Zwischen theoretischen Erkenntnissen und empirischen Prüfungen – die experimentelle Methode als Modellierungsprozess zum Mathematiklernen

JULIA REY, KÖLN & MICHAEL MEYER, KÖLN

Zusammenfassung*: Da mittels der experimentellen Methode ein Problem aus der Realität durch Nutzung disziplinspezifischer Möglichkeiten untersucht und gelöst wird, lässt sich das Vorgehen nach dieser Methode innerhalb der (Schul-)Mathematik als mathematisches Modellieren betrachten. In diesem Beitrag nutzen wir naturwissenschaftliche Denk- und Arbeitsweisen zur Beschreibung mathematischer Modellierungsprozesse und stellen damit alternative Fokussetzungen für die Analyse von Modellierungsprozessen vor.*

Abstract: *As far as a problem from reality is solved by using discipline-specific possibilities, a procedure according to the experimental method within (school) mathematics can be regarded as mathematical modelling. In this paper we use scientific ways of thinking and working to describe mathematical modelling processes and present alternative focuses for the analysis of modelling processes.*

1. Einleitung

> Die Wiederentdeckung des Fallgesetzes z. B. vor dem historischen Hintergrund kann paradigmatisch erleben lassen: Aus einer plausiblen Annahme (Momentangeschwindigkeit wächst proportional zur Zeit) werden rein mathematisch Schlussfolgerungen gezogen, deren Deutung Fallphänomene erhellt, die man mit bloßem Auge und ohne Mathematik gar nicht wahrnehmen kann. Allgemein: Geglückte Mathematisierung eines realen Phänomens läßt hinter die Oberfläche schauen, erweitert wesentlich die Alltagserfahrung. (Winter, 1995, S. 39)

Mit diesem Zitat Winters werden zwei wesentliche Aspekte herausgestellt: Zum einen können durch die Brille der Mathematik reale Phänomene (fallende Gegenstände) gedeutet werden, zum anderen kann es lohnenswert sein, Modellierungsprozesse ausgehend von einer naturwissenschaftlichen Perspektive[1] zu analysieren. Diese beiden Aspekte sind für den vorliegenden Artikel von Bedeutung, insofern Phänomene mit Mitteln aus der Mathematik betrachtet werden. Zugleich wird eine ursprünglich naturwissenschaftliche Perspektive auf die Handlungen selbst eingenommen.

Neben Winter haben bereits einige Didaktiker*innen experimentelles Arbeiten im Rahmen des Mathematiklernens thematisiert (s. Abschnitt 4). Pointiert sei hier hervorgehoben, dass Mathematiklernen als ein empirisches Arbeiten betrachtet werden kann (vgl. z. B. Jahnke, 2009; Meyer, 2007; Philipp, 2013; Reiners & Struve, 2011; Witzke, 2012). In diesem Beitrag werden solche Erkenntnisprozesse thematisiert, die sich erst durch Experimente und somit ausgehend von Handlungen einstellen. Ein Experiment lässt sich beschreiben als „planmäßige Herbeiführung von (meist variablen) Umständen zum Zwecke wissenschaftlicher Beobachtungen“ (Janich, 2004, S. 621 f.). Ein Experiment trägt folglich zwei wesentliche Eigenschaften: es ist *plan-* und *zweckmäßig*. Diese beiden Eigenschaften werden in Abschnitt 3 ausgeführt.

Als eine bedeutsame Erkenntnismethode wird in den Naturwissenschaften die *experimentelle Methode* benannt (s. u. a. Reiners & Saborowski, 2017; Schwarz, 2009). Zentrales Charakteristikum dieser Methode ist ein ‚Hand in Hand gehen‘ von experimentellen Beobachtungen, die eine empirische Prüfung und Erklärungen initiieren (Kant KrV BXIII bis B XIV) – kurz gesagt ein Zusammenspiel von eher theoretischen und eher empirischen Elementen (s. Abschnitt 3). Dieser Prozess wird als eine alternative Betrachtungsweise auf Modellierungsprozesse beim Mathematiklernen vorgestellt, da diese Prozesse Anforderungen wie Realitätsbezüge und Problemhaltigkeit genügen. Entsprechend besteht der Kern dieses Beitrages daraus, mathematische Lernprozesse mit Begriffen, welche vorrangig im Rahmen der Erkenntnisgenese in den Naturwissenschaften verwendet werden, zu rekonstruieren. Um von einer naturwissenschaftlichen Methode beim Mathematiklernen sprechen zu können, muss ein entsprechendes Zusammenspiel von naturwissenschaftlichen Denk- und Arbeitsweisen rekonstruiert werden können. Die zentralen Denk- und Arbeitsweisen werden ebenfalls in Abschnitt 3 herausgestellt. Im Vergleich mit den Naturwissenschaften werden zwei Unterschiede zur Mathematik deutlich: Die Objekte der Mathematik sind (eigentlich) nicht empirischer Natur und damit zusammenhängend sind in der Mathematik gegenüber den empirischen Naturwissenschaften auch andere Begründungsmöglichkeiten gegeben. Wenn das Mathematiklernen in der Schule jedoch auch als ein empirisches Arbeiten betrachtet werden kann, muss es ein Zusammenspiel von eher theoretischen und eher empirischen Elementen in den Erkenntnisprozessen geben, welches wir hier fokussieren werden. Entsprechend verfolgen wir in diesem Beitrag folgende Forschungsfrage:

Was lernen wir aus der Rekonstruktion mathematischer Modellierungsprozesse mit naturwissenschaftlichen Begriffen – insbesondere unter Berücksichtigung der Spannung von Empirie und Theorie?[2]

Zur Beantwortung der Forschungsfrage werden die theoretischen Begriffe auf das Datenmaterial einer empirischen Studie angewendet.

2. Modellieren

In diesem Abschnitt wird die mathematikdidaktische Forschungslandschaft zum Modellieren betrachtet, um insbesondere die unterschiedlichen Perspektiven auf das Verhältnis von Theorie (häufig als „Mathematik" identifiziert) und Empirie (entsprechend als „Rest der Welt" bezeichnet) vorzustellen. Wie in der Forschungsfrage formuliert, soll aus der naturwissenschaftlichen Perspektive im Abgleich mit der aktuellen Modellierungsdebatte über Modellierungsprozesse gelernt werden.

Motivation und Merkmale: Das Modellieren ist aus der Realität des heutigen Mathematikunterrichts kaum wegzudenken. Die Schüler*innen sollten aus verschiedenen Gründen Mathematik anwenden können. Hierzu zählen neben einem vertieften Verständnis der mathematischen Inhalte auch die Vorbereitung auf den zukünftigen (Berufs-)Alltag (Kaiser, 2011; Stein, Winter, Jordan & Podlogar, 2010; Sträßer, 2010) oder das Verstehen aktueller Situationen aus der Lebenswelt. Fachliche und allgemeine Lernziele spielen gleichsam eine Rolle (u. a. Heymann, 1996). Modellieren im Sinne des Sachrechnens kann dabei nicht nur helfen, etwas über die Sache selbst zu erfahren, sondern kann beispielsweise auch einen Zugang zur Mathematik bieten (Glade, 2016; Treffers, 1983; Winter, 1992). Um diese (und andere) Ziele erfüllen zu können, werden verschiedene Anforderungen an das Modellieren gelegt, welche beispielsweise die *Problemhaltigkeit* der Aufgaben und eine gewisse *Nähe zur Realität* der Lernenden beinhalten (u. a. Greefrath, 2018; Maaß, 2007). Konsequenterweise ist das Modellieren ein wesentlicher Inhalt mathematikdidaktischer Forschung und weist eine Nähe auch zu anderen prozessbezogenen Kompetenzen wie dem Problemlösen auf.

Modellierungsschemata: Die Hintergründe die zur Konstruktion von Modellierungsaufgaben bzw. zur Rekonstruktion von Modellierungsprozessen verwendet werden, sind vielfältig. Insbesondere zählen hierzu verschiedene Modellierungsschemata, die sich hinsichtlich ihrer Struktur unterscheiden lassen (s. hierzu Meyer & Voigt, 2010). In den letzten Jahren wurden dabei insbesondere *sequentielle* Modellierungskreisläufe betont (u. a. Blum, 1985, S. 200; Blum & Leiß, 2005, S. 19; Borromeo Ferri, 2006, S. 89; Kaiser, 1986, S. 126 f.; Schupp, 1988, S. 11). Grob gesprochen wird hierbei zwischen Anforderungen im „Rest der Welt" (Blum & Leiß, 2005, S. 19) und Anforderungen innerhalb der Mathematik unterschieden. Im „Rest der Welt" (zuweilen ist auch nur von „Welt" die Rede, u. a. Leuders & Maaß, 2005) wird zunächst eine reale Situation betrachtet. Von der realen Situation ausgehend soll ein Situationsmodell konstruiert werden, welches das Verständnis der Situation relativ zur lösenden Person wiedergibt. Zur Reduzierung der Komplexität gelangt man durch Vereinfachungen zu einem realen Modell bzw. einem realen Problem, welches dann zu Mathematisieren ist – gelegentlich ist hierbei auch von „Übersetzen" die Rede (s. u. a. Greefrath, Kaiser, Blum & Borromeo Ferri, 2013). Das so entstandene mathematische Modell ist entsprechend zu bearbeiten, um mathematische Resultate zu erzeugen, welche dann noch zu validieren und darzulegen sind (s. Abb. 1).

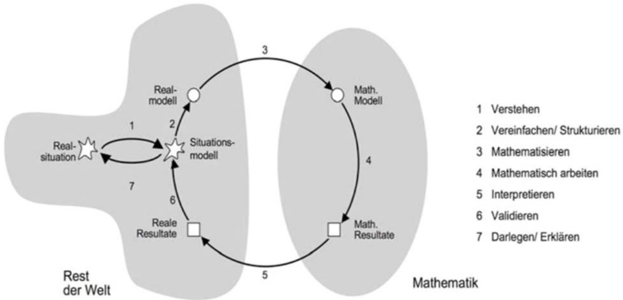


Abb. 1: Modellierungskreislauf nach Blum und Leiß (2005, S. 19)

Der Schritt zurück auf die (Real-) Situation wird in *linearen* Modellen zum Modellieren teilweise weggelassen, wodurch der Kreislauf unterbrochen wird (u. a. Müller & Wittmann, 1984, S. 253). *Nicht-sequentielle* Modelle heben Tätigkeiten beim Modellieren (ähnlich wie die Aufzählung in der rechten Spalte in Abb. 1) hervor, um davon ausgehend schematisch darzustellen, dass ein linearer oder kreisförmiger Prozess bei dem realen Modellierungsprozess (und nicht in der nachträglichen Rekonstruktion) kaum zu erwarten ist (u. a. Bell, 1993, S. 76; Moscardini, Curran, Saunders, Lewis & Prior, 1984, S. 1001; Werge, 1989, S. 35). Abgesehen von einigen dieser nicht-sequenziellen Modellen des Modellierungsprozesses (u. a. Bell, 1993) ist der überwiegenden Mehrzahl die besagte Trennung von Mathematik und (Rest der) Welt gemein.

