

Repräsentation und Rekonstruktion geometrischer Zusammenhänge mit GeoGebra

TILMAN SAUER, MAINZ & TOBIAS SCHÜTZ, MAINZ

Zusammenfassung: Geometrische Zusammenhänge müssen repräsentiert sein, um kommuniziert, erlernt und verstanden zu werden. Wir diskutieren die Bedeutung der verschiedenen Repräsentationsformen geometrischer Gegenstände. Wir zeigen, dass die dynamische Geometrie-Software GeoGebra nicht nur die Konstruktion und Illustration geometrischer Zusammenhänge gestattet, sondern auch die historische Rekonstruktion von Quellen, welche nur die fertige Konstruktion dokumentieren. Wir illustrieren unsere Überlegungen anhand einiger geometrischer Konstruktionen in Manuskripten Albert Einsteins.

Abstract: Geometric objects and their relations must be represented in order to be communicated, acquired and understood. We discuss the significance of various forms of representations of geometric objects. We show that the dynamic geometry software GeoGebra not only allows the construction and illustration of geometric relations but also the historical reconstruction of sources, which only document the final result of the construction. We illustrate our considerations with some geometric constructions in Albert Einstein's manuscripts.

1. Einleitung

Der Einsatz digitaler Medien im Schulunterricht und seine Grenzen sind ein wichtiges Thema didaktischer Reflexion (Pallack, 2018). Insbesondere die vielfältigen Einsatzmöglichkeiten dynamischer Geometrie-Software sind seit längerem Gegenstand didaktischer Untersuchungen, siehe z. B. Kaenders und Schmidt (2014). Während fertige geometrische Konstruktionen aufgrund ihrer statischen Repräsentation und der zusätzlich fehlenden Konstruktionsbeschreibung bei Schüler:innen zu Problemen führen können, wird bei dynamischen Geometrie-Software Applikationen nicht nur automatisch ein Protokoll erstellt, bei dem jeder einzelne Konstruktionsschritt nachvollzogen werden kann, sondern es lässt sich auch die gesamte Konstruktion in einer Art Rückblende Schritt für Schritt beobachten (Kroll, 2011).

In diesem Beitrag wollen wir die Einsatzmöglichkeiten solcher Applikationen dynamischer Geometrie-Software in einem anderen, aber verwandten Kontext diskutieren. In der Geschichte der Mathematik haben wir es mit eigenartigen vergangenen Denkformen zu tun, deren Existenz und Eigenarten uns nur durch

Quellen überliefert sind. Diese Quellen dokumentieren denjenigen Teil des vergangenen mathematischen Denkens, der materiell so repräsentiert wurde, dass er dauerhaft überliefert werden konnte. Die Aufgabe der rationalen historischen Rekonstruktion besteht darin, den ursprünglich dahinterstehenden mathematischen Gedanken wiederzubeleben.

Die historische Fragestellung nach dem Gedankengang, der die Mathematiker:innen zu ihren Ergebnissen leitete, lässt sich hierbei mit der didaktischen Fragestellung, wie Schüler:innen neue mathematische Erkenntnisse erwerben, vergleichen. Auch lässt sich das kognitive Problem, das sich den Historiker:innen bei der historischen Rekonstruktion unverständlicher Überlieferungen stellt, durchaus mit der Situation von Schüler:innen aber auch von Lehrkräften vergleichen. Zeichnen die Schüler:innen beispielsweise eine geometrische Konstruktion von der Tafel ab und versuchen diese nach einiger Zeit zu Hause nachzuvollziehen, stehen sie vor einem ähnlichen Problem wie Historiker:innen, die historisch überlieferte Quellen zu rekonstruieren versuchen. Verschlimmert wird diese Situation noch dadurch, dass die Konstruktionen gegebenenfalls von den Schüler:innen sogar falsch oder ungenau in das Heft übernommen werden (Radatz, 1980; Althof, 1999). Umgekehrt finden aber auch Lehrer:innen eine ähnliche Situation vor, beispielsweise beim Einsammeln und Korrigieren von Hausaufgaben oder Klassenarbeiten. Insbesondere bei Konstruktionsaufgaben kann es zu der Situation kommen, dass die Lehrkraft die eingereichte Lösung der Schülerin oder des Schülers aufgrund fehlender Beschreibung nicht nachvollziehen kann, insbesondere dann, wenn die Lösung inkorrekt ist, obwohl die dahinterstehende Überlegung aus Perspektive des Schülers oder der Schülerin sinnvoll und begründet gewesen sein mag.

Im Folgenden werden wir uns mit einem recht speziellen Beispiel mathematik-historischer Quellen beschäftigen, welches die Problematik aber sehr pointiert zum Ausdruck bringt. Wir werden uns auf die überlieferten wissenschaftlichen Manuskripte Albert Einsteins (1879–1955) beziehen, um unsere Überlegungen zu illustrieren. Es gibt in dem umfangreichen, an der Hebräischen Universität Jerusalem aufbewahrten Nachlass der Einstein'schen Schriften neben umfangreicher Korrespondenz auch einen Bestand an Notizbüchern und Manuskriptseiten mit teils identifizierbaren, teils aber auch unidentifizierten,

unkommentierten, undatierten und unkontextualisierten Rechnungen (Sauer, 2019). Da es sich bei vielen dieser Manuskripte um private Notizen und Rechnungen handelt, die als solche nicht an eine andere Person gerichtet waren und entsprechend keine oder nur wenig erläuternde Kommentare enthalten, ist die Entschlüsselung der darin vorhandenen Notizen ein Beispiel für die Aufgabe der historischen Rekonstruktion. Solche wissenschaftlichen Manuskripte und Notizen gibt es aber auch für andere Mathematiker:innen wie z. B. für Galileo Galilei (1564–1642), Christiaan Huygens (1629–1695), Isaac Newton (1643–1727), Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), Leonhard Euler (1707–1783), Carl Friedrich Gauß (1777–1855), Mary Somerville (1780–1872), Sofja Kowalewskaja (1850–1891), David Hilbert (1862–1943), Felix Hausdorff (1868–1942) oder Kurt Gödel (1906–1978), um nur einige berühmte Namen zu nennen.¹ Das Problem einer historischen Rekonstruktion besteht hier darin, die hinter den Notizen und Rechnungen stehenden Überlegungen, Gedanken und Begriffe so zu rekonstruieren, dass die Entstehung der überlieferten materiellen Spuren plausibel wird.

Im Fall Albert Einsteins ist zunächst festzustellen, dass seine Notizen und Manuskripte zum überwiegenden Teil algebraische Rechnungen dokumentieren und sich dort nur selten Zeichnungen oder geometrische Konstruktionen finden. Dennoch finden wir in einem seiner Notizbücher sowie in einigen nicht publizierten Manuskriptseiten einige interessante Zeichnungen, welche offensichtlich spezifische geometrische Konstruktionen darstellen.

So sehen wir in einem frühen Notizbuch aus den Jahren 1910–14, also noch aus Einsteins Zeit in Prag und Zürich, auf einer Doppelseite insgesamt fünf geometrische Zeichnungen (Klein et al. (1993) Anhang A, S. 588).² Diese geometrischen Zeichnungen stehen in einem engen Zusammenhang mit ähnlichen Konstruktionen auf Manuskriptseiten aus der viel späteren Princeton Zeit (Sauer & Schütz, 2021). Nicht nur das Verständnis der jeweiligen Konstruktionen für sich, sondern auch dieser Zusammenhang zwischen zeitlich weit auseinander liegenden Überlegungen stellt eine Herausforderung für die historische Rekonstruktion der Einstein'schen Überlegungen dar.

Im Folgenden werden wir auf das Problem der historischen Rekonstruktion geometrischer Zusammenhänge reflektieren. Wegen der zentralen Rolle der Überlieferung spielt dabei die materielle Repräsentation eine zentrale Rolle. Nach einigen systematischen Überlegungen werden wir exemplarisch der Frage nachgehen, was sich Einstein bei der Zeichnung seiner geometrischen Konstruktionen gedacht haben

mag, ganz analog zu den Schüler:innen, die versuchen, ihre geometrischen Skizzen aus dem Unterricht zu einem späteren Zeitpunkt zu verstehen, oder der Lehrperson, die eine unverständliche Konstruktion in einer Haus- oder Klassenarbeit versucht nachzuvollziehen. Dabei werden wir insbesondere die Rolle, welche dynamische Geometrie-Software in diesem Zusammenhang spielen kann, thematisieren.

2. Repräsentation und Rekonstruktion

Mathematisches, speziell geometrisches Denken erfordert Mittel der Repräsentation. Solche Repräsentationsmittel können sehr unterschiedlicher Art sein:

a) Wir können geometrische Sachverhalte rein sprachlich repräsentieren. Typische Beispiele hierfür sind die ursprünglichen Texte der griechischen Mathematik. Euklids Elemente enthalten in der griechischen Originalfassung keinerlei symbolische Verkürzungen, wie sie in späteren Ausgaben und Übersetzungen, etwa der weitverbreiteten deutschen Übersetzung von Thaer zu finden sind. Alle geometrischen Objekte und Operationen werden im griechischen Originaltext durch Wörter benannt und beschrieben. Was die zugehörigen Konstruktionen angeht, so enthalten die überlieferten Handschriften und späteren Drucke von Euklids Elementen zwar fast zu jedem Lehrsatz oder jeder Lehraufgabe Konstruktionszeichnungen. Da aber so gut wie keine zeitgenössischen Texte aus der griechischen Antike überliefert sind, ist unklar, welche Form diese Diagramme in der ursprünglichen antiken Fassung hatten, ja sogar, ob der ursprüngliche griechische Text überhaupt Diagramme enthielt und wenn ja, inwieweit diese etwa beschriftet waren. Interessanterweise sind in der griechisch-lateinischen Standardausgabe von Heiberg die geometrischen Konstruktionszeichnungen von Heiberg neu hinzugefügt ohne den ansonsten akribisch dokumentierten historisch-kritischen Vergleich mit den überlieferten Handschriften. In der Tat gibt es in der neueren wissenschaftshistorischen Literatur eine Debatte über die Rolle der Diagramme und Abbildungen in der griechischen Mathematik und ihrer Überlieferung (siehe z. B. Netz (2004), Saito (2012) oder Carman (2018)).

b) Ein klassisches Repräsentationsmedium geometrischer Sachverhalte ist die explizite Konstruktion mittels Zirkel und Lineal auf Papier. Klassisch ist diese Repräsentationsform insofern als die derart dargestellten Sachverhalte sich mit den Objekten der euklidischen Elementarlehre deckt. Für das Problem der Rekonstruktion ergibt sich hier die interessante Konsequenz, dass zusätzlich zu den Tinten- oder Bleistiftstrichen unter Umständen auch kaum sichtbare Zirkelstiche wichtige Informationen über die zugrundeliegende Konstruktionsidee bieten können,

Wir bezeichnen dafür die Punkte des Dreiecks mit A, B und C sowie die gegenüberliegenden Seiten mit a, b und c.³ Eine mögliche Rekonstruktion der dieser Zeichnung zugrundeliegenden Überlegungen wäre dann folgende: Einstein zeichnete zunächst ein offensichtlich nicht gleichschenkliges Dreieck. Dann zeichnete er die Winkelhalbierende in C und markierte die gleich großen Winkel in seiner Zeichnung. Zudem zeichnete er die Mittelsenkrechte auf die Seite c. Die entstehenden gleich großen Segmente kennzeichnete Einstein mit zwei geschweiften Klammern. Vom Schnittpunkt D der Winkelhalbierenden und der Mittelsenkrechte zeichnete er nun jeweils das Lot auf die Seiten a und b. Die entstehenden Fußpunkte bezeichnen wir mit E und F. Sei zudem G der Schnittpunkt zwischen Mittelsenkrechten und Seite c.

