Erkenntnisse zur Beschreibung des aktivierten mathematischen Wissens in empirischen Kontexten an einem Beispiel aus der Wahrscheinlichkeitstheorie

FELICITAS PIELSTICKER, SIEGEN & INGO WITZKE, SIEGEN

***Zusammenfassung**: Dieser Artikel verdeutlicht, wie der erkenntnistheoretische Ansatz empirischer (Schüler-) Theorien für eine Beschreibung des aktivierten mathematischen Wissens in empirischen Kontexten, also solchen Kontexten, die auf die uns unmittelbar umgebende physikalische Welt („physical space" Hempel, 1945, „problems from the real word" Pollak & Garfunkel, 2014) bezogen sind, genutzt werden kann. Dies geschieht in einer ausführlichen Darstellung theoretischer Aspekte mit historischen Bezügen sowie anschließend an einem Fallbeispiel zur Wahrscheinlichkeitsrechnung (8. Klasse einer Sekundarschule), um somit an eine Diskussion bzgl. einer „wissenschaftsorientierten Richtung, die auf die Entwicklung mathematischer Theorien aus realen Kontexten gerichtet ist" (Kaiser et al., 2015, S. 361), anzuknüpfen.*

***Abstract:** This article illustrates how the epistemological approach of empirical (student) theories can be used for a description of the development of mathematical knowledge in empirical contexts, i. e. those contexts that affect the (physical) world immediately surrounding us ("physical space" Hempel, 1945, "problems from the real word" Pollak & Garfunkel, 2014). This is done in a presentation of theoretical aspects with historical references and then on a case study on probability calculation (8th grade of a secondary school), in order to address a discussion regarding a "science-oriented direction that is aimed at the development of mathematical theories from real contexts" (Kaiser et al., 2015, p. 361, translated by the authors).*

1. Einleitung und Ziel des Beitrags

Die Beschreibung der Entwicklung mathematischen Wissens an Schnittstellen zur Empirie ist ein in der Mathematikdidaktik vieldiskutiertes, komplexes und facettenreiches Thema. Ein wichtiger Aspekt für diese Beschreibung ist eine geeignete Darstellung des Verhältnisses von Mathematik und Empirie. Dies ist mit Blick auf aktuelle Curricula, die dem Realitätsbezug eine essenzielle Rolle für den Mathematikunterricht zuweisen, notwendig. Sollen Schüler*innen doch durch den Mathematikunterricht grundsätzlich erfahren, wie „Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen" (Winter, 1995, S. 37) sind. Auch aus diesen Überlegungen vorgelagerten lerntheoretischen Gründen ist der Bezug auf die uns unmittelbar umgebende physikalische Welt für den Mathematikunterricht wichtig.

Hefendehl-Hebeker formuliert dies wie folgt:

> „Die Begriffe und Inhalte der Schule haben ihre phänomenologischen Ursprünge überwiegend in der uns umgebenden Realität. […] Die ontologische Bindung an die Realität ist bildungstheoretisch und entwicklungspsychologisch durch Aufgabe und Ziele der allgemeinbildenden Schule gerechtfertigt […]" (Hefendehl-Hebeker, 2016, S. 16)

So sind Arbeits- und Anschauungsmittel, die sich auf eben diese Welt beziehen wesentliches Element der Unterrichtspraxis, da sie mathematische Zusammenhänge motivieren, veranschaulichen und begründen können. Dilling (2020) beschreibt, wie Veranschaulichungen, er nennt diese „empirische Settings" (Dilling, 2020, S. 1), von Schüler*innen zur Wissensentwicklung empirischer Theorien genutzt werden. Unter einer *empirischen Theorie* versteht man dabei eine Theorie, die – wie eine naturwissenschaftliche Theorie – gewisse Phänomene der Realität beschreibt und erklärt. Diese können sich beispielsweise auf Zeichenblattfiguren im Geometrieunterricht, Kurven im Analysisunterricht oder Zufallsexperimente im Stochastikunterricht beziehen.

Unter diesen Prämissen erscheint es notwendig, dass die Mathematikdidaktik allgemein und (angehende) Lehrkräfte im Speziellen über tragfähige didaktische Beschreibungsmöglichkeiten für den Umgang mit empirischen Kontexten verfügen.

Ziel dieses Artikels ist es daher, das Verhältnis von Mathematik und Empirie und die damit verbundene Komplexität einerseits grundlagentheoretisch, andererseits durch eine informelle strukturalistische Darstellung mit Blick auf ein schulisches Beispiel zur Verwendung des Begriffes der „Wahrscheinlichkeit" zu beschreiben. Zur Vorbereitung unserer Analyse werden im Folgenden zunächst theoretische Grundlagen zur Einordnung und zum Verständnis des von uns vorgestellten Beschreibungsrahmens empirischer Theorien vorangestellt. Die „Entwicklung von Theorie aus der erlebten Wirklichkeit der Lernenden" (Kaiser et al., 2015, S. 361) kann adäquat mithilfe dieses Ansatzes erfolgen. Er ist in diesem Artikel in seinen theoretischen Voraussetzungen skizziert und wird in seinen Folgerungen für die Beschreibung der Empirie an einem Beispiel aus dem Unterricht zur Wahrscheinlichkeitsrechnung illustriert.

Er wird dann im Weiteren mit Hilfe der Diskussion eines Schulbuchbeispiels sowie Transkripten von Schüler*innen mit Bezug zur Wahrscheinlichkeitstheorie zur Anwendung gebracht. In diesem Fallbeispiel wird dabei sichtbar, wie Schüler*innen im selben Unterricht zwei unterschiedliche Wahrscheinlichkeitsbegriffe entwickeln. Dabei steht die folgende Frage im Vordergrund: *Wie entwickeln Schüler*innen mathematisches Wissen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff in empirischen Kontexten?*

Die Daten des Fallbeispiels zum Begriff „Wahrscheinlichkeit“ stammen aus dem Dissertationsprojekt der Autorin. Die beiden nach der Darstellung der theoretischen Grundlagen diskutierten Fallgeschichten zu den Schülertandems „Kim und Tom“ und „Jan und Chris“ wurden in regulären Unterrichtssituationen aufgezeichnet. Die zwei Fallgeschichten werden mithilfe einer informellen Beschreibung mit dem strukturalistischen Ansatz analysiert, d. h. es wird aus Darstellungs- und Zugänglichkeitsgründen auf eine symbolische formallogische Rekonstruktion verzichtet, aber der festgelegte Beschreibungsrahmen genutzt (Witzke, 2009).

2. Theoretische Grundlagen

2.1 Auffassungen zur Wahrscheinlichkeit in der Geschichte der Mathematik

H. Steinbring (2005) beschreibt in „The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction – An Epistemological Perspective“ das komplexe Verhältnis von Mathematik und Realität mit Hilfe des “epistemologischen Dreiecks”. Wir gehen hierauf kurz ein, um unseren Ansatz mathematische Aushandlungs- und Wissensentwicklungsprozesse in empirischen Kontexten zu beschreiben, in einen in der Mathematikdidaktik anerkannten Ansatz einzuordnen und somit den Leser*innen Anknüpfungspunkte zu ermöglichen.

Um die wesentlichen Charakteristika des bekannten epistemologischen Dreiecks zu erläutern, benutzt Steinbring (2005, S. 25) den Begriff der Wahrscheinlichkeit als paradigmatisches Beispiel. Da auch unser Fallbeispiel sich auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung bezieht, passt dieses Beispiel gut zu unseren folgenden Ausführungen. Es stellt einen Hintergrund für die Analyse unserer Fallgeschichten bereit und deutet die Komplexität des Begriffs der Wahrscheinlichkeit an, die wir auch im Schulunterricht wiederfinden. Daher sei das epistemologische Dreieck kurz dargestellt.

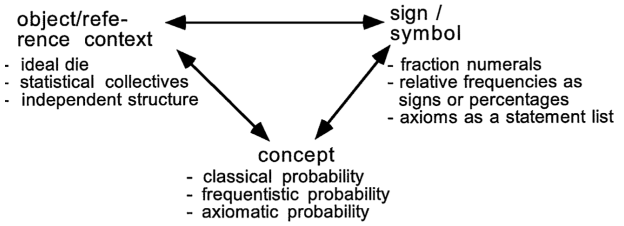


Abb. 1: Das epistemologische Dreieck: Das Konzept der Wahrscheinlichkeit (Original in Englisch, Steinbring, 2006, S. 138)

Die drei Ecken des in Abb. 1 dargestellten epistemologischen Dreiecks erläutert Steinbring mit einem Bezug zur historischen Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs. Zu verschiedenen Zeiten wurden demselben Zeichen („sign / symbol“) unterschiedliche Referenzobjekte zugeordnet, was zu einer kontinuierlichen Entwicklung bzw. Erweiterung des Begriffs der Wahrscheinlichkeit führte. Während sich in den historischen Anfängen, Steinbring folgend, Wahrscheinlichkeiten beispielsweise auf einen idealisierten Würfel bezogen und durch Bruchzahlen dargestellt wurden, bildeten später statistische Kollektive[i] die Gegenstände der Wahrscheinlichkeitslehre, deren relative Häufigkeiten mit Wahrscheinlichkeiten in Verbindung gebracht wurden. Dies war der Fall bis in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts schließlich eine axiomatische Grundlegung der Wahrscheinlichkeitstheorie im Hilbert’schen Sinne durch Kolmogoroff erfolgte. Ein Lernender, der in dieser Komplexität den Wahrscheinlichkeitsbegriff erwerben möchte, muss, so H. Steinbring, das Zeichensystem der Wahrscheinlichkeitstheorie auf immer neue Kontexte übertragen können.

Das epistemologische Dreieck stellt nicht nur drei für didaktische Überlegungen zentrale Begriffe heraus, die Ecken “Zeichen“, „Referenz“, „Begriff“, sondern beschreibt auch deren Zusammenhang: Jede Ecke stiftet Zusammenhang für die beiden anderen Ecken. So schafft beispielsweise erst der Begriff die wesentliche Verbindung zwischen Zeichen und Referenz.

Wir möchten diese Erkenntnis auch wie folgt paraphrasieren: Zeichen und deren Referenzen (Referenzobjekte) treten in Zeichensystemen bzw. Theorien auf und Theorien sind begriffliche Gebilde. Daher könnte man jede der drei historischen Beispiele, die Steinbring angibt, jeweils durch eine eigene Theorie beschreiben: eine Theorie über „idealisierte Würfel“, eine Theorie über statistische Kollektive (von Mises) und die Theorie über formal-abstrakte Wahrscheinlichkeiten (Kolmogoroff).

Diese drei Beispiele sind auch deshalb instruktiv, weil ein weiterer Punkt deutlich wird: Mathematik besitzt in ihrer Geschichte keine einheitlichen epistemologischen Grundlagen. Die drei Theorien, die Steinbring zur Erläuterung des epistemologischen

Dreiecks verwendet, sind unterschiedlichen Charakters. Entstanden ist die Wahrscheinlichkeitstheorie ursprünglich aus Fragen der Gerechtigkeit von Glücksspielen: In der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts wurde auf der Grundlage eines Briefwechsels zwischen Fermat und Pascal aus dem Jahr 1658 eine erste Version einer Theorie von Fairness in solchen Spielen entwickelt. Es handelte sich aus heutiger Sicht beschrieben um eine normative Theorie, eine Theorie, in der ein Begriff von Gerechtigkeit festgelegt wurde. Zu der historischen Entwicklung dieser Theorie (bzw. einer präzisen Rekonstruktion) in der die „idealisierten Würfel“ als paradigmatische Beispiele eine wesentliche Bedeutung hatten, siehe Burscheid & Struve, 2000; Burscheid & Struve, 2001. Die Theorie über statistische Kollektive von von Mises ist hingegen eine rein empirische (naturwissenschaftliche) Theorie, besitzt also einen empirisch-deskriptiven Charakter. Die Kolmogoroffsche Theorie kann man schließlich als eine formalistische Theorie i.S.v. D. Hilbert auffassen.

Das Steinbring’sche Beispiel der Wahrscheinlichkeitstheorie zeigt überdies, wie komplex das Verhältnis von Mathematik und Realität in der Geschichte der Mathematik war. Eine formal-abstrakte Auffassung von Mathematik, in der die Relationen zwischen den mathematischen Gegenständen entscheidend sind und die Natur der Objekte einer Theorie irrelevant ist, ist erst von Hilbert Anfang des vorigen Jahrhunderts entwickelt worden. Bis zum Erscheinen seiner „Grundlagen der Geometrie“ im Jahr 1900 war Mathematik inhaltlich gebunden. Die „Nabelschnur der Mathematik zur Realität“ wurde erst mit Erscheinen des Hilbert’schen Werkes „durchschnitten“, wie Freudenthal (1957) es einmal formulierte.

Das epistemologische Dreieck kann nicht nur zur Darstellung der historischen Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs nützlich sein, sondern gibt auch Hinweise zur Beschreibung der Entwicklung von mathematischem Wissen von Schüler*innen: So gibt es, mit Blick auf die historische Entwicklung, keine Notwendigkeit in Auseinandersetzung mit empirischen Kontexten eine bestimmte Wahrscheinlichkeitstheorie zu entwickeln. Um Schüler*innen optimal fördern zu können ist es hingegen aber sicherlich notwendig, die jeweilige Wahrscheinlichkeitstheorie präzise beschreiben zu können. Dies kann, wie uns der Steinbring’sche Ansatz zeigt, nur mit Hilfe eines präzisen Begriffssystems gelingen. Um letztgenanntes zu verdeutlichen folgen nun Darstellungen zur strukturalistischen Metatheorie.