Dass die Übergänge zwischen „der Mathematik" und (dem Rest) „der Welt" von besonderer Bedeutung sind, heben verschiedene Autoren hervor. vom Hofe (2003) thematisiert hier die Bedeutung von Grundvorstellungen – gleichsam als Scharnierstellen. Grundvorstellungen lassen sich als standardisierte

Interpretationen von mathematischen Inhalten verstehen und bergen demnach nicht nur Elemente der Mathematik selbst, sondern auch solche der Welt. Schwarzkopf (2006) betont auf der Grundlage seiner Rekonstruktionen von Modellierungsprozessen ebenfalls diese Verbindung und kommt u. a. zu folgendem Fazit:

> Die Beziehung zwischen Sachverhalt und Mathematik wird nicht hergestellt durch *Vernachlässigung von ausreichend vielen sachlichen Details zur Vorbereitung einer Übersetzung*, sondern durch *eine theoretische Veränderung des empirischen Sachverhalts zur strukturellen Erweiterung des Sachverhalts*. (Schwarzkopf, 2006, S. 104, Hervorhebung im Original)

Auch andere Autoren*innen kommen zu dem Schluss, dass Schüler*innen diverse Zusammenhänge zwischen dem Rest der Welt und der Mathematik aufzeigen (z. B. Borromeo Ferri, 2011; Peter-Koop, 2003; Riebel, 2010). Häufig haben solche Beobachtungen die Konsequenz der Veränderung des Kreislaufes, etwa durch Hinzufügen weiterer Schleifen. Greefrath (2018, S. 37 ff.) unterscheidet entsprechend der – etwa durch die zusätzlichen Schleifen herbeigeführten – Komplexität zwischen einfachen, genaueren und komplexen Modellierungskreisläufen.

Voigt (2013) nutzt die Metapher des *weißen Flecks* um den Bereich außerhalb „der Mathematik“ und (dem Rest) „der Welt“ zu fokussieren, welcher kaum zu füllen ist. Er schlägt mit seinem Modell zur Rekonstruktion von Modellierungsprozessen vor, die Trennung aufzuheben, um die stete Verbindung zwischen den Elementen der Welt und der Mathematik hervorzuheben, wie es etwa auch Bauersfeld (1983) mit seiner Betrachtung subjektiver Erfahrungsbereiche tat. Die kleinste Einheit der Rekonstruktion wäre entsprechend eine solche Verbindung (z. B. dem eher (dem Rest) der Welt zuzuordnenden Element „Autotank/Restmenge“ und dem womöglich eher der Schulmathematik zuzuordnenden Element „$10\,l$“), die dann wiederum im Lösungsprozess mit anderen solcher Einheiten verbunden werden.

Die Auflistung möglicher Betrachtungsweisen zum Modellieren zeigt, dass in diesem Zusammenhang noch Forschungs- bzw. Klärungsbedarf besteht. In diesem Artikel wollen wir uns nicht zwischen den verschiedenen Ansätzen positionieren, aber dennoch die Gemeinsamkeit thematisieren: An welchem Stadium des Lernprozesses auch immer und wie auch immer zusammengefügt, es lassen sich Elemente in Modellierungsprozessen aufzeigen, welche eher empirischer oder eher theoretischer Natur sind.

Unabhängig von der Betrachtungsweise werden beim Modellieren also Beziehungen zwischen Sachverhalten und Mathematik relativ zur Schulmathematik fokussiert. Größen wie „$10\,l$“ lassen sich auch der Physik bzw. generell den Naturwissenschaften zuordnen, zumal diese Wissenschaften diejenigen sind, die sich Sachverhalte erklären wollen. Entsprechend thematisieren auch wir in diesem Beitrag ein Mathematikverständnis, welches sich eher als ein empirisches beschreiben lässt (s. Struve, 1990) und keines, welches als reines Transformieren von Symbolen betrachtet werden kann. Gleichwohl kann auch eine solche „empirische Mathematik“ ohne Bezug zu einem realen Kontext verwendet werden (z. B. lassen sich $10l$ und $20l$ unter der Nutzung eines Rechengesetzes addieren, ohne z. B. von einem Tankvolumen zu sprechen). In solchen Situationen werden wir von einem eher theoretischen Element sprechen.

Mit dieser anfänglichen Begriffsklärung werden wir im Folgenden einen Blick in die Naturwissenschaften wagen. Insofern die Naturwissenschaften sich anders als die Mathematik zu einem großen Teil (d. h. bezogen auf die empirischen Wissenschaftszweige und nicht auf die theoretischen) per se mit empirischen bzw. empirisch realisierbaren Materialien beschäftigen, könnten die entsprechenden Didaktiken zumindest dann als Vorbild dienen, wenn es um das Handeln in und mit realen Problemen bzw. Situationen geht. Dies ist insbesondere deshalb sinnvoll, weil die Schulmathematik wie soeben ausgeführt ebenfalls starke Bezüge zu den Naturwissenschaften hat.

Konkret wird unser Schwerpunkt in diesem Beitrag auf der experimentellen Methode liegen, welche als eine elementare Methode nicht nur für wissenschaftliches, sondern auch für schulisches Handeln angesehen wird, weshalb diese Methode im nachfolgenden Abschnitt vorgestellt wird.

3. Experimentelle Methode

> Sie [die Naturforscher Galilei, Torricelli und Stahl, J.R. und M.M.] begriffen, daß die Vernunft nur das einsieht, was sie selbst nach ihrem Entwurfe hervorbringt, daß sie mit Prinzipien ihrer Urteile nach beständigen Gesetzen vorangehen und die Natur nötigen müsse, auf ihre Fragen zu antworten, nicht aber sich von ihr allein gleichsam am Leitbande gängeln lassen müsse; denn sonst hängen zufällige, nach keinem vorher entworfenen Plane gemachte Beobachtungen gar nicht in einem notwendigen Gesetze zusammen, welches doch die Vernunft sucht und bedarf. Die Vernunft muß mit ihren Prinzipien, nach denen allein übereinkommende Erscheinungen für Gesetze gelten können, in einer Hand, und mit dem Experiment, das sie nach jenen ausdachte, in der anderen, an die Natur gehen, zwar um von ihr belehrt zu werden, aber nicht in der Qualität eines Schülers, der sich alles vorsagen läßt, was der Lehrer will, sondern eines bestallten Richters, der die Zeugen nötigt, auf die Fragen zu antworten, die er ihnen vorlegt. (Kant KrV B XIII bis B XIV)

Kant beschreibt in dem obigen Zitat das Arbeiten der Naturwissenschaften als ein ‚Hand in Hand gehen' mit theoretischen Überlegungen (die Gesetze in der einen Hand) und empirischen Befunden (die Natur in der anderen). Wesentliche Eigenschaften der hier beschriebenen Methode Galileis, Torricellis und Stahls sind die Herleitung naturwissenschaftlicher Zusammenhänge sowie das Experiment als konkreter Eingriff in die Natur. Diese Eigenschaften beschreiben einen Prozess, in dem theoretische Vorüberlegungen (eine begründete Hypothese bildet den Ausgangspunkt des Experiments) vorausgehen und Bedingungen der zu erforschenden Zusammenhänge gezielt (durch Veränderung und/oder konstante Beibehaltung) untersucht werden. Hierbei finden verschiedene Adaptionsprozesse zwischen Theorie und Empirie statt. Letzteres impliziert auch, dass die mit dem Experiment generierten Daten kritisch reflektiert, ggf. modifiziert und hierbei auch mit der anfänglichen Hypothese abgeglichen werden (Vollmer, 2014, S. 15). Ziel ist es, die eigenen Erklärungsgrundlagen (Theorien) zu erweitern. Diese Methode wird als *experimentelle Methode* bezeichnet. Kant deutet im Zitat darauf hin, dass wissenschaftliche *Fragen* an die Natur gestellt und nachgegangen werden. Fragen können – so bereits Popper (1949) – auch zu einer *Hypothese* ergänzt werden:

> Der Beobachtung geht ein Interesse voraus; eine Frage, ein Problem – kurz, etwas Theoretisches; können wir doch jede Frage, in Form einer Hypothese formulieren, mit dem Zusatz: ‚Ist es so? Ja oder nein?' (S. 44)

Beispielsweise fragte sich Galilei, wie Fallbewegungen beschreibbar sind. Die Hypothese könnte Galilei nach seinen geometrischen Herleitungen des Quadratgesetzes der gleichmäßig beschleunigten Fallbewegung wie folgt formulieren: Ist es so, dass der Zusammenhang $s = \frac{1}{2}at^2$ (s entspricht der Strecke, t der Zeit, a der Beschleunigung) im experimentellen Setting mit fallenden Objekten rekonstruierbar ist? Mit dieser Frage würde die zugrundeliegende Erklärung angezweifelt werden; Sie bedarf einer empirischen Prüfung.[3]

Wie die Darstellung zeigt, besteht der Anspruch der experimentellen Methode darin, vor Durchführung einer sinnvollen empirischen Prüfung ein klar umrissenes „Projekt" vorliegen zu haben. Diese Struktur zu schaffen, ist nur mithilfe der Nutzung vorherigen Wissens möglich. Anders formuliert: *Hypothesen* als Ausgangspunkte für empirische Experimente sind stets in eine entsprechende Theorie einzubinden. Nur so lassen sich mögliche und notwendige Bedingungen für zu erkundende Zusammenhänge finden.[4]

Fragen und *Hypothesen* werden nicht nur zeitlich vor dem Experiment und die damit verbundene *Beobachtung* gestellt (wie im Zitat Poppers angedeutet), sondern bestimmen auch das zu Beobachtende:

> Die Fragestellung ist es in der Tat, welche alle wissenschaftliche Beobachtung dirigiert, und dies in zweifacher Hinsicht: Sie legt sowohl mit dem, was in ihr befragt wird, den zu beobachtenden Tatsachenbereich fest, wie sie andererseits auch durch die Art, in der sie formuliert ist, die Weise des Hinblickens auf ihn bestimmt. Nicht nur, *was* aus der Fülle des Beobachtbaren überhaupt ausgewählt, sondern auch, was an ihm selegierend *gesichtet* werden soll, ist durch sie vorentschieden. (Ströker, 1972, S. 297; Hervorhebung im Original)

Ein *Beobachten* ist folglich von einem Erkenntnisinteresse geleitet. Es ist selektierend und kategorisierend. Wie bereits thematisiert, bedarf es dafür ein *Experiment*, welches planmäßig und zweckmäßig gestaltet ist. Planmäßig kann aus einer erkenntnistheoretischen Perspektive so gefasst werden, dass eine empirisch überprüfbare Hypothese vorliegen sollte. Zweckmäßig ist ein Experiment, insofern es zum Zwecke einer anschließenden (durch die formulierte Hypothese ausgerichteten) Beobachtung erfolgt (vgl. empirische Erkenntniswege in Meyer, 2007).

