Mathematik und Realität – Mathematische Modellierungen aus wissenschaftstheoretischer Perspektive

UWE SCHÜRMANN, SOEST

***Zusammenfassung**: Die fachdidaktische Forschung zum mathematischen Modellieren verläuft bisher weitgehend losgelöst von der seit mehr als 100 Jahren andauernden philosophischen Diskussion zu Modellen. Dieser Artikel verbindet daher beide Bereiche, Wissenschaftstheorie (in der Tradition analytischer Philosophie) und Mathematikdidaktik, und fragt danach, welchen Beitrag zentrale wissenschaftstheoretische Positionen für die Erfassung von Modellierungsprozessen im Mathematikunterricht leisten können. Dabei wird vor allem die Trennung zwischen Mathematik und Realität bzw. „Rest der Welt" vor dem Hintergrund der Diskussion zu syntaktischen und semantischen Sichtweisen auf Modelle und Theorien infrage gestellt.*

***Abstract:** Hitherto, research on modelling in mathematics classroom rather not refers to philosophical findings on models in science. Therefore, this article connects both, (analytic) philosophy of science and research on mathematics education, and asks for what impact major positions in philosophy of science could have on the discourse on mathematical modelling in the classroom. In particular, the article challenges the separation between mathematics and reality or the "rest of the world" (which is widely shared among researchers on modelling in mathematics classroom) against the background of the syntactic view and the semantic view on models and theories.*

1. Einführung

Die (analytische) Trennung zwischen Mathematik und der Realität, bzw. dem „Rest der Welt" findet sich in zahlreichen Publikationen zu mathematischen Modellierungen wieder. So verwendet beispielsweise PISA[1] (OECD, 2009) die folgende Darstellung im mathematischen Rahmenkonzept (vgl. Abb. 1).

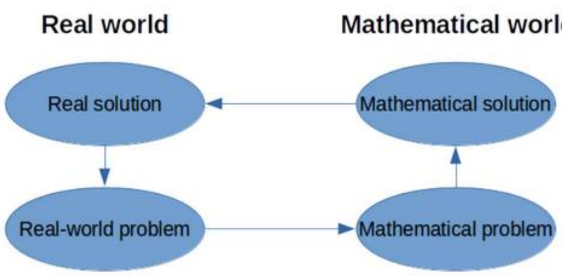

Abb. 1: Modellierungskreislauf aus dem theoretischen Rahmenkonzept von PISA (OECD, 2009, S. 105)

Mathematik und die echte Welt werden hier als getrennte Bereiche verstanden. Der Übergang von der realen Welt zur mathematischen Welt erfolge durch Aktivitäten, wie etwa dem Verbinden der Sprache, in der das reale Problem gefasst ist, und der symbolischen und formalen Sprache der Mathematik, dem Ausmachen von Mustern und Strukturen oder dem Erkennen von Aspekten, die sich isomorph zu bekannten Problemen verhalten (ebd.).

Im Einleitungstext der 14. ICMI[2]-Studie zu Modellierungen und Anwendungen (Blum, Galbraith, Henn & Niss, 2007) wird ebenfalls ein Modellierungskreislauf präsentiert, der zwischen Mathematik und einer Extra-Mathematischen-Welt unterscheidet. Auch in vielen Beiträgen zu den ICTMA[3]-Bänden wird diese Trennung postuliert.

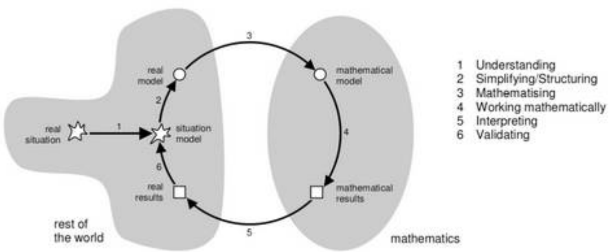

Abb. 2: Modellierungskreislauf von Blum und Leiß (2006)

Abb. 2 zeigt einen Modellierungskreislauf von Blum und Leiß, der in der deutschsprachigen Literatur zu mathematischen Modellierungen häufig zitiert wird und sich in diversen Arbeiten, zum Teil in veränderter bzw. erweiterter Form (vgl. Greefrath, 2011; Ludwig & Reit, 2013) wiederfindet. Borromeo Ferri (2006) gibt eine sorgfältig erarbeitete Übersicht über eine Reihe von Modellierungskreisläufen, wobei sie diese in Gruppen einteilt. Auch aus ihrer Übersicht geht deutlich hervor, dass die (analytische) Trennung zwischen Mathematik und Realität in den unterschiedlichen Ansätzen zur Rekonstruktion von Modellierungsprozessen omnipräsent ist.

Demgegenüber steht eine kleine Anzahl mathematikdidaktischer Veröffentlichungen, die diese Trennung infrage stellen. So analysieren beispielsweise Biehler, Kortemeyer und Schaper (2015) Modellierungsprozesse in Ingenieursklassen und kommen zu dem Ergebnis, dass die Trennung zwischen Mathematik und dem „Rest der Welt" wie auch die Unterteilung von Modellierungsprozessen in bestimmte distinkte

Phasen inadäquat sei. Meyer und Voigt (2010) analysieren Modellierungskreisläufe auf theoretischer Ebene und stellen dabei die mit dem Kreislauf einhergehende analytische Trennung zwischen Mathematik und dem „Rest der Welt“ infrage. Beim Schritt der Vereinfachung, welcher im Kreislauf dem „Rest der Welt“ zugeordnet wird, müssten ihrer Ansicht nach bereits Zusammenhänge aus dem Bereich der Mathematik berücksichtigt werden. Diese theoretische Schlussfolgerung wird von den Autoren durch eine anschließende empirische Untersuchung gestützt. Voigt identifiziert daraufhin die analytische Trennung zwischen Mathematik und Realität als das Problem, dessen Lösung darin bestehe,

> den Bereich zwischen dem \`Rest der Welt\` und der \`Mathematik\` in den Blick zu nehmen und in diesem Zwischenbereich etwas Substantielles zu erkennen. (Voigt, 2011, S. 868)

Er fordert daran anschließend nicht die Trennung, sondern den Zusammenhang beider Bereiche zu untersuchen.

Dieser Artikel setzt hier an. Im Folgenden wird das Verhältnis von Mathematik und Realität mit Blick auf die Beschreibung von Modellierungsprozessen genauer ausgelotet. Damit wird der Frage nachgegangen, ob und inwiefern die analytische Trennung von Mathematik und Realität gerechtfertigt werden kann oder ob sie etwa durch alternative Deutungen des Verhältnisses von Mathematik und Realität ergänzt bzw. ersetzt werden sollte.

2. Orientierung

Die in den Modellierungskreisläufen anzutreffende Trennung zwischen Mathematik und Realität kann auf mindestens drei verschiedene Weisen gedeutet werden.

1) Sie kann als eine ontologische Trennung verstanden werden, wonach die Mathematik ihrem Wesen nach von der Realität, der realen Welt oder dem Rest der Welt zu unterscheiden wäre.

2) Die Trennung kann als eine analytische Trennung verstanden werden, die dazu dient, Modellierungsaktivitäten adäquat zu beschreiben, d. h. sie empirisch erfassen zu können.

3) Sie kann weiterhin als eine in didaktischer Hinsicht sinnvolle Trennung verstanden werden, die Lernenden zur Unterstützung und Orientierung bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben dient.