2.2 Zur strukturalistischen Metatheorie

2.2.1 Ideen und Begriffe des Strukturalismus

Dem grundlagentheoretischen Scope des Themenheftes „Didaktische Perspektiven auf Verbindungen von Mathematik und Realität“ folgend, wollen wir, ähnlich wie zuvor mit Blick auf das epistemologische Dreieck, zum Verständnis des verwendeten Beschreibungsinstrumentes „empirischer Theorien“ dieses im Spiegel seiner Entstehung am inhaltlichen Beispiel der Wahrscheinlichkeitsrechnung etwas ausführlicher darstellen. Dies gibt dem Leser*in wichtige Hinweise auf die Bedeutung und die Relevanz des für die Analyse gewählten Beschreibungsrahmens.

Der Strukturalismus ist aus dem Problem entstanden, inhaltsgebundene, insbesondere empirische (naturwissenschaftliche) Theorien präzise zu rekonstruieren. Bereits in der ersten Hälfte des vorigen Jahrhunderts wurde im Wiener Kreis, in dem R. Carnap einer der prominenten Vertreter war, diskutiert, wie man wissenschaftliche Theorien von nicht-wissenschaftlichen, „metaphysischen“ wie man damals sagte, unterscheiden kann. Ein Hauptproblem besteht darin, die Bedeutung wissenschaftlicher Begriffe zu klären, um metaphysische Begriffe aus wissenschaftlichen Theorien ausschließen zu können. Ein erster Versuch Carnaps bestand darin, zwischen einer Beobachtungssprache und einer theoretischen Sprache zu differenzieren. Begriffe der theoretischen Sprache, sog. theoretische Begriffe, ließen sich dadurch allerdings nicht hinreichend charakterisieren. Dies gelang erst im Strukturalismus (Sneed, 1971; Stegmüller, 1986; Balzer, 1982). Da wir uns in unserem Beitrag vornehmlich mit Problemen der Begriffsentwicklung beschäftigen, gehen wir auf den strukturalistischen Beitrag zu diesem Punkt – und nur zu diesem – etwas genauer ein. Für weitergehende Anwendungen des Strukturalismus in der Mathematikdidaktik sei exemplarisch auf Burscheid & Struve (2018), (2020), Schlicht (2016) und Stoffels (2020) verwiesen.

Im Strukturalismus werden (vgl. Tab. 1) zwei Arten von Begriffen unterschieden: Begriffe, die bzgl. einer Theorie T theoretisch sind und solche, die es nicht sind. Die ersteren werden T-theoretisch genannt, die letzteren T-nicht-theoretisch. Die Bedeutung der letzteren ist unabhängig von der Theorie T gegeben. Die Bedeutung der ersteren wird erst in der Theorie T geklärt. Für ihre Bestimmung wird also bereits die Theorie T benutzt. Wir geben ein Beispiel, das für die folgenden beiden Fallgeschichten relevant ist, den Begriff der Wahrscheinlichkeit.[ii]

Entstanden ist der Begriff der Wahrscheinlichkeit in der Diskussion der Frage, wann ein Glücksspiel gerecht ist. Ein in der Geschichte der Mathematik viel diskutiertes Beispiel ist in diesem Zusammenhang das „problème des dés“: Was ist der gerechte Einsatz zweier Spieler A und B, die zwei Würfel solange werfen, bis zum ersten Mal die Augensumme 9 (A gewinnt) bzw. 10 (B gewinnt) erscheint und als Gewinn dann der gesamte Einsatz vereinbart ist? Uneinig waren sich dazu die Mathematiker Leibniz und d´Alembert einerseits und andererseits Pascal und Galilei (für eine detaillierte Darstellung dieser Diskussion siehe Burscheid & Struve, 2020).

Dieses Beispiel von vier prominenten Mathematikern zeigt, dass der Begriff der Wahrscheinlichkeit unter normativen Gesichtspunkten, mit Blick auf den Begriff der Gerechtigkeit, auf verschiedene Arten festgelegt werden kann, also keinesfalls klar ist und auch nicht, wie dies zu geschehen habe. Wenn man dazu den Begriff der Wahrscheinlichkeit mit relativen Häufigkeiten in Verbindung bringt, wie man es heutzutage standardmäßig macht, dann vertritt man einen speziellen Gerechtigkeitsbegriff, einen physikalistischen. Dies kann man machen, es ist aber keineswegs (vgl. 2.1) notwendig, wie ein Blick in die Geschichte zeigt.

Der Begriff der „Erwartung“ (bzw. Wahrscheinlichkeit) war ursprünglich nicht im Sinne von „physikalisch zu erwarten“ gemeint (erst recht nicht „physikalisch auf lange Sicht zu erwarten“), sondern i.S.v. „gerechterweise zu erwarten“ und Wahrscheinlichkeit als „Grad von Gewissheit“ (Jakob Bernoulli: Ars Conjectandi 1713) im Sinne einer moralischen Gewissheit. Da man über Normen trefflich streiten kann, wundert es nicht, dass in der Geschichte verschiedene Begriffe von Wahrscheinlichkeit diskutiert wurden (Burscheid & Struve, 2001). Erst innerhalb der jeweiligen Theorien wurde der Begriff der Wahrscheinlichkeit beschreibbar. Er ist im Sinne des Beschreibungsrahmens empirischer Theorien ein theoretischer Begriff (bzgl. der jeweiligen Theorie).

Es sei auch an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass nicht nur Mathematiker*innen in der Geschichte verschiedene Auffassungen davon hatten, wann ein Glücksspiel gerecht ist, sondern natürlich auch Schüler*innen (Schupp, 1986).

Festhalten möchten wir, dass der später nach Laplace benannte Wahrscheinlichkeitsbegriff in der Geschichte unabhängig von relativen Häufigkeiten eingeführt wurde. In der Formulierung von E. Czuber (1899, S. 111) sollten in einem gerechten fairen Spiel „gleich mögliche Fälle gleich große Ansprüche auf die Spieleinlage begründen“. Dies ist ein Grundsatz einer moralischen Auffassung und „gleich möglich“ wurde keineswegs mit dem Ergebnis physikalischer Experimente in Verbindung gebracht. Als „Gleich mögliche Ereignisse“ wurden solche bezeichnet, für die es aus moralischen Gesichtspunkten keinen Grund gibt, das eine Ereignis dem anderen vorzuziehen. Paradigmatische Beispiele dazu sind Glücksspiele mit symmetrischen Objekten, etwa Würfeln oder allgemeinen platonischen Körpern. Die numerischen Werte der Laplace’schen Wahrscheinlichkeiten beruhen auf den Symmetrien dieser Körper und sind in diesem Sinne eine geometrisch-physikalische Eigenschaft. In einer normativen Theorie, in der ein Begriff von Gerechtigkeit von Glücksspielen festgelegt wird, haben diese Wahrscheinlichkeiten natürlich eine Bedeutung, die weit über die numerischen Werte hinausgeht. Die Werte selbst gehören in das Gebiet der Kombinatorik. Erst die Theorie rechtfertigt, dass man diese kombinatorischen Werte als „Wahrscheinlichkeiten“ bezeichnen kann.

Die Bestimmung der numerischen Werte von Laplace’schen Wahrscheinlichkeiten ist hingegen ein geometrisch-kombinatorisches Problem. Eine weitergehende Fragestellung – etwa eine, die die Fairness von Glücksspielen betrifft – ordnet diese in eine Theorie ein und macht mit Blick auf diese aus Laplace’schen Wahrscheinlichkeiten theoretische Begriffe. In Schulbüchern wird diese Trennung zwischen numerischen Werten, die man aus kombinatorisch-geometrischen Überlegungen erhält, sowie deren Bedeutung in einer Theorie (einer normativen oder empirisch-deskriptiven Theorie), nicht immer hinreichend deutlich, wie wir in Abschnitt 3 detailliert am Beispiel beschreiben werden.

Man muss aus erkenntnistheoretischer Perspektive betrachtet, um einen theoretischen Wahrscheinlichkeitsbegriff in einem empirischen Kontext einbringen zu können, ihn mit nicht-theoretischen Begriffen in geeigneter Weise in Verbindung bringen. Im Schulunterricht wird dies oftmals versucht, indem man festlegt, dass man die relative Häufigkeit eines Ereignisses nach einer bestimmten Anzahl von Versuchen (z. B. $n = 100$ oder $n = 500$) als Wahrscheinlichkeit des Ereignisses ansehen möchte – obwohl sie dies natürlich nicht ist. In Schulbüchern spricht man manchmal diesbezüglich von einer „statistischen Wahrscheinlichkeit“, einem „Schätzwert“ für die eigentliche Wahrscheinlichkeit. Dieser Schätzwert kann allerdings gravierend von der Wahrscheinlichkeit abweichen; denn die relativen Häufigkeiten könnten sich auch nach 100 oder 500 Versuchen anders entwickeln, als es die Anfangsfolge vermuten lässt. Wissenschaftstheoretisch formuliert: Die Werte von theoretischen Begriffen (Funktionen, wie der Wahrscheinlichkeitsfunktion P), die noch nicht hinreichend an nicht-theoretische Begriffe angebunden sind, sind nicht eindeutig bestimmt. So legt im obigen Beispiel erst der Beschluss, dass die relative Häufigkeit eines Ereignisses nach 100 Versuchen dessen Wahrscheinlichkeit sein soll, den Wert der Funktion P eindeutig fest. Auch dies ist ein Problem, welches im Schulunterricht auftreten kann und in folgenden Fragen zum Ausdruck kommt:

- Welche Rolle spielen die aufgrund von geometrisch-kombinatorischen Überlegungen ermittelten Werte von Laplace'schen Wahrscheinlichkeiten für frequentistische Wahrscheinlichkeiten?
- Mit anderen Worten: Gilt das Bernoulli'sche Gesetz der großen Zahlen auch für Laplace'sche Wahrscheinlichkeiten?

Das ist auf den ersten Blick keineswegs klar und ist eine Aussage in einer empirischen Wahrscheinlichkeitstheorie (Burscheid & Struve, 2001).

2.2.2 Empirische (Schüler-)Theorien

Wissen von Schüler*innen kann mithilfe von Theorien, in der Regel empirischen Theorien, beschrieben werden (Burscheid & Struve, 2018, 2020; Witzke, 2009; Schlicht, 2016; Schiffer, 2019; Stoffels, 2020; Pielsticker, 2020). Unsere Behauptung ist nicht, dass Kinder diese Theorien formulieren können, sondern dass sich Kinder so verhalten, als ob sie über diese Theorien verfügen würden. Dabei fassen wir unter einer empirischen Theorie eine Theorie, die Phänomene der Realität beschreibt und erklärt (Sneed, 1971; Stegmüller, 1973; Balzer, 1982). Zu den empirischen Theorien zählen alle naturwissenschaftlichen Theorien, wie z. B. die Newtonsche Mechanik und die Maxwell'sche Elektrodynamik, aber auch beispielsweise ökonomische oder psychologische Theorien. Die Theorien können unterschiedliche Größen oder Reichweiten besitzen, so dass auch Alltagstheorien von Kindern dazu zählen (Struve ,1990).

Wie wir im Artikel anhand eines Fallbeispiels aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung darstellen wollen, ist es nützlich die strukturalistische Metatheorie (Balzer, Sneed & Moulines, 2000; Sneed, 1971; Stegmüller, 1986) heranzuziehen, um empirische (Schüler-) Theorien darzustellen (weitere Ausführungen in Abschnitt 2.2.2 und 2.3). Diese bietet u. a. den Vorteil, Probleme, die mit dem Erwerb von inhaltlich-gegenständlichen Theorien (also nicht-formalistischen Theorien) verbunden sind, präzise darstellen zu können. Die beiden diesbezüglich von Steinbring aufgeführten fachwissenschaftlichen Theorien liegen bereits in präzise rekonstruierter Form vor: Für die normative Theorie der Gerechtigkeit von Glücksspielen findet sich eine strukturalistische Rekonstruktion in Burscheid und Struve (2000) und (2001) und für die empirische Theorie von von Mises in Stoffels (2020). Die Kolmogoroff'sche Theorie ist hingegen eine formalistische Theorie und als solche schon explizit und präzise durch den Autor der Theorie formuliert worden.

In der strukturalistischen Darstellung einer empirischen Theorie – insbesondere auch einer empirischen Schülertheorie – sind die folgenden Begriffe (Fachtermini) zentral:

Fachtermini	Erläuterung
Intendierte Anwendungen	sind die durch eine empirische Theorie beschriebenen und erklärten Phänomene der Realität.
Paradigmatische Beispiele	sind vorbildliche Beispiele für Anwendungen der Theorie und begründen dabei eine Klasse von intendierten Anwendungen einer empirischen Theorie.
Referenzobjekte	sind empirische Objekte (Gegenstände und Objekte der Realität), die unter einen bestimmten Begriff fallen und im Sinne einer empirischen Theorie als definierend für empirische Begriffe angesehen werden.
Nicht-theoretische Begriffe	sind solche die bereits in einer Vortheorie geklärt sind oder ein Referenzobjekt in der Realität besitzen (d. h. Objekte der Realität, die unter diesen Begriff fallen).
Theoretische Begriffe	sind Begriffe deren Bedeutung erst durch die Aufstellung bzw. innerhalb einer Theorie geklärt werden können und die kein empirisches Referenzobjekt besitzen.

Tab. 1: Fachtermini zur Beschreibung empirischer (Schüler-)Theorien in empirischen Kontexten.

2.3 Blick auf den schulischen Mathematikunterricht

Vor den bisher getätigten theoretischen Überlegungen blicken wir in Abschnitt 3 auf das Verhältnis von Mathematik und Realität im Schulkontext. Dabei findet die Terminologie empirischer Theorien (Tab. 1) Anwendung, um dieses Verhältnis präzise beschreiben zu können. Dafür werden insbesondere mit Hilfe der Termini aus 2.2.1 charakteristische Aspekte der Wahrscheinlichkeitsrechnung an Schnittstellen von Mathematik und Realität beschrieben. Ziel ist es, damit exemplarisch die Aussagekraft einer solchen Beschreibung der Entwicklung mathematischen Wissens in empirischen Kontexten darstellen zu können.