Nun sind die Dreiecke AGD und GBD kongruent, da sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen. Daraus folgt, dass die Seiten AD und DB die gleiche Länge besitzen (DG ist die Mittelsenkrechte auf AB). Tatsächlich markierte Einstein diese beiden Strecken entsprechend. Die Dreiecke CFD und EDC sind ebenfalls kongruent, da sie jeweils die gleichen Winkel besitzen sowie eine gemeinsame Seite. Daraus könnte Einstein geschlossen haben, dass die Seiten DF und DE gleich lang sind, weshalb er dann auch diese beiden Strecken entsprechend markierte. Ebenso sind die Strecken CF und CE gleich lang.

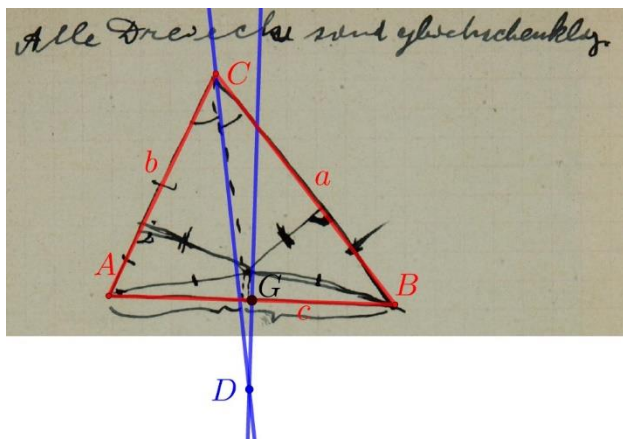


Abb. 2: Rekonstruktion von Einsteins Skizze (Albert Einstein Archives, AEA 3-013. ©The Hebrew University, Jerusalem, Israel) mittels GeoGebra.

Es folgt nun, dass die Dreiecke FAD und DBE kongruent sind (SSW).⁴ Somit sind die Seiten AF und EB gleich groß und das Dreieck ist gleichschenkelig.

Diese Rekonstruktion der zugrundeliegenden Einstein'schen Gedanken entspricht soweit der Interpretation des Paradoxes bei Schubert und ist mit den Konstruktionsmerkmalen kompatibel.

Da uns Einstein seine Gedanken nicht explizit überliefert hat, kann diese Rekonstruktion nur beanspruchen, eine mögliche Darstellung seines Gedankengangs zu sein. Die heuristische Herausforderung besteht darin, prinzipiell *alle* Spuren der Konstruktion, einschließlich Hilfslinien, korrigierter Linien oder nicht hingeschriebener Elemente plausibel zu machen.

Die Geometrie-Software GeoGebra kann nun dabei helfen, den Fehler dieses Beweises aufzudecken. Auch lassen sich mit GeoGebra sehr leicht weitere Spezialfälle untersuchen und dadurch Hypothesen aufstellen, für welche Fälle der Beweis funktionieren könnte. In Abb. 2 wurde Einsteins Zeichnung als Grundlage verwendet, um das Dreieck mit GeoGebra zu rekonstruieren.

Wir sehen, dass sich die Mittelsenkrechte auf c und die Winkelhalbierende in C nicht innerhalb des Dreiecks im Punkt D, sondern außerhalb des Dreiecks treffen.⁵ Einstein zeichnete die Winkelhalbierende in C so, dass sie die Seite c zu weit rechts schneiden würde. In Abb. 3 wurde zur besseren Visualisierung Einsteins Zeichnung entfernt und die Zeichnung um die beiden Lote ergänzt.

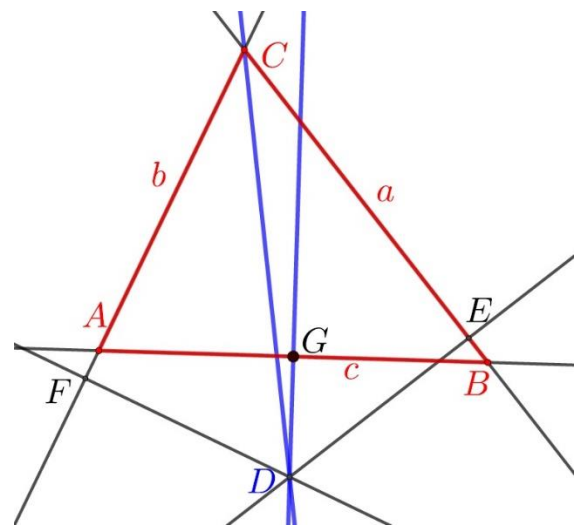


Abb. 3: GeoGebra Konstruktion ohne Einsteins Skizze.

Wir sehen, dass sich der Punkt E auf der Seite a befindet, wogegen sich der Punkt F nicht auf der Seite b, sondern nur auf der verlängerten Halbgerade befindet. Die Schlussfolgerungen, dass die Seiten AF und EB sowie CF und CE gleich lang sind, sind zwar korrekt, es folgt daraus jedoch nicht mehr, dass die Seiten AC und BC gleich lang sind. Auch beim Auffinden dieses Fehlschlusses kann GeoGebra unterstützend wirken, indem die entsprechenden Streckenlängen ausgegeben werden.

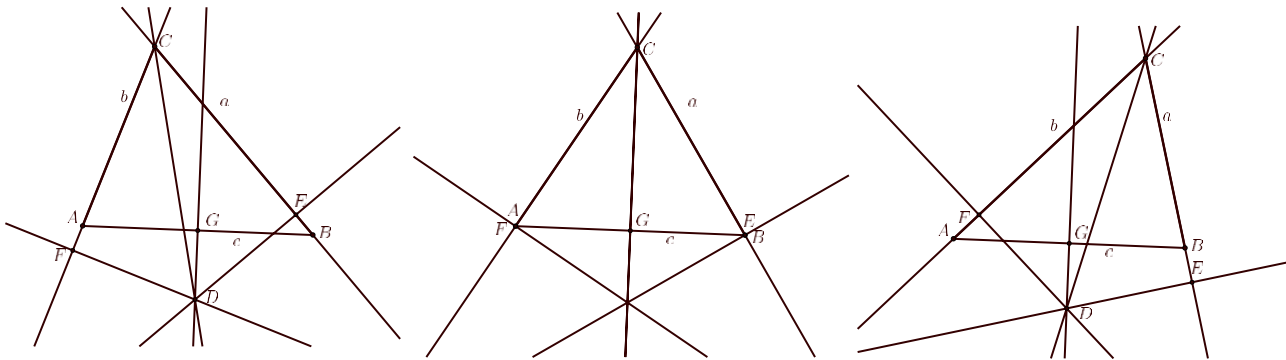


Abb. 4: Verschieben des Punktes C von links (linkes Bild) nach rechts (rechtes Bild) zeigt, dass die Winkelhalbierende in C mit der Mittelsenkrechten in c im Fall eines gleichschenkligen Dreiecks zusammenfällt (mittleres Bild). In den anderen Fällen befindet sich der Schnittpunkt D außerhalb des Dreiecks.

Mit Hilfe der dynamischen Funktionen kann nun durch Verschieben des Punktes C versucht werden, den Schnittpunkt D innerhalb des Dreiecks zu legen. Sofort fällt auf, dass dann die Mittelsenkrechte und die Winkelhalbierende zusammenfallen – es handelt sich um ein gleichschenkliges Dreieck. Dies ist in Abb. 4 visualisiert. Ausgehend von Einsteins Dreieck (links) verschieben wir den Punkt C nach rechts. Im mittleren Bild fallen Mittelsenkrechte auf c und Winkelhalbierende durch C zusammen und es handelt sich um ein gleichschenkliges Dreieck. Wird der Punkt weiter nach rechts verschoben (rechtes Bild) befindet sich der Schnittpunkt D wieder außerhalb des Dreiecks.

Wir sehen an dem Beispiel, wie sich ein möglicher Gedankengang Einsteins auf der Basis einer wahrscheinlichen Kontexthypothese und den kleinen Markierungen rekonstruieren lässt, welche die Kongruenzüberlegungen durch korrespondierende Winkel und Seiten unterstützen. Die Rekonstruktion durch dynamische Geometrie-Software ermöglicht darüber hinaus eine weitere Exploration des Fehlschlusses.

Für unsere Analogie zur Schule wäre dies dem Fall entsprechend, dass die Lehrkraft eine Konstruktion als Schülerlösung mit fehlerhafter oder unvollständiger Konstruktionsvorschrift erhalten hat, so dass dies das Nachvollziehen der Schülerlösung erschwert. Bezogen auf die Schüler:innen und deren Heft-Mitschriften entspricht dies dem Fall, dass sie die Rekonstruktion der Zeichnung im Heft nicht direkt nachvollziehen können, jedoch einzelne Hinweise wie z. B. unvollständige Konstruktionsschritte oder eine Beschreibung im Buch zur Verfügung hätten, was das Nachvollziehen erleichtert. Wir haben zudem auch gesehen, dass GeoGebra bei der Rekonstruktion unterstützend wirken kann. Zudem bietet es den Schüler:innen die Möglichkeit, über das bloße Nachvollziehen hinaus weitere Erkenntnisse zu

gewinnen, wie beispielsweise einen Fehlschluss aufzudecken.

3.2. Zweites Beispiel: Pascals Theorem und projektive Involutionen

Während eine plausible Rekonstruktion des ersten Beispiels leicht gelang, nachdem eine Quelle für Einsteins Überlegungen identifiziert worden war, wollen wir nun ein Beispiel betrachten, bei dem keine Quelle für Einsteins Überlegungen bekannt ist. Wir haben es hier also mit einem Problem zu tun, bei dem wir eine unbekannte geometrische Überlegung allein auf der Basis der überlieferten Repräsentationsspuren rekonstruieren müssen.