Die drei genannten Deutungen schließen weder einander aus, noch bedingen sie sich gegenseitig. Es kann lediglich vermutet werden, dass der Auffassung, eine solche Trennung sei didaktisch sinnvoll, Vorschub geleistet wird, wenn die Deutung als analytische Trennung in der mathematikdidaktischen Forschung weit verbreitet ist.

Jede der drei genannten Deutungen wird in der Literatur vor dem Hintergrund unterschiedlicher Fragestellungen und Perspektiven problematisiert. So fragt Voigt aus einer mathematikdidaktischen Perspektive, ob

> im Platzieren der ‚Realsituation‘ an den Anfang des Modellierungsprozesses – fern von der Mathematik – das Ideal einer Lebensweltorientierung zum Ausdruck [kommt], unter der man sich vorstellt, die Mathematik entwickle sich aus einer von Mathematik unbefleckten Lebenswelt heraus. (Voigt, 2011, S. 869)

Eine solche Vorstellung vom Verhältnis von Mathematik und Realität wird in diversen mathematikdidaktischen Arbeiten unterminiert. So spricht Niss (1994, S. 371) vom „Relevanz-Paradox“, mit dem die Mathematikdidaktik konfrontiert sei. Mathematik werde zum einen immer relevanter und zugleich immer irrelevanter, weil Mathematik zwar bei der Entwicklung von immer mehr technischen Geräten eine entscheidende Rolle spiele, die Bedienung technischer Geräte mathematisches Verständnis jedoch immer öfter nicht mehr voraussetzt. Keitels (1989) Begriffspaar De-/Mathematisierung weist in die gleiche Richtung, jedoch wird hier die gesellschaftliche Bedeutung von Mathematik stärker hervorgehoben und die Verwendung von vermeintlich realitätsnahen Mathematikaufgaben im Unterricht problematisiert. Mit De-/Mathematisierung bezeichnet Keitel solche Prozesse, die dazu führen, dass Mathematik in Form von Technisierung und Automatisierung unsere Lebenswelt mehr und mehr bestimmt (Mathematisierung) und gleichzeitig aus denselben Gründen Mathematik zunehmend aus dem Alltag verschwindet (Demathematisierung), da die zuvor noch benötigten Fähigkeiten dem Menschen fortan von einem technischen Gerät abgenommen werden. Borba und Skovsmose (2004) setzen sich kritisch mit der ideologischen Wirkung von Mathematik(-unterricht) in gesellschaftlichen Zusammenhängen auseinander. Diese bestehe darin, dass Mathematik, wenn sie als ein perfektes System und unfehlbares Werkzeug zur Lösung realer Probleme angesehen werde, politische Kontrolle weiter Teile der Bevölkerung begünstige.

Aus den hier aufgeführten Arbeiten wird bereits deutlich, dass die Trennung zwischen Mathematik und Realität nicht als eine feststehende Grenze in lebensweltlichen Zusammenhängen verstanden werden darf. Eine Domäne aus dem „Rest der Welt“ kann alsbald mathematisiert sein. Da Schülerinnen und Schüler in ihrer mathematisierten Lebenswelt Erfahrungen sammeln, bevor mathematische Begriffsbildungsprozesse im Unterricht einsetzen, wäre die von Voigt in kritischer Absicht skizzierte Lebensweltorientierung von Mathematikunterricht eher abzulehnen.

Eine weitere problematisierende Perspektive auf das Verhältnis von Mathematik und Realität bieten solche historisch-philosophischen Ansätze, die in der Regel der Postmoderne zugeordnet werden. Diesen Ansätzen ist gemein, dass sie die historischen Zusammenhänge explizieren, aus denen ein spezifisches, heute vorherrschendes Bild von Mathematik entstanden ist. So sieht Deleuze (Deleuze, 1994; Deleuze & Guattari, 1987) neben der vorherrschenden axiomatisierenden Formalisierung von Mathematik eine problematisierende Seite der Mathematik. Er arbeitet anhand von historischen Beispielen, allen voran die Entwicklung des Calculus durch Leibniz, die Möglichkeit einer ereignishaften und aus konkreten Problemzusammenhängen entstehenden Mathematik heraus (vgl. de Freitas, 2013; Smith, 2006). Châtelet (2000) hebt die gegenständliche Seite von Mathematik hervor, indem er anhand historischer Beispiele verdeutlicht, auf welche Weise mathematische Innovationen und Begriffe abhängig von den zu einer bestimmten Zeit verwendeten mathematischen Werkzeugen und Formen der graphischen Darstellung sind. Er deutet dabei Diagramme als einen Ausschnitt aus einer Folge von körperlichen Gesten und setzt damit die formale Seite der Mathematik mit ihrer materialen und vor allem körperlichen Basis in Beziehung. De Freitas und Sinclair (2014) greifen diesen Gedanken auf, wenn sie eine Didaktik mathematischer Begriffe entwickeln, in der sie neben der logischen und epistemologischen vor allem die materiale und ontologische Seite von Mathematik betonen. In die gleiche Richtung deuten die Überlegungen von Schürmann (2018a), der zeigen möchte, dass im Speziellen mathematische Modelle nicht bloß der Erkenntnis dienen, sondern auch als Dinge in der Welt verstanden werden sollten, d. h. neben ihrer epistemologischen Funktion auch ihre ontologische Seite bedacht werden muss. Ferner befasst sich Schürmann (2018b) mit der Genese historischer Wissensformationen, die zur Trennung von Mathematik und Realität beigetragen haben. Am Beispiel von Freges logizistischem und Hilberts formalistischem Programm (Frege, 1884, 1892; Hilbert, 1903) und vor dem Hintergrund des modernen Denkens, der von Foucault so bezeichneten Episteme der Moderne (Foucault, 1996), wird diese Trennung als Reaktion auf die drohende Relativierung mathematischer Wahrheitsansprüche im 19. Jahrhundert gedeutet. Die hier angeführten Arbeiten machen deutlich, dass die Grenze zwischen Mathematik und Realität historisch bedingt und nicht denknotwendig ist.

Eine weitere Problematisierung der Trennung von Mathematik und Realität, bzw. dem „Rest der Welt", im analytischen Sinne geht aus solchen empirischen Untersuchungen hervor, die individuelle Modellierungsprozesse zum Gegenstand haben, und zeigen, dass Schülerinnen und Schüler bereits vor dem Aufstellen eines mathematischen Modells Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten und realen Gegebenheiten berücksichtigen. In den Arbeiten von Biehler, Kortemeyer und Schaper (2015) und Meyer und Voigt (2010) wird aus diesem empirischen Befund eine Kritik an der analytischen Trennung von Mathematik und Realität abgeleitet. Andere Arbeiten, in denen ähnliche empirische Beobachtung gemacht werden, stellen hingegen die analytische Trennung von Mathematik und Realität nicht grundsätzlich infrage (vgl. Borromeo Ferri, 2011).