Dazu folgt zunächst die Analyse einer Schulbuchseite des Schulbuches „Zahlen und Größen“ der 8. Jahrgangsstufe (Sekundarschule), welche wesentliche Begriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie für Schüler*innen definiert. Für die Schulbuchautoren*innen geht es um ein „Lesen und Verstehen“ (Zahlen und Größen 8, S. 70, vgl. Abb. 2). Dabei ist zu bemerken, dass es uns dabei an dieser Stelle nicht um eine Vollständigkeit der Analyse, sondern um eine Explikation unseres Beschreibungsinstrumentes an einem Beispiel geht. Zusätzlich kann das Schulbuchbeispiel gut den folgenden Blick auf empirische Daten aus dem Unterricht (vgl. 3.) einleiten, da es sich um das Schulbuch der betrachteten Schüler*innen handelt.

Zur Einleitung folgt nun zunächst eine kurze Beschreibung des Situationskontextes der Datenerhebung.

2.3.1 Situationskontext

Das betrachtete Fallbeispiel zur Beschreibung der Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs bezieht sich auf eine Unterrichtssituation einer 8. Klasse (Sekundarschule in NRW). Die betrachtete Klasse wurde über ein Schuljahr regelmäßig mit digitalen Medien, vorrangig mit der 3D-Druck-Technologie, unterrichtet. Als wichtiges Hilfsmittel zum Design dreidimensionaler Körper war den Schüler*innen dabei das kostenfrei erhältliche CAD-Programm Tinkercad™ bekannt, welches wir in Abschnitt 2.4 kurz skizzieren.

Die Daten unseres Fallbeispiels sind dem Dissertationsprojekt der Autorin entnommen und wurden im Herbst 2018 erhoben und dabei mithilfe eines hermeneutisch-deskriptiven Vorgehens aufbereitet, da ein besonderes Interesse sowohl dem (empirischen) Kontext, als auch einer Beschreibung der verbundenen Sinnzusammenhänge (Bauersfeld, 1983; 1985) galt. Dieses Vorgehen war gekennzeichnet von Elementen des Case-Study-Ansatzes (Stake, 1995) zur Identifikation von Schlüsselszenen, dem Konzept der Subjektiven Erfahrungsbereiche (Bauersfeld, 1983) zur Identifikation von Schülertheorien und einer analytischen Untersuchung mithilfe der Terminologie des strukturalistischen Theoriekonzepts (vgl. 2.2). Im Sinne einer multiple-instrumental Case Study (Stake, 1995) sind wir der Forschungsfrage, wie entwickeln Schüler*innen mathematisches Wissen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff in empirischen Kontexten, nachgegangen. Mit Blick auf die Erzeugung von Informativität bzw. eines tieferen Verständnisses des Cases sind Schlüsselszenen ausgewählt („Case studies are undertaken to make the case understandable", Stake, 1995, S. 85). Mithilfe der Subjektiven Erfahrungsbereiche nach Bauersfeld (1983), beschränkt auf kognitive Aspekte, wurde das Schülerwissen geordnet und anschließend einer analytischen Untersuchung in empirischen Theorien mithilfe der Terminologie des Strukturalismus (vgl. 2.2) zugeführt.

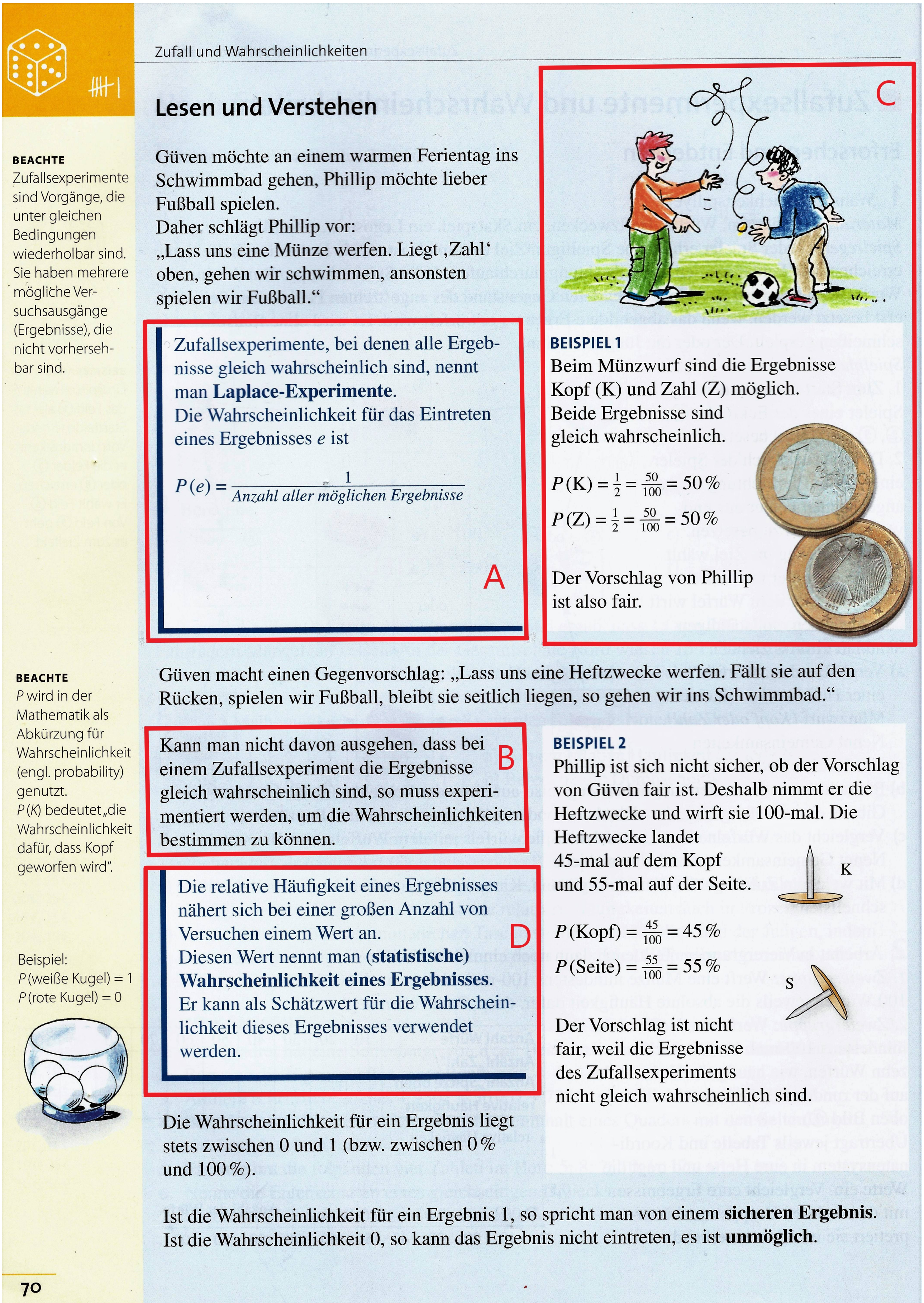
In diesem Beitrag stellen wir insbesondere den dritten Schritt der Untersuchung mithilfe der Terminologie des strukturalistischen Theoriekonzepts dar.

2.3.2 Analyse der Schulbuchseite

Dass der Erwerb des Wahrscheinlichkeitsbegriffs durch gewisse epistemologische Hürden (Sierpinska, 1992) gekennzeichnet ist und es mithin in der Natur der Sache liegt, dass dieser damit auch verständlicherweise sowohl von Lehrenden als auch von Lernenden als herausfordernd wahrgenommen wird, stellen beispielsweise Eichler und Vogel (2013, S. 147-168), Krüger, Sill und Sikora (2015, S. 233-247), sowie Burscheid und Struve (2020, S. 19-22) heraus. Die Bezüge zwischen historisch-erkenntnistheoretischer und Schüler*innen-Ebene können detailliert beispielsweise im Rahmen der Diskussion der historischen Entwicklung des empirischen *Gesetzes der großen Zahlen* nachvollzogen werden (Burscheid & Struve, 2020), die wir in 2.2.2 nur andeuten konnten.

Um einen Eindruck zu erhalten, wie die Wahrscheinlichkeitsrechnung im Unterricht der später in Abschnitt 3. betrachteten Schüler*innen eingeführt wurde, schauen wir nun zunächst in das Schulbuch „Zahlen und Größen 8" (2015, S. 70, vgl. Abb. 2). Interessant ist für uns, wie das Schulbuch den Begriff der Wahrscheinlichkeit einführt und welches Verständnis von Wahrscheinlichkeit für Lernende potenziell angeregt wird.

Auf der Schulbuchseite (vgl. Abb. 2) der Einheit „Zufall und Wahrscheinlichkeiten" geht es allgemein gesprochen um den eigentlich normativen Aspekt der Fairness von Losverfahren. Das Verfahren, welches Philip im Beispiel 1 vorschlägt wird dort als „fair" deklariert, das Verfahren, das Güven in Beispiel 2 propagiert, als nicht fair. Die beiden Losverfahren können wir als Anwendungen einer potentiellen empirischen Theorie über Losverfahren mit physikalischen Objekten beschreiben, genauer über das Werfen einer Münze und das Werfen einer Heftzwecke. Es handelt sich dabei um intendierte Anwendungen, die als paradigmatische Beispiele fungieren, die wie wir wissen für den weiteren Mathematikunterricht prägend sind. Münzen, wie Heftzwecken (und dazu die Kugeln in der Urne, wie Würfel, die auf der Seite dargestellt werden) fungieren als Objekte des Mathematikunterrichts, an denen wesentliche Eigenschaften der Wahrscheinlichkeitsrechnung festgemacht bzw. motiviert und erläutert werden. Sie lassen sich mit Blick auf Tab. 1 als konstituierende empirische Referenzobjekte von empirischen Theorien über Wahrscheinlichkeit im Schulkontext beschreiben. Sie bilden sozusagen die kontextuelle empirische Rahmung der Zufallsexperimente. Dabei können wir ein diffiziles Verhältnis von nicht-theoretischen Begriffen (beispielsweise Kopf und Zahl) und einem theoretischen Begriff der Wahrscheinlichkeit (oder dem unmöglichen Ergebnis) beschreiben:



Zufall und Wahrscheinlichkeiten

Lesen und Verstehen

BEACHTE
Zufallsexperimente sind Vorgänge, die unter gleichen Bedingungen wiederholbar sind. Sie haben mehrere mögliche Versuchsausgänge (Ergebnisse), die nicht vorhersehbar sind.

Güven möchte an einem warmen Ferientag ins Schwimmbad gehen, Phillip möchte lieber Fußball spielen.
Daher schlägt Phillip vor:
„Lass uns eine Münze werfen. Liegt ‚Zahl' oben, gehen wir schwimmen, ansonsten spielen wir Fußball."

Zufallsexperimente, bei denen alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind, nennt man **Laplace-Experimente**.
Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ergebnisses *e* ist

$$P(e) = \frac{1}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$$

A

C

BEISPIEL 1
Beim Münzwurf sind die Ergebnisse Kopf (K) und Zahl (Z) möglich.
Beide Ergebnisse sind gleich wahrscheinlich.

$P(\text{K}) = \frac{1}{2} = \frac{50}{100} = 50\,\%$

$P(\text{Z}) = \frac{1}{2} = \frac{50}{100} = 50\,\%$

Der Vorschlag von Phillip ist also fair.

Güven macht einen Gegenvorschlag: „Lass uns eine Heftzwecke werfen. Fällt sie auf den Rücken, spielen wir Fußball, bleibt sie seitlich liegen, so gehen wir ins Schwimmbad."

BEACHTE
P wird in der Mathematik als Abkürzung für Wahrscheinlichkeit (engl. probability) genutzt.
P(*K*) bedeutet „die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Kopf geworfen wird".

Kann man nicht davon ausgehen, dass bei einem Zufallsexperiment die Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind, so muss experimentiert werden, um die Wahrscheinlichkeiten bestimmen zu können.

B

BEISPIEL 2
Phillip ist sich nicht sicher, ob der Vorschlag von Güven fair ist. Deshalb nimmt er die Heftzwecke und wirft sie 100-mal. Die Heftzwecke landet
45-mal auf dem Kopf
und 55-mal auf der Seite.

K

$P(\text{Kopf}) = \frac{45}{100} = 45\,\%$

$P(\text{Seite}) = \frac{55}{100} = 55\,\%$

S

Der Vorschlag ist nicht fair, weil die Ergebnisse des Zufallsexperiments nicht gleich wahrscheinlich sind.

Die relative Häufigkeit eines Ergebnisses nähert sich bei einer großen Anzahl von Versuchen einem Wert an.
Diesen Wert nennt man **(statistische) Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses.**
Er kann als Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit dieses Ergebnisses verwendet werden.

D

Beispiel:
P(weiße Kugel) = 1
P(rote Kugel) = 0

Die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis liegt stets zwischen 0 und 1 (bzw. zwischen 0 % und 100 %).

Ist die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis 1, so spricht man von einem **sicheren Ergebnis.**
Ist die Wahrscheinlichkeit 0, so kann das Ergebnis nicht eintreten, es ist **unmöglich.**

70

Abb. 2: „Zufall und Wahrscheinlichkeiten" im Schulbuch *Zahlen und Größen* 8, S. 70 (Abdruck mit freundlicher Genehmigung des Cornelsen-Verlags)

Bei einem Münzwurf, so wird (wenn wir die Seite von oben nach unten lesen, Kasten C) zunächst festgestellt, sind die Ergebnisse Kopf und Zahl „möglich“. Dann wird konstatiert, dass diese beiden Ergebnisse „gleich wahrscheinlich“ seien und das Verfahren „fair“. In diesem normativen Kontext (vgl. 2.1) könnte man die „Gleichwahrscheinlichkeit“ der beiden Ereignisse exnegativo begründen: Es gibt keinen Grund, warum die eine Seite der Münze vor der anderen ausgezeichnet sei. Die Münze ist aufgrund ihrer geometrisch-physikalischen Struktur ein symmetrisches empirisches Objekt mit zwei kongruenten Seiten. Wenn es also keinen Grund gibt, eine der beiden Ergebnisse eines Münzwurfes vorzuziehen, wenn also in diesem Sinne Kopf und Zahl gleich möglich sind, so ist die „Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines der beiden 50% oder 1/2. Dies ist ein typisches Beispiel für ein Laplace-Experiment (und Laplace’sche Wahrscheinlichkeiten). Solche Wahrscheinlichkeiten bestimmt man mittels geometrisch-kombinatorischer Überlegungen.