Das Beobachtete entscheidet dann über den Ausgang der Prüfung, also über die Zustimmung oder Ablehnung des Vorhergesagten. Mit dieser Prüfung sollten sich Naturwissenschaftler*innen allerdings nicht zufriedengeben, sondern das Beobachtbare erklären. So betont Stork (1979), dass „empirische Befunde ihre Erklärung nicht einfach mit sich führen" (S. 52). Neben bekannten Theorien können zur Erklärung *„konstruktiv-setzende Elemente"* (Stork, 1979, S. 52; Hervorhebung im Original) ergänzt werden. „Solche theoretisch gesetzten, eben nicht beobachteten Terme werden dann durch Zuordnungsregeln mit den empirischen Befunden verknüpft" (Stork, 1979, S. 52). Zum Beispiel sagt ein Zusammenhang aus der Chemie etwas „über die Volumenänderungen von Gasen in Abhängigkeit von Druck und Temperatur" (Ströker, 1973, S. 72) aus. Eine Theorie soll zur Erklärung dieses Zusammenhangs herangezogen werden. Diese beinhaltet Aussagen „von Molekülen, ihren Geschwindigkeiten resp. Geschwindigkeitsverteilungen, ihrer kinetischen Energie" (Ströker, 1973, S. 72). Die Zuordnungsregeln sorgen beispielsweise dafür, dass „die ‚mittlere kinetische Energie der Moleküle' mit der ‚Temperatur'" (Ströker, 1973, S. 72) verknüpft werden kann. Es handelt sich hierbei nicht um eine Eins-zu-Eins Übersetzung, sondern um eine kreative Koordination von Beobachtungen und Theorie (Ströker, 1973, S. 70). Beispielsweise könnte dabei *die mittlere kinetische Energie der Moleküle* ein nicht beobachteter Term sein, ein *konstruktiv-setzendes Element,* welches im Rahmen der kinetischen Gastheorie Bedeutung erhält. Durch diese

Erklärungen passiert mit den vorherigen Zusammenhängen etwas Neues:

> Denn es bildet nunmehr die verfügbare Theorie den Bezugsrahmen ihrer Deutung, und es sind die ihnen ausgedrückten Tatbestände fortan nicht anders Tatbestände denn als *interpretierte* Tatbestände im *Lichte der vorausgesetzten Theorie* (Ströker, 1973, S. 73, Hervorhebung im Original).

Die *Deutung* liefert damit eine Koordination von empirischen Daten und den bereits zuvor erstellten theoretischen Erklärungen der hypothetischen Gesetzmäßigkeiten.

Natürlich ist die experimentelle Methode nicht die einzige Methode in den Naturwissenschaften und nicht alle Entdeckungen sind derart abgelaufen (s. diejenige des Penicillins, Chain, 1948, oder die der Infrarotstrahlung, Schwarz, 2009). Stehen beispielsweise Erkundungsfragen am Anfang der Untersuchung und wird entsprechend nach möglichen Bedingungen gesucht, so wird auch von einem „explorativen Experiment" (Steinle, 2005) gesprochen. Falbe und Regitz (1995) beschreiben u. a. ein Experiment als „das wichtigste Anschauungsmittel" (S. 1281) in Unterricht und Studium der Chemie und zur Demonstration vor anderem Publikum. In der Schule kann das Experiment entsprechend auch andere Funktionen als den Anpassungsprozess von Theorie und Empirie übernehmen. So dient ein *Demonstrationsexperiment* etwa auch zur Anschauung bereits stabilisierter naturwissenschaftlicher Zusammenhänge (Kircher, 2015, S. 118). Betrachtet man allerdings die kognitiven Prozesse der Schüler*innen, so können diese für sich auch in Demonstrationsexperimenten neue Zusammenhänge entdecken. Entsprechend setzen wir für die Interpretation den Anspruch der experimentellen Methode, nämlich neues theoretisches Wissen zu generieren, relativ zum kognitiven Horizont des involvierten Systems (in unserem Fall die Schüler*innen bzw. Studierenden) und nicht relativ zum Fach.

Fragestellung	Fragen, die auf Gesetzmäßigkeiten und deren Erklärungen aus sind
Hypothese	Hypothetisch Bedingungen von Zusammenhängen oder hypothetische Warum-Erklärungen als Zusammenhänge aufstellen
Experiment	Geplanter Eingriff zum Zwecke einer Beobachtung
Beobachtung	Von der Fragestellung geleitet, selektierend und kategorisierend
Deutung	Erklärungen oder Begründungen der Beobachtungen

Tab. 1: Analysewerkzeug

Aus dieser naturwissenschaftlichen Betrachtung werden zur Analyse der Schüler*innen- und Studierendenlösungen in diesem Beitrag die in Tab. 1 aufgelisteten Charakterisierungen von naturwissenschaftlichen Denk- und Arbeitsweisen fokussiert.

Pointiert sei an dieser Stelle zusammengefasst, inwiefern in diese Begriffe das Verhältnis von Theorie und Empirie einspielen: Sinnvoll *fragen* (Hypothesen aufstellen) kann nur der- oder diejenige, der/die schon etwas weiß. Fragen werden durch empirische Phänomene evoziert und durch theoretische Elemente formiert. Antworten auf die Frage (im Sinne einer *Hypothese*) kann ebenfalls nur der- bzw. diejenige, der bzw. die schon etwas weiß. Der Grad der theoretischen Elemente kann dabei unterschiedlich ausfallen, je nachdem, ob die Verortung der Hypothese in eine etablierte Theorie geprüft werden soll (experimentelle Methode) oder ob noch nach einer passenden Theorieverortung gesucht wird (exploratives Experiment). Das *Experiment* ist nach dieser Hypothese ausgerichtet. Es wird in die Natur eingegriffen – planvoll und zielführend. Sofern der Eingriff nicht gedanklich ist, ist die Wirkung des Eingriffs abzuwarten. Hier hat nicht der/die Experimentierende, sondern die Natur zu antworten (s. initiales Kant-Zitat). Das Erzeugen eines Eingriffs ist zwar theoretisch motiviert, die zu *beobachtende* Wirkung dagegen ist empirisch. Die *Deutung* weist über die konkreten Daten hinaus, ist aber genau an diesen durch die beobachteten und geprüften Daten verbunden.

Übertragung auf Mathematische Lernprozesse: Übertragen wir diese kurzen Betrachtungen zur experimentellen Methode auf mathematische Lernprozesse, so wird deutlich, dass sich verschiedene Ideale des mathematischen Modellierens in solchen naturwissenschaftlichen Prozessen wiederfinden lassen:

Beim mathematischen Modellieren sowie bei der experimentellen Methode wird eine *Problemhaltigkeit* gefordert. Das Problemhaltige bei einer experimentellen Methode kann in der Theorieerweiterung bzw. Erklärungen der realen Phänomene liegen, die wiederum für weitere ähnliche Phänomene Vorhersagen erlauben sollen (im Beispiel: Fallgesetze) (vgl. Stork, 1979).

Das *empirische Arbeiten* zeigt sich innerhalb der experimentellen Methode vor allem bei der Anwendung des Experiments und dem Beobachten der Ergebnisse. In den Ausführungen der experimentellen Methode hat sich gezeigt, dass Experiment und Beobachtung von der theoretisch motivierten Fragestellung abhängen. Die Deutung der Beobachtung ist dabei abhängig von den beobachteten Daten und der Fragestellung. Theoretische Aspekte auf die sich Wissenschaftler*innen wie Galilei stützen, können nicht unbedingt gleichgesetzt werden mit theoretischen Aspekten, auf die Schüler*innen oder Studierende sich beziehen. *Theoretisches Arbeiten* im Zuge der experimentellen Methode erfordert also, dass (vor dem Experiment) Hypothesen (ausgehend von Fragen) mit Wissen aus der Schulmathematik ausgearbeitet oder (nach dem Experiment) Deutungen mit dem Wissen aus der Schulmathematik vernetzt werden.

Mittels dieser Betrachtungen von experimenteller Methode und mathematischen Lernprozessen kann auch ein Mathematikverständnis im Unterricht legitimiert werden, welches eine stark naturwissenschaftliche Komponente birgt, insofern Phänomene aus der Welt erklärt werden sollen. Entsprechend macht es aber auch Sinn, die naturwissenschaftlichen Methoden zur Analyse von mathematischen Lernprozessen zu nutzen.

Diese Passung zwischen dem Modellieren innerhalb der Mathematik und der experimentellen Methode aus den Naturwissenschaften wollen wir in der Analyse nutzen, um mathematische Lernprozesse mit den Unterscheidungen gemäß der experimentellen Methode zu rekonstruieren, entsprechend der schon thematisierten Forschungsfrage. Vorerst werden bereits erfolgte Übertragungen von den Naturwissenschaften bzw. ihren Didaktiken in die Mathematikdidaktik ausgeführt, um herauszustellen, inwiefern die Anpassungsprozesse von Theorie und Empirie über naturwissenschaftliche Denk- und Arbeitsweisen im Rahmen von Modellierungsprozessen bereits untersucht wurden.

4. Ansätze zum Experimentieren in der Mathematikdidaktik

Ludwig und Oldenburg (2007) betrachten das Experimentieren und dessen Funktion im Mathematikunterricht. Sie benennen in ihrem Beitrag Prozessschritte einer experimentellen Methode: „Die Frage finden“, „[e]ine Hypothese aufstellen“, „[d]as Experiment planen“, „[a]usführen, beobachten und dokumentieren“, „Ergebnisse auswerten“ und „Ergebnisse interpretieren“ (S. 4). Während die Autoren zwar auch die empirischen Aspekte des Experimentierens mit realen Objekten fokussieren und dies zur Bildung theoretischer Kenntnisse nutzen, bleibt die Betrachtung des Zusammenspiels von Theorie und Empirie innerhalb der einzelnen Phasen unberücksichtigt.

Weitergehend unterscheiden Ludwig und Oldenburg (2007) Arten und Funktionen des Experimentierens zum Mathematiklernen: (inner-)mathematisches Experimentieren, Experimente zur Modellbildung, Experimente zum Argumentieren, Experimente zur Begriffsbildung, Experimente zur Problemlösung sowie simulierte Experimente. Die Aufzählung zeigt die vielfältige Nutzbarkeit von Experimenten zum Mathematiklernen – hier differenziert in der Darstellung (mathematischer) Objekte, deren Erarbeitungsinstrumente und deren Ziele. Mathematikdidaktische Forschungsarbeiten fokussieren diese unterschiedlichen Funktionen, die im Rahmen dieses Beitrags nur exemplifiziert und skizziert werden können: Beispielsweise betont Philipp (2013), dass das Erarbeiten innermathematischer Zusammenhänge einem experimentellen Arbeiten nahekommt und es sogar lohnenswert ist, von einer experimentellen Kompetenz zu sprechen, die es im Schulalltag zu fördern gilt. Sie vergleicht dieses innermathematische Experimentieren mit dem Problemlösen. Die Nähe zwischen Experimentieren und Modellieren stellt Philipp (2013) bereits mit der Problemhaltigkeit her.

Ganter (2013) nutzt außermathematische Experimente zur Förderung des Funktionalen Denkens (Begriffsbildung) und vergleicht die Wirkung von selbstständigen Experimenten mit Demonstrationsexperimenten und Schulbucharbeiten. Ganter (2013) nutzt ein zyklisches Prozessmodell zur Konzeption und qualitativen Beschreibung der außermathematischen-experimentellen Prozesse (S. 47–50, 167–182). Sie stellt ebenfalls heraus, dass (eher theoretische) Begriffsbildungsprozesse und (eher empirisches) Experimentieren in Wechselwirkung zueinander stehen. Über diese Begriffsbildungsprozesse am Beispiel des Funktionalen Denkens anhand von außermathematischen Experimenten wird das Theorie-Empirie-Verhältnis angedeutet, allerdings wird nicht detailliert analysiert, wie sich Theorie und Empirie in den einzelnen Phasen des Experimentierzyklus beeinflussen.

Jahnke (2009) bezieht sich auf naturwissenschaftliche Methoden, um (eher theoretische) Begründungsprozesse anzubahnen, bei denen ausgehend von einer hypothetischen Setzung deduktive Folgerungen gezogen werden, die dann empirisch zu überprüfen sind. Bei Jahnke (2009) wird die theoretische Vorarbeit ähnlich wie beim Beispiel Galileis (s. Abschnitt 3) vor der empirischen Prüfung hervorgehoben.