Im genannten Notizbuch finden sich auf den Seiten 49 und 50, direkt anschließend an Überlegungen zum Gravitationslinseneffekt von 1912, Abbildungen, welche offenbar geometrische Überlegungen Einsteins dokumentieren. Wir werden im Folgenden exemplarisch zwei dieser Zeichnungen diskutieren, welche in Abb. 5 gezeigt sind. Für eine ausführliche Diskussion aller Zeichnungen verweisen wir auf Sauer und Schütz (2021).⁶

In der oberen der beiden Zeichnungen ist eine Ellipse zu erkennen, in welche ein Sechseck einbeschrieben ist. Offenbar verlängerte Einstein die Seiten des Sechsecks mit gestrichelten Linien. Man erkennt, dass sich die Verlängerungen gegenüberliegender Seiten in Punkten treffen, welche auf einer Linie liegen. Diese Linie ist ebenfalls gestrichelt gezeichnet.

Der Satz von Pascal besagt, dass sich die gegenüberliegenden Seiten eines einem Kegelschnitt einbeschriebenen Sechsecks in einer Geraden, der sogenannten Pascal'schen Linie schneiden. Wenn man diesen Satz kennt, ist es nicht schwer zu sehen, dass wir im oberen Teil eine Version dieses Theorems vor uns haben. Weniger klar war uns, was der zweite Teil der Zeichnung sowie die Worte „Zugleich Konstruktion des Zentrums“ zu bedeuten hatte.⁷

Wir stellen aber fest, dass Einstein – ähnlich wie schon in dem Beispiel des vermeintlich gleichschenkligen Dreiecks – auch hier wieder zwei gegenüberliegende Seiten des Sechsecks mit zwei kurzen Querstrichen sowie deren Schnittpunkt mit einem dicken Punkt markierte. Zudem nummerierte Einstein den Punkt, der auf der Ellipse zwischen diesen beiden Seiten liegt mit einer 1. In der unteren Zeichnung finden wir sowohl den nummerierten als auch den dicken Punkt wieder.

Was hat sich Einstein nun bei dieser geometrischen Zeichnung gedacht?

Als historische Forschungsfrage haben wir es hier wieder mit dem Problem zu tun, einen hypothetischen Kontext zu rekonstruieren, der unter plausiblen Annahmen mehr oder weniger genau zu der Art von Zeichnung geführt hätte, wie wir ihn in dem Notizbuch überliefert finden. Nur gibt es diesmal keine gesicherte Auflösung des Rekonstruktionsproblems.

Es scheint klar, dass die Lösung dieser Frage umso weniger determiniert ist, je weniger spezifische Informationen das überlieferte Dokument bietet. Generische Zeichnungen oder allgemein gehaltene Rechnungen lassen sich mit ganz unterschiedlichen Rekonstruktionshypothesen reproduzieren. Andererseits kann eine sehr detailliert überlieferte, aber unverstandene Quelle das Problem auch erschweren, indem sie von vornherein viele mögliche Hypothesen auszuschließen scheint.

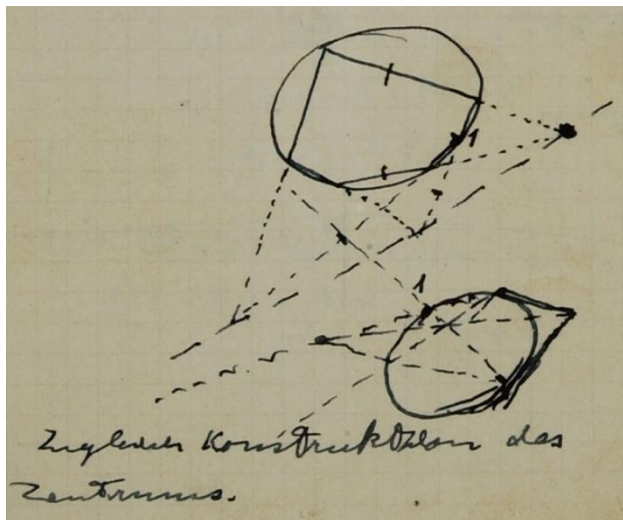


Abb. 5: Einsteins Skizze zum Satz von Pascal im Prager Notizbuch (Klein et al. (1993), Anhang B, Notizbuch S. 49). (Albert Einstein Archives, AEA 3-013. ©The Hebrew University, Jerusalem, Israel)

Um unsere historische Forschungsfrage nach Einsteins Gedankengang zu beantworten, können wir verschiedene Ansätze verfolgen. Wir können zunächst nach ähnlichen überlieferten geometrischen Konstruktionen in anderen Kontexten suchen, welche zusätzliche Informationen bieten würden. So könnten

wir einerseits nach ähnlichen Abbildungen in der Lehrbuchliteratur suchen. Wie wir bereits gesehen haben, hatte eine direkte Quelle in dem ersten Beispiel der Paradoxie vom gleichschenkligen Dreieck die Rekonstruktion ermöglicht. In der Tat finden wir in der zeitgenössischen Literatur zur projektiven Geometrie vielfach Diskussionen des Pascal'schen Theorems zum Teil mit ähnlichen begleitenden Konstruktionen, z. B. bei Grassmann (1909). In diesem Fall ist es uns aber bisher nicht gelungen, eine offensichtliche direkte Quelle für die Konstruktionen Einsteins zu identifizieren.

Wir könnten andererseits hoffen, ähnliche Konstruktionen auf anderen Manuskripten Einsteins zu finden, die dann weitere Kontextinformationen bieten könnten. Im vorliegenden Fall haben wir tatsächlich Manuskriptseiten von Einstein gefunden, welche sehr ähnliche Zeichnungen beinhalten. Ein Teil einer dieser Manuskriptseiten ist in Abb. 6 abgebildet.

Die rechte Zeichnung auf diesem Ausschnitt zeigt erneut das einer Ellipse einbeschriebene Sechseck. Wie schon auf der Seite des früheren Notizbuchs, finden sich auch hier weitere Zeichnungen, welche an die untere Zeichnung des Notizbuchs erinnern. Anders als im Notizbuch scheint diese Manuskriptseite aber detaillierter, denn sie enthält noch weitere Zeichnungen.⁸ Außerdem erkennen wir, dass Einstein hier die Ecken des Pascal'schen Hexagon explizit von 1 bis 6 durchnummerierte. In dieser Skizze zeichnete Einstein auch noch einen weiteren Fall (Punkt 6'), bei dem die zwei gegenüberliegenden Seiten 16' und 34 parallel sind. Als Konsequenz treffen sich diese im unendlich fernen Punkt, so dass die Pascal'sche Linie (rechte gestrichelte Linie) ebenfalls parallel zu diesen Seiten verläuft.

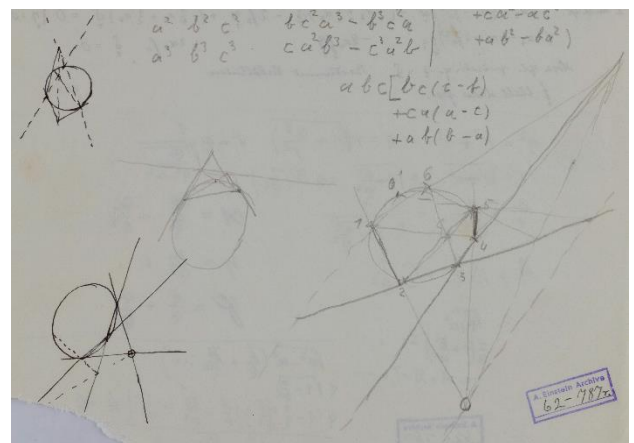


Abb. 6: Einsteins Skizze zum Satz von Pascal auf einer Manuskriptseite aus der Princeton Zeit. (Albert Einstein Archives, AEA 62-787r. ©The Hebrew University, Jerusalem, Israel).

Die im Folgenden dargestellte Interpretation beruht mathematisch auf der Annahme, dass Einstein hier

geometrische Zusammenhänge in der reellen projektiven Ebene untersucht.⁹

Die weitere Rekonstruktion und unsere Interpretation des vorliegenden Beispiels wurden sehr erleichtert durch systematischen Einsatz einer dynamischen Geometrie-Software, in unserem Fall GeoGebra. Eigentlich müsste eine adäquate Rekonstruktion des Gedankenganges mehr oder weniger genau die Zeichnung nahelegen, die wir wirklich vorfinden, indem wir uns bewusst der Repräsentationsmittel bedienen, welche der historischen Situation entsprechen. Es zeigt sich jedoch, dass hinter der geometrischen Konstruktion mittels Papier und Tinte wohl komplexere Überlegungen stehen, welche in der Repräsentation nur in bestimmten Stadien eingefangen werden. Der Einsatz dynamischer Geometrie-Software ermöglicht uns nun, die komplexeren und dynamischen Verhältnisse zu explorieren.

Es liegt die Vermutung nahe, dass die beiden Teilzeichnungen des Notizbuchs miteinander zusammenhängen sowie auch die Teilzeichnungen der Princeton Manuskriptseiten miteinander zusammenhängen. Außerdem könnte man ungeachtet des zeitlichen Abstandes vermuten, dass auch die Notizbuchseite und die Manuskriptseite miteinander zusammenhängen. Solche Zusammenhänge lassen sich zum Beispiel herstellen, indem die einzelnen Konstruktionen durch stetige Transformationen ineinander überführt werden. Solche stetigen Transformationen können aber nicht durch statische Zeichnungen repräsentiert werden. Sie müssen gedanklich repräsentiert werden, etwa durch eine sprachliche Beschreibung der Transformation.

So können wir etwa sagen, dass Einstein auf der Manuskriptseite einen zweiten Punkt 6' betrachtet, welcher ebenfalls auf dem Kegelschnitt liegt, aber so, dass der dritte Schnittpunkt der zugehörigen Pascal-Linie im Unendlichen liegt. Dieser Zusammenhang kann durch eine stetige Transformation ausgedrückt werden, indem wir sagen, der Punkt 6 werde kontinuierlich auf der Ellipse verschoben, bis die zwei gegenüberliegenden Seiten parallel werden und der entsprechende Schnittpunkt ins Unendliche wandert. Diese Art stetiger Transformation lässt sich nun aber durch GeoGebra sehr einfach darstellen. Deshalb können wir den Zusammenhang der zwei in der statischen Zeichnung eingefrorenen Situationen des Pascal'schen Theorems durch eine stetige Transformation mittels Geogebra repräsentieren (Abb. 7).