Eine weitere Relativierung der besagten Trennung geht implizit auch aus solchen Arbeiten hervor, die sich zwar nicht explizit der Unterscheidung beider Bereiche widmen, jedoch hervorheben, dass das, was hier unter Mathematik verstanden wird, unterschiedlich aufgefasst werden kann. So unterscheiden z. B. Büchter und Henn (2015) zwischen Realität und *Schul*mathematik. Sie verstehen dabei unter Schulmathematik

> die Auswahl der fachlichen Gegenstände, Betrachtungen und Arbeitsweisen, die für den Mathematikunterricht vorgesehen sind, zusammen mit den Begründungszusammenhängen und Zielsetzungen bei ihrer Auswahl. (Büchter & Henn, 2015, S. 20)

Schulmathematik ist hier also nicht eine gänzlich andere Mathematik als die, die an Hochschulen gelehrt wird. Es handelt sich vielmehr um eine wohlüberlegte Auswahl von Inhalten und Methoden innerhalb ein und derselben Mathematik. Für die Entstehung dieser Mathematik halten sie fest, dass auf der einen Seite „Fragestellungen der außermathematischen Realität Ausgangspunkte für die Entstehung von Mathematik" bilden und auf der anderen Seite „die akademische Ausprägung des Fachs aus der rein geistigen Beschäftigung mit […] mathematischen Konzepten" (Büchter & Henn, 2015; S. 22) resultiert. Demgegenüber sind jedoch auch andere Auffassungen von Mathematik denkbar, bei denen deutlicher zwischen Schul- und Hochschulmathematik unterschieden wird. Vor dem Hintergrund einer diesbezüglichen Diskussion ist es für das Verhältnis von Mathematik und Realität also auch ausschlaggebend, wie man das Verhältnis von Schulmathematik und Mathematik als Wissenschaft, sowie die Entstehung von Mathematik (aus Fragestellungen einer außermathematischen Realität oder einer rein geistigen Beschäftigung mit mathematischen Konzepten) deutet.

3. Fokussierung

Mit diesem Artikel soll der Umfang der hier aufgeführten Perspektiven auf die Trennung von Mathematik und Realität erweitert werden, indem an den wissenschaftstheoretischen Diskurs in der analytischen Philosophie zu Modellen und insbesondere zum dort ebenfalls problematisierten Verhältnis von Mathematik und Realität angeknüpft wird. Da die fachdidaktische Forschung zum mathematischen Modellieren bisher weitgehend losgelöst von der seit mehr als 100 Jahren andauernden philosophischen Diskussion zu Modellen verläuft,[4] ist dieser Artikel von der Hoffnung getragen, dass die Philosophie als Bezugswissenschaft der Mathematikdidaktik hier einen Beitrag dazu leisten kann, Modellierungsprozesse im Mathematikunterricht angemessen zu beschreiben. Damit ist ausdrücklich nicht beabsichtigt, den Beitrag anderer Bezugswissenschaften in dieser Hinsicht infrage zu stellen. Vielmehr geht es darum, die Diskussion rund um Modellierungen im Mathemathematikunterricht weiterzuführen und zu bereichern.

Wissenschaftstheorie wird hier als Teilgebiet der Philosophie verstanden, in dem Geltungsansprüche empirischer Wissenschaften und der Mathematik verhandelt werden, z. B. mithilfe der Rekonstruktion wissenschaftlicher Theorien. Wissenschaftstheorie mit Bezug auf Geisteswissenschaften (z. B. Hermeneutik) wird dabei ausgeklammert, auch wenn ein solcher Zugang unter bestimmten Perspektiven auf Modelle von Interesse sein kann. So vergleichen beispielsweise Frigg und Salis (2019) Modelle mit (literarischen) Fiktionen. Im Folgenden können daher die Begriffe wissenschaftliche Theorie, empirische Theorie oder Theorie synonym verwendet werden.

Mit dem Fokus auf wissenschaftstheoretische Fragestellungen geht außerdem eine Abgrenzung zur übergeordneten Epistemologie einher. So geht es im Folgenden hauptsächlich um das Verhältnis von Mathematik und Realität im Kontext von Theorien und Modellen. Die epistemologische Frage nach der Erkenntnis von Realität überhaupt wird hier nicht gestellt, wenngleich damit die Bedeutung grundlegender epistemologischer Fragestellungen für das Verständnis von Modellierungen (z. B. das erkennende Subjekt im Modellierungsprozess) nicht in Abrede gestellt werden soll.

Der Ansatz besteht darin, Überlegungen aus der Wissenschaftstheorie zum Verhältnis von Theorien, Modellen und Realität aufzugreifen und sie für die Mathematikdidaktik, soweit möglich, nutzbar zu machen. Dazu werden zwei zentrale Sichtweisen innerhalb der analytischen Philosophie, die syntaktische und die semantische Sicht, aus der nun schon seit mehr als 100 Jahre andauernden Diskussion zum Verhältnis von Modellen und Theorien gegenübergesellt, und auf mathematische Modellierungen im Unterricht bezogen. Mit dieser Auswahl soll die Bedeutung abweichender bzw. ergänzender Ansätze, wie etwa die pragmatische Sicht auf Modelle (vgl. Gelfert, 2017; Winther, 2016), nicht infrage gestellt werden. Die Beschränkung auf die zwei genannten Sichtweisen erfolgt hier lediglich aus pragmatischen Gründen. So können bereits diese beiden Sichtweisen im Rahmen eines solchen Artikels nur in Grundzügen vorgestellt werden. Ihre Diskussion liefert jedoch wertvolle Hinweise, um zu den folgenden Fragen Auskunft geben zu können:

1) *Epistemologische Fragestellung:* Ist die in der mathematikdidaktischen Forschung zu Modellierungen häufig anzutreffende analytische Trennung zwischen Mathematik und Realität vor dem Hintergrund der Diskussion zu Modellen und Theorien innerhalb der analytischen Philosophie als solche haltbar oder muss sie womöglich revidiert oder zumindest relativiert werden?
2) *Methodologische Fragestellung:* Ergeben sich aus der Diskussion zu den in der Tradition analytischer Philosophie stehenden syntaktischen und semantischen Sicht auf Modelle und Theorien etwaige Konsequenzen für die Beschreibung mathematischer Modellierungen in unterrichtlichen Zusammenhängen? Konkret: Lassen sich methodische Werkzeuge ableiten, die es erlauben, Modellierungsprozesse angemessener und genauer als bisher zu beschreiben?

Eine dritte, konstruktive Fragestellung, die sich aus der möglichen Deutung der Trennung zwischen Mathematik und Realität ergibt, wird indes in diesem Artikel ausgeklammert. Die Frage, ob die Trennung zwischen Mathematik und Realität in didaktischer Hinsicht sinnvoll ist, da sie den Lernenden zur Unterstützung und Orientierung bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben dient, wird im Rahmen dieses Artikels nicht gestellt.

4. Analyse

Weite Teile der wissenschaftstheoretischen Diskussion über Modelle aus dem vergangenen Jahrhundert haben ihren Ursprung in der Modelltheorie als Teilgebiet mathematischer Logik. Wenn der Blickwinkel in der mathematischen Logik auf formale Sprachen gerichtet ist, so wurde dieser zur Erfassung wissenschaftlicher Modelle und Theorien auf natürliche und wissenschaftliche Sprachen erweitert, d. h. formale

Sprachen und Fachsprachen wurden als Teilmengen einer natürlichen Sprache verstanden. Damit kann auch die in der Logik gebräuchliche Unterscheidung zwischen Syntax und Semantik auf wissenschaftliche Theorien übertragen werden.