Eine Bedeutung erhalten diese Werte, wenn es um normative Fragen der Fairness geht, die hier also verbunden werden mit empirisch-deskriptiven Aspekten.

Das Werfen einer Heftzwecke, also eines empirischen Referenzobjektes, das als paradigmatisches Beispiel potentiell konstituierend ist für empirische (Schüler-) Theorien über Wahrscheinlichkeit, ist tatsächlich kein Laplace-Experiment, weil die beiden möglichen Ergebnisse unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten besitzen; der Grund hierfür ist die physikalische Gestalt der Heftzwecke. Diese Einsicht würde aufgrund der Überlegungen zum Münzwurf (Beispiel 1, vgl. Abb. 2) eigentlich schon genügen, um das zweite im Buch vorgeschlagene Losverfahren, nämlich das Werfen einer Heftzwecke (Beispiel 2, vgl. Abb. 2), als unfair abzulehnen. Die Unfairness des Vorschlages wird aber im Schulbuch nicht explizit mit Symmetrie-Überlegungen begründet (analog zur Begründung der Fairness eines Münzwurfes), sondern mit Wahrscheinlichkeiten: „Der Vorschlag ist nicht fair, weil die Ergebnisse … nicht gleich wahrscheinlich sind“ (Abb. 2). Die Wahrscheinlichkeit von Ergebnissen mit nicht-symmetrischen Objekten wird schließlich als eine Art „Grenz-Wert“ eingeführt, dem sich die relativen Häufigkeiten nähern: „Die relative Häufigkeit eines Ergebnisses nähert sich bei einer großen Anzahl von Versuchen einem Wert an“ (D, vgl. Abb. 2). Diese Vorstellung knüpft an das sog. Empirische Gesetz der großen Zahlen an, dass die relative Häufigkeit eines Ereignisses gegen dessen Wahrscheinlichkeit konvergiert (vgl. Freudenthal, 1972). Diese Auffassung war auch in der Geschichte der Wahrscheinlichkeitstheorie weit verbreitet. Damit lässt sich die Wahrscheinlichkeit an dieser Stelle im Sinne von Tab. 1 abermals eindeutig als theoretisch beschreiben: Der Grenzwert ist für die Schüler*innen weder in einer Vortheorie geklärt noch anhand eines empirischen Vorgangs begreifbar – er wird erst durch theoretische Überlegungen innerhalb der Wahrscheinlichkeitstheorie verständlich.

Es könnten sich für die Schüler*innen in diesem Zusammenhang zwei Fragen stellen, die den Zusammenhang von normativem und empirisch-deskriptivem Zugang betreffen: Was haben relative Häufigkeiten mit Fairness zu tun? Und: Handelt es sich bei den Wahrscheinlichkeiten, die im Schulbuch den Ausfällen beim Münzwurf und beim Heftzweckenwurf zugeordnet werden, um denselben (Wahrscheinlichkeits-)Begriff?

Laplace-Wahrscheinlichkeiten bestimmt man im Mathematikunterricht gewöhnlich aufgrund geometrisch-physikalischer Symmetrien von Körpern. Sie kann man dann in normativen Situationen verwenden, etwa bei der Beurteilung der Fairness von Losvorschlägen.

Wahrscheinlichkeiten von Ergebnissen von Zufallsexperimenten, die nicht Laplacesch sind, bestimmt man dagegen mit Hilfe von relativen Häufigkeiten.

Mit Blick auf das vorliegende Schulbuch ist zu beobachten, dass ein Zusammenhang zwischen diesen beiden Wahrscheinlichkeitsbegriffen nicht hergestellt wird. Dadurch könnten den Schüler*innen und Leser*innen, abweichend von den Intentionen der Schulbuchautor*innen, zwei verschiedene (empirische) Schülertheorien unter Berücksichtigung der thematisierten normativen Aspekte nahegelegt werden:

(a) *eine geometrisch-kombinatorische Theorie* zur Bestimmung der Anzahl von gleichmöglichen Ergebnissen, die sich in Vorstellungen zu idealen Zufallsobjekten (die auf empirische Objekte übertragen werden) begründet und auf diese Weise einen Wahrscheinlichkeitsbegriff auf „nicht-experimentelle“ Weise für die normative Frage der Fairness konstituiert.

(b) *eine Theorie über vielfach ausgeführte Zufallsexperimente*, die relative Häufigkeiten als „Schätzwert“ (D, vgl. Abb. 2) für Wahrscheinlichkeiten verwendet. Diese Wahrscheinlichkeiten können in einem normativen Kontext einen „physikalistischen“ Fairnessbegriff begründen.

Diese beiden möglichen empirischen Schülertheorien, beide machen grundsätzlich Aussagen über empirische Referenzobjekte vor normativen Fragestellungen, haben ähnliche epistemologische Grundlagen wie die entsprechenden historischen Theorien,

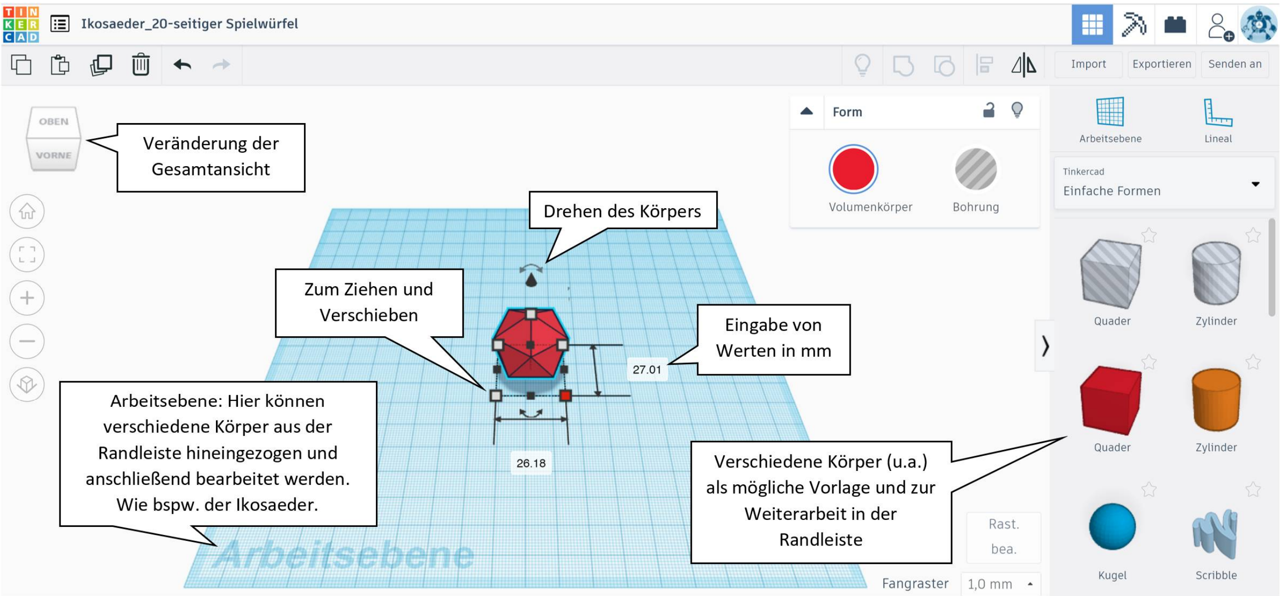


Abb. 3: Arbeitsoberfläche des CAD-Programms Tinkercad™

die wir in Abschnitt 2.2 beschrieben haben. Wir werden sehen, dass sie im Unterricht auch zu ähnlichen Problemen führen.

Betonen möchten wir noch einmal die verschiedenen Bedeutungen des Begriffs „Wahrscheinlichkeit“ auf der Schulbuchseite. Es ist aus geometrisch-kombinatorischer Sicht angemessen, die Wahrscheinlichkeit für die beiden Seiten der Münze (C, vgl. Abb. 2) mit 1/2 und 1/2 festzulegen – ohne zu experimentieren. Würden tatsächlich relative Häufigkeiten für das Beispiel „Münzwurf“ in realen Zufallsexperimenten ermittelt, so wäre die Wahrscheinlichkeit hoch, dass sich mit Blick auf die durchgeführten Testreihen eben keine Gleichverteilung ergibt. Ebenso würden sich diese Werte bei steigender Versuchsanzahl ständig verändern. Damit wird der Wahrscheinlichkeitsbegriff hier also bewusst zunächst als ein theoretischer Begriff in einer empirischen Theorie eingeführt, d. h. er erhält seine Bedeutung erst innerhalb selbiger durch Definition. Dieses Problem thematisiert das Schulbuch nicht.

Insgesamt liegt es aber damit nahe, dass auf diese Weise zwei verschiedene Begriffe von Wahrscheinlichkeit vermittelt werden, die beide im Sinne der jeweiligen empirischen Theorie als theoretische zu beschreiben sind; in (a) als „Setzung“ mit Blick auf geometrisch-kombinatorische Aspekte, begründet durch Symmetrieüberlegungen und in (b) als „Schätzwert“ auf Grund vielfach ausgeführter Zufallsexperimente.

Hierzu passt, dass auch der Begriff des „Experimentes“ bzw. des „Experimentierens“ unterschiedlich verwendet wird. So ist ein Laplace-Experiment ein Experiment, bei dem eigentlich gar nicht (zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit) experimentiert werden soll, sondern durch Setzung eine Wahrscheinlichkeit in einer empirischen Theorie festgelegt werden soll. Nur bei einem begründeten Verdacht zur Annahme (C, vgl. Abb. 2), dass Ergebnisse nicht gleich wahrscheinlich sind, „muss [tatsächlich] experimentiert“ und schließlich geschätzt werden (B & D, vgl. Abb. 2), womit wiederum auf einen (anderen), aber ebenso theoretischen Wahrscheinlichkeitsbegriff verwiesen wird.

In diesem Abschnitt wird die Schulbuchseite mit Blick auf verschiedene Auffassungen (Bedeutungen) vom Wahrscheinlichkeitsbegriff diskutiert. Auf der Schulbuchseite wird dabei auch das „unmögliche Ereignis“ (vgl. Abb. 2) erwähnt. Die Frage, welchen Status ein unmögliches Ereignis hat, ist eine Detailfrage, die für den Leser konkret an der Beschreibung der Schülerdiskussionen verdeutlicht wird.

Dass diese Probleme für Schüler*innen zu kognitiven Konflikten an Schnittstellen von „Realität“ und „Mathematik“ führen können (wie schon in der Geschichte der Mathematik, vgl. 2.1), erscheint wenig überraschend. Diesbezügliche Aushandlungsprozesse der Schüler*innen dazu bilden den zentralen Ausgangspunkt und Beobachtungsgegenstand des betrachteten Fallbeispiels (vgl. 3.).

Nachfolgend skizzieren wir zunächst die wichtigsten Funktionen der Programmoberfläche des Designprogrammes für 3D-Druckobjekte Tinkercad™, welches von den Schüler*innen in Vorbereitung der in 3. folgenden analysierten Szenen verwendet wurde um manipulierte Spielwürfel zu erstellen, bzw. in den untenstehenden Transkripten, in den Äußerungen der betrachteten Schüler*innen immer wieder auftaucht. Darüber hinaus sind einige Funktionen des Programmes (vgl. Abb. 3)[iii] entscheidend für eine angemessene Einschätzung der Analyse.

2.4 CAD-Programm: Tinkercad™

Das CAD-Programm Tinkercad™ gehört zu den Direkt-Modellierungsprogrammen (Dilling & Witzke, 2019), da hier geometrische Körper auf einer Arbeitsebene (vgl. Abb. 3) verschoben und durch Ziehen einzelner Elemente (Flächen, Pfeile) direkt verändert werden können. Das ermöglicht einen intuitiven und schnellen Zugang für ein gerade anfängliches Arbeiten mit CAD-Software im Unterricht. Aus einer Randleiste des Programms Tinkercad™ können vorgefertigte (geometrische) Körper ausgewählt werden, die dann zur Erstellung von 3D-Druck-Modellen genutzt werden können. Diese regelmäßigen geometrischen Körper (wie bspw. auch ein Ikosaeder), die auf die Arbeitsebene von Tinkercad™ gezogen werden, können in Größe und Lage leicht durch Ziehen verändert werden. Auch die präzise Veränderung von Längen (in mm) ist möglich. Gleichzeitig kann der geometrische Körper auch an Pfeilen um die x-, y-, oder z-Achse gedreht werden (vgl. Abb. 3).