Dazu kopieren wir wieder ein Faksimile der Manuskriptseite als Hintergrund in die GeoGebra-Konstruktion (Abb. 7-1). Jetzt können wir zunächst eine Ellipse zeichnen, welche die Ellipse des Manuskripts

reproduziert, und auf ihr sechs Punkte markieren und benennen (Abb. 7-2). Als nächstes zeichnen wir Geraden durch die Punktepaare 1 und 2 sowie 4 und 5 (Abb. 7-3), durch die Punktepaare 2 und 3 sowie 5 und 6 (Abb. 7-4) und durch die Punktepaare 3 und 4 sowie 1 und 6 (Abb. 7-5). Die so entstandenen grünen, orangenen und blauen Geradenpaare schneiden sich jeweils in drei Punkten S_1 , S_2 , S_3 , welche auf der roten Geraden liegen (Abb. 7-6), was genau die Aussage des Pascal'schen Theorems ist. Wir stellen fest, dass die so mit GeoGebra erzeugten Geraden im Rahmen der zeichnerischen Genauigkeit die von Einstein eingezeichneten Geraden reproduzieren.

An dieser Stelle können wir nun die dynamischen Möglichkeiten von GeoGebra ins Spiel bringen, indem wir den Punkt 6 auf der Ellipse bewegen. Da durch den Punkt 6 sowohl eine blaue als auch eine orangene Gerade verläuft, verschieben sich mit der Bewegung dieses Punktes sowohl der Schnittpunkt S_2 als auch S_3 , und wir erhalten als benachbarte Situation zunächst Abb. 7-7. Bewegen wir den Punkt noch weiter, so gelangen wir schließlich zu einer Situation, in welcher der Schnittpunkt S_3 ins Unendliche läuft und die Pascalgerade mit den Geraden durch die Punkte 1 und 6' bzw. 4 und 3 parallel verläuft (Abb. 7-8). Auch diese Situation reproduziert wieder eine Gerade in Einsteins Manuskript und bestätigt damit die Rekonstruktion, der zufolge Einstein hier den Fall betrachtet, in welcher einer der Schnittpunkte im Unendlichen liegt.

Die ganze Sequenz kann auch als kontinuierliche Animation dargestellt werden (siehe Video-Datei „Punkt6.mp4“).

GeoGebra stellt uns somit ein Repräsentationsmedium zur Verfügung, welches es gestattet, gedankliche Zusammenhänge zwischen unterschiedlichen Situationen eines geometrischen Sachverhalts als kontinuierliche, parametrisierte Transformation zu visualisieren. In dem zuletzt erläuterten Beispiel ist es insbesondere der Übergang zwischen der Situation eines allgemeinen Hexagons (Abb. 7-6) zu der in welcher zwei gegenüberliegende Seiten des Hexagons parallel liegen, einer der Schnittpunkte also ins Unendliche wandert und die Pascal'sche Linie parallel zu dem Paar paralleler Hexagonseiten wird (Abb. 7-8). Dieses Repräsentationsmedium erlaubt es daher, mögliche gedankliche Kontexthypothesen für die Erzeugung der überlieferten statischen Zeichnungen explorativ zu untersuchen. Und die erfolgreiche Reproduktion der Zeichnungslinien durch die Rekonstruktion bekräftigt die zugrundeliegende Kontexthypothese.

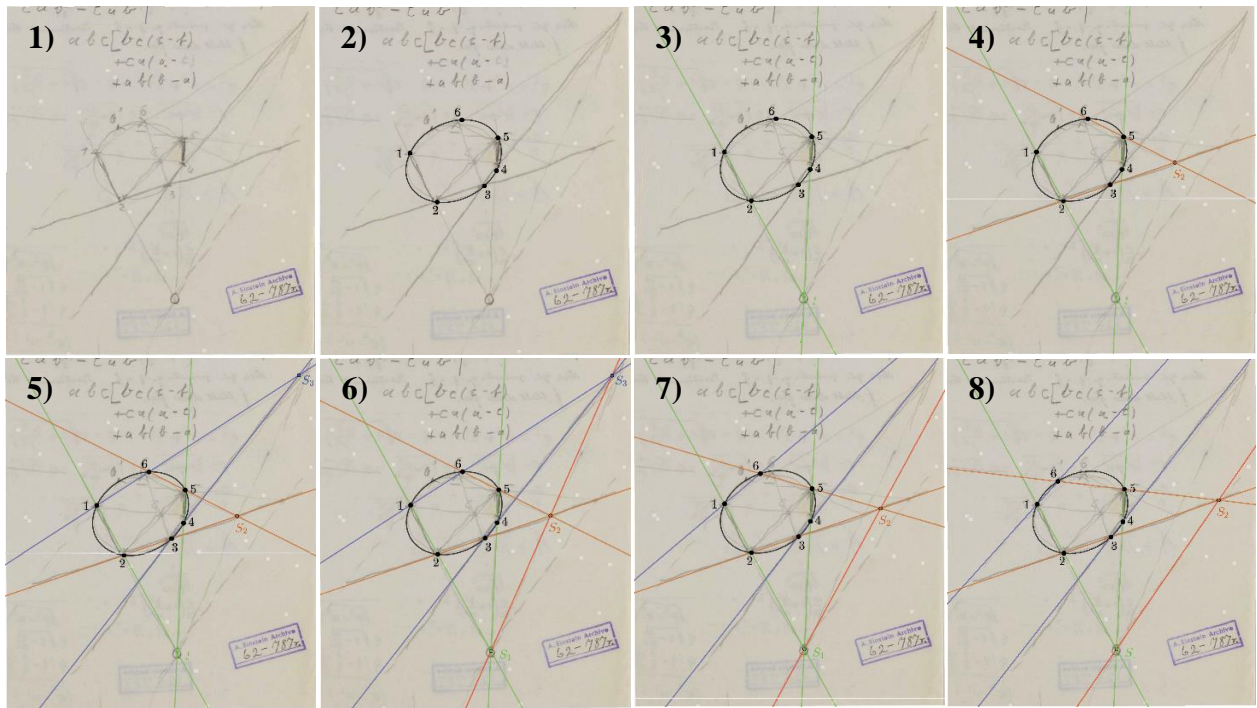


Abb. 7: Einsteins einbeschriebenes Sechseck auf der Manuskriptseite, bei der zwei unterschiedliche Fälle betrachtet werden: In Bild 6 schneiden sich jeweils die gegenüberliegenden Seiten. Im Bild 8 sind zwei Seiten parallel (blau), so dass der entsprechende Schnittpunkt der Punkt im Unendlichen ist. (Manuskriptseite: Albert Einstein Archives, AEA 62-787r. ©The Hebrew University, Jerusalem, Israel

Es zeigt sich, dass es in dieser Weise in der Tat gelingt, einen kontinuierlichen Zusammenhang zwischen allen Teilzeichnungen, sowohl des Notizbuchs als auch der Manuskriptseite zu erzeugen, und damit eine Rekonstruktion des möglichen Gedankengangs zu erhalten, deren einzelne Stadien genau den überlieferten statischen Zeichnungen entsprechen (Sauer & Schütz, 2021).

Versuchen wir zunächst, die Zeichnungen auf der Manuskriptseite (Abb. 6) unter dieser Voraussetzung zu rekonstruieren. Wir gehen also davon aus, dass die geschlossenen Ellipsenlinien der vier Teilzeichnungen jeweils korrespondierende Instanzen desselben Kegelschnittes darstellen, auf denen Punkte eines einbeschriebenen Vielecks sich bewegen können, dessen Schnittpunkte wir genauer untersuchen wollen.

Der mathematische Zusammenhang, den wir im Folgenden unserer Rekonstruktion zugrunde legen werden, beruht auf dem Begriff der projektiven Involution. Dazu betrachten wir Abbildungen, die nicht die Identität sind, welche allgemein Punkte der projektiven Ebene auf andere Punkte der projektiven Ebene abbilden. Um eine Involution handelt es sich, wenn die Abbildung zweimal hintereinander ausgeführt die Identität ergibt. Betrachten wir dann in der projektiven Ebene Teilmengen wie Geraden oder Kegelschnitte, die auf sich selbst abgebildet werden, so verstehen wir die Involution gegebenenfalls

eingeschränkt auf diese Teilmengen. Projektive Kollineationen sind solche Abbildungen der projektiven Ebene auf sich, welche das Doppelverhältnis invariant lassen. Zentrale Kollineationen sind speziell solche projektiven Kollineationen, welche alle Geraden durch einen Punkt S und alle Punkte einer Geraden g ($S \notin g$) auf sich abbilden. Eingeschränkt auf einen Kegelschnitt K induziert eine projektive Kollineation eine Projektivität von K und eine zentrale Kollineation eine involutorische Projektivität von K , indem zwei Punkte des Kegelschnitts, welche Schnittpunkte einer Geraden h durch S sind, miteinander vertauscht werden.

Betrachten wir dazu nun in Abb. 6 den Fall des Sechsecks 123456 und ignorieren den Punkt $6'$. Wir sehen, dass Einstein die Verbindungslinien zwischen den Punkten 1 und 4, 2 und 5 sowie 3 und 6 zeichnete. Diese entsprechen genau den korrespondierenden Punkten einer Projektivität, also einer projektiven Abbildung, bei der der Punkt 1 auf den Punkt 4 abgebildet wird, der Punkt 5 auf den Punkt 2 und der Punkt 3 auf den Punkt 6. Es liegt also tatsächlich nahe, dass Einstein im vorliegenden Fall eine Projektivität auf dem Kegelschnitt betrachtete. Andernfalls fällt es auch schwer, die kurzen Strecken innerhalb der Ellipse zu deuten.¹⁰

Repräsentieren wir nun die mögliche Transformation zunächst durch sprachliche Beschreibung. Ähnlich wie bereits in Abb. 5 markierte Einstein auch in der

Zeichnung von Abb. 6 zwei Seiten (diesmal durch etwas dickere Linien) sowie deren Schnittpunkt. Bewegen sich nun die Punkte 1 und 2 sowie 4 und 5 entsprechend der dicken Linien auf dem Kegelschnitt zueinander, bis sie letztlich zusammenfallen, so werden die zwei entsprechenden Sekanten zu Tangenten. Die entsprechende Zeichnung findet sich unten links auf der Manuskriptseite (Abb. 6). Wir haben es jetzt nur noch mit einem dem Kegelschnitt einbeschriebenen Viereck zu tun, und die Pascal'sche Linie ist nun die gestrichelte Linie geworden, welche durch den markierten Punkt verläuft. Sie stellt die Gerade g einer Involution dar, wobei sich das Zentrum S innerhalb der Ellipse befindet und nicht gezeichnet wurde. Geraden durch das Zentrum, welche die Ellipse schneiden, erzeugen mit den Schnittpunkten Punktepaare, welche in der Involution miteinander vertauscht werden. Da sich das Zentrum im Inneren der Ellipse befindet und die Pascal'sche Linie den Kegelschnitt nicht schneidet, können wir die Zeichnung als eine *elliptische Involution* interpretieren.¹¹ Dies liegt daran, dass der Punkt auf dem Kegelschnitt, welcher sich zwischen den Tangenten befindet, nicht bewegt wurde (entspricht in Abb. 5 dem Punkt 1). Wird dieser Punkt nach oben verschoben, so dass zwischen den beiden Berührungspunkten kein Punkt des Vierecks liegt, erhalten wir die Zeichnung oben links in Abb. 6. Die Pascal'sche Linie (gestrichelte Linie, welche durch den Schnittpunkt der Tangenten verläuft) schneidet nun den Kegelschnitt in zwei Punkten: Die Zeichnung lässt sich nun als *hyperbolische Involution* interpretieren (und die Situation ist dann äquivalent zur vorherigen Situation aus Abb. 5). Einstein zeichnete noch eine weitere Skizze, bei der nun nur noch ein Dreieck im Kegelschnitt einbeschrieben ist, was zu einer sogenannten *parabolischen Involution* führt. Hierbei handelt es sich im strengeren Sinn um keine Involution mehr, da jeder Punkt auf einen ausgezeichneten Punkt abgebildet wird, welcher selbst der einzige invariante Punkt ist. Dass Einstein hier tatsächlich Involutionen betrachtet haben könnte, wird durch eine kurze Rechnung und durch einen Vermerk auf einer anderen, aus der gleichen Zeit stammenden und dazugehörigen Manuskriptseite bekräftigt (Sauer & Schütz, 2020).

