickeln, um das Spektrum möglicher Lerngelegenheiten bezüglich eines Conceptual Change in Schulbüchern beschreiben und erfassen zu können. Auf dieser Grundlage wurden anschließend drei Schulbuchreihen kodiert, um Informationen über die Häufigkeiten der jeweiligen Lerngelegenheiten zu erhalten.

3.1 Entwicklung des Kategoriensystems

Als Kodiereinheit wurden jegliche Elemente in den Schulbüchern herangezogen, also Aufgaben, Beispiele, Merksätze, Zusammenfassungen und Hinweise. Dabei wurde jeweils die kleinste Einheit (z. B. ein Zahlenbeispiel oder eine Teilaufgabe) als Kodiereinheit betrachtet. Größere Aufgabenverbünde ohne markierte Teilaufgaben bildeten stets eine Kodiereinheit.

Die Kodierung unterschied zunächst, ob im jeweiligen Element eine Lerngelegenheit bezüglich der Gemeinsamkeiten oder Unterschiede von natürlichen Zahlen und Bruchzahlen gegeben ist (Abb. 1). Lag bei einem Element wie der Aufgabe

> „Der Schokoriegel wiegt 60 g. Schätze, wie schwer das abgebrochene Stück ist" (Schnittpunkt 6, S. 34).

keine solche Lerngelegenheit vor, wurde der Kodiervorgang beendet. Lag dagegen eine solche Lerngelegenheit vor, wurden drei weitere Kodierungen vorgenommen: nach der Art der Lerngelegenheit, nach ihrem Ziel und dem Aspekt, den sie anspricht.

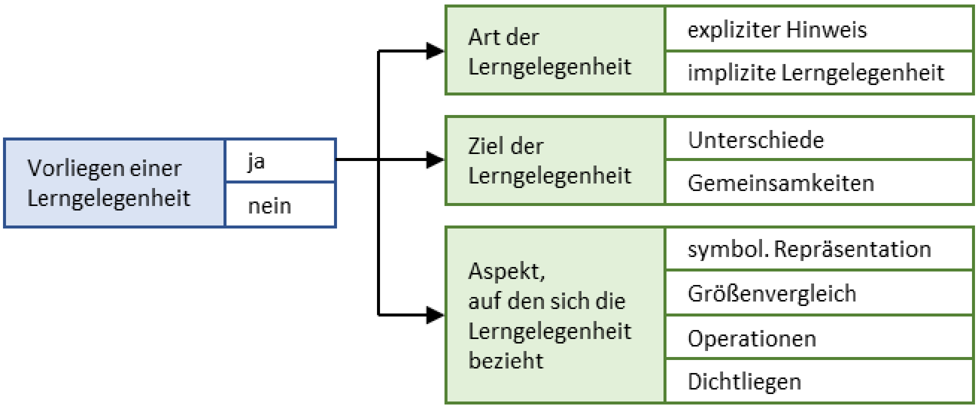

Abb. 1: Zweistufiges Kodierschema

Explizite Hinweise können sich auf Unterschiede oder Gemeinsamkeiten von Bruchzahlen und natürlichen Zahlen beziehen. Ein Beispiel für einen expliziten Hinweis auf Unterschiede wäre eine Formulierung wie „Anders als bei natürlichen Zahlen kann beim Multiplizieren von Brüchen das Ergebnis auch kleiner als die Ausgangszahl sein". Da kein expliziter Hinweis auf Unterschiede gefunden wurde, kann hier kein Schulbuchbeispiel angegeben werden.

Ein Beispiel für einen expliziten Hinweis auf Gemeinsamkeiten ist der folgende Merksatz, der den Aspekt der Operationen und damit das analoge Vorgehen beim Runden von Dezimalbrüchen und natürlichen Zahlen betont:

> „Beim Runden von Dezimalzahlen gelten dieselben Regeln wie für das Runden von natürlichen Zahlen" (Schnittpunkt 6, S. 106)

Explizite Hinweise können sich auf einzelne Operationen beziehen, aber auch grundsätzliche Erkenntnisse oder Prinzipien zum Ausdruck bringen. Der folgende Hinweis deutet auf Gemeinsamkeiten innerhalb des Aspekts der Operationen der Zahlbereiche hin:

> „Rechengesetze, die für natürliche Zahlen gelten, werden auf die rationalen Zahlen übertragen" (Schnittpunkt 7, S. 35).