Lichti (2019) beschreibt drei Teilschritte des Experimentierens und bezieht sich hierbei auf Roth (2014): die Vorbereitung, in der Hypothesen aufgestellt werden, die Durchführung, in der die Hypothesen getestet werden und die Nachbereitung des Experimentierens, in der (eher theoretische) Abstraktions- und Integrationsprozesse der Erfahrung vollzogen werden (Roth, 2014, S. 1; Lichti, 2019, S. 32). Sie stellen das Experimentieren mit gegenständlichen Objekten simulierten Experimenten am Computer für eine Förderung funktionalen Denkens gegenüber. Im Gegensatz zu Jahnke (2009), liegt hier der Fokus auf die Art und Weise, wie das Experiment empirisch realisiert wird, um das funktionale Denken zu fördern.

Weitere Bezüge zwischen dem Modellieren und dem Experimentieren finden sich in der Nutzung von Modellierungskreisläufen: Das Experimentieren mit realen und virtuellen Simulationen (im Rest der Welt) wird von weiteren Autoren*innen in sequenziellen Modellierungskreisläufe verortet (s. u. a. Baum, Beck & Weigand, 2018, S. 93; Greefrath & Siller, 2018, S. 13). Ein sequenzielles Modellierungsschema im Rahmen des Experimentierens im Inhaltsbereich Geometrie wird von Leuders, Ludwig und Oldenburg (2006, S. 5) verwendet. Die Besonderheit ist hier, dass die Autoren Mathematik und Experimentalsituation trennen und dabei einen Wechsel, im Sinne eines Kreisels, feststellen:

> Er [der Experimentalkreisel, J. R. und M. M.] hat eine mathematische linke Seite und eine außermathematische rechte Seite. Außermathematisches umfasst dabei u. a. die Zeichnung auf einem Blatt Papier, den virtuellen Raum eines Geometrieprogramms oder die physikalische Wirklichkeit. Zwischen dieser außermathematischen Welt und der Mathematik gibt es ein Wechselspiel. (S. 4)

Haas und Beckmann (2008) stellen ebenfalls ein Projekt vor, in dem mittels eher physikalischer Experimente der Erwerb des Funktionsbegriffes angeregt werden soll (vgl. Lichti, 2019). Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt auf einem vernetzenden Lernen von physikalischen und mathematischen Begriffen. Die Analysen werden nachträglich in einem sequentiellen Modellierungskreislauf verortet.

Zusammengefasst lässt sich feststellen, dass das Experimentieren in der mathematikdidaktischen Literatur zur Förderung unterschiedlicher mathematischer Tätigkeiten genutzt wird (z. B. Problemlösen, Begriffslernen, Argumentieren). Insbesondere steht das Experimentieren in der mathematikdidaktischen Literatur in enger Verbindung zum problemhaltigen und realitätsbezogenen Modellieren.

Die Verbindung zur naturwissenschaftlichen Betrachtung des Experimentierprozesses erfolgt in den Beiträgen je nach dem Fokus der dort durchgeführten Betrachtung unterschiedlich intensiv. Zumeist wird inhaltlich differenziert zwischen Hypothesen aufstellen, Hypothesen testen und Ergebnisse auswerten. Dabei werden auch theoretische (Herleitungsprozesse bei Jahnke, 2009) oder empirische Phasen (unterschiedliche Experimente bei Lichti, 2019) hervorgehoben. Entsprechend der Natur des Experimentierens einerseits und der Mathematik andererseits erfolgt dabei stets eine gewisse Diskussion von empirischen und theoretischen Elementen. Allerdings ist die eingehende Rekonstruktion und das Zusammenspiel dieser Elemente in keiner der uns bekannten Veröffentlichungen ein Forschungsschwerpunkt.

5. Methodologie und Methode

Setting: 24 Studierende des dritten Bachelorsemesters Lehramt für Grundschule und Sonderpädagogik Mathematik an der Universität zu Köln sowie 24 Schüler*innen erhielten in Einzel- sowie Zweiersettings offene geometrische Aufgaben, welche prinzipiell Experimentierpotenzial beinhalteten. Ein Anhalt an einer „außermathematischen Realität“ war nicht immer explizit gegeben. In Einzelsettings fungierte eine Interviewerin als Interaktionspartnerin. Den Lernenden war freigestellt, wie sie mit diesen Aufgaben umgingen. Zur Bearbeitung konnten sie sowohl ein Tablet, Stift, Geodreieck, Papier und/oder einen Experimentierkasten (bestehend aus Styroporplatten, Gummibänder, Pfeifenputzer, Knete etc.) nutzen. Eine Einweisung in die experimentelle Methode oder in andere Aspekte der Nutzung naturwissenschaftlicher Herangehensweisen erfolgte nicht. Die Aufgabenbearbeitungen wurden audio- und videografiert.

Mehrweg-Aufgabe: Die im Rahmen dieses Beitrages fokussierte Fragestellung ist Folgende:

Stellen Sie sich eine konvexe Fläche vor. Die Fläche habe einen Umfang L, d. h. bei einem Rundgang längs der Randlinie müssten Sie einen Weg der Länge L zurücklegen. Wenn nun aber der Rundgang außerhalb der Fläche im genauen Abstand a von ihrem Rand verläuft so entsteht ein Mehrweg. Wovon hängt dieser Mehrweg ab?

Abb. 2: Mehrwegaufgabe (leicht abgewandelt aus Schreiber, 1988, S. 156 f.)

Schreiber (1988) selbst empfiehlt diese Aufgabe für ein experimentelles Setting zum Mathematiklernen. Die Aufgabe kann unter Fokussierung verschiedener Aspekte berücksichtigt werden, z. B. wäre die Betrachtung ausschließlich ebener Flächen eine Setzung im Lösungsprozess. Abgesehen von dem Wort „Rundgang“ handelt es sich bei dieser Aufgabe um eine rein geometrische Aufgabe. In der folgenden Bearbeitung von einer Studentin zeigt sich, dass diese die „Fläche“ als Plane und als Fußballstadion identifiziert und somit die vormals rein geometrische Aufgabe in der Bearbeitung einen „Realitätsbezug“ erhält. Neth und Voigt (1991) bezeichnen als *Thema* eines Unterrichts nicht das von der Lehrperson geplante, sondern das in der Interaktion etablierte. Entsprechend lässt sich auch hier davon sprechen, dass die Aufgabe, welche zunächst zur Fokussierung des innermathematischen Experimentierens eingesetzt wurde, in der Interaktion der Lernenden zu einer Aufgabe wird, die einen Modellierungsprozess anregt, auch wenn sie aus fachdidaktischer Sicht keine Modellierungsaufgabe sein mag.

Eine Aufgabenanalyse im Vorfeld der Interviews ergab unterschiedliche mathematische und physikalische Herangehensweisen. In diesem Beitrag können einzelne Herangehensweisen nur in Kürze dargestellt werden: Als eher theoretisch wäre die Aufgabenbearbeitung anzusehen, wenn Schüler*innen oder Studierende in ihrer Erklärung z. B. auf das Wissen aus der Schulgeometrie zurückgreifen und Inhalte wie Innenwinkelsumme im n-Eck oder Definitionen über Kreis und minimalen Abstand anführen. Im Vergleich zur ersten Herangehensweise wäre ein eher empirisches Vorgehen das (gedankliche) Laufen um ein Fußballstadion, das Ausschneiden und Aneinanderlegen der Ecken der Figur oder das Bauen eines Modells, indem beispielsweise Nägel in eine Styroporplatte gesteckt werden und ein Faden um die Nägel gewickelt wird. Auch würde die Argumentation an einer konkreten Zeichnung ohne Nutzung von vorherigem Wissen aus der Schulmathematik als empirisch bezeichnet werden.

Auswertung: Die Audio- und Videoaufzeichnungen wurden transkribiert. Die nachfolgende Szene wurde mittels eines interpretativen Paradigmas analysiert: Im deutschsprachigen Raum ist Heinrich Bauersfeld Gründungsvater eines interpretativen Zweigs in der Mathematikdidaktik, den er Ende der 1970er Jahre parallel und gemeinsam mit dem amerikanischen Gründer Paul Cobb grundlegte (Jungwirth, 2014, S. 14). In den 1980er und 1990er Jahren festigte sich der interpretative Forschungsstrang innerhalb der Mathematikdidaktik im deutschsprachigen Raum und wurde von den Mitarbeitern Heinrich Bauersfelds – Jörg Voigt und Götz Krummheuer – ausdifferenziert (ebd.). Für die Analyse der nachfolgenden Szene wurde die Methode von Voigt „der primär gedanklichen Vergleiche“ (Jungwirth, 2003, S. 193) verwendet. Bedeutende Momente dieser Methode sind:

- das Verfremden (der jeweilige Turn wird gedanklich in unterschiedliche Kontexte gesetzt: Was könnte diese Äußerung in Kontext x, y, z … bedeuten?)
- das Bestimmen von Konsequenzen aus Interpretationen (Wenn die Interpretation x stimmt, wie könnte das Gespräch dann weitergeführt werden? Wenn die Interpretation y stimmt, wie müsste das Gespräch fortgeführt werden? usw.) und
- das Prüfen dessen, welche Konsequenzen eingetreten sind bzw. welche nicht eingetreten sind (und damit als vorläufig widerlegt gelten).

Als grundlegende Haltung sollte festgehalten werden, dass „[d]er Wissenschaftler […] ‚Interpretationen von immer schon interpretierten Wirklichkeiten‘“ (Voigt, 1984, S. 81) vollzieht. Dies impliziert, dass Interpretationen stets unsicher sind und sich durch Folgeäußerungen im weiteren Transkriptverlauf erhärten müssen: Wesentliche Charakteristika bei der Erstellung von Deutungshypothesen sind – vergleichbar mit der Realisierung der experimentellen Methode – die Prüfung und die Theoriegrundlage.

Schlussendlich verbleibt idealerweise eine Deutungshypothese, die ein weitgehendes Verstehen der Szene – in diesem Beitrag des experimentellen Handelns der Studentin – gewähren soll und damit allerdings auch über diese Szene hinausweist (s. Theorieerweiterung innerhalb der experimentellen Methode). Diese Deutungshypothese(n) wird bzw. werden dann im Text (Abschnitt 6) dargestellt (Jungwirth, 2003), unabhängig von der Korrektheit des jeweiligen mathematischen Inhaltes. Die Ergebnisse der interpretativen Forschung erheben damit nicht den Anspruch bestimmte Auftretungshäufigkeiten anzugeben (Beck & Jungwirth, 1999, S. 242). Vielmehr hat die erstellte Theorie sich an einzelnen Phänomenen zu bewähren.

6. Analyse

Die Studentin Corinna (Pseudonym) beginnt mit der Bearbeitung der Aufgabe (Abb. 2). Ihre Bearbeitung wurde ausgewählt, weil bei der Analyse ein interessantes Wechselspiel von eher theoretischen und eher empirischen Elementen rekonstruiert werden konnte. Nachfolgend werden die Deutungshypothesen der Szene vorgestellt und erläutert. Die Deutungshypothesen wurden mit den Begriffen aus Abschnitt 3 angereichert. Die angereicherten Deutungshypothesen werden mit den Ansätzen aus der vorgestellten Modellierungsdebatte (Abschnitt 2) verglichen, um aus dieser naturwissenschaftlichen Perspektive etwas über das Zusammenspiel von eher empirischen und eher theoretischen Elementen bei mathematischen Modellierungsprozessen zu lernen (s. Forschungsfrage). Da die experimentelle Methode als ein ‚Hand in Hand gehen‘ von Theorie und Empirie beschrieben werden kann (s. Abschnitt 3), werden sich ergebende und aufeinander bezogene theoretische und empirische Aspekte abschnittsweise zusammengefasst. Die naturwissenschaftlichen Begriffe werden im Text kursiv hervorgehoben. Eine Transkriptionslegende findet sich im Anhang.