Die Repräsentation dieser sprachlich beschriebenen Transformation durch nebeneinandergestellte simultane Darstellungen einzelner Stadien des stetigen Prozesses in Abb. 6 erinnert an die Bildtradition der Simultandarstellung in der mittelalterlichen Malerei. Zur Verdeutlichung dieses spezifischen Charakters von Momentaufnahmen eines stetigen Transformationsprozesses im selben Bild betrachten wir kurz als Beispiel eines solchen Simultanbildes das Gemälde *Die Gerechtigkeit Ottos III* von Dieric Bouts (Abb. 8) aus dem 15. Jahrhundert.



Abb. 8: *Die Gerechtigkeit Ottos III* von Dieric Bouts, 1471-1483. Brüssel, Musées des Beaux-Arts.

Das Bild zeigt auf zwei Tafeln insgesamt fünf Szenen einer fortlaufenden Narration, siehe Blümle (2013). In der oberen Ecke des linken Bildteils wendet sich hinter einer Mauer die Königin ihrem Gemahl Otto zu und beschuldigt fälschlicherweise einen Grafen, der ihrer Verführungskunst widerstand. Im linken mittleren Teil wird der Graf von seiner Frau begleitet zur Hinrichtung geführt. Im Vordergrund sieht man den enthaupteten Grafen und den Henker, der das Haupt seiner Gattin überreicht. Im rechten Bildteil kniet die Gattin des Grafen mit seinem Haupt vor dem König und beweist seine Unschuld, indem sie sich der Feuerprobe unterzieht und in ihrer linken Hand ein glühendes Eisen hält. Im Hintergrund erkennt man auf einem Hügel die Verbrennung der überführten Königin auf einem Scheiterhaufen umringt von Schaulustigen.

Wie auf Einsteins Manuskriptseite werden also in dieser mittelalterlichen Simultandarstellung nebeneinander „zeitlich“ aufeinander folgende Situationen eines Prozesses dargestellt, dessen Zusammenhang sprachlich repräsentiert wird. In beiden Fällen spielt die "Zeit" eine metaphorische Rolle, welche den logisch-sukzessiven Zusammenhang der Transformation oder Narration ordnet.

Tatsächlich ist die Rekonstruktion der Transformation mittels GeoGebra sehr gut zugänglich und kann leicht visualisiert werden. Hierdurch werden auch die gemäß dieser Interpretation vorhandenen Zwischenschritte, welche Einstein nicht zeichnete, sichtbar.

In Abb. 9 reproduzieren wir die bei Einstein zu findenden Momentaufnahmen zusammen mit Übergängen zwischen Einsteins vier Abbildungen auf der Manuskriptseite. Die einzelnen Abbildungen sind nun Momentaufnahmen einer animierten Videosequenz, welche den gesamten Prozess stetig visualisiert (siehe Video-Datei „MS62787r.mp4“).

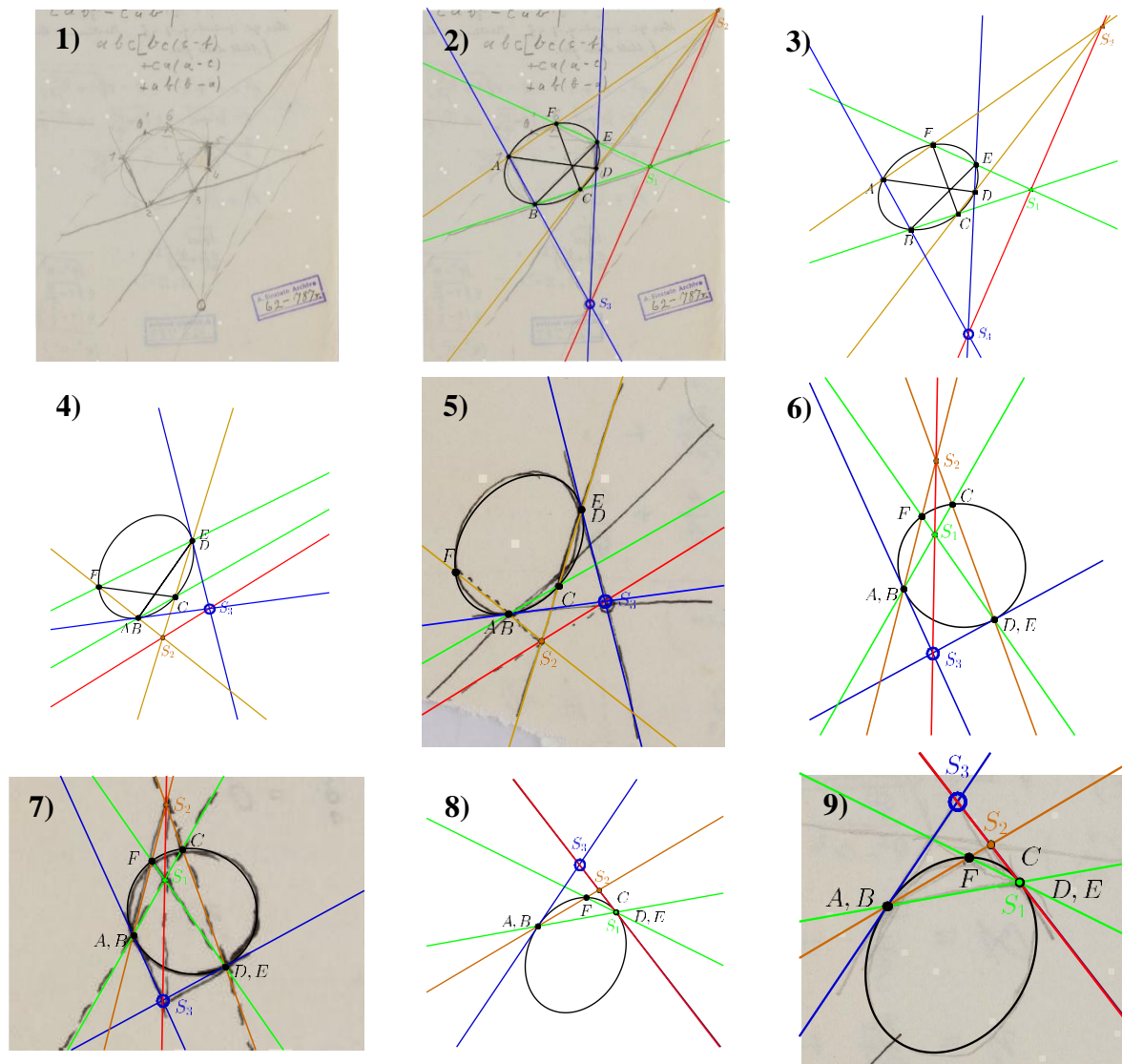


Abb. 9: Übergänge zwischen Einsteins Skizzen auf der Princetoner Manuskriptseite. Das der Ellipse einbeschriebene Sechseck (9-1) wird zunächst in ein Viereck transformiert (9-2), wobei die Pascalsche Linie außerhalb der Ellipse verbleibt (elliptische Involution, 9-5). Dann wird der Punkt C so verschoben, dass er zwischen die Punkte F und D, E zu liegen kommt und die Pascalsche Linie die Ellipse schneidet (hyperbolische Involution, 9-7). Schließlich wird der Punkt D, E so verschoben, dass die Pascalsche Linie zur Tangente an die Ellipse wird (Parabolischer Fall, 9-9). (Manuskriptseite: Albert Einstein Archives, AEA 62-787r. ©The Hebrew University, Jerusalem, Israel).

Wir starten mit Einsteins einbeschriebenem Sechseck (Abb. 9-1), konstruieren dies in GeoGebra (Abb. 9-2) und entfernen Einsteins Zeichnung (Abb. 9-3). Nun lassen wir die zwei Punktepaare zusammenfallen (Abb. 9-4) und erhalten Einsteins Zeichnung links unten auf der Manuskriptseite (Abb. 9-5). Diese Zeichnung entspricht nun in unserer Rekonstruktion der elliptischen Involution. Im nächsten Schritt bewegen wir den Punkt C, so dass wir aus der elliptischen Involution eine hyperbolische Involution erhalten (Abb. 9-6), welche Einsteins Zeichnung oben links entspricht (Abb. 9-7). Lassen wir nun die Punkte C und D, E zusammenfallen, erhalten wir die parabolische Involution (Abb. 9-8), welche Einsteins mittiger Zeichnung entspricht (Abb. 9-9). Beim

Übergang der beiden Zeichnungen, insbesondere beim Verschieben des nummerierten Punktes, kommt es dazu, dass die Pascal'sche Linie den Kegelschnitt in zwei Punkten schneidet. Diese beiden Punkte sind die invarianten *Doppelpunkte* der hyperbolischen Involution. Schneidet die Pascal'sche Linie den Kegelschnitt in keinem Punkt, handelt es sich um eine elliptische Involution.

Wie man sieht, erhalten wir auf diese Weise einen Zusammenhang zwischen allen vier Zeichnungen auf der Manuskriptseite. Ausgehend von dem Sechseck des Pascal'schen Theorems in Abb. 9-1 bis 9-3 ergibt sich so zunächst der Fall der elliptischen (Abb. 9-5) und dann der hyperbolischen Involution (Abb. 9-7).

Der parabolische Fall (Abb. 9-9) ist ein Zwischenschritt zwischen beiden Involutionen.