Zwar müssen explizite Hinweise den Zusammenhang von natürlichen Zahlen und Bruchzahlen deutlich machen, jedoch nicht unbedingt den Terminus „natürliche Zahl(en)" enthalten. So können Partikel wie „auch" ebenfalls diese Funktion übernehmen. Das folgende Beispiel zeigt dies als expliziter Hinweis bezüglich einer Gemeinsamkeit des Aspekts Operationen auf:

> „Das [die Division als Umkehrung der Multiplikation] gilt auch für die rationalen Zahlen [...]" (Schnittpunkt 7, S. 29)

Neben den expliziten Hinweisen können auch *implizite Lerngelegenheiten* auftreten. Entsprechend der Charakterisierung von Aufgaben als kognitiv aktivierend (Leuders & Holzäpfel, 2011), handelt es sich dabei um Lerngelegenheiten, die das Potenzial besitzen, einen Conceptual Change zu unterstützen. Dieses Potenzial muss aber im Unterricht erst über eine Bearbeitung durch die Schülerinnen und Schüler und eine entsprechende Thematisierung der Gemeinsamkeiten oder Unterschiede durch die Lehrkraft realisiert werden.

Implizite Lerngelegenheiten hängen meist von im Schulbuch gegebenen Zahlen ab. So wurde die Aufgabe

> „Welcher Bruch liegt genau in der Mitte?" (Schnittpunkt 7, S. 25).

als implizite Lerngelegenheit bezüglich des Dichtliegens von Bruchzahlen – also bezüglich eines Unterschieds zu den natürlichen Zahlen – kodiert, da die gegebenen Zahlen $\frac{2}{9}$ und $\frac{7}{9}$ so gewählt sind, dass ein Erweitern notwendig ist und damit quasikardinales Arbeiten nicht zum Ziel führt.

Das Benennen markierter Brüche am Zahlenstrahl stellt eine implizite Lerngelegenheit für die Nicht-Eindeutigkeit der Zahldarstellung bei Bruchzahlen dar, wenn – wie im gegebenen Beispiel – jeder markierten Position am Zahlenstrahl mehrere mögliche Brüche entsprechen. Hierbei stellt die implizite Lerngelegenheit den Aspekt der symbolischen Repräsentation bezüglich eines Unterschieds der Zahlbereiche dar:

> „Welche Brüche sind [am vorliegenden Zahlenstrahl] markiert?" (Schnittpunkt 6, S. 24)

Auch das Umwandeln von Brüchen in gemischte Zahlen kann eine implizite Lerngelegenheit in Bezug auf die Nicht-Eindeutigkeit der Zahldarstellung sein und wurde in folgendem Beispiel als implizite Lerngelegenheit bezüglich eines Unterschieds im Aspekt der symbolischen Repräsentation kodiert:

> „Wandle in eine gemischte Zahl um: $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{2}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{7}{4}$; $\frac{9}{2}$; $\frac{4}{4}$; $\frac{8}{4}$" (Schnittpunkt 7, S. 24)

Umgekehrt bildet das Arbeiten mit gleichnamigen Brüchen, das den quasikardinalen Aspekt betont, eine implizite Lerngelegenheit für Gemeinsamkeiten von Bruchzahlen und natürlichen Zahlen im Aspekt der Operationen:

> „Berechne. Kürze wenn möglich, [...]. $\frac{7}{12} - \frac{5}{12}$; $\frac{3}{14} + \frac{9}{14}$; …“ (Schnittpunkt 7, S. 45)

Häufig sind die gegebenen Zahlen einer Aufgabe entscheidend für deren Einordnung. So bildet die Aufgabe

> „Vergleiche die Brüche: $\frac{13}{10}$ und $\frac{6}{5}$“ (Schnittpunkt 6, S. 30)

eine implizite Lerngelegenheit für eine Gemeinsamkeit von natürlichen und rationalen Zahlen bezüglich des Aspekts Größenvergleich, da bei diesen beiden Brüchen der Vergleich von Zähler und Nenner analog zum Größenvergleich von natürlichen Zahlen ausreicht. Hingegen führt der bloße Vergleich der Zähler oder Nenner im Beispiel

> „Vergleiche die Brüche: $\frac{7}{10}$ und $\frac{4}{5}$“ (Schnittpunkt 6, S. 30)

nicht zum richtigen Ergebnis. Deshalb liegt hier eine implizite Lerngelegenheit für einen Unterschied der beiden Zahlbereiche im selben Aspekt Größenvergleich vor.

Für alle Elemente wurden neben der *Art* des Hinweises (explizit/implizit) und dem *Ziel* des Hinweises (Unterschied oder Gemeinsamkeit) auch der *Aspekt* (Symbolische Repräsentation, Größe und Größenvergleich, Operationen oder Dichtliegen, s. 2.1 und Abb. 1) kodiert.