3. Fallbeispiel in empirischen Kontexten

3.1 Wahrscheinlichkeit im Beispiel manipulierte Spielwürfel

Im Rahmen einer Unterrichtseinheit, die sich zeitlich an die Thematisierung der oben diskutierten Schulbuchseite anschloss, hatten die 22 Schüler*innen der untersuchten 8. Klasse einer Sekundarschule den Auftrag, in Schülertandems, innerhalb einer Spielsituation „The evil ONE“ (vgl. für die exakte Spielanleitung Abb. 5) jeweils einen Spielwürfel so zu entwickeln (bzw. zu manipulieren), dass er die Gewinnchance im Spiel erhöhen würde. Die Unterrichtseinheit „The evil ONE“ umfasste 5 Mathematikstunden (jeweils 60min pro Unterrichtsstunde) in einem Zeitraum von ca. 3 Wochen. Als Equipment standen den Schüler*innen dazu schuleigene Laptops mit WLAN-Zugang (für das webbasierte Programm Tinkercad™) sowie drei 3D-Drucker zur Verfügung. Weiterhin konnten die Schüler*innen der Klasse bereits auf einige Erfahrungswerte mit der 3D-Druck-Technologie zurückgreifen (für detailliertere Informationen zum Erhebungskontext, siehe Pielsticker, 2020). Die Problemstellung war demnach im Designen und Drucken von Würfeln gegeben, für welche die Wahrscheinlichkeit die Augenzahl 1 zu würfeln möglichst gering ausfallen sollte.[iv] Mithilfe der 3D-Druck-Technologie konnten die Schülertandems zunächst im Rahmen der Möglichkeiten der Designsoftware einen hinsichtlich Form, Bezeichnung und Gewichtsverteilung angepassten Spielwürfel mithilfe des CAD-Programms Tinkercad™ entwickeln und anschließend mit dem 3D-Drucker herstellen (bspw. eine Verlagerung des Schwerpunktes durch eine innere Verstärkung einer Würfelwand oder durch das Einfügen einer gefüllten Pyramide im Inneren eines Würfels). Auf diese Weise entstand eine Vielzahl unterschiedlich manipulierter Spielwürfel (vgl. Abb. 4).

Den Abschluss der Unterrichtseinheit „The evil ONE“ bildete die Aufgabe „Such den Superwürfel“. Dabei galt es für die Schülertandems und abschließend die Klasse als Ganze, den „besten“ Spielwürfel (im Sinne des Gewinnausgangs des Spiels) zu küren. Dabei galt es den normativen Aspekt zu berücksichtigen, dass die Manipulation nicht zu auffällig sein solle. Dies mag erklären, dass beispielsweise keine der Schüler*innen einen Würfel ohne „1“ konstruierten. Nachbefragungen ergaben, dass dieser dann „offensichtlich“ nicht als „echter“ Spielwürfel gegolten hätte. Hieran ließe sich thematisieren, dass der Begriff des unmöglichen Ereignisses für Schüler*innen eine besondere erkenntnistheoretische Herausforderung in der Wahrscheinlichkeitsrechnung darstellt (Pielsticker, 2020).

Mit Blick auf die ganze Einheit konnten wir beobachten, wie sich im Folgenden zeigt, dass die unterschiedlich manipulierten Spielwürfel (vgl. Abb. 4) substanzielle inhaltliche Aushandlungsprozesse und Bedeutungskonstruktionen in Bezug auf den Wahrscheinlichkeitsbegriff unter den Schüler*innen anregten.

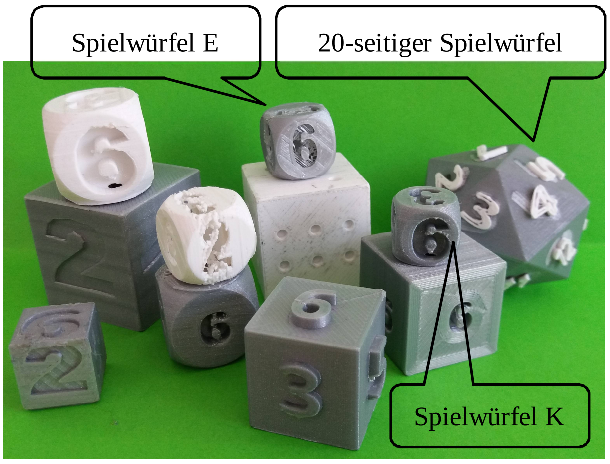
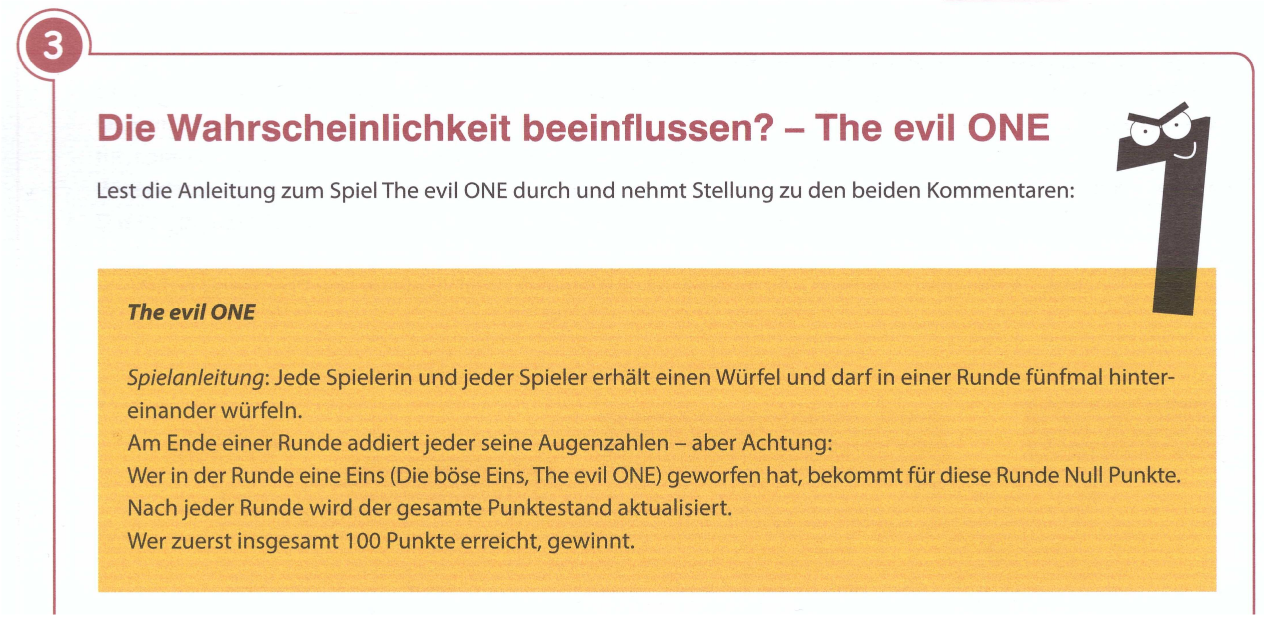


Abb. 4: Auswahl „manipulierter“ Spielwürfel der untersuchten 8. Klasse (Pielsticker, 2020, S. 358)

Besonders diskutiert wurde unter den betrachteten Schüler*innen ein 20-seitiger Spielwürfel (vgl. Abb. 4), der im Rahmen der Unterrichtseinheit von einem Schülertandem erstellt worden war. Zwei Schülertandems waren führend bei dieser Diskussion, die im regulären Mathematikunterricht stattfand: Das Schülertandem bestehend aus Kim und Tom und das Schülertandem Jan und Chris (Namen geändert). Wir konnten in der Situation beobachten, wie beide Schülertandems in ihrer Diskussion über den 20-seitigen Würfel dem Begriff der „Wahrscheinlichkeit“ innerhalb ihrer jeweiligen empirischen Theorien eine Bedeutung zuwiesen.


3

Die Wahrscheinlichkeit beeinflussen? – The evil ONE

Lest die Anleitung zum Spiel The evil ONE durch und nehmt Stellung zu den beiden Kommentaren:

The evil ONE

Spielanleitung: Jede Spielerin und jeder Spieler erhält einen Würfel und darf in einer Runde fünfmal hintereinander würfeln.
Am Ende einer Runde addiert jeder seine Augenzahlen – aber Achtung:
Wer in der Runde eine Eins (Die böse Eins, The evil ONE) geworfen hat, bekommt für diese Runde Null Punkte.
Nach jeder Runde wird der gesamte Punktestand aktualisiert.
Wer zuerst insgesamt 100 Punkte erreicht, gewinnt.

Abb. 5: Spiel „The evil One" (Pielsticker, 2019, S. 6)

Grundlage der folgenden Analyse sind Transkripte (Transkriptionsregeln nach Meyer, 2010) von zuvor videographierten Unterrichtssituationen und Leitfadeninterviews mit den Schülertandems. In der beschriebenen Einheit wurde jede Unterrichtsstunde videographiert und nach jeder Unterrichtsstunde ein Leitfadeninterview mit den Schülertandems geführt. Wie oben bereits erwähnt, waren zwei Schülertandems führend bei der Diskussion um den (verzerrten – darauf werden in 3.1.1, (3) eingehen) 20-seitiger Spielwürfel (vgl. Abb. 4) und für unsere weitere Analyse.

Wir werden in diesem Zusammenhang im Sinne des in 2.3.2 beschriebenen potenziellen Deutungskonfliktes einen besonderen Fokus darauf richten, was die Schüler unter „gleichwahrscheinlich“ verstehen.

Dabei könnten für die betrachteten Schüler die folgenden Fragen im Vordergrund stehen:

- Welche Symmetrieeigenschaften erfüllt der 20-seitige Würfel und handelt es sich um ein Laplace-Experiment?
- Wie kann man mit Hilfe relativer Häufigkeiten Wahrscheinlichkeiten bestimmen?

3.1.1 Fallgeschichte: Schülertandem Kim und Tom

Im nachfolgenden Transkriptausschnitt argumentieren Kim und Tom – die individuellen manipulierten Würfel waren zu diesem Zeitpunkt bereits erstellt – für einen Ausschluss des 20-seitigen Spielwürfels für die Kür des „besten“ Würfels. Dies geschieht vor dem Hintergrund, dass sie im Gegensatz zum Ersteller des Würfels, dem Schüler Chris, in dem der Tab. 2 vorangegangenen Unterrichtsgespräch annehmen und vertreten, die Verteilung der Ergebnisse „Augensumme“ wären beim vorliegenden 20-seitigen Würfel nicht gleichverteilt.

Zunächst verdeutlichen wir im Folgenden Kims Argumentation mit einem Transkriptauszug aus einem Interview das mit dem Schüler nach der Mathematikstunde, in der sie die manipulierten Spielwürfel systematisch testen konnten, geführt wurde.

Min.	Schüler	Text
12:05	Kim	Das wo wir den Würfel, ich und Tom, haben ja gesagt, dass man erkennt, dass man die Eins nicht würfeln kann, weil dieser Würfel nicht ist wie die z. B. der (nimmt einen sechsseitigen manipulierten Spielwürfel „K“ in die Hand. vgl. Abb. 4) und der (nimmt noch einen weiteren Spielwürfel „E“, vgl. Abb. 4 in die Hand). Die sind ja auf allen Seiten gleich. Es ergibt immer sieben und hier (nimmt den 20-seitigen Spielwürfel in die Hand) ist, finde ich keine Struktur drin. Und die Eins ist auch noch auf einer schlechteren Position, so dass man sie nicht richtig würfeln kann.

Tab. 2: Transkriptausschnitt von Kim zum 20-seitigen Spielwürfel aus dem Interview mit dem Schüler.

Ausschlaggebend ist in Kims Argumentation, dass die Eins mit dem 20-seitigen Spielwürfel überhaupt nicht gewürfelt werden könne. Er führt in diesem Zusammenhang Argumente an, die gegen die Annahme einer Laplace-Verteilung angesehen werden (vgl. 2.3.2). In seinen Augen kann die Eins bei diesem 20-seitigen Spielwürfel nicht gewürfelt werden, da „die Eins […] auch noch auf einer schlechteren Position“ (Tab. 2, 12:05) ist. Dieser Eindruck wird im Video durch Gesten verstärkt, die darauf hinweisen, dass er den vorliegenden Würfel hinsichtlich seines Schwerpunktes als verzogen ansieht – darauf werden wir später noch genauer eingehen. Zusätzlich beobachtet er, dass „keine Struktur drin ist“ (Tab. 2, 12:05), und der Würfel daher ungeeignet für das Spiel sei. Diese beiden Sachverhalte sind für Kim wesentliche Indizien dafür, dass man nicht davon ausgehen kann, dass es sich um einen im Sinne des Spiels bzw. Arbeitsauftrages „zulässigen“ Würfel handelt, weil man beispielsweise die Manipulation direkt erkennen würde, da die Eins nie fiele (vgl. Tab. 2). Dem Schulbuch folgend müsste man dann also tatsächlich zunächst experimentieren und einen Schätzwert bestimmen, um im Folgenden Aussagen über Wahrscheinlichkeiten machen zu können. Kims Aussagen bereiten dabei, im Gegensatz zu Chris, eher nicht auf eine Laplace-Wahrscheinlichkeit, sondern eher auf einen Schätzwert über relative Häufigkeiten vor. Dabei fungiert der 20-seitige Spielwürfel während der gesamten Argumentationslinie als wesentliches empirisches Referenzobjekt. Der Schüler Kim bezieht sich dabei auf unterschiedliche mögliche Aspekte:

(1) Kim kontrastiert den vorliegenden 20-seitigen Würfel mit der Bemerkung „Die sind ja auf allen Seiten gleich.“ (Tab. 2, 12:05) an einem sechsseitigen Spielwürfel und bezieht sich dabei wohl auf die symmetrisch verteilten bzw. ausbalancierten Seitenflächen bei einem üblichen sechsseitigen Würfel. Dieser ist für ihn offensichtlich ein paradigmatisches Beispiel, das hier zur Argumentation herangezogen wird. Der vorliegende 20-seitige Würfel ist aber aus seiner Sicht in wesentlichen strukturellen empirischen Merkmalen nicht hinreichend ähnlich – man würde eine Manipulation aus seiner Sicht unmittelbar erkennen. Mit Blick auf einen möglichen, sich daran anschließenden Wahrscheinlichkeitsbegriff, wäre hier der zuvor in (b) geschilderte zu vermuten. Es würde aus seiner Sicht wohl eines experimentellen Zuganges bedürfen, um belastbare Aussagen zur Wahrscheinlichkeit machen zu können.