Der Erfolg der Rekonstruktion eines Zusammenhangs zwischen den verschiedenen geometrischen Zeichnungen auf der Princetoner Manuskriptseite (Abb. 6) durch die GeoGebra-Animation (Abb. 9) und die Ähnlichkeit des vorletzten Stadiums (Abb. 9-7) mit der unteren Konstruktion in Abb. 5 legen auch eine Hypothese für die Rekonstruktion eines Zusammenhangs zwischen den zwei Zeichnungen auf der Notizbuchseite (Abb. 5) nahe.

Abb. 10 zeigt einen möglichen Zusammenhang zwischen den beiden Teilzeichnungen im Notizbuch, siehe auch die Video-Datei „Notizbuch.mp4“. Wir konstruieren zunächst wieder das Pascal-Hexagon und die Pascallinie in der ersten Zeichnung (Abb. 10-1-3). Dann schieben wir zwei Punktepaare so zusammen, dass aus den beiden blauen Sehnen Tangenten werden (Abb. 10-4), wobei wir gleichzeitig die Form der Ellipse etwas verändern, um sie der Ellipse in der zweiten Zeichnung kongruent zu machen. Dann verschieben wir den mit 1 markierten Punkt entlang der Ellipse z. B. entgegen dem Uhrzeigersinn und zwar so weit, dass der Punkt über den Schnittpunkt der grünen und blauen Linie hinaus liegt (Abb. 10-5). Bei dieser Transformation verschwindet der Schnittpunkt der grünen Linien S_2 zunächst ins Unendliche, um dann auf der linken Seite wieder im Endlichen aufzutauchen. Gleichzeitig wandert der Schnittpunkt der orangenen Linien S_1 in die Ellipse hinein.

Die Pascallinie schneidet nun die Ellipse, und wir haben es jetzt mit einer hyperbolischen Involution zu tun. Schließlich können wir die Einstein'sche Zeichnung wieder einblenden (Abb. 10-6) und bestätigen, dass die transformierte Situation sich genau mit der Einstein'schen Zeichnung deckt.

Es zeigt sich nun, dass man auch eine stetige Transformation zwischen den Zeichnungen des Notizbuchs und der Manuskriptseite herstellen kann.

Anhand der Animationen aus Abb. 9 und Abb. 10 sehen wir, dass die Zeichnungen aus den Bildern 2 und 7 in Abb. 9 den Zeichnungen aus den Bildern 2 und 6 in Abb. 10 entsprechen. Auch dies lässt sich in einer Animation leicht visualisieren (siehe Video-Datei „NotizbuchZuMS.mp4“).

Abb. 11 zeigt die jeweiligen Stadien der Animation. In der oberen Zeile starten wir bei Einsteins Sechseck aus dem Notizbuch (Abb. 11-1) und betrachten die GeoGebra-Konstruktion isoliert (Abb. 11-2). Durch stetige Verformung der Ellipse und Verschiebung der Punkte auf ihr (Abb. 11-3) erhalten wir die Zeichnung auf der Manuskriptseite (Abb. 11-4). Noch stärkere Ähnlichkeiten weisen die beiden Zeichnungen zur hyperbolischen Involution auf. Ausgehend von Einsteins frühem Notizbuch (Abb. 11-1 in der zweiten Zeile) müssen wir die Zeichnung nur um 90° im Uhrzeigersinn drehen und die Ellipse geringfügig verändern (Abb. 11-2 und 11-3 in der zweiten Zeile), um Einsteins Zeichnung auf der Manuskriptseite zu erhalten (Abb. 11-4 in der zweiten Zeile).

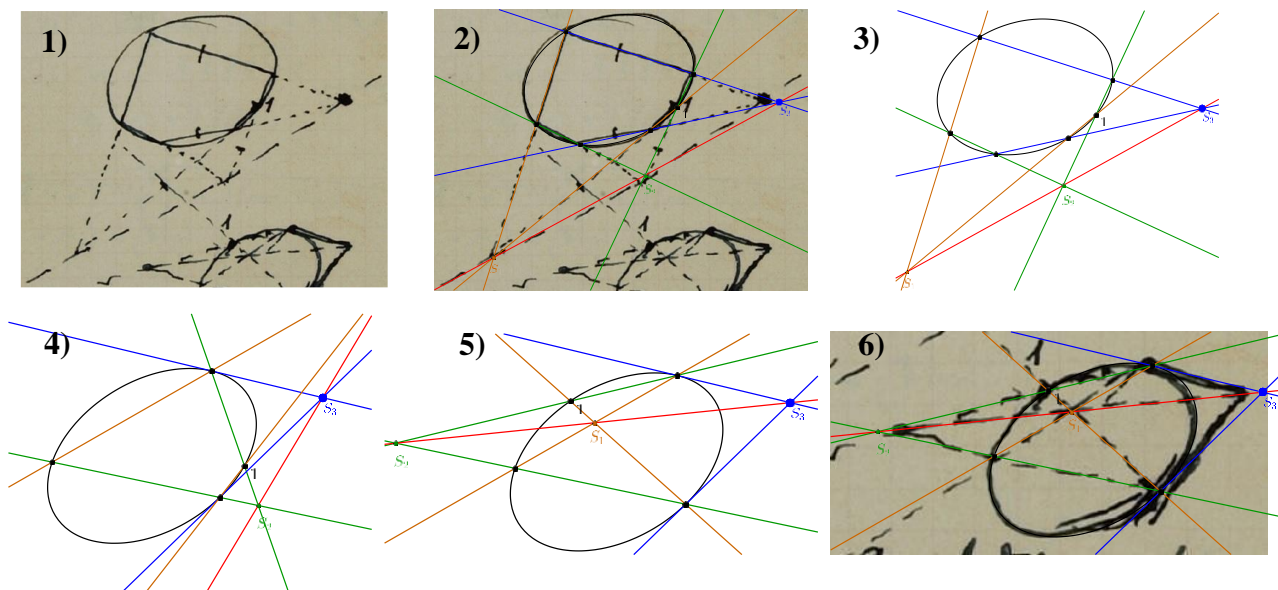


Abb.10: Übergang vom einbeschriebenen Sechseck zum Viereck in Einsteins Zeichnungen im Notizbuch (vgl. Abb. 5). Der allgemeine Fall des Pascal'schen Theorems mit einem der Ellipse einbeschriebenen Hexagons (10-3) wird zunächst in ein einbeschriebenes Viereck transformiert (10-4) und der Punkt 1 dann noch so verschoben, dass die Pascal'sche Linie die Ellipse schneidet (10-5). (Manuskriptseite: Albert Einstein Archives, AEA 3-013. ©The Hebrew University, Jerusalem, Israel)

Wir sehen also, dass die mit GeoGebra erzeugten Animationen sowohl mögliche Transformationen und Übergänge innerhalb einer Skizze als auch Übergänge zwischen verschiedenen Skizzen auf einer Seite darstellen können. Auch Skizzen auf unterschiedlichen Seiten, welche mit einer zeitlichen Differenz von über 20 Jahren geschrieben wurden, lassen sich mit GeoGebra-Animationen verbinden und repräsentieren dann einen möglichen gedanklichen Zusammenhang, der Konstruktionen trotz ihrer zeitlichen Entfernung dennoch verknüpfen kann.

Die einzelnen Schritte lassen sich in der Animation rückgängig machen und beliebig häufig wiederholen.

Aus Sicht der Aufgabe einer historischen Rekonstruktion bietet die hier vorgeführte Reproduktion der verschiedenen Konstruktionen Einsteins durch eine in einer Animation darstellbare kontinuierliche Transformation eine Bestätigung der zugrunde gelegten hypothetischen Konstruktionsidee. Es zeigt sich in der Tat, dass durchaus nicht alle Hypothesen für eine Rekonstruktion in dieser Weise die überlieferte Quelle reproduzieren können. Andererseits gibt es auch Konstruktionszeichnungen bei Einstein, die alternative Rekonstruktionen zulassen, welche allerdings nicht jeweils alle überlieferten Teile der

Konstruktion reproduzieren bzw. vorhandene Linien, Punkte etc. unerklärt lassen (s. Sauer & Schütz, 2021, sec. 10).

Klassische beschreibende Darstellungen im Medium der Sprache dienen als universell anwendbares Repräsentationsmedium zur Repräsentation sequentiell darstellbarer Zusammenhänge, jedoch können für geometrische Zusammenhänge Animationen diesen Zweck in bestimmter Hinsicht deutlich besser erfüllen, da sie einerseits anschaulicher und übersichtlicher sind und andererseits in kurzer Zeit komplizierte Zusammenhänge darstellen können.

Im Beispiel der Zeichnungen in Einsteins Notizbuch ist eine Rekonstruktion auf der Basis des fertigen Endprodukts prinzipiell schwierig, da viele Annahmen getroffen werden müssen, welche anhand der fertigen Zeichnung nicht ersichtlich sind. Einzig der Kommentar „Zugleich Konstruktion des Zentrums“ gibt einen Hinweis bezüglich Einsteins Gedankengang: Mittels der unteren Zeichnung kann das *Zentrum der Involution* direkt gebildet werden, welches dann genutzt werden kann, um weitere Paare der Involution zu konstruieren.

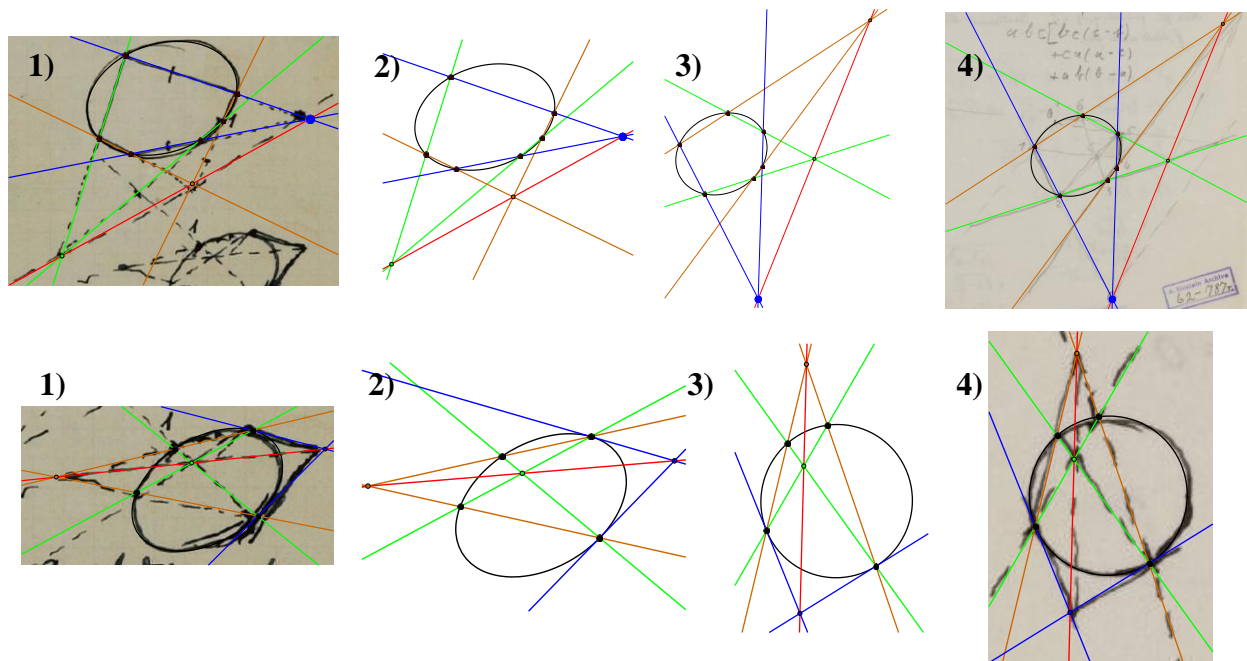


Abb.11: Zwei Übergänge vom Notizbuch zur Manuskriptseite. Die obere Zeile zeigt das einbeschriebene Sechseck (Projektivität). Die untere Zeile zeigt das einbeschriebene Viereck, welches als hyperbolische Involution interpretiert werden kann. (Manuskriptseiten: Albert Einstein Archives, AEA 3-013, 62-787r. ©The Hebrew University, Jerusalem, Israel)