3.2 Kodierung

Analysiert wurden drei Schulbuchreihen der Jahrgangsstufen 5 bis 7 in Baden-Württemberg, da in diesen Bruchzahlen systematisch behandelt werden: Schnittpunkt 5, 6 und 7 (Backhaus et al., 2015a; 2015b; 2016), Mathe live 5, 6 (Göckel et al., 2014; 2015) und 7 (Böer et al., 2016) sowie Lambacher Schweizer 5, 6 (Buck et al. 2014; 2015) und 7 (Freudigmann et al., 2016). Die Einschränkung auf Schulbücher in Baden-Württemberg erscheint wenig problematisch, da die Ausgaben für andere Bundesländer sich meist nur in Details unterscheiden. In den genannten Schulbüchern wurden jeweils alle Kapitel zu Bruchzahlen einschließlich Dezimalbrüchen kodiert.

Die Kodierung erfolgte durch die Erstautorin sowie eine intensiv geschulte studentische Hilfskraft. Um die Reliabilität der Kodierung sicherzustellen, wurden etwa 20 % der Lerngelegenheiten zufällig ausgewählt und unabhängig voneinander doppelt kodiert. Cohens Kappa betrug dabei $\kappa = 0{,}82$ für das Vorliegen einer Lerngelegenheit (vorhanden/nicht vorhanden), $\kappa = 0{,}92$ für die Art der Lerngelegenheit, $\kappa = 0{,}77$ für das Ziel der Lerngelegenheit und $\kappa = 0{,}85$ für den Aspekt, der angesprochen wird. Nach Wirtz und Caspar (2002, S. 59) weisen Werte von $\kappa > 0{,}75$ auf eine sehr gute Übereinstimmung hin, weshalb die vorgenommene Kodierung als reliabel eingestuft werden kann.

Nach Rezat (2008, S. 78 ff.) lassen sich in Mathematikbüchern für die Sekundarstufe drei Strukturebenen unterscheiden: (1) die Makroebene bezieht sich auf das Schulbuch als Ganzes, (2) die Mesoebene auf die Kapitel, d. h. die thematischen Lerneinheiten eines Schulbuchs, und (3) die Mikroebene auf die einzelnen Elemente eines Schulbuches, wie z. B. Aufgaben oder Bilder. Entsprechend dieser Gliederung fand durch die Beschränkung auf einzelne Kapitel eine Vorauswahl auf der Mesoebene statt, während sich die Kodierung auf die Mikroebene des Schulbuchs bezieht, um anschließend durch eine Häufigkeitsanalyse wiederum die Mesoebene im Themenbereich Bruchzahlen (einschließlich Dezimalbrüche) zu erfassen. Nicht berücksichtigt werden andere Themenbereiche, beispielsweise Kapitel zu Größen, in denen auch gemeine Brüche oder Dezimalbrüche auftreten könnten.

4. Ergebnisse

Mit dem in dieser Studie entwickelten Kodierschema konnten zwei Arten von Lerngelegenheiten unterschieden werden, die den Conceptual Change von natürlichen Zahlen zu Bruchzahlen unterstützen können: Explizite Hinweise auf Gemeinsamkeiten oder Unterschiede beider Zahlbereiche sprechen diese direkt an. Implizite Lerngelegenheiten bieten lediglich Zahlenmaterial an, das sich dafür eignet, Gemeinsamkeiten oder Unterschiede beider Zahlbereiche zu thematisieren – ob und in welcher Weise dies geschieht, bleibt der Lehrkraft überlassen oder hängt vom Verlauf der unterrichtlichen Interaktion ab. Obwohl insbesondere die Kodierung der impliziten Lerngelegenheiten hochinferent war, gelang eine reliable Kodierung.

In den untersuchten drei Schulbuchreihen wurden 11439 Elemente kodiert. Davon lag in 9555 eine Lerngelegenheit in Bezug auf Gemeinsamkeiten oder Unterschiede beider Zahlbereiche vor (Tab. 2). Die Verteilung auf die drei Schulbuchreihen ist ein Indikator dafür, dass dort jeweils unterschiedlich viele Aufgaben angeboten werden (Lambacher Schweizer: 3621; Schnittpunkt: 3388; Mathe live: 2546).

Lediglich 23 (0,2 %) der 9555 Lerngelegenheiten mit einem Hinweis enthielten einen *expliziten* Hinweis. Alle 23 expliziten Hinweise zielten auf Gemeinsamkeiten beider Zahlbereiche, kein einziger zielte auf Unterschiede. Die meisten expliziten Hinweise bezogen sich auf den Aspekt *Operationen* (15 von 23). Jeweils 4 der 23 expliziten Hinweise sprachen die Aspekte *Größenvergleich* beziehungsweise *Symbolische Repräsentation* an. Zum *Dichtliegen* enthielten die drei Schulbücher keine expliziten Hinweise.