Die Syntax einer Sprache *S* besteht aus deren Vokabular und den Regeln zum Bilden wohldefinierter Ausdrücke in *S*. Die Semantik von *S* erlaubt die Interpretation von wohldefinierten Ausdrücken, indem diese auf eine andere relationale Struktur *R* abgebildet werden. Damit werden zum einen wohldefinierte Ausdrücke aus *S* verständlich gemacht und zum anderen können diese Ausdrücke innerhalb von *S* auf ihren Wahrheitsgehalt hin untersucht werden. Aus der Unterscheidung in Syntax und Semantik ergeben sich zunächst zwei konträre (jedoch inhaltlich zusammenhängende) Sichtweisen auf Modelle und Theorien: die syntaktische und die semantische Sichtweise.

Syntaktische Sichtweisen auf wissenschaftliche Theorien wurde vor allem von Vertretern des Wiener Kreises entwickelt. Damit sind diese Sichtweisen auf Theorien und Modelle eng verbunden mit dem Logischen Positivismus bzw. Logischen Empirismus,[5] welcher im 20. Jahrhundert bis in die sechziger Jahre hinein großen Einfluss auf die Philosophie der Wissenschaft ausübte (Gelfert, 2017). Wesentlich für das Aufkommen und Erstarken des Logischen Positivismus waren sicherlich die Erfolge der Naturwissenschaften in Kombination mit einer sich rasant weiterentwickelnden axiomatisch-formalen Mathematik Anfang des 20. Jahrhunderts.[6] Das Programm des Logischen Positivismus besteht unter anderem darin, diese erfolgsversprechende Kombination zum Vorbild für die Philosophie insgesamt zu erklären und ferner eine Wissenschaftstheorie auszuarbeiten, die nur noch solche Wissenschaften als Wissenschaft anerkennt, die von rein logischen Wahrheiten handeln oder (einschließendes oder) von durch Erfahrung überprüfbaren Phänomenen.

Semantische Sichtweisen auf Theorien und Modelle entstanden im Wesentlichen als Reaktion auf syntaktische Theoriebildung und die damit verbundenen Probleme (auf einige davon wird im Folgenden eingegangen). Wesentlich unterscheiden sich beide Ansätze dahingehend, dass mit syntaktischen Ansätzen der Versuch unternommen wird, Theoriebildung in idealisierter Form zu beschreiben. In semantischen Ansätzen geht es hingegen darum, Theoriebildung im Sinne wissenschaftlicher Praxis zu skizzieren. Weil mit beiden Sichtweisen unterschiedliche Ziele verfolgt werden, soll im Folgenden nicht eine der beiden Sichtweisen favorisiert werden. Vielmehr geht es darum, vor dem Hintergrund einer kritischen Würdigung beider Ansätze Modellierungsprozesse genauer verstehen zu wollen.

Der Umfang an Literatur zu den beiden hier als Sammelbegriff verwendeten Sichtweisen auf Theorien und Modelle macht es erforderlich, eine Auswahl unter den Autoren zu treffen, auf die sich der Artikel bezieht. Für die syntaktische Sicht werden exemplarisch die Arbeiten von Rudolf Carnap herangezogen (Carnap, 1939, 1956, 1958, 1969). Die Darstellung der semantischen Sicht stützt sich auf die Arbeiten von Patrick Suppes (Suppes, 1957, 1960, 1962, 1967).

4.1 Carnaps syntaktische Sicht auf Modelle

Aus Carnaps (1969, S. 255 ff., 1958, siehe auch Suppe, 1971) syntaktischer Sicht kann eine Theorie anhand von Sätzen bzw. Aussagen rekonstruiert werden. Die Sprache *S* einer Wissenschaft, in der die Theorie formuliert wird, besteht aus der theoretischen Sprache S_T und der Beobachtungssprache S_O als ihre Teilsprachen. Die deskriptiven Konstanten von S_T werden theoretische Terme oder *T*-Terme genannt; die von S_O werden „Observable" (Carnap, 1969, S. 225), Beobachtungsterme oder *O*-Terme genannt (Carnap, 1969, S. 255). *O*-Terme bezeichnen beobachtbare Objekte oder Vorgänge und beobachtbare Relationen zwischen diesen. Carnap nennt hier die Beispiele „Zürich", „kalt" und „schwer" (Carnap, 1958, S. 237). *T*-Terme sind solche, die nicht durch *O*-Terme explizit definierbar sind, sie können also nicht der Beobachtung entlehnt werden. Er nennt hier fundamentale Terme der theoretischen Physik wie etwa „Masse" oder „Temperatur" als Beispiel (ebd.). Unter einem Term versteht Carnap, ähnlich wie im Englischen, einen Begriff oder einen Ausdruck in einer formalen Sprache *S* (Carnap, 1969, S. 232).

Aus dieser Unterscheidung ergeben sich nun drei Arten von Sätzen:

1) Beobachtungssätze oder *O*-Sätze, die *O*-Terme, jedoch keine *T*-Terme enthalten

   und theoretische Sätze oder *T*-Sätze, die

2) entweder *T*-Terme und *O*-Terme enthalten oder

3) nur *T*-Terme, jedoch keine *O*-Terme enthalten.

Eine Theorie in der Sprache *S* beruht diesem Ansatz nach auf zwei Arten von Postulaten: den theoretischen oder *T*-Postulaten und den Zuordnungs- oder *Z*-Postulaten (auch Korrespondenzpostulate, Korrespondenzregeln (Carnap, 1969) oder Protokollsätze (Carnap, 1932) genannt). Die *T*-Postulate sind reine *T*-Sätze, d. h. Sätze der Art (3). *T*-Postulate, deren Anzahl endlich ist, umfassen alle fundamentalen Gesetze der Theorie. Dies können beispielsweise die

Grundgesetze der klassischen Mechanik oder die Hauptsätze der Thermodynamik sein. *T*-Postulate sind demnach nichts anderes als die Axiome der Theorie. Sie werden als gegeben vorausgesetzt. Alle Aussagen *s*, die rein syntaktisch aus den *T*-Postulaten abgeleitet werden können, gehören ebenfalls zu S_T. Die Herleitung solcher Aussagen erfolgt unter Verwendung syntaktischer Regeln, eines Kalküls, welches in naturwissenschaftlichen Theorien neben mathematischen Regeln weitere Bildungsregeln enthalten kann.

S_T hat für sich genommen keine (empirische) Bedeutung. Die Bedeutung von *T*-Termen wird erst indirekt mittels S_O hergestellt. Carnap geht davon aus, dass *O*-Terme auf direkt beobachtbare oder zumindest beinahe direkt beobachtbare physische Objekte oder Vorgänge und Relationen zwischen ihnen verweisen (Carnap, 1969, 225 ff.). Diese direkte Interpretation soll im Folgenden *D*-Interpretation genannt werden. Damit ist die Semantik von *O*-Termen direkt gegeben. Für *T*-Terme ist dies per Definition nicht möglich, sie sind nicht beobachtbar. Es sei zudem nicht möglich, empirische Aussagen aus theoretischen Aussagen herzuleiten, d. h. aus Sätzen der Art (3) kann nicht ohne Weiteres auf Sätze der Art (1) geschlossen werden. Es bedarf Regeln, die sogenannten *Z*-Postulate, durch die *T*-Terme mit *O*-Termen verbunden werden. Als Beispiel einer solchen Regel nennt Carnap (1969, S. 233) die Messung elektromagnetischer Schwingungen einer bestimmten Frequenz, die durch die Anzeige einer bestimmten Farbe sichtbar gemacht wird. *Z*-Postulate verbinden demnach etwas Sichtbares mit etwas prinzipiell Unsichtbarem, aber sie machen das Unsichtbare selbst dadurch nicht sichtbar. Man kann nicht sagen, „seht her, hier ist diese elektromagnetische Schwingung"; der *T*-Term, den es zu interpretieren gilt, bleibt theoretisch. Diese Art der Interpretation ist also deutlich zu unterscheiden von der *D*-Interpretation der *O*-Terme. Die Interpretation bleibt zudem unvollständig, da es stets möglich ist, weitere Regeln für die Verbindung von *T*-Termen mit *O*-Termen aufzustellen, z. B. dann, wenn in physikalischen Theorien neue Verfahren zur Messung einer Größe hinzukommen. Da es sich bei der Verbindung von *O*- und *T*-Termen mittels *Z*-Postulaten um eine partielle Interpretation handelt, wird diese Art der Interpretation im Folgenden *P*-Interpretation genannt.