1	C	mh, ja‘ also ich hab mir jetzt eh, einfach um es mir auch, visuell irgendwie vorzustellen‘
2	I	ja.
3	C	ähm, irgendwie ne Plane oder sowas jetzt vorgestellt-
4	I	mhm.

5 C ehm, sei es überm Fußballstadion *(lacht)* oder sowas *(I kurz „ja“)* irgendwas was so *(spannt mit beiden Händen einen Bogen auf, s. Bild 1, guckt auf das Arbeitsblatt)*, eben konvex ist. ehm, hinterher- muss ja kein Viereck auch sein, kann ja auch ein Dreieck

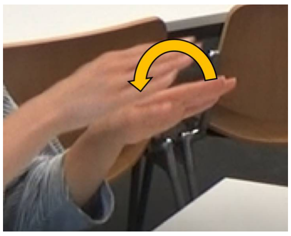


Bild 1

6 I ja.

7 C oder irgendwas sein genau.

8 I genau.

Bei dieser Aufgabenbearbeitung beginnt Corinna mit einer gedanklichen Vorstellung der Aufgabenstellung „Plane […] überm Fußballstadion“ (Turn 1, 3, 5). Die Mehrweg-Situation wird von ihr damit als reale Situation betrachtet. Diese Situation scheint zugleich variabel zu sein: Neben dem Fußballstadion (bzw. Viereck) kann es auch ein Dreieck sein „muss ja kein Viereck auch sein, kann ja auch ein Dreieck (…) oder irgendwas sein“ (Turn 5, 7).

9 C ähm, und stell mir jetzt vor, wenn ich da an dem, Rand- *(skizziert wie in der Bilderfolge 2-4 mit ihren Fingern)*

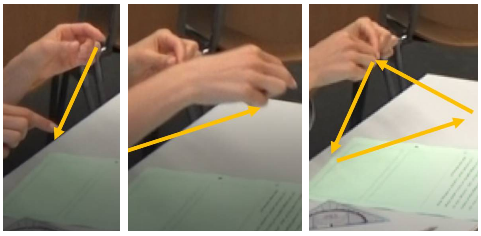


Bild 2-4

langlaufe, dann ist das der Rundgang, klar. ähm, und wenn jetzt, der Abstand, zum Rand *(führt jeweils die beiden Daumen und die beiden Zeigefinger zusammen, s. Bild 5)*

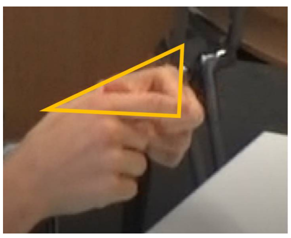


Bild 5

… n bisschen eingehalten *(führt den Zeigefinger der rechten Hand in Pfeilrichtung, s. Bild 6)*

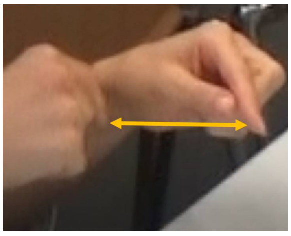


Bild 6

wird, keine Ahnung. sei es, ich muss immer ein Meter Abstand zu der Plane halten oder so.

10 I ja.

11 C dann entsteht natürlich ein Mehrweg, den ich laufen muss, ähm und wovon würde der abhängen‘ .. ja eigentlich, hauptsächlich von dem Umfang dieser Fläche. …

Corinna führt ihre Vorstellung der Aufgabe fort, indem sie eine Handlung („langlaufe“, Turn 9) gedanklich und mit Gestik gestützt (Bild 2-4) ausführt. Sie „läuft“ nun scheinbar nicht mehr um ein Fußballstadion bzw. Viereck, sondern um ein Dreieck. Auch der Abstand, der eingehalten werden muss, erhält eine variable Eigenschaft „sei es, ich muss immer ein Meter Abstand“ (Turn 9). Dass sich der Ausdruck „n bisschen eingehalten“ eher nicht auf einen konstanten Abstand bezieht, sondern auf einen variablen aber zugleich konstanten Abstand, verdeutlicht der Zusatz „oder so“ am Ende des Turns.

Die bisherigen Ausführungen lassen sich als ein *exploratives Experiment* deuten, da die Studentin erste Bedingungen abzustecken scheint: Wie in Abschnitt 3 beschrieben, lässt sich ihr Vorgehen als ein geplanter Eingriff zum Zweck einer Beobachtung („um es mir auch, visuell irgendwie vorzustellen“, Turn 1) erkennen (kurz: ein *Experiment*). Die Nutzung mathematischer Inhalte (abgesehen von der Nutzung der Definition konvexer Flächen zur Findung von möglichen Beispielflächen) erfolgt im Gespräch noch nicht, weshalb wir bisher eher nicht von der Durchführung einer experimentellen Methode sprechen würden. Einer Erkundungsfrage, wie die Aufgabe auch explizit fordert, wird nachgegangen: „Wovon hängt der Mehrweg ab?“

Es entsteht „natürlich“ ein Mehrweg, so gibt Corinna nach ihrem ersten Experiment an. Dass ein Mehrweg entsteht, scheint hier nicht das Problematische bzw. Fragliche für sie zu sein. Die als *Frage* interpretierbare Äußerung „wovon würde der abhängen‘ “ (Turn 11) schließt sich an. Corinna gibt sogleich eine Antwort: „hauptsächlich von dem Umfang“, wodurch andere Einflüsse nicht ausgeschlossen werden. Die *Experimente* mit ihren Fingern legen nahe, dass die als *Hypothese* verstehbare Antwort hierin ihren Ursprung fand. Diese Hypothese wird im Folgenden verfeinert:

13 C ja. von der Länge der Seiten tatsächlich .. *(nickt)* genau. … jetzt überleg ich grad, wenn das irgendwie jetzt keine Fläche ist die *(dreht das Blatt quer)*, jetzt so ist *(wölbt Blatt Papier nach oben wie im Bild 7)*

Bild 7

sondern wenn die irgendwie noch keine Ahnung anders im Raum liegt *(kippt gewölbtes Blatt in der Luft zur Seite, s. Bild 8)* ob das irgendwie was ändert'... aber .. glaub, eigentlich nich *(legt das Blatt zurück auf den Tisch)*.

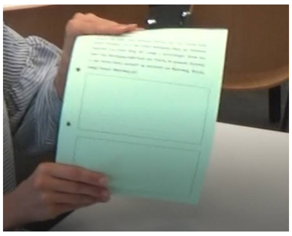
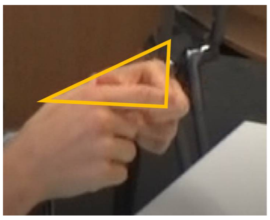
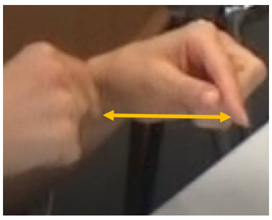


Bild 8

In Turn 13 wird der Umfang spezifiziert „von der Länge der Seiten tatsächlich“ (was aus Sicht von Expert*innen falsch ist). Damit wird die anfängliche *Hypothese* mit Vorwissen angereichert. Mögliche hypothetische mathematische Erklärungen der empirischen Phänomene werden also direkt miteinander verbunden:

Frage: Wovon hängt der Mehrweg ab?





Empirisch: Dieser Mehrweg in Bild 5 und Bild 6 hängt vom Umfang ab.

Theoretisch: Seitenlängen beeinflussen den Umfang.

Eine genaue Spezifizierung, inwiefern die Länge der Seiten den Mehrweg beeinflusst, wird nicht benannt. Auch bleibt bisher noch unklar, ob der neue Rundgang selbst als Mehrweg betrachtet wird oder ob es sich um die Differenz der beiden Wege handelt. Zudem wird hier nicht deutlich, welche Seiten betrachtet werden – es lässt sich nur vermuten, dass es sich um die Seiten der Ursprungsfigur handelt (z. B. des zuvor betrachteten Dreiecks oder eines nun durch das Papier dargestellten Vierecks). Corinna stellt sich die *Frage* nach der Lage der Figur im Raum („anders im Raum liegt“ Turn 13). Damit wird erneut eine (wissenschaftliche) Frage gestellt. Allerdings gibt sie auch hier eine *Hypothese* in der Form ‚Vermutlich ändert die Lage und Wölbung des Objekts im Raum nichts am Mehrweg‘ an. Die öffentlich gewordene Hypothese ist jedoch nicht theoriegeladen.

14 I das heißt du würdest jetzt sagen wenn ich jetzt hier um dieses *(führt den Zeigefinger um das Arbeitsblatt)*

15 C mhm. *(dreht das Blatt quer zu sich und wölbt es wieder wie in Bild 7)* genau.

16 I ähm, Blatt gehe quasi-

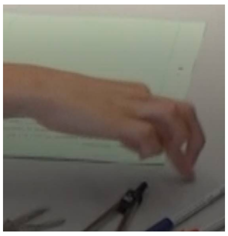
17 C stellen wir uns das so vor, also das kann man ja auch, bisschen eben projizieren *(lässt das Blatt los, so dass es flach auf dem Tisch liegt)* eigentlich.

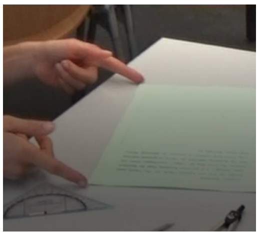
18 I a- also wenn man das mal flach legen würde, wov-.. also würdest du sagen das würde vom Umfang *(streift den Zeigefinger an eine Blattseite vorbei)* abhängen' wie würde sich das denn dann wie würde der Umfang denn da- einspielen in die- in den Mehrweg'

Mit der Äußerung „stellen wir uns das so vor, also das kann man ja auch, bisschen eben projizieren“ (Turn 17) wird im Folgenden die Lage und Wölbung im Raum ignoriert. Diese Erklärung macht ein weiteres Experiment überflüssig. Bezogen auf die *experimentelle Methode* relativ zur Planung des Experimentes zur ursprünglichen Frage nach den Bedingungen des Mehrweges, könnte dieses Vorgehen dazu auch dienen, mögliche Störfaktoren auszuschließen. Nun kann die Suche nach anderen Bedingungen fortgesetzt werden. Die mathematische Aktivität der Studentin, die Isolierung solcher möglichen Störfaktoren könnte der Erstellung des Realmodells (vgl. Abb. 1) zugeordnet werden, insofern das Ausschließen der Orientierung der Fläche zur Spezifizierung des eigentlichen Modells und nicht zum Finden von mathematischen Ausdrücken/Größen zur Beschreibung desselben dient.

Die Interviewerin fordert mit Turn 14 und 18 ein, die Einwirkungen des „Umfang[s]“ auf den Mehrweg zu präzisieren und stellt eine gemeinsame Referenz (das Arbeitsblatt) vor, die Corinna auch als solche annimmt.