Von den 9532 impliziten Lerngelegenheiten verweisen 6929 auf Unterschiede (72,5 %) und 2603 auf Gemeinsamkeiten (27,2 %). Implizite Lerngelegenheiten konnten in allen vier Aspekten gefunden werden (vgl. Tab. 2). Wie bei den expliziten Hinweisen kam aber auch hier der Aspekt *Operationen* mit insgesamt 5681 Lerngelegenheiten (59,5 %) am häufigsten vor. Daneben sind die Aspekte *symbolische Repräsentation* mit 2403 (25,1 %) und *Größenvergleich* mit 1166 (12,2 %) vertreten. Die wenigsten impliziten Lerngelegenheiten fanden sich auch hier analog zu den expliziten Hinweisen beim Aspekt *Dichtliegen* mit 282 Lerngelegenheiten (3,0 %). Die Lerngelegenheiten in diesem letzten Aspekt beziehen sich naturgemäß nur auf Unterschiede der beiden Zahlbereiche, nicht auf deren Gemeinsamkeiten.

5. Diskussion und Schlussfolgerungen

Entsprechend dem Ansatz des Conceptual Change sollten insbesondere explizite Hinweise hilfreich sein, um Schwierigkeiten von Lernenden bei der Zahlbereichserweiterung von den natürlichen zu den Bruchzahlen entgegenzuwirken. Dass in den drei Schulbuchreihen nur 23 derartige explizite Hinweise ausgemacht werden konnten, die sich noch dazu ausnahmslos auf Gemeinsamkeiten beziehen, ist ernüchternd. Als besonders problematisch erscheint, dass es keinen einzigen expliziten Hinweis gibt, der auf die Unterschiede zielt – obwohl gerade die Unterschiede und die damit verbundenen Vorstellungsumbrüche Lernenden erhebliche Schwierigkeiten bereiten können. Aufgabenformate, mit denen Unterschiede explizit thematisiert werden können, sind mittlerweile hinlänglich bekannt (Prediger, 2004; Hefendehl-Hebeker & Prediger, 2006), haben aber offenbar noch keinen Eingang in Schulbücher gefunden. Dies verweist auf ein Problem beim Transfer der Ergebnisse mathematikdidaktischer Entwicklungsforschung in die Unterrichtspraxis.

Die wenigen expliziten Hinweise sind auch ungleich auf die verschiedenen Aspekte verteilt, die entsprechend der Literatur beim Übergang von den natürlichen Zahlen zu den Bruchzahlen bedeutsam sind: So gibt es in Bezug auf die symbolische Repräsentation nur wenige und in Bezug auf das Dichtliegen von Bruchzahlen keinen Hinweis. Durch die Wiederholung einiger expliziter Hinweise wird zwar deren Bedeutung hervorgehoben, allerdings ist die Anzahl unterschiedlicher Hinweise innerhalb der expliziten Hinweise dadurch nochmals geringer.

Diese Befunde sind kein Einzelfall: In einer international angelegten Studie wurden, ähnlich wie in der vorliegenden Schulbuchanalyse, ausgewählte Schulbücher aus fünf europäischen Ländern auf explizite Hinweise auf Unterschiede zwischen natürlichen Zahlen und Bruchzahlen kodiert (Van Dooren et al., 2019). Sie lieferte ähnliche Ergebnisse: Mit Ausnahme des Resultats aus Griechenland (18 Hinweise) war die Anzahl der gefundenen expliziten Hinweise stets sehr gering.

Die impliziten Lerngelegenheiten beziehen sich – anders als die expliziten Hinweise – weitaus häufiger auf die Unterschiede beider Zahlbereiche. Dies ist plausibel, da es sich hierbei um Aufgaben handelt, deren Zahlen sich eignen, um Unterschiede anzusprechen. Auch hier gibt es nur wenige implizite Lerngelegenheiten in Bezug auf das Dichtliegen der Bruchzahlen, konkret nur wenige Aufgaben, in deren Anschluss das Dichtliegen basierend auf den Lösungen thematisiert werden kann.

Zudem dürfen die impliziten Lerngelegenheiten nicht überbewertet werden. Sie ermöglichen es Lernenden zwar, Erfahrungen in Bezug auf Gemeinsamkeiten und Unterschiede beider Zahlbereiche zu sammeln. Damit diese für einen Conceptual Change tragfähig werden, müssen sie aber explizit gemacht werden, im Allgemeinen wohl durch zusätzliche Impulse der Lehrkraft jenseits des Schulbuchs. Und hier liegt ein mögliches Problem: Die Lehrkraft muss die entsprechenden Lerngelegenheiten erkennen und situativ aufgreifen, sie muss selbstständig geeignete Impulse formulieren. Insbesondere für unerfahrene oder fachfremde Lehrkräfte stellt dies eine Herausforderung dar. Implizite Lerngelegenheiten bergen deshalb die Gefahr, zu verpassten Lerngelegenheiten zu werden. Zudem können implizite Lerngelegenheiten bezüglich Gemeinsamkeiten einen Conceptual Change sogar behindern, wenn beispielsweise die Zahlen in Aufgaben so gegeben sind, dass auch im Allgemeinen falsche Denk- und Vorgehensweisen im speziellen Fall zum richtigen Ergebnis führen.