Carnap ist es wichtig, *Z*-Postulate nicht mit Definitionen zu verwechseln (Carnap, 1956, S. 48). Die Definition von *T*-Termen ist selbst theoretischer Art und kann nur innerhalb von S_T adäquat gegeben werden. Ein *T*-Term wird innerhalb von S_T logisch interpretiert, weshalb diese Art der Interpretation im Folgenden *L*-Interpretation genannt wird. Es ist nicht möglich, einen *T*-Term vollständig zu definieren, indem man ihn über *Z*-Postulate mit *O*-Termen in Verbindung bringt. Carnap führt hier folgendes erläuterndes Beispiel an: Die Begriffe der Geometrie, wie Hilbert sie definiert hat, sind gänzlich theoretischer Art. Werden diese jedoch innerhalb einer empirischen Theorie verwendet, müsste ihr empirischer Gebrauch mithilfe von *Z*-Postulaten eingeführt werden. Nun stimmt aber kein geometrischer *O*-Term, wie etwa „Lichtstrahl" oder „gespannte Schnur", mit den theoretischen Eigenschaften des *T*-Terms Gerade (unendlich lang, absolut gerade) überein (Carnap, 1969, S. 236).

Mit diesem begrifflichen Repertoire ausgestattet, kann Carnap nun sein Verständnis von empirischen Theorien deutlich machen:

> Eine Theorie ist ein Satz. Dieser Satz ist die Konjunktion aus den beiden Sätzen *T* und *Z*, wobei *T* die Konjunktion aller *T*-Postulate und Z die Konjunktion aller *Z*-Postulate ist. (Carnap, 1969, S. 266)

Um diesen Zusammenhang deutlich zu machen, wird von Carnap für Theorien die Abkürzung *TZ* verwendet. Carnap grenzt anschauliche Modelle der Physik, die wie ein Schiffsmodell aus realen Gegenständen gebaut werden, von wissenschaftlichen Modellen in einem zeitgemäßen Sinne ab. Wie in der Mathematik und in der Logik verstehe man in den Naturwissenschaften im 20. Jahrhindert unter einem Modell eine „abstrakte, begriffliche Struktur". Carnap definiert *Modelle* in diesem Sinne als

> eine vereinfachte Beschreibung einer (physikalischen, wirtschaftlichen, soziologischen oder sonstigen) Struktur, in der abstrakte Begriffe mathematisch verbunden werden. (Carnap, 1969, S.174 f.)

Am Beispiel der Bedeutung der nicht-euklidischen Geometrie für die Physik, vor allem für die Entwicklung der Relativitätstheorie, macht Carnap deutlich, dass es für Theorien nicht von Nachteil sein muss, wenn sie nicht, oder nur schwer veranschaulicht werden können. Er wendet sich damit gegen die Idee, das Modelle vor allem veranschaulichen sollen. Für Carnap ist der Anschauungscharakter von Modellen nur ein *„Notbehelf"* oder eine *„didaktische Hilfe"*, die lediglich den Nutzen bringt, über Theorien in anschaulichen Bildern nachdenken zu können. Eine bedeutsame Rolle bei der Erstellung empirischer Theorien spielen nach Carnap nur solche Modelle, die eine Verbindung von S_T mit S_O ermöglichen. Er nennt diese Modelle „constructing models" (Carnap, 1961, S. 204), sie dienen der *P*-Interpretation von *T*-Termen und sind in diesem Sinne nichts Anderes als *Z*-Postulate.

Bis hierhin wurde erläutert, was Carnap unter einer Theorie in den empirischen Wissenschaften versteht. Um etwaige Konsequenzen seiner syntaktischen

Sicht auf Theorien für mathematische Modellierungen zu durchdenken, bedarf es der Erläuterung, was Carnap unter Mathematik versteht.

Carnap (1958, S. 238) folgt Hilbert darin, dass mathematische Begriffe nur theoretischer Art sein können. Sie können nicht als Dinge in der Welt beobachtet werden. Carnap zählt mathematische Begriffe wie die logischen Begriffe zu den nicht-deskriptiven Begriffen in S_T. S_O ist lediglich eine Sprache erster Ordnung, neben den *O*-Termen ist dort die Quantorenlogik mit Identität enthalten. Alle stärkeren logischen Hilfsmittel gehören zu S_T (vgl. Stegmüller, 1970, S. 296). Wenn nun aber in einer empirischen Theorie mathematische Begriffe zur Beschreibung von beobachtbaren Dingen verwendet werden, führt er dafür gesondert mathematische *O*-Terme ein, die nicht mit denen im eigentlichen Sinne mathematischen Begriffen verwechselt werden dürfen. Am Beispiel der Geometrie macht er diesen Umstand deutlich:

> Diese Unterscheidung zwischen zwei Arten von Geometrie ist grundlegend und heute allgemein anerkannt. Wenn eine Behauptung über das Wesen des geometrischen Wissens aufgestellt wird, sollte man zunächst einmal fragen: »An welche Art von Geometrie denken Sie? Sprechen Sie von der mathematischen oder der physikalischen Geometrie?« Eine klare Unterscheidung ist hier notwendig, wenn man Verwechslungen vermeiden [will]. (Carnap, 1969, S. 182)

4.2 Suppes semantische Sicht auf Modelle

Die Einwände gegen die syntaktische Sichtweise sind vielfältig (Achinstein, 1963, 1965; Suppe, 1971, 1989, 2000; Suppes, 1967, 1993; van Fraassen, 1980; siehe auch Liu, 1997; Winther, 2016). Einige dieser Einwände lauten:

1) Die Formalisierung von Theorien als linguistische Entitäten sei inadäquat und verstelle den Blick auf die den Theorien zugrundeliegenden Strukturen.

2) In der syntaktischen Sicht wird Theorietestung zu stark vereinfacht, wenn davon ausgegangen wird, dass Sätze aus *So* mit Phänomenen direkt verbunden werden können.

3) Die Unterscheidung in *O*- und *T*-Terme ist nicht haltbar. Es ist fraglich, ob die aus syntaktischer Sicht erfolgte Charakterisierung von *O*-Termen bzw. *T*-Termen hinreichend ist.

4) Es bleibt unklar, was mit partieller Interpretation gemeint ist und verschiedene Möglichkeiten, partielle Interpretation zu definieren, führen zu Inkonsistenzen in der syntaktischen Sicht.