Resümee

Die Repräsentation geometrischer Zusammenhänge mit sprachlichen, instrumentellen, symbolischen oder digitalen Mitteln bestimmt den jeweils spezifischen Charakter der überlieferten materiellen Spuren früheren mathematischen Denkens. Auch in der Lehre beeinflussen die Mittel der Repräsentation die Kommunikation zwischen der Lehrperson und den Schüler:innen.

Die Aufgabe der historischen Rekonstruktion in der Geschichte der Mathematik kann unterstützt werden durch den Einsatz von dynamischer Geometrie-Software, wie z. B. GeoGebra.

Neben den genannten methodischen Zugängen der Erweiterung der Quellenbasis sowohl im Korpus der überlieferten Manuskripte als auch weiterer Kontextliteratur, wie Korrespondenzen und Lehrbuchliteratur, kann die mit dynamischer Geometrie-Software gegebene Repräsentationsmöglichkeit die historische Forschung substantiell unterstützen.

Sie erlaubt die Repräsentation der überlieferten Zeichnungen mit GeoGebra und damit zugleich die Exploration unterschiedlicher Interpretationsansätze. Diese bestehen darin, unterschiedliche Kontextthesen zugrunde zu legen, die entsprechend unterschiedliche Konstruktionsmöglichkeiten ergeben. GeoGebra kann daher helfen den zugrundeliegenden „Raum der Implikationen“ (Sauer und Schütz, 2019) zu explorieren.

Im vorliegenden Fall haben wir durch einen glücklichen Umstand eine Seite mit ähnlichen Zeichnungen überliefert, bei denen unterschiedliche Stadien der Konstruktion als unterschiedliche Konstruktionen repräsentiert sind. Mittels GeoGebra lassen sie sich durch Parametrisierung ineinander überführen. Die dynamische Geometrie-Software wirkt hier also als Repräsentationsmedium, welche die Zusammenhänge und Übergänge veranschaulicht und visuell darstellt. Wir gelangen so zu einem historischen Rekonstruktionsverfahren, das darin besteht, dass man mögliche Zusammenhänge zwischen den Manuskripten durch dynamische Repräsentation in Animationen darstellt und die statischen Zeichnungen als Momentaufnahmen der stetigen Transformation reproduziert.

Wir haben gesehen, dass Einsteins Gedanke der Zeichnungen fast nur über die statischen Zeichnungen selbst überliefert ist. Um nun einen plausiblen Gedanken aufzeigen zu können, haben wir uns GeoGebra zu Nutzen gemacht, indem wir die einzelnen nicht überlieferten Schritte der Transformationen mittels der dynamischen Geometrie-Software visualisiert haben.

Ähnlich wie die Kommunikation zwischen Einsteins Denken und dem heutigen Verständnis durch GeoGebra erleichtert wurde, kann es aber auch die Kommunikation zwischen Lehrkraft und Schüler:innen unterstützen. Wir nennen im Folgenden einige Beispiele, die sich aus unseren Überlegungen ergeben.

Das Pascal'sche Theorem und mindestens die projektive Geometrie der reellen Ebene waren zu Zeiten Einsteins Lehrstoff an den Schulen, während solche Zusammenhänge heute nicht mehr Bestandteil des Kurrikulums sind. Neue Repräsentationsformen eröffnen aber auch die Möglichkeit, komplexere mathematische Inhalte, die aus dem Lehrplan verschwunden sind, wieder in den Rahmen des Lehrbaren einzubeziehen.

Es ist auch möglich, dass Schüler:innen selbst Manuskriptseiten früherer Forscher:innen im Unterricht analysieren, siehe hierfür das Beispiel von Einstein'schen Manuskripten des Gravitationslinseneffekts (Sauer und Schütz 2019). Das Pascal'sche Theorem und dessen Abwandlungen könnten, auch ohne Kenntnis von Projektivitäten oder tieferer Kenntnis projektiver Geometrie, anhand der Einstein'schen Skizzen z. B. im Rahmen einer AG im Unterricht thematisiert werden.

Insbesondere die Möglichkeit der Parametrisierung komplexer geometrischer Zusammenhänge und die damit zusammenhängende Möglichkeit einer kontinuierlichen Transformation zwischen unterschiedlichen Realisierungen unterstützen die Einsicht in den inneren Zusammenhang geometrischer Konfigurationen. Diese kontinuierlichen Transformationen können entweder interaktiv elaboriert oder auch als Animationen präkonfiguriert werden.

Warum kann GeoGebra das leisten? Es enthält die Standardkonstruktionsmethoden (Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende, ...) sowie Möglichkeiten der Visualisierung von numerisch berechneten Kurven, etwa von Kegelschnitten, etc. Dynamische Geometrie-Software erlaubt also die einfache Exploration eines regelgeleiteten geometrischen Kosmos, der auf Standardelementen des Axiomensystems der euklidischen Geometrie beruht. Gleichzeitig aber fixiert es die Konstruktionen nicht mehr auf Papier, sondern in ephemerer Weise auf dem Bildschirm, was simultane Änderungen ermöglicht, bei denen die vorherigen Situationen entweder sofort verschwinden, oder (z. B. über die Trace-Funktion) selbst wieder dargestellt werden. Die Animationsmöglichkeiten gestatten eine Fixierung dieser dynamischen Variabilität, etwa durch die Möglichkeit des wiederholten Betrachtens oder des Anhaltens und Rücklaufens der Animation.

Ähnliche Überlegungen wie hier für geometrische Konstruktionen und dynamische Software können

auch für die Rolle von Zahlenrechnungen und numerischen, maschinell ausführbaren Algorithmen, sowie für symbolisch repräsentierte algebraische Rechnungen und dem Einsatz von Computeralgebra angestellt werden.

Anmerkungen

¹ Viele der hier angedeuteten Mathematiker:innen und ihrer Nachlässe sind Gegenstand umfangreicherer Editionsprojekte. Zur ersten Orientierung der Quellensituation und spezifischen historischen Umstände seien hier nur einige Literaturhinweise genannt: zu Galilei siehe Büttner, Damerow & Renn (2001), zu Huygens siehe Yoder (2013), zu Newton siehe Iliffe (2004), zu Leibniz siehe Leibniz Archiv (1990-2020), zu Euler, siehe Mikhailov (1959); Matvievskaia und Ožigova (1983); Juškevič (1983), zu Gauß siehe Reich & Roussanova (2013), zu Somerville siehe Stenhouse (2020), zu Kowalewskaja, siehe Cooke (1984), zu Hilbert siehe Majer (2010), zu Hausdorff siehe Purkert & Scholz (2010), zu Gödel siehe Engelen (2019a; 2019b; 2020), vgl. allgemein zu der Problematik auch Holmes, Renn, Rheinberger (2003).

² Diese Seiten sind umgeben von Berechnungen und Überlegungen zum Gravitationslinseneffekt aus den Jahren 1912 und 1915, siehe Sauer (2008), Renn & Sauer (2003) und Renn, Sauer & Stachel (1997). Es zeigte sich, dass auch einige der Princeton Manuskriptseiten Überlegungen Einsteins zum Gravitationslinseneffekt enthalten, welche sich zum Schuleinsatz eignen (Sauer & Schütz, 2019).

³ Die Bezeichnungen und Beschriftungen in Abb. 1 wurden nachträglich eingefügt.

⁴ Die Strecken AD bzw. DB sind länger als die jeweiligen Lote.

⁵ Der Punkt D befindet sich auf dem Umkreis des Dreiecks ABC.

⁶ Dort finden wir auch eine Zeichnung, bei der Einstein ungenau zeichnete, was die Rekonstruktion erschwerte – ähnlich zu fehlerhaften Schülernotizen.

⁷ Der Stand der Unkenntnis ist dokumentiert in einer Fußnote von Sauer (2008, p.6), wo es über diese Zeichnung heißt: „[...] there is a sketch of Pascal’s and Brianchon’s Theorems, which deal with hexagons inscribed in or circumscribed on a conical section. I wish to thank Jesper Lützen for this identification.“

⁸ Der obere Teil der Manuskriptseite enthält zudem algebraische Ausdrücke, welche sich auch auf weiteren Manuskriptseiten finden lassen. Die entsprechenden Rechnungen stehen im Zusammenhang zu einer Publikation von 1938, in der Einstein und sein damaliger Assistent Peter Bergmann versuchten, die allgemeine Relativitätstheorie um eine fünfte Dimension zu erweitern, siehe auch Sauer & Schütz (2021).

⁹ Die Zusammenhänge lassen sich auch in der projektiven Ebene über den komplexen Zahlen oder einem anderen Zahlkörper diskutieren. Einstein hat in den Jahren 1916-1920 vor allem in der Diskussion um kosmologische Modelle mit Willem de Sitter, Felix Klein, Hermann Weyl und anderen (Schulmann 1998, S. 351-357) Details projektiver Geometrien (auch höherer Dimensionen) diskutiert. Dennoch scheint uns, dass Einstein in den hier

diskutierten Konstruktionen ausschließlich die reelle projektive Ebene seinen Betrachtungen zugrunde legt.