Die Analyse der drei Schulbuchreihen verweist darauf, dass das alleinige Arbeiten mit Schulbüchern ohne Ergänzung zusätzlicher expliziter Hinweise seitens der Lehrkraft für einen gelungenen Conceptual Change unzureichend ist. Mehr explizite Lerngelegenheiten in Schulbüchern – insbesondere auch zu Unterschieden beider Zahlbereiche – würden deshalb nicht nur die Lernenden, sondern auch die Lehrkräfte deutlich unterstützen.

Literatur

Agodini, R., Harris, B., Atkins-Burnett, S., Heavside, S., Novak, T. & Murphy, R. (2009). Achievement Effects of Four Early Elementary School Math Curricula: Findings from First Graders in 39 Schools. *National Center for Education Evaluation and Regional Assistance*. NCEE 2009-4052.

Alajmi, A. H. (2012). How do elementary textbooks address fractions? A review of mathematics textbooks in the USA, Japan, and Kuwait. *Educational Studies in Mathematics, 79*(2), 239–261. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9342-1

Alibali, M. W. & Sidney, P. G. (2015). Variability in the natural number bias: Who, when, how, and why. *Learning and Instruction, 37*, 56–61. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2015.01.003

Backhaus, M., Bernhard, I., Böttner, J., Fechner, G., Malzacher, W., Olpp, A., Stöckle, C., Straub, T. & Wellstein, H. (2015a). *Schnittpunkt 5. Mathematik – Differenzierende Ausgabe. Baden-Württemberg*. 1. Aufl. Stuttgart, Leipzig: Ernst Klett Verlag.

Backhaus, M., Bernhard, I., Böttner, J., Fechner, G., Malzacher, W., Olpp, A., Stöckle, C., Straub, T. & Wellstein, H. (2015b). *Schnittpunkt 6. Mathematik – Differenzierende Ausgabe. Baden-Württemberg.* 1. Aufl. Stuttgart, Leipzig: Ernst Klett Verlag.

Backhaus, M., Bernhard, I., Böttner, J., Fechner, G., Malzacher, W., Stöckle, C., Straub, T. & Wellstein, H. (2016). *Schnittpunkt 7. Mathematik – Differenzierende Ausgabe. Baden-Württemberg.* 1. Aufl. Stuttgart, Leipzig: Ernst Klett Verlag.

Behr, M. J., Wachsmuth, I. & Post, T. R. (1985). Construct a Sum: A Measure of Children's Understanding of Fraction Size. *Journal for Research in Mathematics Education*, *16*(2), 120–131. https://doi.org/10.2307/748369

Blazer, D., Heller, B., Kane, T. J., Polikoff, M. S., Staiger, D., Carrell, S., Goldhaber, D., Hitch, R., Harris, D., Holden, K. L. & Kurlaender, M. (2019). *Learning by the Book: Comparing Math Achievement Growth by Textbook in Six Common Core States*. Center for Education Policy Research, Harvard University.

Böer, H., Göckel, D., Kliemann, S., Koepsell, A., Puscher, R., Richter, M., Schmidt, W., Vernay, R., Werner, S. & Tönnies, D. (2013). *mathe live 7. Mathematik für Sekundarstufe I.* Stuttgart, Leipzig: Ernst Klett Verlag.

Braithwaite, D. W., Pyke, A. A. & Siegler, R. S. (2017). A computational model of fraction arithmetic. *Psychological Review, 124*(5), 603–625. https://doi.org/10.1037/rev0000072

Braithwaite, D. W. & Siegler, R. S. (2018). Developmental changes in the whole number bias. *Developmental Science, 21*(2). https://doi.org/10.1111/desc.12541

Buck, H., Freudigmann, H., Greulich, D., Haug, F. & Sandmann, R. (2015). *Lambacher Schweizer 6. Mathematik für Gymnasien. Baden-Württemberg.* Stuttgart, Leipzig: Ernst Klett Verlag.

Buck, H., Freudigmann, H., Greulich, D., Sandmann, R. & Schatz, T. (2014). *Lambacher Schweizer 5. Mathematik für Gymnasien. Baden-Württemberg.* Stuttgart, Leipzig: Ernst Klett Verlag.