Die semantische Sichtweise auf Theorien und Modelle kann im Wesentlichen als Reaktion auf die hier skizzierten Probleme der syntaktischen Sicht verstanden werden (Gelfert, 2017; Portides, 2017). So ergeben sich deutliche Unterschiede bereits in der Zielsetzung und hinsichtlich der zentralen Fragestellungen, die diesen Ansatz ausmachen. Wurde mit Carnaps syntaktischem Ansatz der Versuch unternommen, Theoriebildung in idealisierter Form zu beschreiben, so wird in semantischen Ansätzen versucht, Theoriebildung im Sinne wissenschaftlicher Praxis zu skizzieren. Die meta-mathematische Beschreibung von Theorien durch formale Sprachen wird in der semantischen Sicht (weitgehend) verworfen. Während in der syntaktischen Sicht eine der zentralen Fragen lautet, in welcher logischen Sprache wissenschaftliche Theorien gefasst werden können, lautet eine der zentralen Fragen in semantische Ansätzen, welche mathematischen Modelle in den Wissenschaften verwendet werden (Winther, 2016). Der wesentliche Unterschied besteht demnach in der Beschreibung von Aussagen in syntaktischen Ansätzen gegenüber der Beschreibung von Strukturen in den semantischen (Gelfert, 2017). Für die direkte Analyse solcher Strukturen bieten sich mathematische Werkzeuge an. Der Umweg über Reformulierung einer Theorie in einer bestimmten formalen Sprache sei demgegenüber unpraktisch, insbesondere wenn es um die Beschreibung von Theorien mit komplizierten Strukturen geht (Suppes, 1957, S. 248 f.).

Außerdem ist die direkte Beschreibung mathematischer Strukturen unabhängig von der Beschreibung diese Struktur in einer bestimmten Sprache. Aus semantischer Sicht setzt sich eine Theorie aus einer Menge von mengentheoretischen Strukturen zusammen, die den unterschiedlichen linguistischen Formulierungen einer Theorie genügt (neben dieser Konzeption der semantischen Sichtweise existiert mindestens ein weiterer semantischer Ansatz, der sogenannte State-Space Approach (z. B. van Fraassen, 1980), der physikalische Systeme durch Zustandsvektoren beschreibt). In der syntaktischen Sicht ist dann ein Modell einer Theorie eine Struktur und darf nicht mit der Beschreibung dieser Struktur in einer bestimmten formalen Sprache verwechselt werden. Es ist lediglich so, dass die Aussagen einer Theorie, die in einer bestimmten linguistischen Formulierung dieser Theorie gefasst werden, in dieser Struktur wahr sind und durch sie interpretiert werden. Suppes schreibt hierzu:

> „[A] model of a theory may be defined as a possible realization in which all valid sentences of the theory are satisfied, and a possible realization of the theory is an entity of the appropriate set-theoretical structure." (Suppes, 1962, siehe auch Suppes, 1957, S. 253; 1960)

Damit wird die Bedeutung von Modellen und mit ihnen die Bedeutung nicht-linguistischer Strukturen für die Theoriebildung deutlich hervorgehoben. Weiterhin macht Suppes darauf aufmerksam, dass Theorien nicht mit reinen, unverfälschten, unorganisierten experimentellen Daten in Verbindung stehen. Die direkte Interpretation von *O*-Termen ist demnach in experimentellen Settings nicht möglich. Vielmehr wird diese Verbindung nur indirekt über, wie Suppes sie nennt, Datenmodelle (models of data) hergestellt (Suppes, 1962). Während Modelle einer Theorie mögliche Realisierungen einer Theorie sind, handelt es sich bei Datenmodelle um mögliche Realisierungen von experimentellen Daten.

Suppes umgeht mit dieser Konzeption Einwand (2), indem er zunächst Datenmodelle, die „Arbeit vor Ort" machen lässt, wenn es darum geht, Experimentelle Daten zu strukturieren. Es besteht dann eine Hierarchie zwischen den unterschiedlichen Arten von Modellen. Sie sind dennoch miteinander verbunden, wenn ein Isomorphismus zwischen den Modellen besteht (zur Kritik an der Verbindung durch Isomorphismus siehe Suárez, 2003). Auf die Einwände (3) und (4) wird in den Abschnitten 4.3 und 4.4 ausführlicher eingegangen.

4.3 Theoretische und empirische Begriffe

Die Trennung zwischen theoretischen Begriffen (*T*-Termen) und empirischen Begriffen (*O*-Termen) wird aus verschiedenen Perspektiven infrage gestellt.

So erwähnt Putnam (1962) die Möglichkeit, Theorien so zu formulieren, dass sie keine theoretischen Begriffe enthalten. Als Beispiel nennt er hier Darwins Evolutionstheorie. Er stellt damit infrage, ob die Trennung in S_O und S_T überhaupt in jedem Fall notwendig ist. Theorien, die ohne *T*-Terme auskommen, ließen sich auch nicht als Satz *TZ* im Sinne Carnaps rekonstruieren.

Putnam geht dann darauf ein, dass die bloße Unterscheidung in *O*- und *T*-Terme nicht hinreichend sei. Er weist darauf hin, dass Begriffe, die nicht der Beobachtungssprache angehören, dadurch noch nicht automatisch zu den theoretischen Begriffen gezählt werden können. Als Beispiele nennt er hier Begriffe der Alltagssprache, die weder theoretischer, noch empirischer Naturen sind.

Darüber hinaus kann die Frage gestellt werden, welches Kriterium herangezogen wird, um eine klare Trennungslinie zwischen S_T und S_O zu ziehen. Carnap geht davon aus, dass von einem praktischen Gesichtspunkt aus meist klar zwischen beiden unterschieden werden kann (Carnap, 1969, S. 255). Für ihn ist entscheidend, ob ein Begriff innerhalb einer Theorie eine direkt oder zumindest mittelbar beobachtbare Entität bezeichnet. Tut er das nicht, handelt es sich um einen *T*-Term.

Achinstein (1965) argumentiert bezogen auf dieses Kriterium der Unterscheidung zwischen *O*- und *T*-Termen dahingehend, dass die Zweiteilung nicht erschöpfend sei. So könne beispielsweise ein Elektron, welches in der Regel zu den nicht-beobachtbaren Begriffen gezählt wird, in bestimmten Kontexten und unter bestimmten Bedingungen als beobachtbar gelten. Daraus folgert er, dass der Term Elektron nicht eindeutig entweder S_T oder S_O zugeordnet werden kann. Vielmehr wären die Bedingungen zu explizieren, unter denen ein Elektron als beobachtbar gilt.

Achinstein diskutiert dann ein zweites Kriterium der Unterscheidung, welches die Trennung in *O*- und *T*-Terme rechtfertigen könnte. *T*-Terme könnten aufgrund ihres theoretischen Charakters von *O*-Termen unterschieden werden (vgl. Hanson, 1958). Ein Begriff wäre dieser Unterscheidung folgend theoriegeladen und damit ein *T*-Term, wenn er nicht ohne theoretischen Hintergrund verstanden werden kann. Achinstein erläutert, dass auch diese Unterscheidung nicht ausreicht, um Begriffe eindeutig in *O*- und *T*-Terme zu unterteilen. Ein Begriff kann im Kontext einer bestimmten Theorie essentiell sein, während er in einer anderen Theorie deutlich unabhängiger von der entsprechenden Theorie ist. So müsse zu jedem Begriff deutlich gemacht werden, welche bestimmte Theorie den Hintergrund bildet.