(2) Ein weiterer Aspekt kann in Kims Formulierung „Es ergibt immer sieben.“ (Tab. 2, 12:05) gesehen werden. Kim scheint hier eine empirische Beobachtung am Spielwürfel miteinzubeziehen. Schauen wir auf ein Würfelnetz (vgl. Abb. 6) eines paradigmatischen sechsseitigen Spielwürfels, so können wir erkennen, dass die gegenüberliegenden Ziffern [(5 + 2), (3 + 4) und (6 + 1)] in der Summe jeweils sieben ergeben.

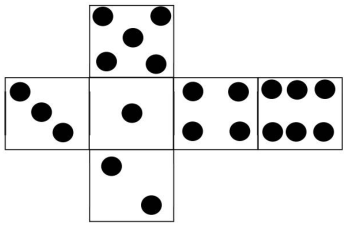


Abb. 6: Würfelnetz

Dieses Muster, bzw. eine solche (mathematisch) arithmetische Grundstruktur kann Kim für den 20-seitigen Spielwürfel nicht erkennen und kommentiert „und hier (nimmt den 20-seitigen Spielwürfel in die Hand) ist, finde ich, keine Struktur drin“ (Tab. 2, 12:05). Das Muster (vgl. Abb. 6) – „Es ergibt immer sieben.“ (Tab. 2, 12:05), auf das Kim referenziert, ist dabei wohl auf selbstständige empirische Beobachtungen zurückzuführen, da es nach Aussage der Lehrkraft, nicht zuvor im Unterricht thematisiert wurde.

(3) Mit seiner Formulierung „und hier (nimmt den 20-seitigen Spielwürfel in die Hand) ist, finde ich, keine Struktur drin. Und die Eins ist auch noch auf einer schlechten Position“ zielt Kim wohl auf zwei Aspekte: Zum einen das Argument aus (2), zum andern, dass der 20-seitige Spielwürfel kein regelmäßiges Ikosaeder ist und der Schwerpunkt (auf Grund eines unsauberen Drucks) verschoben ist. Dieser Aspekt ist dem Schüler eminent wichtig und lässt ihn daran zweifeln, ob der Würfel für das Spiel überhaupt zulässig bzw. geeignet wäre. Es ist davon auszugehen, dass er (im Gegensatz zu Chris) an gleichwahrscheinlichen Ergebnissen „Augensumme“ im Sinne einer apriori angenommenen Laplace-Verteilung für den vorliegenden 20-seitigen Spielwürfel zweifeln würde. Für die Argumentation stellt Kim schließlich den 20-seitigen Spielwürfel auf die Tischplatte und zwar so, dass das Ergebnis „1“ gezeigt wird (vgl. Abb. 7), und schließt auf Grund der Beschaffenheit des Würfels, dass dieses auf

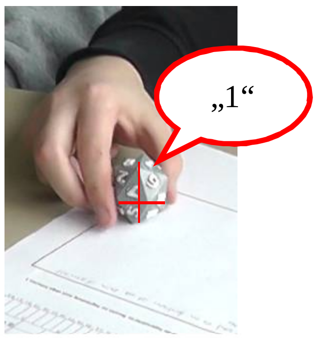


Abb. 7: 20-seitiger Spielwürfel auf der Tischplatte

„normalem“ Wege nicht erscheinen kann. Also die Eins gar nicht gewürfelt werden kann.

In dem Aspekt (4), den wir für Kim beschreiben möchten, bezieht er im Folgenden zudem seine Ansichten hinsichtlich eines „unmöglichen Ereignisses“ mit ein. Diese setzt er zu seinen bisherigen Überlegungen zum Ergebnis „1“ in Beziehung.

(4) Im weiteren Unterrichtsverlauf stützt Kim seine Vermutung, dass die Eins mit dem vorliegenden 20-seitigen Würfel nicht gewürfelt werden kann mit Argumenten, die wohl auf seine Würfelerfahrung in (paradigmatischen) Zufallsversuchen, wie solche mit Spielwürfeln, Münzen etc. zurückzuführen sind. Seine Formulierung „so dass man sie nicht *richtig* (Hervorhebung durch Autoren*innen) würfeln kann“ (Tab. 2, 12:05) könnte auf diesen Aspekt verweisen. In der untenstehenden Bildfolge (Abb. 8) sieht man, wie er versucht den 20-seitigen Spielwürfel mit Absicht so zu würfeln, dass die 1 fällt. Er stellt den Spielwürfel dazu (Bild 1) auf die Tischoberfläche, so dass dieser die „1“ zeigt, dann nimmt er den Spielwürfel in die Hand (Bild 2), platziert diesen gezielt in seiner Hand und versucht diesen schließlich (Bild 3) aus der Hand rollen zu lassen, damit die „1“ fällt. Dies gelingt ihm jedoch trotz vielfältiger Versuche nicht.

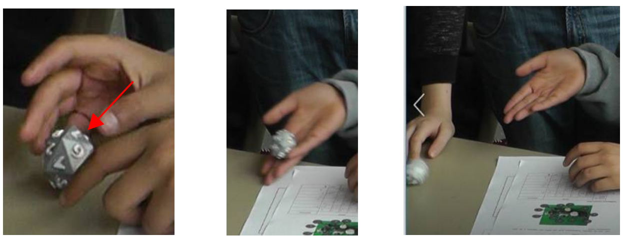


Abb. 8: Kims Würfeln auf *bestimmte* Weise

Schauen wir nun noch einmal auf die Schulbuchseite (vgl. Abb. 2, unten) fällt auf, dass am Seitenende ein „unmögliches Ergebnis“ thematisiert wird, welches „nicht eintreten kann“ und die „Wahrscheinlichkeit 0“ besitzt. Am Seitenrand (vgl. Abb. 2, links unten) wird dazu auch ein paradigmatisches Urnenbeispiel gegeben. Es wird eine Urne mit 3 weißen Kugeln dargestellt, gerahmt durch den Hinweis P(weiße Kugel)=1 und P(rote Kugel)=0. Dabei sei bemerkt, dass diese Darstellung zu einem Zufallsexperiment verschiedene „unmögliche“ oder „sichere“ Ergebnisse zuließe. Beispielsweise in einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum, das Werfen eines herkömmlichen Spielwürfels.

Als Ergebnisse nehme man die Zahlen von 1 bis 8 (!) und ordne den Ausfällen 7 und 8 die Wahrscheinlichkeit Null zu. Dann wären nach der Definition des Schulbuchs die Ereignisse {7} und {8} „unmöglich“ und die Ereignisse {1, …, 6} und {1, …, 7} sicher. Dazu sei noch konstatiert, dass die Definition von einem „unmöglichen Ereignis“ im Schulbuch inhaltlich nicht korrekt ist. So haben beispielsweise Ergebnisse der Art „das Glücksrad bleibt auf einer ganz bestimmten Stelle stehen“ die Wahrscheinlichkeit 0, aber alle eintretenden Ergebnisse sind genau von dieser Art.

Gemäß der Schulbuchseite ist ein unmögliches Ergebnis also ein solches, welches die Wahrscheinlichkeit 0 besitzt. Wahrscheinlichkeit 0 bedeutet „nicht möglich“. Problematisch wird diese Definition, wenn man Zufallsexperimente betrachtet, die keine Laplace-Experimente sind, wie etwa das Werfen eines verzogenen Würfels in unserem Beispiel. Um eine Wahrscheinlichkeit 0 zu bestimmen, müsste man das Gesetz der großen Zahlen heranziehen und dessen Problematik liegt gerade darin, dass man Wahrscheinlichkeiten, die man durch relative Häufigkeiten zu ermitteln versucht, eben nur ungenau schätzen kann. Dadurch verliert der Begriff „unmöglich“ im obigen Sinne (kann niemals eintreten) seine empirische Nachweisbarkeit. Der Begriff „unmögliches Ereignis“ wird somit ein theoretischer Begriff in einer empirischen Wahrscheinlichkeitstheorie.

Min.	Schüler	Text
		[…]
13:25	Kim	[…] Wir haben ja auch gewürfelt, bei uns wurde die Drei am meisten gewürfelt, die haben wir irgendetwas mit 20, 30-mal […] gewürfelt. Da haben wir auch noch die Siebzehn häufig gewürfelt, […] Und es kam nie die Eins, von 100 Würfen. Und wenn man jetzt mal alle Würfel nimmt, ich find z. B. der (nimmt einen weiteren Spielwürfel nämlich „E“ in die Hand, vgl. Abb. 4) wurde richtig gut gemacht und wenn man den, […] 100-mal würfelt, würfelt der (der Spielwürfel) auch die Eins, auch mal. Er ist ja gezinkt, er funktioniert, aber es kommt auch ein paarmal die Eins. Hier (nimmt wieder den 20-seitiger Spielwürfel in die Hand) würfelt man 100-mal und sie kommt nicht einmal. Vielleicht muss man das mehrmals machen, vielleicht kommt ja dann noch einmal die Eins. Bei uns ist die Eins nicht einmal gekommen.

Tab. 3: Transkriptausschnitt zur Argumentation mithilfe des Zufallsversuchs aus dem Interview mit Kim (Weiterführung des obigen Transkriptes, Tab. 2).

Der Schüler Kim jedenfalls ringt um Argumente für und wider der Möglichkeit des Ergebnisses „1“ im Umgang mit dem 20-seitigen Spielwürfel. Die Ziffer 1 befindet sich zwar auf diesem 20-seitigen Spielwürfel, ist also entsprechend der Definition des Schulbuchs kein „unmögliches Ergebnis“ (so wie eine Ziffer 7 bei einem herkömmlichen sechsseitigen Spielwürfel), jedoch stellt sich der Schüler Kim trotzdem die Frage, ob das Ergebnis „1“ überhaupt ein mögliches Ergebnis sein kann und bringt diese Überlegungen mit in die Diskussion ein.

Im Kontext eines weiteren Zufallsversuchs, den die Schüler Kim und Tom als Argumentation gegen die Kür des 20-seitigen Würfels als „bester“ Würfel anführen möchten, kann beobachtet werden, wie sich die Schüler mit empirischen (mathematischen) Gegenständen auseinandersetzen. Im nachfolgenden Transkriptauszug stellt Kim dar, wie er und Tom vorgegangen sind.

In dem Transkriptausschnitt aus Tab. 3 bezieht sich Kim offensichtlich insbesondere auf frequentistische Argumente aus tatsächlichen in der Empirie durchgeführten Testreihen (vgl. Abb. 9). Es wird auf einen Zufallsversuch Bezug genommen, in dem die beiden Schüler den 20-seitigen Spielwürfel 100-mal geworfen und ihre Ergebnisse in einer Tabelle festgehalten haben. In Abb. 9 ist dargestellt, dass die beiden Schüler dazu eine Strichliste über ihre 100 Würfe mit dem 20-seitigen Spielwürfel geführt haben. In ihren Mitschriften darunter (auch noch einmal zur besseren Lesbarkeit in den Sprechblasen notiert) heißt es zunächst, dass die „3“ die beste Chance hat, da sie „die beste Position hat“. Dies könnte darauf verweisen, dass Kim hier die Symmetrie-/Schwerpunkteigenschaften des Würfels genau in den Blick nimmt (vgl. Vorbemerkungen zu geometrisch-kombinatorischer Theorie, S. 8) und mit den im Experiment intuitiv ermittelten relativen Häufigkeiten in Verbindung bringt (vgl. Vorläufervorstellungen zu „Schätzwert“ – relative Häufigkeiten, S. 8). Des Weiteren bemerkt Kim, quasi als „Beweis“ für seine These, dass der Würfel ungeeignet im Sinne der Aufgabenstellung sei, dass die „1“ bei 100 Würfen kein Mal fällt. Im Gegensatz dazu bleibt unkommentiert, dass der 20-seitige Würfel in ihrem Zufallsversuch ebenfalls nicht das Ergebnis „2“, das Ergebnis „12“, „13“ und das Ergebnis „14“ zeigt.