Carraher, D. W. (1993). Lines of thought: a ratio and operator model of rational number*. Educational Studies in Mathematics,* 25(4), 281–305. https://doi.org/10.1007/BF01273903

Carraher, D. W. (1996). Learning About Fractions. In L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin & B. Greer (Hrsg.), *Theories of Mathematical Learning* (S. 241–266). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Depaepe, F., Torbeyns, J., Vermeersch, N., Janssens, D., Janssen, R., Kelchtermanns, G., Verschaffel, L. & Van Dooren, W. (2015). Teachers' content and pedagogical content knowledge on rational numbers: A comparison of prospective elementary and lower secondary school teachers. *Teaching and Teacher Education*, 47, 82-92. https://doi.org/10.1016/j.tate.2014. 12.009

DeWolf, M. & Vosniadou, S. (2011). The whole number bias in fraction magnitude comparisons with adults. In L. Carlson, C. Hoelscher & T. F. Shipley (Hrsg.), *Proceedings of the 33rd annual conference of the cognitive science society* (pp. 1751–1756). Austin, TX: Cognitive Science Society.

Dreher, A., Kuntze, S. & Lerman, S. (2016). Why Use Multiple Representations in the Mathematics Classroom? Views of English and German Preservice Teachers. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *14*, 363–382. https://doi.org/10.1007/s10763-015-9633-6

Eichelmann, A., Narciss, S., Schnaubert, L. & Melis, E. (2012). Typische Fehler bei der Addition und Subtraktion von Brüchen – Ein Review zu empirischen Fehleranalysen. *Journal für Mathematik-Didaktik, 33*(1), 29–57. https://doi.org/10.1007/s13138-011-0031-5

Freudigmann, H., Haug, F., Rauscher, M., Sandmann, R., Schatz, T. & Zmaila, A. (2016). *Lambacher Schweizer 7. Mathematik für Gymnasien. Baden-Württemberg.* Stuttgart, Leipzig: Ernst Klett Verlag.

Göckel, D., Hesse, D., Kliemann, S., Koepsell, A., Puscher, R., Schmidt, W., Vernay, R. & Werner, S. (2015). *mathe live 6. Mathematik für Sekundarstufe.* Stuttgart, Leipzig: Ernst Klett Verlag.

Göckel, D., Kliemann, S., Puscher, R., Schmidt, W., Vernay, R. & Werner, S. (2014). *mathe live 5. Mathematik für Sekundarstufe.* Stuttgart, Leipzig: Ernst Klett Verlag.

Fuchs, E., Niehaus, I. & Stoletzki, A. (2014). *Das Schulbuch in der Forschung. Analysen und Empfehlungen für die Bildungspraxis.* Göttingen: V & R unipress.

Hefendehl-Hebeker, L. & Prediger, S. (2006). Unzählig viele Zahlen: Zahlbereiche erweitern – Zahlvorstellungen wandeln. *Praxis der Mathematik in der Schule, 48*(11), 1–7*.*

Kuckartz, U. (2018). *Qualitative Inhaltsanalyse. Methoden, Praxis, Computerunterstützung* (4. Aufl.). Weinheim: Beltz.

Lem, S., Onghena, P., Verschaffel, L. & Van Dooren, W. (2017). Using refutational text in mathematics education. *ZDM – Mathematics Education*, *49*(4), 509–518. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0843-y

Lenz, K., Dreher, A., Holzäpfel, L. & Wittmann, G. (2020). Are conceptual knowledge and procedural knowledge empirically separable? The case of fractions. *British Journal of Educational Psychology*, *90*(3), 809–829. https://doi.org/10.1111/bjep.12333

Leuders, T. & Holzäpfel, L. (2011). Kognitive Aktivierung im Mathematikunterricht. *Unterrichtswissenschaft*, *39*(3), 213–230.

Mayring, P. (2015). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken* (12., überarb. Aufl.). Weinheim: Beltz.

Ni, Y. & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and Learning Fraction and Rational Numbers: The Origins and

Implications of Whole Number Bias. *Educational Psychologist, 40*(1), 27–52. https://doi.org/10.1207/s15326985ep4001_3

Obersteiner, A., Dresler, T., Bieck, S. M. & Moeller, K. (2019). Understanding Fractions: Integrating Results from Mathematics Education, Cognitive Psychology, and Neuroscience. In A. Norton & M. W. Alibali (Hrsg.), *Constructing number. Merging perspectives from psychology and mathematics education* (S. 135–162). Cham, Schweiz: Springer. https://doi.org/ 10.1007/978-3-030-00491-0_7

Padberg, F., Danckwerts, R. & Stein, M. (1995). *Zahlbereiche. Eine elementare Einführung.* Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Padberg, F. & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Bruchrechnung.* 5. Aufl. Berlin: Springer Spektrum.