Auch Putnam (1962) argumentiert dahingehend, dass es keine Begriffe gäbe, die ausschließlich S_O angehören. Er verweist hier auf die Farbe Rot, die in der Alltagssprache zu den *O*-Termen gezählt werden kann, bei Newton jedoch als *T*-Term (rote Korpuskeln) auftritt. Mit der Farbe Rot wird also einmal ein *O*-Term und ein andermal ein *T*-Term bezeichnet je nachdem, welche Theorie (Newtons Korpuskeltheorie oder die Alltags-„Theorie") herangezogen wird. Für Putnam ergibt sich daraus die Herausforderung, *T*-Terme genauer zu definieren:

> A theoretical term, properly so-called, is one which comes from a scientific theory (and the almost untouched problem, in thirty years of writing about ´theoretical terms´ is what is really distinctive about such terms). (Putnam, 1962, S. 243)

Eine weitere Perspektive, aus der heraus Kritik an der Einteilung in *O*- und *T*-Termen geübt wird, befasst sich mit der Möglichkeit, überhaupt eine theoriefreie Beobachtung machen zu können. Diese Perspektive ist auf die mit der syntaktischen Sicht verbundenen Annahme gerichtet, dass *O*-Terme stets durch direkte oder zumindest mittelbare Beobachtung realer Phänomene interpretiert werden können. Aus syntaktischer Sicht müssten *O*-Terme mit direktem Bezug auf reale Phänomene interpretiert werden können.

Dies ist leicht einzusehen, da indirekte Beobachtungen, z. B. durch Instrumente, bereits eine theoretische Deutung beinhalten.

Carnap diskutiert, in wieweit ein *O*-Term direkt beobachtbar sein muss, um als solcher zu gelten. Bei einigen Eigenschaften wie etwa „blau", „hart" und „heiß" (1969, S. 225) sei klar, dass sie direkt mit den Sinnesorganen wahrgenommen werden können. Carnap verwendet die Eigenschaft „direkt beobachtbar" jedoch in einem umfassenderen Sinne. So würde auch eine Temperatur von 80°C als direkt beobachtbar gelten, selbst wenn diese als quantifizierte Größe ausschließlich mithilfe eines Instruments, eines Thermometers, wahrgenommen werden kann. Carnap ist sich dessen bewusst, dass diese Frage, ab wann ein Term als beobachtbar gilt, unterschiedlich beantwortet werden kann.

> Es gibt ein Kontinuum von Bedeutungen, das bei den direkten sinnlichen Wahrnehmungen beginnt und bis zu ganz außerordentlich komplizierten indirekten Beobachtungsmethoden fortschreitet. Man kann offensichtlich dieses Kontinuum nicht durch eine scharfe Linie unterteilen. Es ist eine Frage des mehr oder weniger. (Carnap, 1969, S. 226)

Carnap definiert daraufhin empirische Gesetze, das sind Gesetze, die man direkt durch empirische Beobachtung bestätigen kann, als solche

> die Größen und Begriffe enthalten, die man entweder direkt sinnlich wahrnehmen oder mit relativ einfachen Verfahren messen kann. (ebd.)

Es ist also entscheidend, ob derlei Schlüsse relativ einfach gezogen werden können. Die Sinnliche Wahrnehmung mithilfe eines Instruments kann dann relativ leicht auf einfache sinnliche Wahrnehmungen zurückgeführt werden. Man spricht in diesem Zusammenhang von einem empirischen Reduktionismus, wobei zwischen einem radikalen Reduktionismus, nach dem sich schlechthin jede Aussage in eine Sinneserfahrung übersetzen ließe, und einem schwächeren empirischen Reduktionismus, wonach jede Aussage lediglich im Prinzip mit sie stützenden Sinneseindrücken verknüpfbar sein muss, unterschieden wird. Der radikale empirische Reduktionismus lässt sich nicht durchhalten: Aussagen lassen sich nicht einfach derart zergliedern, dass jeder darin enthaltene Begriff einem direkten Sinneseindruck entspricht. Oder umgekehrt, ließe man tatsächlich nur solche Aussagen zu, in denen dies der Fall ist, würde kaum eine Theorie zustande kommen (Quine, 1980).

Die schwache Variante des empirischen Reduktionismus, die Carnap vertritt, bleibt als Möglichkeit übrig. Jedoch stellt sich in dieser Variante des empirischen Reduktionismus die Frage, ob nicht auch *O*-Terme wie eine Temperatur von 80 °C bereits theoriegeladen sind. Die Möglichkeit, Objekte direkt, ohne Rückgriff auf einen theoretischen Überbau, wahrnehmen zu können, wurde von anderen Autoren ebenso infrage gestellt. Es wird darauf verwiesen, dass es so etwas wie bloße Beobachtungen nicht geben könne und Beobachtungen immer schon eine Art von Interpretation der Sinneseindrücke enthalten. Hanson (1958, S. 5–13) nennt hier verschiedene Beispiele: zwei Biologen, die eine Amöbe betrachten und aufgrund ihres unterschiedlichen theoretischen Hintergrunds unterschiedliche Dinge sehen; Tycho Brahe, dem ein Zylinder gezeigt wird und darin nicht das Teleskop erkennt, wie es vermutlich Kepler tun würde. Hanson geht weiter auf die Beschreibung von optischen Wahrnehmungen ein. Er verdeutlicht, dass das Sehen als bloße Wahrnehmung auf der Netzhaut immer schon interpretiert ist, sobald es ins Bewusstsein gelangt. Auch dieser Umstand verdeutlicht, dass Beobachtungsbegriffe nicht direkt zu den Dingen in Beziehung stehen.

4.4 Korrespondenzregeln und partielle Interpretation

Aus syntaktischer Sicht werden mithilfe von Korrespondenzregeln (Carnaps *Z*-Postulate) *O*-Terme mit *T*-Termen verbunden. Korrespondenzregeln ermöglichen es, so die Annahme, einen *T*-Term aus S_T in S_O partiell zu interpretieren (*P*-Interpretation). Diese Art der Interpretation ist gänzlich verschieden von der direkten Interpretation (*D*-Interpretation) von *O*-Termen, die – so die Annahme – auf direkt beobachtbare Phänomene bezogen werden können. Zudem müssen nicht alle *T*-Terme einer Theorie partiell interpretierbar sein. Während ein *O*-Term stets direkt interpretierbar sein muss, um als solcher zu gelten, sind *T*-Terme denkbar, für die es kein *Z*-Postulat gibt, durch das sie partiell interpretiert werden. Solche *T*-Terme sind dann nur indirekt mit S_O verbunden, indem sie in S_T mit anderen *T*-Termen verbunden werden, die partiell interpretiert werden können. Ein Beispiel: Die irrationale Länge $\sqrt{2}$ kann nicht beobachtet werden. Dennoch kann sie indirekt über eine *L*-Interpretation mit *O*-Termen in Verbindung gebracht werden, wenn man sie z. B. als Seitenlänge des Quadrats mit dem Flächeninhalt 2 interpretiert.