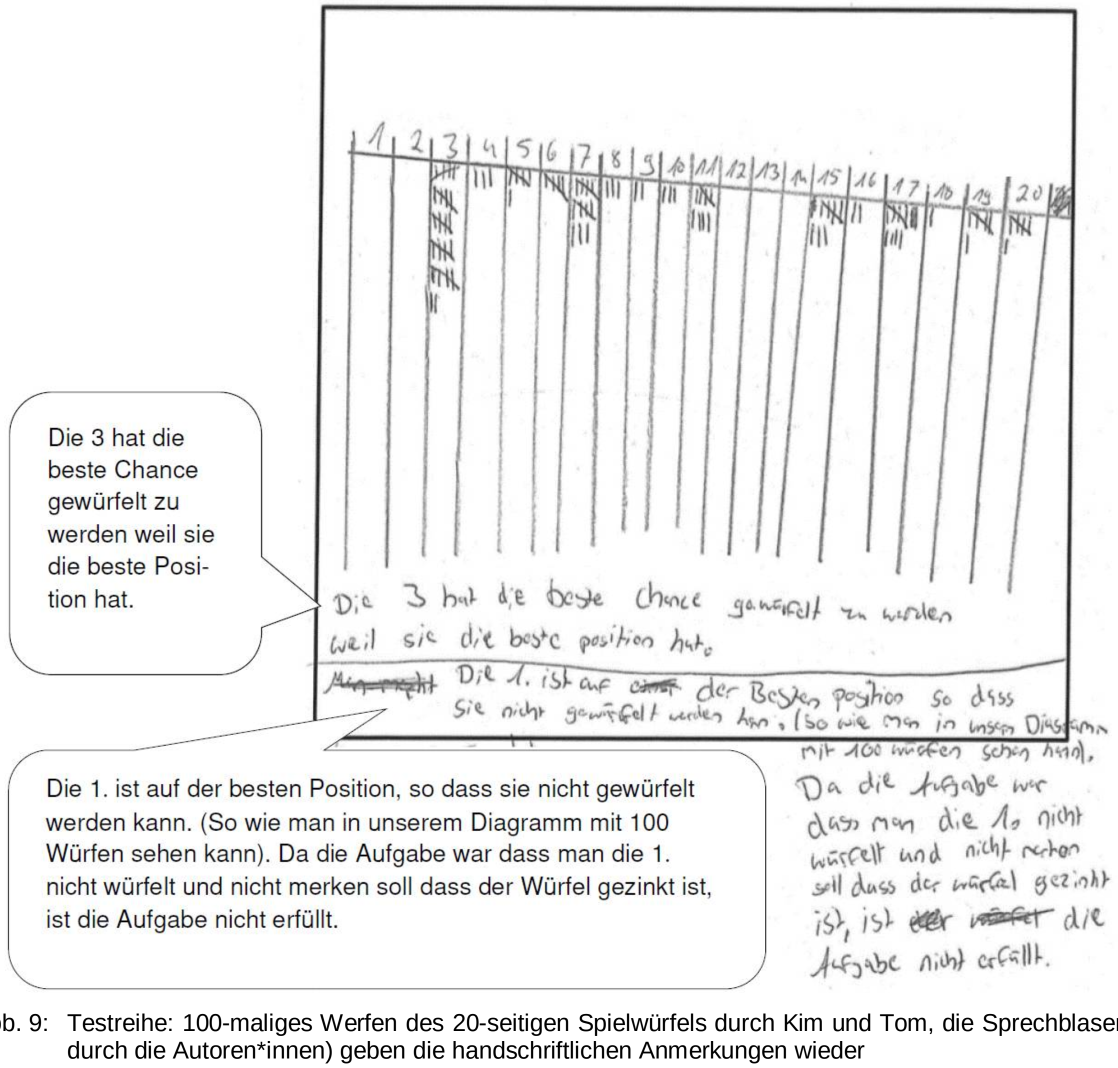


Abb. 9: Testreihe: 100-maliges Werfen des 20-seitigen Spielwürfels durch Kim und Tom, die Sprechblasen (ergänzt durch die Autoren*innen) geben die handschriftlichen Anmerkungen wieder

Kim bezieht also auf prominente Art und Weise Überlegungen zu absoluten und relativen Häufigkeiten in seine Erläuterungen ein. Erneut zeigt sich klar die Bedeutungsdimension der ontologischen Bindung des Wissens an empirische Objekte, mit denen im Unterricht gearbeitet wurde. Wir können dabei beobachten, dass Kim sich trotz seiner auf Grundlage der empirischen Beobachtung entwickelten Argumente nicht sicher ist, ob es tatsächlich ausgeschlossen ist, dass die „1“ bei dem vorliegenden 20-seitigen Spielwürfel tatsächlich fallen kann. Kim erscheint jedenfalls nicht vollends überzeugt, dass die 1 beim 20-seitigen Spielwürfel nicht geworfen werden kann (vgl. dazu die Aspekte (1)–(4) dieses Abschnitts) bzw. in die Zukunft geblickt jemals fallen wird. Denn die Ziffer 1 ist ja tatsächlich, anders als die rote Kugel im paradigmatischen Urnenbeispiel des Schulbuches, auf dem 20-seitigen Spielwürfel vorhanden. Damit ist das Ergebnis „1“ in der Empirie (auf dem 20-seitigen Spielwürfel) existent und in diesem Sinne wohl prinzipiell für ihn zumindest möglich.

Kims Äußerungen zum Ergebnis „1“ („vielleicht kommt ja dann noch einmal die Eins. Bei uns ist die Eins nicht einmal gekommen.“, Tab. 3, 13:25) weisen darauf hin, dass er den 20-seitigen Spielwürfel mit Blick auf dessen empirische Eigenschaften nicht im Sinne der Schulbuchdefinition für ein „Laplace-Experiment“ verwenden würde, sondern „Schätzwerte“ relativer Häufigkeiten in den Blick nimmt.

3.1.2 Fallgeschichte: Schülertandem Jan und Chris

Die beiden Schüler Jan und Chris sind im Gegensatz zu den vorher thematisierten Schülern Befürworter der Zulassung des 20-seitigen Spielwürfels für das Spiel „The evil ONE“. Auch für sie möchten wir im Folgenden an ausgewählten Transkriptausschnitten thematisieren, wie wir mit Hilfe der Terminologie empirischer Theorien ihre Auseinandersetzung mit dem empirischen Referenzobjekt des 20-seitigen Spielwürfels beschreiben können.

Jan und Chris behaupten im Gegensatz zu Kim und Tom, dass demselben 20-seitigen Würfel eine Gleichverteilung zugeschrieben werden kann bzw. sollte. Aus ihrer Sicht ist es unstrittig, dass er sich für Laplace-Experimente eignen würde („das ist eine Chance von Eins zu Zwanzig“, Tab. 4, 45:25). Wie wir im Folgenden nahelegen wollen, argumentieren Jan und Chris dabei nahe am Schulbuch (vgl. Abb. 2).

Im nachfolgenden Transkriptausschnitt aus einer Unterrichtssituation erwidert Chris auf Kims Hinweis, dass die Augenzahl 1 nicht gewürfelt werden kann „Nee, man kann die Eins würfeln“ (Tab. 4, 45:25) mit der wohl geometrisch-kombinatorischen Begründung (vgl. (a) S. 9), dass das „eine Chance von Eins zu Zwanzig“ (Tab. 4, 45:25) ist.

Min.	Schüler	Text
45:10	Kim	Ja, aber man merkt doch, dass der gezinkt ist, weil man die Eins nicht würfeln kann und das steht ja auch als Kriterium in der Aufgabe.
45:25	Chris	Nee, man kann die 1 würfeln, das ist eine Chance von Eins zu Zwanzig.
[…]		
45:45	Kim	Hä, die Seiten sind nicht gleichmäßig verteilt und die Zahlen wurden ..
[…]		

Tab. 4: Transkriptausschnitt aus dem Unterricht, zur Argumentation, dass die Symmetrie der Objekte vorausgesetzt wird.

Es ist zu vermuten, dass Chris im Sinne des Schulbuchs den vorliegenden gedruckten, offensichtlich verzogenen Würfel, als Referenzobjekt für einen gleichverteilten Würfel ansieht und damit rein kombinatorisch eine Wahrscheinlichkeit – „von Eins zu Zwanzig“ (Tab. 4, 45:25) annehmen darf. Gestützt wird diese Interpretation unsererseits durch seine Äußerung in Tab. 5, 46:00:

Min.	Schüler	Text
46:00	Jan	Ja sicher, das war eine fertige Konstruktion, die wir aus Tinkercad™ herausgezogen haben.
46:10	Tom	(Stellt den 20-seitigen Spielwürfel vor sich auf den Tisch, so dass die Augenzahl 1 zu ihm zeigt.) Man kann die nicht würfeln, die Eins müsste so (zeigt auf den 20-seitigen Spielwürfel).
46:20	Kim	Ja guck mal, die Eins ist hier (Kim nimmt den 20- seitigen Spielwürfel in die Hand und hält diesen vor Jan), wie willst du so eine Eins würfeln? Ja geht ja nicht.
[…]		
46:55	Kim	Guck, wenn die Eins, wo ist die Eins, das ist doch die Eins, ne. Wie willst du so eine Eins würfeln? Dann muss man ja. (Wirft den Spielwürfel in einer bestimmen Weise mit Verdrehen seiner Hand).
47:10	Jan	(Stellt den 20-seitigen Spielwürfel L auch noch einmal ähnlich wie der Schüler Tom auf die Tischoberfläche.) Das kann theoretisch passieren. Theoretisch kann es passieren.
[…]		

Tab. 5: Transkriptausschnitt aus dem Unterricht, Jans Begründung mithilfe des CAD-Programms Tinkercad™.

Jan argumentiert auf die Kritik an der Laplace-Eigenschaft des 20-seitigen Würfels durch Kim tatsächlich mit dem CAD-Programm Tinkercad™ (vgl. Abb. 3) – „Ja sicher, das war eine fertige Konstruktion, die wir aus Tinkercad™ herausgezogen haben“ (Tab. 5, 46:00). Wenn Jan von „eine fertige Konstruktion“ (Tab. 5, 46:00) spricht, meint er wohl einen praktisch idealen geometrischen Körper, und zwar einen Ikosaeder, der aus der Randleiste von Tinkercad™ ausgewählt, auf der Arbeitsebene des Programms platziert (vgl. Abb. 3) und im Anschluss bearbeitet wurde (vgl. 2.4). Es ist zu vermuten, dass Jan die paradigmatischen Beispiele des Mathematikunterrichts für Laplace-Experimente (Schulbuchseite, vgl. Abb. 2) wie Münzen oder Würfel auf den Ikosaeder überträgt. Auch diese zeigen in der Empirie natürlich nicht ideal gleichverteilte Seiten, werden im Buch aber verwendet, als würden sie darüber verfügen.

Dass der tatsächlich ausgedruckte Spielwürfel beispielsweise auf Grund der Fertigungstoleranzen des Druckers (abhängig beispielsweise durch die Breite des Druckkopfes, Geschwindigkeit etc.) verändert wurde, bezieht Jan nicht mit in seine Argumentation ein und bleibt bei seiner Meinung (Tab. 5, 47:10), obwohl Kim mehrmals auf das empirische Referenzobjekt des 20-seitigen Spielwürfels und die Beobachtungen daran verweist – „Ja guck mal“ oder „Guck“ (46:20 und 46:55, Tab. 5).

Interessant ist in diesem Zusammenhang, wie Jan die Behauptung von Kim entkräftet, dass die Eins nicht würfelbar sei („Wie willst Du so eine Eins würfeln?“, Tab. 5, 46:20 & 46:55 – gleich zweimal gesagt). Jan entgegnet, dass dies „theoretisch passieren kann“ (Tab. 5, 47:10). Wenn er damit meint, dass die Eins kein unmögliches Ereignis (im Sinne des Schulbuchs) ist, weil man nicht wissen kann, ob bei unbegrenzt vielen Versuchen nicht doch noch die Eins erscheint, dann weist dies in unserem Beschreibungsrahmen auf eine Theoretizität des Begriffs „unmögliches Ereignis“ hin, im Sinne von in der Empirie nicht auftretend: Es ist schlichtweg nicht empirisch überprüfbar.

Insgesamt ist zu bemerken, dass es im Sinne der Beschreibung kontextspezifischer empirischer Schülertheorien nicht verwundert, dass die Schüler nicht zu einem Konsens kommen. Während Jan und Chris den Würfel schulbuchkonform anhand der Beobachtung (virtueller) empirischer Eigenschaften einem Laplace-Experiment zuordnen und folglich gar nicht würfeln wollen bzw. müssen, liegt für Kim und Tom ein verzogener unstrukturierter gedruckter Würfel vor, dessen Wahrscheinlichkeitsverteilung über relative Häufigkeiten erschlossen werden muss. Die damit verbundenen Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der Augenzahlen sind aus ihrer Sicht, wenn denn der Würfel überhaupt als Zufallsartefakt zulässig ist, im Experiment zu klären. Die Schüler haben also auf Grundlage ihrer spezifischen Wahrnehmung des empirischen Sachverhaltes, vor dem Hintergrund ihres Vorwissens, unterschiedliche empirische Theorien entwickelt.

Hier kommt dann auch mit Blick auf die hinterliegende erkenntnistheoretische Dimension (vgl. 2.1), tatsächlich ein produktiver entdeckender Aushandlungsprozess zum Wahrscheinlichkeitsbegriff an seine Grenzen. Mit Bauersfeld (1985) wäre nun ein Metastandpunkt eines vermittelnden SEB notwendig. Diesen kann auf Grund der begrifflichen Komplexität des Wahrscheinlichkeitsbegriffs bzw. des Gesetzes der großen Zahlen nun nur die Lehrperson zur „Vermittlung“ anbieten.

3.2. Zusammenfassende Bemerkungen zu den empirischen Schülertheorien

In unserer Beschreibung handeln die Schüler Bedeutung mithilfe eines im Unterricht am Computer designten und ausgedruckten 3D-Druck-Objektes, dem empirischen Referenzobjektes zum Begriff 20-seitiger Spielwürfel, zur Wahrscheinlichkeitsrechnung aus.

Die Schülertandems Chris und Jan sowie Kim und Tom argumentieren beide am selben empirischen Objekt, kommen aber zu unterschiedlichen Interpretationen und damit unterschiedlichen empirischen Theorien über denselben Gegenstand: Zum einen auf der Basis der Annahme einer Gleichverteilung entsprechend des Schulbuchs (vgl. Abb. 2), vielleicht aufgrund von beobachteten Symmetrie-Eigenschaften des Würfels, zum anderen auf der Basis eines von der Normgestalt des Ikosaeders zu weit abweichenden 3D-gedrucken Objekts. Vor dem Hintergrund der nachgezeichneten Theorien sprechen die Schüler Kim und Tom und die Schüler Jan und Chris gewissermaßen *aneinander vorbei*.

4. Fazit und Ausblick

In der analytischen Beschreibung unseres Fallbeispiels wurde der Beschreibungsrahmen des strukturalistischen Theoriekonzeptes zur Anwendung gebracht, um vermitteltes (Schulbuch) und aktiviertes (Schülertranskripte) Wissen an Schnittstellen von Mathematik und Realität zu beschreiben. Die Begriffe paradigmatisches Beispiel, intendierte Anwendungen, (empirische) Referenzobjekte sowie die Dichotomie von theoretischen und nicht-theoretischen Begriffen erlauben eine differenzierte Beschreibung mit Blick auf die Hürden erkenntnistheoretischer Dimension, welche die Wahrscheinlichkeitstheorie mit Blick auf ihre historische Entwicklung vorhält.