Pepin, B. & Haggarty, L. (2001). Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: a way to understand teaching and learning cultures. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 33*(5), 158–175. https://doi.org/10.1007/BF02656616

Posner, G. J., Strike K. A., Hewson, P. W. & Gertzog, W. A. (1982). Accommodation of a Scientific Conception: Toward a Theory of Conceptual Change. *Science Education 66*(2), 211–227. https://doi.org/10.1002/sce.3730660207

Prediger, S. (2004). Brüche bei den Brüchen – aufgreifen oder umschiffen? *Mathematik lehren, 123*, 10–13.

Prediger, S. (2005). „Auch will ich Lernprozesse beobachten, um besser Mathematik zu verstehen." Didaktische Rekonstruktion als mathematikdidaktischer Forschungsansatz zur Restrukturierung von Mathematik. *mathematica didactica, 28*(2), 23–47.

Prediger, S. (2008). The relevance of didactic categories for analysing obstacles in conceptual change: Revisiting the case of multiplication of fractions. *Learning and Instruction, 18*(1), 3–17. https://doi.org/10.1016/ j.learningstruc.2006.08.001

Rezat, S. (2008). Die Struktur von Mathematikschulbüchern. *Journal für Mathematik-Didaktik, 29*(1), 46–67. https://doi.org/10.1007/bf03339361

Sidney, P. G. & Alibali, M. W. (2015). Making Connections in Math: Activating a Prior Knowledge Analogue Matters for Learning. *Journal of Cognition and Development, 16*(1), 160–185. https://doi.org/10.1080/ 15248372.2013.792091

Sidney, P. G. & Alibali, M. W. (2017). Creating a Context for Learning: Activating Children's Whole Number Knowledge Prepares Them to Understand Fraction Division. *Journal of Numerical Cognition, 3*(1), 31–57. https://doi.org/10.5964/jnc.v3i1.71

Sievert, H., van den Ham, A.-K., Niedermeyer, I. & Heinze, A. (2019). Effects of mathematics textbooks on the development of primary school children's adaptive expertise in arithmetic. *Learning and Individual Differences*, *74*. https://doi.org/10.1016 /j.lindif.2019.02.006

Tippett, C. D. (2010). Refutation text in science education: A review of two decades of research. *International Journal or Science and Mathematics Education, 8*(6), 951–970. https://doi.org/10.1007/s10763-010-9203-x

Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H. & Houang, R. T. (2002). *According to the book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks.* Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Vamvakoussi, X. (2017). Using analogies to facilitate conceptual change in mathematics learning. *ZDM – Mathematics Education, 49*, 497–507. https://doi.org/10. 1007/s11858-017-0857-5

Vamvakoussi, X. & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *Learning and Instruction, 14*(5), 453–467. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004. 06.013

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W. & Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *The Journal of Mathematical Behavior, 31*(3), 344–355. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.02.001

Vamvakoussi, X., Vosniadou, S. & Van Dooren, W. (2013). The framework theory approach applied to mathematics learning. In S. Vosniadou (Hrsg.), *International handbook of research on conceptual change,* (2. Aufl., S. 305–321). New York & London: Routledge Taylor & Francis Group. https://doi.org/ 10.4324/ 9780203154472

Van Dooren, W., Christou, K., Depaepe, F., Inglis, M., Määtä, S., McMullen, J., Obersteiner, A., Heck Ribeiras, P., Van Hoof, J., Triandafyllou, M., Vamvakoussi, X., Verschaffel, L., Wittmann, G. & Wollacott, B. (2019). Tackling the natural number bias. A comparative textbook analysis. Paper presented at the 18th Biennial Conference of the European Association for Research on Learning and Instruction (EARI), Aachen, Germany, 12 Aug 2019-16 Aug 2019.

Vosniadou, S. (2012). Reframing the classical approach to conceptual change: Preconceptions, misconceptions and synthetic models. In B. J. Frazer, K. G. Tobin & C. J. McRobbie (Hrsg.), *Second International Handbook of Science Education* (Bd. 2, S. 119–130). New York: Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4020-9041-7_10

Vosniadou, S. & Verschaffel, L. (2004). The Conceptual Change Approach to Mathematics Learning and Teaching. *Learning and Instruction, 14*(5), 445–548.

Van Steenbrugge, H., Valcke, M. & Desoete, A. (2013). Teachers' views of mathematics textbook series in Flandern: does it (not) matter which mathematics textbook series schools choose? *Journal of Curriculum Studies*, 45(3), 322–353. https://doi.org/10. 1080/00220272.2012.713995

Wirtz, M. A. & Caspar, F. (2002). *Beurteilerübereinstimmung und Beurteilerreliabilität*. Göttingen: Hogrefe.