¹⁰ Es sei angemerkt, dass sich die drei Strecken im Allgemeinen nicht in einem Punkt treffen, auch wenn dies in Einsteins Zeichnung der Fall ist. Eine Tatsache, die sich sehr schnell mittels GeoGebra veranschaulichen lässt. Wenn sich die drei Strecken allerdings in einem Punkt treffen, dann konstituiert das gegebene Sechseck bereits eine Involution auf dem Kegelschnitt. Dann ist nämlich der Schnittpunkt der drei Linien das Zentrum der Involution und Geraden durch das Zentrum schneiden den Kegelschnitt in zwei Punkten, welche bei der Involution also vertauscht werden (siehe z. B. Behnke et al., 1971). Bei der Bewegung der Punkte auf dem Kegelschnitt, welche dann zwei Sekanten zu Tangenten werden lässt, geht dieser Zusammenhang allerdings im Allgemeinen zwischen durch wieder verloren.

¹¹ Bei einer elliptischen Involution gibt es keine invarianten Punkte. Bei einer hyperbolischen Involution existieren zwei invariante Punkte, die durch die Schnittpunkte zwischen der Pascal’schen Linie und dem Kegelschnitt bestimmt werden, siehe auch Coxeter (1987, S. 41).

Danksagung

Wir danken Diana Buchwald und dem Einstein Papers Project am California Institute of Technology für die Unterstützung dieses Projekts sowie Oliver Labs und Martina Schneider und zwei anonymen Gutachter:innen für konstruktive Kritik an einer früheren Version dieses Artikels. Wir danken dem Albert Einstein Archiv an der Hebräischen Universität Jerusalem für die Genehmigung zum Abdruck der Einstein’schen Manuskriptseiten.

Zusatzmaterial

Die Abbildungen 7, 9, 10 und 11 werden auch als Animationen in den Videosequenzen „Punkt6.mp4“ (<https://youtu.be/DufFLPjxuyg>), „Ms62787r.mp4“ (https://youtu.be/qT2YSC7A_5U), „Notizbuch.mp4“ (<https://youtu.be/17rYWx8nC6w>) und „NotizbuchZuMs.mp4“ (<https://youtu.be/2p3cENAhBWE>) bereitgestellt.

Literatur

- Althof, W. (Hrsg.) (1999). *Fehlerwelten. Vom Fehlermachen und Lernen aus Fehlern. Beiträge und Nachträge zu einem interdisziplinären Symposium aus Anlaß des 60. Geburtstags von Fritz Oser*. Wiesbaden: Springer.
- Behnke, H., Bachmann, F., Fladt, K. & Kunle, H. (1971). *Grundzüge der Mathematik. Band II, Teil B: Geometrie in analytischer Behandlung*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, Kap. II, §6.
- Blümle, C. (2013). Augenblick oder Gleichzeitigkeit. Zur Simultaneität im Bild. In P. Hubmann & T. J. Huss (Hrsg.), *Simultaneität: Modelle der Gleichzeitigkeit in den Wissenschaften und Künsten* (S. 37-55). Bielefeld: transcript Verlag.

- Büttner, J., Damerow, P. & Renn, J. (2001). Traces of an invisible giant: Shared knowledge in Galileo's unpublished treatises. In J. Montesinos & C. Solís (Hrsg.), *Largo campo di filosofare: Eurososymposium Galileo 2001* (S. 183-201). La Orotava: Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia.
- Carman, C. C. (2018). Accounting for overspecification and indifference to visual accuracy in manuscript diagrams: A tentative explanation based on transmission. *Historia Mathematica*, 45(3), 217-236.
- Cooke, R. (1984). *The Mathematics of Sonya Kovalevskaya*. New York: Springer.
- Coxeter, H. S. M. (1987). *Projective Geometry*. New York: Springer.
- Engelen, E.-M. (Hrsg.) (2019a). *Kurt Gödel. Philosophische Notizbücher. Band 1. Philosophie I Maximen O*. Berlin: de Gruyter.
- Engelen, E.-M. (2019b). Kurt Gödels philosophische Notizbücher als Denkraum und Exerzitium. *Deutsche Zeitschrift für Philosophie*, 67(2), 251-264.
- Engelen, E.-M. (Hrsg.) (2020). *Kurt Gödel Philosophische Notizbücher. Band 2. Zeiteinteilung (Maximen) I und II*. Berlin: de Gruyter.
- Grassmann, H. E. (1909). *Projektive Geometrie der Ebene*. Unter Benutzung der Punktrechnung. Leipzig: B. G. Teubner Verlag.
- Holmes, F. L., Renn, J. & Rheinberger, H.-J. (Hrsg.) (2003). *Reworking the Bench. Research Notebooks in the History of Sciences*. New York: Kluwer Academic Publishers.
- Iliffe, R. (2004). Digitizing Isaac: The Newton Project and an Electronic Edition of Newton's Papers. In J. E. Force & S. Hutton (Hrsg.), *Newton and Newtonianism. International Archives of the History of Ideas/Archives internationales d'histoire des idées*, vol 188 (S. 22-38). Dordrecht: Springer.
- Institut Henri Poincaré (Hrsg.) (2017). *Objets mathématiques*. CNRS Editions, 2017.
- Juškevič A. P. (1983) L. Euler's unpublished manuscript *Calculus Differentialis*. In M. Jenni (Hrsg.), *Leonhard Euler 1707–1783. Beiträge zu Leben und Werk. Gedenkband des Kantons Basel-Stadt*. Birkhäuser: Basel, 161-170.
- Kaenders, R. & Schmidt, R. (Hrsg.) (2014). *Mit Geogebra mehr Mathematik verstehen. Beispiele für die Förderung eines tieferen Mathematikverständnisses aus dem GeoGebra Institut Köln/Bonn*. Wiesbaden: Springer Fachmedien.
- Klein, M. J., Kox, A. J., Renn, J. & Schulmann, R. (Hrsg.) (1993). *The Collected Papers of Albert Einstein*. Vol. 3: *Writings, 1909-1911*. Princeton: Princeton University Press, 1993.
- Konstantinow, N. (2019). *Ankunft einer Katze. Geschichte und Theorie der ersten Computersimulation eines Lebewesens*. Hrsg. v. W. Velminski und M. Warnke. Berlin: Ciconia Ciconia.
- Kroll, E. (2011). Geometrie verstehen: statisch – kinematisch. In M. Helmerich, K. Lengnink, G. Nickel & M. Rathgeb (Hrsg.), *Mathematik Verstehen. Philosophische und Didaktische Perspektiven* (S. 154-164). Wiesbaden: Vieweg + Teubner Verlag.
- Leibniz Archiv/Leibniz Forschungsstelle Hannover (Hrsg.) (1990-2020). *Gottfried Wilhelm Leibniz. Sämtliche Schriften und Briefe. Siebente Reihe. Mathematische Schriften. Band 1-8*. Berlin: Akademie-Verlag <https://leibnizedition.de/reihen/reihe-vii/> (Abgerufen am 05.02.2021).
- Majer, U. (2010). The Hilbert Edition: What is it and what is it good for? *Philosophia Scientiae*, 14(1), 141-152.
- Matvievsckaja G. P. & Ožigova E. P. (1983) Leonhard Eulers handschriftlicher Nachlass zur Zahlentheorie. In M. Jenni (Hrsg.), *Leonhard Euler 1707–1783. Beiträge zu Leben und Werk. Gedenkband des Kantons Basel-Stadt*. Birkhäuser: Basel, 151-160.
- Maxwell, E. A. (2006). *Fallacies in Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press. Digital printed edition, first published in 1959.
- Meyer, J. (2020). Einleitung zum Schwerpunktthema Einsatz von GeoGebra. *Der Mathematikunterricht*, 66(1), 2-3.
- Mikhajlov, G. K. 1959. Notizen über die unveröffentlichten Manuskripte von Leonhard Euler. In K. Schröder (Hrsg.), *Sammelband der zu Ehren des 250. Geburtstages Leonhard Eulers der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vorgelegten Abhandlungen* (S. 256–280). Berlin: Akademie-Verlag.
- Netz, R. (2004). The Limits of Text in Greek Mathematics, In K. Chemla (Hrsg.), *History of Science, History of Text* (S. 161-176). Dordrecht: Springer.
- Pallack, A. (2018). *Digitale Medien im Mathematikunterricht der Sekundarstufen I + II*. Berlin: Springer.
- Purkert, W. & Scholz, E. (2010). The Hausdorff Edition. *Philosophia Scientiae*, 14(1), 127-139.
- Radatz, H. (1980). *Fehleranalysen im Mathematikunterricht*. Wiesbaden: Springer.
- Reich, K. & Roussanova, E. (2013). Eine kritische Bestandsaufnahme der Werkausgabe von Carl Friedrich Gauß. *Mathematische Semesterberichte*, 60, 217-247.
- Renn, J., Damerow, P. & Rieger, S. (2000). Hunting the White Elephant. When and How did Galileo Discover the Law of Fall? *Science in Context*, 13(3-4), 299-419.
- Rowe, D. (2011). Puzzles and Paradoxes and Their (Sometimes) Profounder Implications. *The Mathematical Intelligencer*, 33(1), 55-60.
- Saito, K. (2012). Traditions of the diagram, tradition of the text: A case study. *Synthese*, 186, 7-20.
- Sauer, T. (2008). Nova Geminorum 1912 and the origin of the idea of gravitational lensing. *Archive for History of Exact Science*, 62, 1-22.
- Sauer, T. (2019). Einstein's working sheets and his search for a unified field theory. *European Journal of Physics*, 44, 371-379.
- Sauer, T. & Schütz, T. (2019) Exploring Gravitational Lensing. *European Journal of Physics*, 40(3), 035301.
- Sauer, T. & Schütz, T. (2021) Einstein on involutions in projective geometry. *Archive for History of Exact Sciences*. <https://doi.org/10.1007/s00407-020-00270-z>
- Schubert, H. (1900). *Mathematische Mußestunden. Eine Sammlung von Geduldspielen, Kunststücken und Unterhaltungsaufgaben mathematischer Natur. Dritter Band: Reise-Probleme und Geometrische Probleme*. Leipzig: G. J. Göschen'sche Verlagshandlung.
- Schulmann, R., Kox, A. J. Janssen, M. & Illy, J. (Hrsg.) (1998). *The Collected Papers of Albert Einstein. Volume 8. The Berlin Years: Correspondence, 1914-1918*. Princeton: Princeton University Press.
- Stenhouse, B. (2020). Mary Somerville's early contributions to the circulation of differential calculus. *Historia mathematica*, 51, 1–25.

Volkert, K. (2019). A note on models. *Historia mathematica*, 48, 87–95.

Yoder, J. G. (2013). *Catalogue of the manuscripts of Christian Huygens, including a concordance with his Oeuvres completes*. Leiden: Brill.

Anschrift der Verfasser

Tilman Sauer
Johannes Gutenberg-Universität Mainz
Institut für Mathematik
Staudingerweg 9
55099 Mainz
tsauer@uni-mainz.de

Tobias Schütz
Johannes Gutenberg-Universität Mainz
Institut für Mathematik
Staudingerweg 9
55099 Mainz
tschuetz@uni-mainz.de