19 C ja‘ ich muss mir die, ich muss mir quasi überlegen ähm wie sind die neuen Eckpunkte *(zeigt schräg unter bzw. über die Eckpunkte, s. Bild 9)* die ich dann habe wenn ich immer sagen wir einen Meter Abstand, zu dem Rand halten muss‘ *(legt den Zeigefinger auf den unteren Rand des Blattes und setzt den Daumen in einem Abstand unter das Blatt)* genau. und davon hängts dann einfach halt ab *(legt die Zeigefinger wie in Bild 10 an die unteren Ecken des Blatts).*



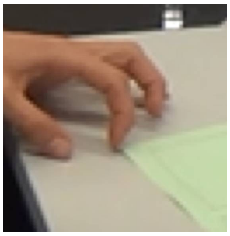


Bilder 9 und 10

Interpretiert als weiteres Verfolgen der Idee mit den Seitenlängen (Turn 13), erfolgt nun eine Zuspitzung auf den Umfang. Die *Frage* ist nun: Wie liegen die neuen Eckpunkte? Dieser Fokus passt zur Betrachtung der Seiten, weil hiermit die Verlängerung der um Abstand ein Meter parallel verschobenen Seiten betrachtet werden. Es geht nicht darum, ob die Eckpunkte relevant werden, sondern wie, hier deutbar als Suche nach einer Erklärung. Damit beginnt sie ihren Forschungsprozess innerhalb *der experimentellen Methode*.

Mit dieser *Fragestellung* ist zugleich eine Fokussierung für die nachfolgende *Beobachtung* gesetzt: die „neuen“ Ecken.

19 C also ich .. muss hier überlegen *(markiert mit Daumen und Zeigefinger wie in Bild 11 einen Abstand und legt diesen mit der rechten Hand rechts an die Ecke des Blattes und mit der linken Hand links an die Ecke)*



Bilder 11 und 12

rechts und links einen Meter mehr und da einen Meter mehr *(behält den Abstand zwischen den Fingern und legt ihn nach unten an die Ecken, wie in Bild 12; zieht mit beiden Fingern Bögen um die beiden unteren Ecken wie in Bild 13)* ...

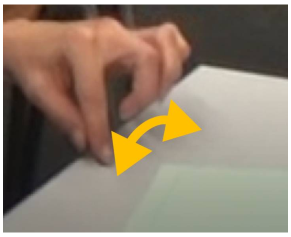


Bild 13

Corinna geht nicht mehr (wie in Turn 9) mit dem Finger um die ganze Figur, sondern sie betrachtet ausschließlich die unteren beiden Ecken des Blatts. Die Bedingungen eines möglichen Zusammenhanges werden hiermit reduziert. Der Abstand der Finger, den sie an die Figur anlegt, scheint dabei ebenfalls fest gewählt aber variabel zu sein. Den Abstand zwischen Blatt und Rundgang kann sie hiermit schnell variieren. Sie führt als letzten Schritt des *Experiments* Kreisbögen (Bild 13) aus, welche sie womöglich durch ihre experimentellen, empirischen Handlungen (das Empirische – das Anlegen der Finger an das Blatt, Bild 11-12) erhalten hat.

19 C ach so .. ja‘. das wär ja gar nicht so dass ich hier dann auch wieder im Viereck laufe *(markiert wie im Bild 14 mit Daumen und Zeigefinger jeweils eine Ecke und legt sie an die unteren Ecken des Arbeitsblattes)* sondern theoretisch hier ja irgendwie son *(zeichnet mehrfach mit dem Finger eine Art Bogen um die rechte untere Ecke, 4 sec)* Kreis‘ oder nen Bogen‘ .. laufen kann‘ *(I kurz „mhm‘“)* oder‘ am Rand

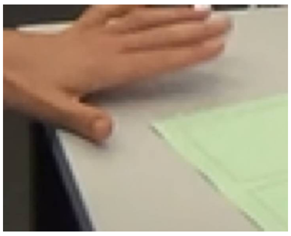


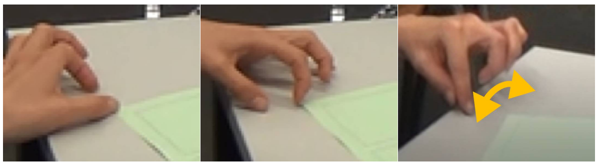
Bild 14

Corinna scheint etwas Neues an der Empirie gesehen zu haben: Es entstehen keine Zusatzecken, sondern Kreise bzw. Kreisbögen. Ihre Handlung verfolgte damit den *Zweck einer Beobachtung*, weshalb diese zielgerichtete Handlung als *Experiment* gewertet werden kann. Die Prüfung hat demnach stattgefunden und es konnte direkt eine neue *Hypothese* generiert („Kreis oder nen Bogen“) werden.

Aus Modellierungssicht ist nun interessant, wie dieses eher empirische Element mit eher mathematischen zusammenhängt. Die Nutzung des Wortes „Kreis“ (und nicht nur ausschließlich „Bogen“) kann als Indiz dafür gewertet werden, dass Corinna bei der Durchführung des *Experiments* die Kreisdefinition anwendet (geometrischer Ort aller Punkte, die von einem Punkt M den gleichen Abstand r haben). Dies setzt das Experiment in ein stärkeres theoretisches Licht.

Frage: Was passiert an den Ecken?

Empirisch:



Verlängern der Seiten in Bildern 11 bis 13

Theoretisch: Gleicher Abstand um einen Punkt ergibt ein Kreis bzw. Kreisbogen.

Sie beobachtet das, was an den Ecken passiert. Sie falsifiziert damit auch ihre erste *Hypothese*: „ach so .. ja‘. das wär ja gar nicht so dass ich hier dann auch wieder im Viereck laufe“.

Entsprechend dieser Interpretation würde Corinna ihre ursprünglichen theoretischen Überlegungen (Umfang und Seiten) modifizieren und die Relevanz der Abrundung der Ecken ergänzen. Dies zeigt sich auch in der folgenden Sequenz:

20 I warum müsstest du, warum könntest du jetzt kein Viereck gehen‘

21 C kann ich auch‘, aber dann lauf ich ja noch mehr. *(beide lachen)* ich will ja möglichst wenig laufen. .. genau. .. das heißt, also eigentlich‘ ist es auf jeden Fall der Umfang *(führt die beiden Zeigefinger von der Mitte des unteren Rands des Rechtecks auseinander bis zu den Ecken)* plus derah ne gar nicht mal plus der eine Meter. sondern immer nur plus diesen- Bogen *(zieht mit dem Finger den Bogen an der linken unteren Ecke)* den ich an den Ecken dann laufen muss .. genau und den kann ich bestimmt irgendwie ausrechnen .. über so- Kreisformel *(beide lachen)* Umfang und so. aber davon würd ich sagen, hängt es ab. es ist dann irgendwie pi mal r quadrat für den Umfang‘ und davon dann ein Viertel einfach.

Turn 21 kann als Erklärung bzw. *Deutung* ihrer neuen, durch Experimente bedingte Erkenntnisse betrachtet werden. Corinna scheint den Einfluss der Seiten zu verwerfen („ne gar nicht plus der eine Meter“).

Frage: Was passiert an den Ecken?

Empirisch: In der Ausführung der Experimente (Bilder 5 und 6 sowie Bilder 11 bis 13) wird kein erneutes Dreieck bzw. Viereck als Mehrweg im Rundgang gelaufen, sondern nur ein Kreis bzw. Bogen an den Ecken.

Theoretisch: Die Kreissektoren könnten mit Formeln berechnet werden. An einer Ecke eines Rechtecks ist es ein Viertel des ganzen Kreises.

Ihre *Hypothese* ist nun, dass der Mehrweg an den Ecken entsteht. Sie begründet hier nicht, warum kein Mehrweg an den Seiten hinzukommt (z. B. über parallel liegende Seiten). Von dem Verb „laufen“ kommt sie nun zum Rechnen – interpretierbar als Weg vom eher empirischen zum eher theoretischen Handeln: „kann ich bestimmt irgendwie ausrechnen über so Kreisformel (…) Umfang“. Diese Berechnung macht sie auch konkret: „dann irgendwie pi mal r quadrat für den Umfang‘ und davon dann ein Viertel einfach“ (Turn 21). Die Formel des Umfangs ist nicht korrekt. Aber sie beantwortet die zuerst gestellten *Fragen* „wovon hängt es ab“ und „wie hängt es ab“, ihr experimentelles Arbeiten könnte hier also beendet sein.

22 I warum ein Viertel‘

23 C ach so natürlich wenn ich. also für jede Ecke *(zeigt an die Ecken ihres Aufgabenblattes)* ein Viertel oder. wenns dann halt ein Viereck ist-, vier.

24 I ja.

25 C wenns dann irgendwie was anderes ist, halt keine Ahnung. en Achtel und Acht *(zieht beide Hände von rechts nach links)* also letztendlich dann, der Ra- das ganze Ding. *(nickt)*

26 I was meinst du mit dem ganzen Ding‘

27 C den ganzen, Kreis. *(zeigt kurz an die rechte untere Ecke*) muss ich dann- den ganzen Bogen- *(zieht mit dem rechten Zeigefinger einen Bogen um die untere rechte und obere rechte Ecke)*.. laufen. macht das Sinn‘ .. ich mach mal. *(dreht das Blatt hochkant und beginnt zu zeichnen)*

Die von Corinna womöglich abgeschlossene Aufgabe wird von der Interviewerin noch nicht als solche akzeptiert. Sie fragt nach Präzision „warum ein

Viertel“, eine Frage, die als Ausführung *der Deutung* interpretiert werden könnte. Corinna führt ihre Gedanken aus mit „natürlich“ (Turn 23), was vermuten lässt, dass sie die vier Ecken mitgedacht hat. Sie zeigt auch an, dass es sich um einen abstrakten Zusammenhang handelt („Achtel und Acht“, Turn 25). Ihre Theorie ist also auf weitere konkrete Settings anwendbar. Allerdings begründet Corinna damit aus fachlicher Sicht nicht die Frage „warum ein Viertel‘ “ (Turn 22).

Frage: Was passiert an den Ecken?

Empirisch: In der Ausführung der Experimente (Bilder 5 und 6 sowie Bilder 11 bis 13) wird kein erneutes Dreieck bzw. Viereck als Mehrweg im Rundgang gelaufen, sondern nur ein Kreis bzw. Bogen an den Ecken

Theoretisch: Die Kreissektoren könnten mit Formeln berechnet werden. An jeder der n Ecken eines n-Ecks ist es ein n’tel des ganzen Kreises.

Die Interviewerin fordert weitere Präzision (Turn 26), die Corinna ausführt mit „den ganzen, Kreis.“ (Turn 27) und es sogar für die Interviewerin bildlich präzisiert. Diesmal fragt Corinna mit der Äußerung „macht das Sinn‘ “ (Turn 27) scheinbar nach, ob die Interviewerin zufrieden ist. Die Zeichnung kann als *Demonstration* für die Interviewerin und somit als ein für Corinna stabilisierendes Experiment gedeutet werden. Es kann für sie auch eine letztliche Bekräftigung sein, da sie bei ihrem Zeigen auch Komponenten vergessen haben könnte.

33 C *(sie führt ihre Überlegung an der Zeichnung erneut aus, sie zeichnet zuerst das Rechteck, dann die Parallelen zu den Seiten)* und weil ähm der Abstand hier *(zeigt von der linken oberen Ecke zum Schnittpunkt der zu den Seiten konstruierten Parallelen, s. Bild 15)* ja größer ist als jetzt ein halber Meter geh ich halt jetzt einfach mal davon aus, dass das hier immer so ein Bogen ist *(I: „mhm“;Corinna zeichnet die Bögen händisch ein)* genau den ich hier laufen kann .. um die Ecke .. *(I „mhm“)* genau und das ist halt immer ein Viertel von dem Kreis der das dann ist (*skizziert einen Kreis in die untere Ecke s. Bild 16)* .. und alle zusammengesetzt *(zeigt an die vier Ecken)* ergeben dann den Kreis also es hängt … davon auch ab wie viele Ecken quasi diese Fläche hat .. jo ... genau. ich würde sagen davon hängts einfach ab. *(legt den Stift hin und nickt)* ja.