Die Diskussion und Analyse ausgewählter Aussagen von Schüler*innen im empirischen Kontext der beschriebenen Unterrichtseinheit verdeutlicht, dass Lernen im Sinne des strukturalistischen Theoriekonzepts als ein Aufbau (bzw. Ausdifferenzierung) von empirischen Theorien über Phänomenbereiche und die Vernetzung selbiger beschrieben wird. Schüler*innen erwerben in diesem Sinne fortwährend neue empirische Theorien, um einen neuen Phänomenbereich zu erschließen. Wesentlich sind dabei Bedeutungszuweisungen im Zusammenhang theoretischer Begriffe wie Wahrscheinlichkeit, da diese bzw. deren Bedeutung, anders als alle anderen Begriffe in empirischen Theorien, nicht durch Referenzen zu empirischen Objekten geklärt werden können.

Die gemeinhin als herausfordernd empfundene Komplexität der Wahrscheinlichkeitsrechnung kann wohl teilweise mit der Komplexität des Wahrscheinlichkeitsbegriffs begründet werden. Durch Elementarisierung und die stoffliche Aufbereitung –insbesondere die kontextuelle Rahmung – im betrachteten Schulbuch (vgl. 2.3.2) erscheint die eigentliche Theoretizität insbesondere des Wahrscheinlichkeitsbegriffs nur implizit. Ein methodischer Grund dafür scheint zu sein, dass Lernende erfahrungsgemäß handelnd und nicht formal-axiomatisch in die Wahrscheinlichkeitsrechnung eingeführt werden.

Daraus ergibt sich, dass im realitätsbezogenen Unterricht zur Wahrscheinlichkeitstheorie gewisse epistemologische Herausforderungen, wie sie unsere Ausführungen zum epistemologischen Dreieck von H. Steinbring in Abschnitt 2.1 aufwerfen, in der Natur der Sache liegen und damit einer besonderen Aufmerksamkeit und Vor- bzw. Nachbereitung durch die Lehrperson im Unterricht bedürfen.

In der Bearbeitung der Aufgabenstellung „Such den Superwürfel" bahnen die beobachteten Schüler*innen anhand einer normativen Fragestellung dazu, ob der 20-seitige Würfel erlaubt sei, gewisse Vorstellungen zu Wahrscheinlichkeit in einem empirischen Kontext an. Dabei schimmern Hinweise für die, von uns mit Blick auf das Schulbuch rekonstruierten unterschiedlichen Theorien zu Wahrscheinlichkeiten (S. 8, (a) und (b)), durch. Wenig überraschend speisen sich die Argumentationslinien der Schüler*innen dabei überwiegend aus Überlegungen auf Grundlage empirischer Beobachtungen. In Zusammenhang, beispielsweise mit der in Abb. 9 durch die Schüler hergestellten Verbindung von „Chancen" (beispielsweise für das Würfeln der Augenzahl 3) und der „Position" (der Augenzahl auf dem Würfel), lassen sich erste Hinweise für einen möglichen Impuls zur Verbindung der genannten Theorien entdecken. Mit Blick auf die genannten epistemologischen Herausforderungen hinsichtlich der beiden Wahrscheinlichkeitsbegriffe bzw. ihres im empirischen Gesetz der großen Zahlen formulierten Zusammenhanges stößt hier aber sicherlich ein (selbst)entdeckendes Lernen an seine Grenzen.

Es ist anschließend an solche spannenden Aushandlungsprozesse des Mathematikunterrichtes also in der Verantwortung der Lehrkraft, die hier im Rahmen empirischer Theorien nachgezeichneten Argumentationen aufzugreifen und zusammenzuführen.

Um das aktivierte mathematische Wissens in empirischen Kontexten einer (insbesondere begrifflichen) Analyse zugänglich zu machen, erscheint uns das Konzept empirischer Theorien mit Blick auf dessen wissenschaftstheoretische Absicherung und Präzision (Balzer & Moulines, 2014) als sinnvoller Beitrag zur Bereicherung einer „wissenschaftsorientierten Richtung, die auf die Entwicklung mathematischer Theorien aus realen Kontexten gerichtet ist" (Kaiser et al., 2015, S. 361).

In dem Fallbeispiel zeigt sich, dass Fragen der Bedeutung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs für Schüler*innen eine zentrale Rolle spielen. Was heißt es, dass – wie es auf der betrachteten Schulbuchseite (vgl. Abb. 2) heißt – „die relativen Häufigkeiten eines Ereignisses sich bei einer großen Anzahl von Versuchen einem Wert, der Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses nähert"? Was bedeutet es, dass ein Ereignis „unmöglich" ist, also die Wahrscheinlichkeit Null besitzt? – An solchen semantischen Problemen handeln Schüler*innen ihre mathematischen Theorien über Zufallsphänomene aus.

Bedeutungsfragen kann man präzise im Rahmen der strukturalistischen Metatheorie analysieren und diskutieren. Die Differenzierung zwischen theoretischen und nicht-theoretischen Begriffen erlaubt es, wie in unserem Fallbeispiel gezeigt wurde, Probleme von Schüler*innen beim Erwerb mathematischer Begriffe zu beschreiben und Möglichkeiten eines Umgangs mit ihnen zu diskutieren.

Aus Schüler*innensicht, so müsste man verallgemeinernd sagen, ist das Verhältnis von Mathematik zur Realität kein sukzessives (man lernt erst Mathematik und dann kann man diese auf die Realität anwenden) sondern ein simultanes: Mathematik wird durch den Erwerb empirischer Theorien gelernt. Diese sind „bereichsspezifisch" und diese Bereiche können sowohl deskriptiv-empirisch als auch normativer Art sein, wie unser Fallbeispiel verdeutlicht.

Anmerkungen

[i] Der Begriff stammt von von Mises. Er bezeichnet damit die Phänomene, die er in seiner Theorie beschreiben und erklären kann, nämlich „Wiederholungsvorgänge“, die zwei Forderungen genügen, dem sog. Grenzwertaxiom und dem Regellosigkeitsaxiom.

[ii] Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass wir den Terminus „theoretisch“ in unserem Beitrag in der Regel als Eigenschaft von Begriffen verwenden: Wir sprechen von „theoretischen Begriffen“ im Sinne des Strukturalismus (vgl. Tab. 1).

[iii] Für weitere Informationen siehe auch: https://www.tinkercad.com/

[iv] Für einen detaillierten Eindruck zur gesamten Lernumgebung siehe auch die „MatheWelt. Spiel mit selbstgedruckten Würfeln“, Pielsticker (2019).

Danksagung

Ein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Horst Struve sowie Frederik Dilling für die hilfreichen Anmerkungen und für die konstruktive Begleitung des Prozesses.

Zusatzmaterial

Weitere Informationen zum Datenmaterial finden sich in der Dissertationsschrift von Pielsticker (2020).

Literatur

Balzer, W., Sneed, J. D., & Moulines, C. U. (Hrsg.). (2000). *Structuralist Knowledge Representation. Paramatic Examples.* Amsterdam und Atlanta: Rodopi.

Balzer, W. (1982). *Empirische Theorien: Modelle – Strukturen – Beispiele. Die Grundzüge der modernen Wissenschaftstheorie.* Braunschweig, Wiesbaden: Friedr. Vieweg & Sohn.

Balzer, W., & Moulines, C.-U. (2014). *Strukturalistische Wissenschaftstheorie*. Wiesbaden: Springer: https://doi.org/10.1007/978-3-658-01164-2_5

Bauersfeld, H. (1983). Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In H. Bauersfeld (Hrsg.), *Untersuchungen zum Mathematikunterricht: Bd. 6. Lernen und Lehren von Mathematik* (S. 1–56). Aulis Verlag Deubner & CO KG.

Bauersfeld, H. (1985). Ergebnisse und Probleme von Mikroanalysen mathematischen Unterrichts. In W. Dörfler & R. Fischer (Hrsg.), *Empirische Untersuchungen zum Lehren und Lernen von Mathematik* (S. 7–25). Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.

Bernoulli, J. (1713). *Ars conjectandi, opus posthumum. Accedit Tractatus de seriebus infinitis, et epistola gallicé scripta de ludo pilae reticularis*, Basel: Thurneysen Brothers.

Burscheid, H. J., & Struve, H. (2000). The Theory of Stocathic Fairness – its Historical Development, Formulation and Justification. In W. Balzer, J.D. Sneed & C.U Moulines (Hrsg.). *Structuralist Knowledge Representation – Paradigmatic Examples* (S. 69–98). Amsterdam: Rodopi.

Burscheid, H. J., & Struve, H. (2001). Zur Entwicklung und Rechtfertigung normativer Theorien – das Beispiel der Theorie der Gerechtigkeit von Glücksspielen. *Dialectica, 55*, 259–281.

Burscheid, H. J., & Struve, H. (2018). *Empirische Theorien im Kontext der Mathematikdidaktik.* Wiesbaden: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-23090-6

Burscheid, H. J., & Struve, H. (2020). *Mathematikdidaktik in Rekonstruktionen. Grundlegung von Unterrichtsinhalten*. Wiesbaden: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-29452-6

Czuber, E. (1899). Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen. Bericht, erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. In *Jahresberichte der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, *7(2)*, Leipzig: Teubner.

Dilling, F., & Witzke, I. (2019). Was ist 3D-Druck? Zur Funktionsweise der 3D-Druck-Technologie. *Mathematik Lehren, 217*, 10-12.

Dilling, F. (2020). Zur Rolle empirischer Settings in mathematischen Wissensentwicklungsprozessen – eine exemplarische Untersuchung der digitalen Funktionenlupe. *Mathematica didactica, 45*(1).

Eichler, A., & Vogel, M. (2013). *Leitidee Daten und Zufall. Von konkreten Beispielen zur Didaktik der Stochastik.* Wiesbaden: Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-00118-6

Freudenthal, H. (1957). Zur Geschichte der Grundlagen der Geometrie, zugleich eine Besprechung der 8. Auflage von Hilberts ‚Grundlagen der Geometrie‘: In *Nieuw Archief voor Wiskunde 5(4),* 105–142.

Freudenthal, H. (1972). The empirical law of large numbers or „the stability of frequencies“. *Educational Studies in Mathematics*, *4*, 484–490.

Hefendehl-Hebeker, L. (2016). Mathematische Wissensbildung in Schule und Hochschule. In A. Hoppenbrock, R. Biehler, R. Hochmuth & H.-G. Rück (Hrsg.), *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase: Herausforderungen und Lösungsansätze* (S. 15–32). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-10261-6

Hempel, C. G. (1945). Geometry and Empirical Science. *American Mathematical Monthly*, *52*, 7–17.

Kaiser, F., Blum, W., Borromeo Ferri, R., & Greefrath, G. (2015). Anwendungen und Modellieren. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Wigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 357-383). Berlin, Heidelberg: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-35119-8

Krüger, K., Sill, H.-D., & Sikora, C. (2015). *Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I*. Berlin: Springer.

Meyer, M. (2010). Wörter und ihr Gebrauch - Analyse von Begriffsbildungsprozessen im Mathematikunterricht. In G. Kadunz, *Sprache und Zeichen* (49-82).

Pielsticker, F. (2019). Spiel mit selbstgedruckten Würfeln. MatheWelt. *Mathematik lehren*, 217.

Pielsticker, F. (2020). *Mathematische Wissensentwicklungsprozesse von Schülerinnen und Schülern: Fallstudien zu empirisch-orientiertem Mathematikunterricht mit 3D-Druck*. Wiesbaden: Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-29949-1

Pollak, H., & Garfunkel, S. (2014). A View of Mathematical Modeling in Mathematics Education. In A. Sanfratello &

B. Dickmann (Hrsg.), *Proceedings of conference on mathematical modeling at Teachers College of Columbia University* (S. 6–12). New York.

Schlicht, S. (2016). *Zur Entwicklung des Mengen- und Zahlbegriffs*. Wiesbaden: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-15397-7

Schupp, H. (1986). Zur didaktischen Analyse des Teilungsproblems. *JMD* 7, 217–222.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. In G. Harel & E. Dubinsky (Hrsg.), *The Concept of Function: Aspects of Epitemology and Pedagogy* (S. 25-28). Mathematical Association of America (MAA).

Sneed, J. D. (1971). *The Logical Structure of Mathematical Physics.* Dordrecht: Reidel.

Stake, R. E. (1995). *The Art of Case Study Research*. Thousand Oaks, London, New Delhi: Sage Publications.

Stegmüller, W. (1986). *Theorie und Erfahrung: Probleme und Resultate der Wissenschaftstheorie und Analytischen Philosophie*, Band II, 3. Teilband: Die Entwicklung des neuen Strukturalismus seit 1973. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: Springer.

Steinbring, H. (2005). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction - An Epistemological Perspective*. Wiesbaden: Springer. https://doi.org/10.1007/b104944

Steinbring, H. (2006). What Makes a Sign a Mathematical Sign? – An Epistemological Perspective on Mathematical Interaction. *Educational Studies in Mathematics 61(1),* 133–162.

Stoffels, G. (2020). *(Re-)konstruktion von Erfahrungsbereichen bei Übergängen von empirisch-gegenständlichen zu formal-abstrakten Auffassungen theoretisch grundlegen, historisch reflektieren und beim Übergang Schule-Hochschule anwenden*. Siegen: universi.

Witzke, I. (2009). *Die Entwicklung des Leibnizschen Calculus. Eine Fallstudie zur Theorieentwicklung in der Mathematik*. Köln: Franzbecker.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik,* 61, 37–46.

Schulbuch:

Wennekers, U. (Hrsg.). (2015). *Zahlen und Größen 8. Nordrhein-Westfalen.* Berlin: Cornelsen.

Anschrift der Verfasser

Felicitas Pielsticker
Universität Siegen
Didaktik der Mathematik
Adolf-Reichwein-Str. 2
57076 Siegen
pielsticker@mathematik.uni-siegen.de

Ingo Witzke
Universität Siegen
Didaktik der Mathematik
Adolf-Reichwein-Str. 2
57076 Siegen
witzke@mathematik.uni-siegen.de

<<wird noch entfernt>>