Anschrift der Verfasser:innen

Patricia Heck Ribeiras & Gerald Wittmann
Pädagogische Hochschule Freiburg
Institut für Mathematische Bildung
Kunzenweg 21
79117 Freiburg
patricia.heckribeiras@ph-freiburg.de
gerald.wittmann@ph-freiburg.de

Andreas Obersteiner
Technische Universität München
TUM School of Social Sciences and Technology
Marsstraße 20-22
80335 München
andreas.obersteiner@tum.de

Gemeinsamkeiten von natürlichen Zahlen und Bruchzahlen	**Unterschiede von natürlichen Zahlen und Bruchzahlen**
Symbolische Repräsentation	
	Für gemeine Brüche gibt es unendlich viele verschiedene äquivalente Darstellungen. Für endliche Dezimalbrüche gibt es unendlich viele verschiede äquivalente Darstellungen durch das Anhängen von Endnullen.
Größenvergleich	
Die Kleinerrelation ist gültig, einschließlich ihrer Deutung am Zahlenstrahl. Bei Dezimalbrüchen wie bei natürlichen Zahlen ist ein stellenweiser Vergleich von links nach rechts möglich. Bei gleichnamigen Brüchen erfolgt der Vergleich über die Zähler wie bei natürlichen Zahlen.	Der Vergleich ungleichnamiger Brüche ist im Allg. erst nach dem Erweitern oder Kürzen möglich. Ein größerer Zähler bedeutet im Allg. nicht, dass der zugehörige Bruch auch größer ist.
Operationen	
Addition und Subtraktion sowie Multiplikation und Division sind Umkehroperationen. Die Vorstellungen „Addition vergrößert“ und „Subtraktion verkleinert“ sind gültig. Der quasikardinale Aspekt gleichnamiger Brüche setzt den Kardinalzahlaspekt natürlicher Zahlen fort. Die Addition und Subtraktion von gleichnamigen Brüchen und Dezimalbrüchen mit gleicher Anzahl an Nachkommastellen verläuft wie bei den natürlichen Zahlen.	Addition und Subtraktion lassen sich im Allg. nicht als Weiter- oder Rückwärtszählen deuten bzw. ausführen. Die Addition und Subtraktion von ungleichnamigen Brüchen erfordert im Allg. das vorherige Gleichnamigmachen. Dezimalbrüche werden nicht rechtsbündig addiert oder subtrahiert, sondern am Komma ausgerichtet. Deutung der Multiplikation als wiederholte Addition und der Division als Verteilen sind nicht immer möglich. Die Vorstellungen „Multiplikation vergrößert“ und „Dividieren verkleinert“ gelten im Allg. nicht mehr.
Dichtliegen	
	Jede natürliche Zahl hat einen eindeutigen Nachfolger, die Bruchzahlen hingegen liegen dicht (zwischen zwei Bruchzahlen lassen sich unendlich viele weitere Bruchzahlen finden).

Tab. 1: Gemeinsamkeiten und Unterschiede von natürlichen Zahlen und Bruchzahlen

	Aspekt	Explizite Hinweise		Implizite Lerngelegenheiten		Gesamt	
		Unter-schiede	Gemein-samkeiten	Unter-schiede	Gemein-samkeiten		
Lambacher Schweizer	Symbol. Repr.	0	3	559	165	727	7,6 %
	Größenvergl.	0	3	147	139	289	3,0 %
	Operationen	0	6	1620	880	2506	26,2 %
	Dichtliegen	0	0	95	4	99	1,0 %
	Gesamt	0	12	2421	1188	3621	37,9 %
Mathe live	Symbol. Repr.	0	0	627	108	735	7,7 %
	Größenvergl.	0	0	262	135	397	4,2 %
	Operationen	0	2	1155	251	1408	14,7 %
	Dichtliegen	0	0	6	0	6	0,1 %
	Gesamt	0	2	2050	494	2546	26,6 %
Schnitt-punkt	Symbol. Repr.	0	1	923	21	945	9,9 %
	Größenvergl.	0	1	298	185	484	5,1 %
	Operationen	0	7	1060	715	1782	18,6 %
	Dichtliegen	0	0	177	0	177	1,9 %
	Gesamt	0	9	2458	921	3388	35,5 %
Gesamt		0	23	6929	2603	9555	100 %
		0 %	0,2 %	72,5 %	27,2 %		

Tab. 2: Ergebnisse der Analyse: Verteilung der expliziten Hinweise und impliziten Lerngelegenheiten auf deren Ziele und Aspekte innerhalb der Schulbücher. Anmerkung: Die Prozentangaben beziehen sich auf alle Lerngelegenheiten (n = 9555).