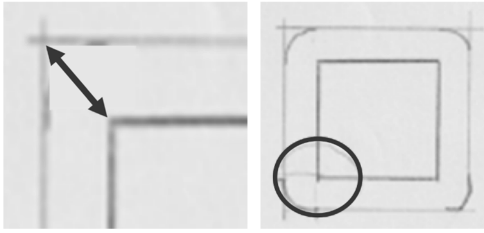


Bild 15-16

Corinna skizziert einen Kreis in einer Ecke und setzt diesen Kreis gleich mit der Zusammensetzung der Kreissektoren an den Ecken. Dies ist aus der Sequenz interpretierbar, weil sie hier nur von einem Kreis spricht, aber sowohl in der einen Ecke einen Kreis skizziert als auch das Zusammenlegen thematisiert: „genau und das ist halt immer ein Viertel von *dem Kreis* der das dann ist (…) .. und alle zusammengesetzt (...) ergeben dann *den Kreis*“ (Turn 33). Es wird ebenfalls mit ihrem Viertel und Vier deutlich, dass ein ganzer Kreis an einer Ecke und vier Teile dieses Kreises an vier Ecken verteilt sind.

Die *empirischen Prüfungen* anhand der unterschiedlichen Gestiken werden zwar von Corinna erklärt (Viertel und Vier, Achtel und Acht; Abstände einhalten erzeugt Bögen), aber noch nicht vollständig begründet. Ihre Theorie hat sich bisher bewährt (z. B. an den Bildern, Skizzen, Gestiken).

7. Ergebnisse und Fazit

In diesem Beitrag wurde die Beschreibung der experimentellen Methode aus den Naturwissenschaftsdidaktiken zur Rekonstruktion von Modellierungsprozessen herangezogen. Wesentliche Fragestellung dieses Beitrags ist, was aus der naturwissenschaftlichen Betrachtung von Modellierungsprozessen im Vergleich zu Elementen der aktuellen Modellierungsdebatte gelernt werden kann. Die Bearbeitung zeigt drei zentrale wissenschaftliche Erkenntnisse:

- Ähnlich wie in der naturwissenschaftsdidaktischen Literatur zur experimentellen Methode zeigt der empirische Lösungsprozess eine *stete Bedingtheit von eher empirischen und eher theoretischen Elementen*: Eine Hypothese, die sich beispielsweise auf konkrete Objekte (z. B. Stoffe in der Chemie oder wie hier Zeichnungen in der Mathematik) bezieht, soll dem Anspruch genügen, theoretisch reflektiert zu sein. Wie stark diese theoretische Reflexion ausfällt bzw. ausfallen sollte, ist damit noch nicht geklärt. Die Situation ist vergleichbar mit der des Vereinfachens/Strukturierens: Um ein Modell bearbeitbar zu machen, sollte zumindest die Idee einer dahinterliegenden Formel vorhanden sein.
- Bei der experimentellen Methode bedingen Fragestellungen die Beobachtung bzw. anders

formuliert: Man sieht bzw. soll sehen, was man sehen wollte. Corinna fragt, was an den Ecken passiert, sie beobachtet die Ecken und deutet dies auch. Wonach gefragt wird (was theoretisch erweitert werden will), darauf wird auch in der Empirie geachtet und das wird anschließend gedeutet. *Die Fragen rahmen also das Zusammenspiel von Mathematik und Realität* – dies nicht nur in der Szene, sondern auch in der Methode selbst. Dieses Zusammenspiel ist vergleichbar mit dem Interpretieren der Daten, wobei allerdings empirische Daten und theoretische Erklärungen aufeinander bezogen sein sollen und von einer Fragestellung gerahmt sind (s. auch „Mathematisieren“, s. Abb. 1).

- Corinna kann am Ende ihrer Arbeit Kreissektoren beobachten und geht nicht mehr von Ecken beim Rundgang aus. Das Beobachten und Weiterarbeiten basieren auch hier auf einer theoretischen Brille. Schwarzkopf (2006) bezeichnete die durch theoretische Betrachtungen erweiterte Empirie als eine „strukturelle Erweiterung des Sachverhalts“ (S. 104). Die Beschreibung der experimentellen Methode bzw. die Rekonstruktion des Transkriptes zeigt, an welchen Punkten solche Erweiterungen stattfinden können bzw. sogar sollen: Bei der Entwicklung der Hypothese und bei der Beobachtung sowie Deutung von (Zwischen-)Ergebnissen. Diesen Anspruch, der in den Naturwissenschaften bereits per se an ein Experiment gestellt wird, könnte die Modellierungsdiskussion befruchten, denn *die „realen Resultate“ sind damit (sofern theoretisch gearbeitet wurde) abhängig vom „mathematischen Hinsehen“*. Dieser Aspekt ist umso bedeutsamer, wenn bedacht wird, dass diese mathematischen Elemente auch diejenigen sind, die bei einer späteren Begründung des experimentell ausgearbeiteten Zusammenhanges notwendig sind.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass wenn man Modellierungsprozesse über die experimentelle Methode realisieren will (und damit über ein hypothesengeleitetes Arbeiten, bei dem bereits die Hypothese auf mathematische Elemente bezogen wird), dann ergeben sich notwendig diverse Verflechtungen zwischen eher empirischen und eher theoretischen Elementen bzw. zwischen der Schulmathematik und (dem Rest) der Welt.

Ähnlich wie in den theoretischen Disziplinen der Naturwissenschaften (z. B. theoretische Chemie oder theoretische Physik), besitzen Lernende und Lehrende in der Mathematik das Mittel einer stark theoretischen Herangehensweise: einer Begründung bzw. eines Beweises. Begründungen werden in der hier analysierten Szene nicht (ausführlich) durchgeführt. An der in diesem Beitrag thematischen Aufgabe bzw. generell an vielen experimentellen Settings ist interessant, dass sie auch stark problemlösend und weniger modellierend betrachtet werden können (s. Galileis Vorarbeiten zur Herleitung des Fallgesetzes und vgl. Philipps (2013) Untersuchungen beim experimentellen Lernen). Zwei begabte Schüler aus der Studie gehen beispielsweise diese Aufgabe eher problemlösend an: Sie versuchen eine allgemeine Mehrweg-Formel zu finden und fokussieren dabei Elemente, die weniger situationsbezogene Bezüge aus der Schulmathematik aufgreifen (z. B.: Wie groß ist das markierte Winkelfeld beim Mehrweg?). Sie kommen letztendlich zu einer geometrischen Begründung für Mehrwege bei konvexen n-Ecken, indem sie eine Ecke fokussieren und deren Winkelzusammensetzung berechnen. Bei ihnen lässt sich das experimentelle Handeln als Initiator mathematischer Begründungen verstehen.

Welches Zusammenspiel zwischen dem Experimentieren und dem Begründen erzeugt werden kann bzw. wie das Zusammenspiel zwischen Empirie und Theorie hierbei weitergehend ausgeprägt sein kann, ist ein wesentlicher Kern kommender Analysen.

Anmerkungen

[1] Wird in diesem Beitrag von Naturwissenschaften gesprochen, so sind stets die empirischen Zweige der Naturwissenschaften gemeint.

[2] Es sei angemerkt, dass wir uns auf wissenschaftstheoretische und naturwissenschaftliche Grundlagen wie Popper und Kant beziehen und weniger auf speziell naturwissenschaftsdidaktische Konzepte. Sofern wir zunächst von den naturwissenschaftlichen Methoden für das mathematische Modellieren lernen wollen, wird es ein nächster Schritt sein, sich speziell auf naturwissenschaftsdidaktische Modelle zu beziehen. Dieser Beitrag fokussiert vorerst eine eher rekonstruktive Perspektive, die konstruktive ist weiteren Forschungsarbeiten vorbehalten.

[3] Galilei hätte im Anschluss seiner experimentellen Versuchsreihe wohl wie folgt geantwortet: „[…] bei wohl hundertfacher Wiederholung fanden wir stets, daß die Strecken sich verhielten wie die Quadrate der Zeiten: und dieses zwar für jedwede Neigung der Ebene, d. h. des Kanals, in dem die Kugel lief.“ (Mudry, 1987, S. 393 f.) Unser Dank gilt Herrn Dilling für den Hinweis auf dieses Zitat.

[4] An dieser Stelle könnte weitergehend der Modellbegriff in Abgrenzung zur Theorie diskutiert werden. Dies würde den Rahmen dieses Beitrags sprengen, insbesondere weil dies nicht Inhalt der späteren Rekonstruktionen ist.

Danksagung

Wir danken den gutachtenden Personen sowie Teilnehmer*innen unserer Arbeitsgruppe in Köln für die hilfreichen und konstruktiven Anmerkungen und Kommentare.

Zusatzmaterial

Im Anhang sind die hier verwendeten Transkriptionsregeln (vgl. Meyer, 2007) angefügt.

Literatur

Bauersfeld, H. (1983). Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In H. Bauersfeld, H. Bussmann, G. Krummheuer, J. H. Lorenz & J. Voigt u. a. (Hrsg.), *Lernen und Lehren von Mathematik. Untersuchungen zum Mathematikunterricht* (S. 1–56), Band 6. Köln: Aulis Verlag Deubner.

Baum, S., Beck, J. & Weigand, H.-G. (2018). Experimentieren, Mathematisieren und Simulieren im Mathematiklabor. In G. Greefrath & H.-S. Siller (Hrsg.), *Digitale Werkzeuge, Simulationen und mathematisches Modellieren. Didaktische Hintergründe und Erfahrungen aus der Praxis* (S. 91–118). Wiesbaden: Springer.

Beck, Ch. & Jungwirth, H. (1999). Deutungshypothesen in der interpretativen Forschung. *Journal für Mathematik-Didaktik, 4,* 231–259.

Bell, M. (1993). Modelling and applications of mathematics in the primary curriculum. In T. Breiteig, I. Huntley & G. Kaiser (Hrsg.), *Teaching and learning mathematics in context* (S. 71-79). *Chichester: Elli Horwood.*

Blum, W. (1985). Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion. *Mathematische Semesterberichte*, *32(2),* 195–232.

Blum, W. & Leiß, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der „Tanken"-Aufgabe. *mathematik lehren*, *128,* 18–21.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiation of phases in the modelling process. *ZDM – Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *38(2),* 86–95.

Borromeo Ferri, R. (2011). *Wege zur Innenwelt des mathematischen Modellierens – Kognitive Analysen von Modellierungsprozessen im Mathematikunterricht*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Chain, E. (1948). Von der Entdeckung des Penicillins. In S. Moser (Hrsg.), *Gesetz und Wirklichkeit* (S. 85–90). Innsbruck/ Wien: Tyrolia.

Falbe, J. & Regitz, M. (1995). Experiment. In J. Falbe & M. Regitz (Hrsg.), *Chemielexikon Cm-G* (S. 1281). Stuttgart/ New York: Thieme.

Ganter, S. (2013). *Experimentieren – ein Weg zum Funktionalen Denken. Empirische Untersuchung zur Wirkung von Schülerexperimenten.* Hamburg: Dr. Kovač.

Glade, M. (2016). Individuelle Prozesse der fortschreitenden Schematisierung. Berlin: Springer.

Greefrath, G. (2018). *Anwendungen und Modellieren im Mathematikunterricht. Didaktische Perspektiven zum Sachrechnen in der Sekundarstufe*. Berlin: Springer.

Greefrath, G. & Siller, H.-S. (2018). Digitale Werkzeuge, Simulationen und mathematisches Modellieren. In G. Greefrath & H.-S. Siller (Hrsg.), *Digitale Werkzeuge, Simulationen und mathematisches Modellieren. Didaktische Hintergründe und Erfahrungen aus der Praxis* (S. 3–22). Wiesbaden: Springer.

Greefrath, G., Kaiser, G., Blum, W. & Borromeo Ferri, R. (2013). Mathematisches Modellieren – Eine Einführung in theoretische und didaktische Hintergründe. In R. Borromeo Ferri, G. Greefrath, G. Kaiser (Hrsg.), *Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule. Theoretische und didaktische Hintergründe* (S. 1–7). Wiesbaden: Springer.

Haas, B. & Beckmann, A. (2008). Physikalisches Experimentieren, mathematisches Modellieren und Interdisziplinäres Arbeiten. In Beckmann, A. (Hrsg.), *Ausgewählte Unterrichtskonzepte im Mathematikunterricht in unterrichtlicher Erprobung* (S. 13–48). Bd. 5. Hildesheim/ Berlin: Franzbecker.

Heymann, (1996). *Allgemeinbildung und Mathematik*. Weinheim: Beltz.

Jahnke, H. N. (2009) Hypothesen und ihre Konsequenzen. Ein anderer Blick auf die Winkelsummensätze. *Praxis der Mathematik (PM), 30*, 26–30

Janich, P. (2004). Experiment. In J. Mittelstraß (Hrsg.), *Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie* 1 (S. 621–622). Stuttgart/ Weimar: Verlag J. B. Metzler.

Jungwirth, H. (2003). Interpretative Forschung in der Mathematikdidaktik – ein Überblick für Irrgäste, Teilzieher und Standvögel. *ZDM – Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 35*(5), 189–200.

Jungwirth, H. (2014). *Beitrag zur Theoriearbeit und LehrerInnenbildung in der interpretativen mathematikdidaktischen Forschung.* Münster/ New York: Waxmann.

Kant, I. (1956). *Kritik der reinen Vernunft (KrV)*. Hamburg: Felix Meiner Verlag.

Kaiser, G. (1986). *Anwendungen im Mathematikunterricht. Band I – Theoretische Konzeptionen*. Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

Kaiser, H. (2011). Vorbereiten auf das Prozentrechnen im Beruf. *Praxis der Mathematik (PM), 53*(41), S. 37–44.

Kircher, E. (2015). Elementarisierung und didaktische Rekonstruktion. In: E. Kircher, R. Girwidz & P. Häußler (Hrsg.). Physikdidaktik. Theorie und Praxis, 3. Aufl. (S. 107-139). Berlin, Heidelberg: Springer.

Leuders, T., Ludwig, M. & Oldenburg, R. (2006). Experimentieren im Geometrieunterricht. In T. Leuders, M. Ludwig & R. Oldenburg (Hrsg.), *Experimentieren im Geometrieunterricht. Herbsttagung 2006 des GDM. Arbeitskreises Geometrie.* Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Leuders, T. & Maaß, K. (2005). Modellieren – Brücken zwischen Welt und Mathematik. *PM – Praxis der Mathematik in der Schule*, 47(3), 1–7.

Lichti, M. (2019). *Funktionales Denken fördern. Experimentieren mit gegenständlichen Materialien oder Computer-Simulationen*. Wiesbaden: Springer.

Ludwig, M. & Oldenburg, R. (2007) Lernen durch Experimentieren. Handlungsorientierte Zugänge zur Mathematik. *mathematiklehren 141,* 4–11.

Maaß, K. (2007). *Mathematisches Modellieren*. Berlin: Cornelsen.

Meyer, M. (2007). *Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht. Von der Abduktion zum Argument.* Hildesheim/ Berlin: Franzbecker.

Meyer, M. & Voigt, J. (2010). Rationale Modellierungsprozesse. In B. Brandt, M. Fetzer, M. Schütte (Hrsg.), *Auf den Spuren Interpretativer Unterrichtsforschung in der Mathematikdidaktik* (S. 117–148). Münster: Waxmann.

Moscardini, A., Curran, D., Saunders, R., Lewis, B. & Prior, D. (1984). Issues involved in the design of a mathematical modelling course. In J. Berry, D. Burghes, D. James, A. Moscardini (*Hrsg.*), *Teaching and applying mathematical modelling* (S. 96–106). Chichester: Ellis Horwood.

Mudry, A. (1987). *Galileo Galilei. Schriften − Briefe − Dokumente.* München: Beck.

Müller, G. & Wittmann, E. Ch. (1984). *Der Mathematikunterricht in der Primarstufe.* 3. Auflage. Braunschweig: Vieweg.

Neth, A. & Voigt, J. (1991). Lebensweltliche Inszenierungen. In H. Maier & J. Voigt (Hrsg.), *Interpretative Unterrichtsforschung* (S. 79–116). Köln: Aulis.

Peter-Koop, A. (2003). „Wie viele Autos stehen in einem 3-km-Stau?" Modellierungsprozesse beim Bearbeiten von Fermi-Aufgaben in Kleingruppen. In S. Ruwisch & A. Peter-Koop (Hrsg.), *Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule* (S. 111–130). Offenburg: Mildenberger.

Philipp, K. (2013) *Experimentelles Denken. Theoretische und empirische Konkretisierung einer mathematischen Kompetenz*. Wiesbaden: Springer.

Popper, K. R. (1949). Naturgesetze und theoretische Systeme. In S. Moser (Hrsg.)*, Gesetz und Wirklichkeit* (S. 43–60). Innsbruck/ Wien: Tyrolia.

Reiners, Ch. S. & Saborowski, J. (2017). Wissensvermittlung durch Transformation. In Ch. S. Reiners, *Chemie vermitteln* (S. 33-90). Berlin/ Heidelberg: Springer.

Reiners, Ch. S. & Struve, H. (2011). Gleichungen. Didaktische Implikationen aus der Sicht des Chemie- und Mathematikunterrichts. *Praxis der Naturwissenschaften. Chemie in der Schule* 60(3). 35–40.

Riebel, J. (2010). *Modellierungskompetenzen beim mathematischen Problemlösen. Inventarisierung von Modellierungsprozessen beim Lösen mathematischer Textaufgaben und Entwicklung eines diagnostischen Instrumentariums.* Dissertation, Universität Koblenz-Landau, Fachbereich Psychologie, Landau.

Roth, J. (2014). Experimentieren mit realen Objekten, Videos und Simulationen. Ein schülerzentrierter Zugang zum Funktionsbegriff. *Der Mathematikunterricht 60(6),* 37–42. Zitiert hier die leicht abweichende Online-Veröffentlichung, verfügbar unter: https://www.juergen-roth.de/veroeffentlichungen/2014/roth_2014_experimentieren_mit_realen_objekten_videos_und_simulationen.pdf

Schreiber, A. (1988). Mathematik als Experiment. In Bender, P. (Hrsg.), *Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis. Festschrift für Heinrich Winter* (S. 154-176). Berlin: Cornelsen.

Schupp, H. (1988). Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I zwischen Tradition und neuen Impulsen. *Der Mathematikunterricht*, 34(6), 5-16.

Schwarz, O. (2009). Die Theorie des Experiments. Aus der Sicht der Physik, der Physikgeschichte und der Physikdidaktik. *Geographie und Schule* 180, 15–20.

Schwarzkopf, R. (2006). Elementares Modellieren in der Grundschule. In A. Büchter, H. Humenberger, S. Hussmann & S. Prediger (Hrsg.), *Realitätsnaher Mathematikunterricht* (S. 95-105). Hildesheim: Franzbecker.

Stein, M., Winter, K., Jordan, R. & Podlogar, H. (2010). Das Projekt Mathe-Meister: Stand der Dinge. In A. Lindmeier & S. Ufer (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2010* (S. 827–830). Münster: WTM.

Steinle, F. (2005*). Explorative Experimente. Ampère, Faraday und die Ursprünge der Elektrodynamik.* Stuttgart: Franz Steiner Verlag.

Stork, H. (1979). Zum Verhältnis von Theorie und Empirie in der Chemie. *Der Chemieunterricht, 10*(3), 45–61.

Sträßer, R. (2010). *Mathematik im Beruf und in der Beruflichen (Aus)Bildung. Expertise für die Deutsche Telekom-Stiftung „Mathematik entlang der Bildungskette"*. Gießen: Telekom-Stiftung.

Ströker, E. (1972). Theorie und Erfahrung. Zur Frage des Anfangs der Naturwissenschaft. In W. Beierwaltes & W. Schrader (Hrsg.), *Weltaspekt der Philosophie* (S. 284–311). Amsterdam: Rodopi NV.

Ströker, E. (1973). *Einführung in die Wissenschaftstheorie*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Struve, H. (1990). *Grundlagen der Geometriedidaktik*. Mannheim: BI-Verlag.

Treffers, A. (1983). Fortschreitende Schematisierung. Ein natürlicher Weg zur schriftlichen Multiplikation und Division im 3. und 4. Schuljahr. *mathematik lehren*, 125, 9-12.

Voigt, J. (1984) *Interaktionsmuster und Routinen im Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen und mikroethnographische Falluntersuchungen.* Weinheim und Basel: Beltz.

Voigt, J. (2013). Eine Alternative zum Modellierungskreislauf. In G. Greefrath, F. Käpnick & M. Stein (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013* (S. 1046–1049). Münster: WTM.

Vollmer, G. (2014). Die naturwissenschaftliche Methode – gibt es die? *Praxis der Naturwissenschaften – Physik in der Schule*, 63(8), 11–17.

vom Hofe, R. (2003). *Grundbildung durch Grundvorstellungen. mathematik lehren, 118*, 4–8*.*

Werge, C. (1989). *Erkennen und Treffen vereinfachender Annahmen zur mathematischen Beschreibung von Sachverhalten.* Mathematisch-Naturwissenschaftliche Reihe der wissenschaftlichen Zeitschrift der Karl-Marx-Universität Leipzig, 38, 34–47.

Winter, H. (1992). *Sachrechnen in der Grundschule.* Frankfurt: Scriptor.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der GDM, 61*, 37–46.

Witzke, I. (2012). Mathematik – eine (naive) Naturwissenschaft im Schulunterricht? In M. Ludwig & M. Kleine (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012* (S. 949–952), Münster: WTM.

Anschrift der Verfasser*innen

Julia Rey
Universität zu Köln
Institut für Mathematikdidaktik
Herbert-Lewin-Straße 10
50931 Köln
j.rey@uni-koeln.de

Michael Meyer
Universität zu Köln
Institut für Mathematikdidaktik
Herbert-Lewin-Straße 10
50931 Köln
michael.meyer@uni-koeln.de

Anhang

Transkriptionsregeln

Abkürzung	*Sprecher*in*
I	Interviewerin
C	Corinna

Zeichen	*Bedeutung*
,	kurzes Absetzen innerhalb einer Äußerung, max. eine Sekunde
..	Kurze Pause, max. zwei Sekunden
…	Mittlere Pause, max. drei Sekunden
(4 sec), (5 sec), (6 sec), …	Sprechpause, Länge in Sekunden
genau**.**	Senken der Stimme am Ende eines Wortes oder einer Äußerung.
und du**–**	Stimme in der Schwebe am Ende eines Wortes oder einer Äußerung
was**‘**	Heben der Stimme, Angabe am Ende des entsprechenden Wortes
<u>sicher</u>	Auffällige Betonung
dreißig	Gedehnte Aussprache