Was unter einem *Z*-Postulat zu verstehen ist, verdeutlicht Carnap (1956, S. 47 f.) anhand von Theorien, die ein räumlich-zeitliches Koordinatensystem voraussetzen. Unter den *Z*-Postulaten einer solchen Theorie wird es dann einige geben, die aufzeigen, wie Aussagen zur Orientierung in einem empirischen (beobachtbaren) Raum-Zeit-Gefüge gemacht werden können. Ebenso können laut Carnap andere *T*-Terme wie etwa Masse oder Temperatur mithilfe von *Z*-Postulaten mit *O*-Termen in Verbindung gebracht werden. Ein *Z*-Postulat könnte beispielweise den theoretischen Begriff „Temperatur“ mit dem empirischen Begriff „wärmer als“ wie folgt verbinden:

> Ein gegenständliches Objekt *u* ist genau dann wärmer als ein gegenständliches Objekt *v*, wenn die Temperatur von *u* höher ist als die von *v*. (vgl. Carnap, 1956, S. 48)

Darüber hinaus gibt es *Z*-Postulate, die den *T*-Term „Temperatur“ zum Beispiel mit dem Gebrauch eines Thermometers in Verbinden bringen. Das Ablesen am Thermometer liefert hier eine Interpretation des theoretischen Begriffs Temperatur. Eine solche Interpretation kann jedoch stets nur partiell sein. Carnap weist darauf hin, dass ein bestimmtes Thermometer nur innerhalb eines Temperaturintervalls funktioniert. Daher können nicht alle Sätze der Theorie, in denen der *T*-Term Temperatur verwendet wird, mithilfe des Thermometers interpretiert werden (Carnap, 1969, S. 262).

Für die *Z*-Postulate einer Theorie gibt Carnap (1956) die folgenden Regeln an:

1) Die Menge an *Z*-Postulaten einer Theorie muss endlich sein.
2) Alle *Z*-Postulate müssen logisch kompatibel mit den *T*-Postulaten sein.
3) In den *Z*-Postulaten dürfen keine Terme enthalten sein, die weder zu S_O noch zu S_T gehören.
4) Jedes *Z*-Postulat muss mindestens ein Term aus S_O und einen aus S_T enthalten.

Abgesehen von der Erläuterung an Beispielen und diesen Regeln für *Z*-Postulaten definiert Carnap jedoch nicht klarer, was unter einer partiellen Interpretation von *T*-Termen zu verstehen ist. Diese Unklarheit wird von verschiedenen Autoren kritisiert (Achinstein, 1963, 1965; Putnam, 1962). Putnam diskutiert daraufhin drei Möglichkeiten, wie *partielle Interpretation* definiert werden kann:

> 1) [T]o 'partially interpret' a theory is to specify a non-empty class of intended models. If the specified class has one member, the interpretation is complete; if more than one, properly partial.
>
> 2) To partially interpret a term P could mean […] to specify a verification-refutation procedure.
>
> 3) Most simply, one might say that to partially interpret a formal language is to interpret part of the language (e.g., to provide translations into common language for some terms and leave the others mere dummy symbols). (Putnam, 1962)

Zu 1): Putnam wendet gleich mehrere Bedenken gegenüber der ersten Möglichkeit ein, dass eine partielle Interpretation meint, eine Klasse von Modellen zu bilden, die in ihrer Struktur der Theorie in Teilen gleicht. Um eine solche Klasse zu definieren, seien (a) wieder theoretische Begriffe der Mathematik nötig, wodurch die Argumentation zirkular würde. Weiterhin verweist er (b) darauf, dass Modelle gewisse übergeordnete Begriffe benötigen, die ein breites Spektrum an unterschiedlichen Gebrauchsweisen beinhalten (z. B. physikalisches Objekt oder physikalische Größe). Solche Begriffe seien, wie Quine (1957) für den Metabegriff *Wissenschaft* verdeutlicht habe, nicht von vornherein definierbar. Es bestünde demnach die Möglichkeit, dass solche Begriffe ihre Bedeutung nicht durch die partielle Interpretation in einem bestimmten Modell erhalten, sondern innerhalb eines theoretischen Rahmens, der auf den Konventionen einer Forschergemeinschaft beruht. Logische Positivsten wie Carnap müssten dann solche Begriffe zwangsläufig als metaphysische Begriffe verstehen und diese zurückweisen. Auch im von Carnap selbst angeführten Beispiel eines *Z*-Postulats, welches den *T*-Term Temperatur mit der empirischen Relation „wärmer als“ verbindet, findet sich ein solcher Begriff, das gegenständliche Objekt, wieder. Letztlich verweist er (c) auf das Problem, dass eine Theorie mit einer leeren Klasse von Modellen nicht mehr als falsch bezeichnet werde könne, sondern lediglich als bedeutungslos. Ob dies über diese sprachliche Nuance hinaus für die Mathematik ein Problem darstellt, mag dahingestellt bleiben.

Zu 2): Die zweite Möglichkeit, partielle Interpretation zu verstehen, erweist sich laut Putnam ebenfalls als nicht tragfähig. Wenn man für jeden Begriff oder jede Aussage eine Prozedur zur Bestätigung oder Widerlegung angibt, würde dies vor dem Hintergrund der philosophischen Position des Verifikationismus, wie Carnap ihn vertritt, zu kuriosen Aussagen führen. Dem Verifikationismus folgend darf nur solchen (synthetischen) Aussagen ein Wahrheitswert zugesprochen werden, die sich empirisch überprüfen lassen. Am Beispiel der Sonne und dem in ihr enthaltenen Helium macht Putnam auf folgendes Problem aufmerksam: Man könne zwar nachweisen, dass die Sonne Helium enthält, jedoch gäbe es keine Prozedur, mit der man für jede noch so kleine Region in der Sonne nachweisen kann, dass es dort Helium gibt. Fehlt diese Prozedur zur Bestätigung oder Widerlegung dieser Aussage, ist ihr Wahrheitswert unbestimmt. Man müsste also die Aussage treffen, dass es in der Sonne Helium gibt, doch für einzelne Regionen der Sonne nicht gesagt werden kann, ob es dort Helium gibt. Eine offenbar widersinnige Formulierung.

Zu 3): Die dritte und letzte mögliche Definition von partieller Interpretation, dass die Systemsprache S_T einer Theorie nur in Teilen interpretiert wird, verwirft Putnam in nur einem Satz. Eine solche Ansicht führe dazu, dass bestimmte theoretische Begriffe letztlich keinerlei Bedeutung haben. Man würde einen Teil von S_T z. B. in Alltagssprache übersetzen und der übriggebliebene Teil des Vokabulars würde lediglich aus Dummy-Begriffen bestehen.

5. Modellieren im Mathematikunterricht aus syntaktischer Sicht

Ausgestattet mit dem begrifflichen Repertoire der syntaktischen Sicht Carnaps und eingedenk der Kritik aus semantischer Sicht daran soll nun der Versuch unternommen werden, mathematische Modellierungen im Unterricht vor diesem Hintergrund zu deuten. Dabei wird das Augenmerk vor allem auf die beiden oben aufgeworfenen Fragen (epistemologische Fragestellung und methodologische Fragestellung) gerichtet sein. Weil mit der syntaktischen Sicht Carnaps zu allererst empirische Wissenschaften ihrem Ideal nach beschrieben werden, müssen Modifikationen vorgenommen werden, um diese auf Modellierungen im Mathematikunterricht zu übertragen.

Für den Mathematikunterricht kann die axiomatisierte Mathematik in ihrer Gesamtheit nicht vorausgesetzt werden. Es ist hier zwischen Schulmathematik und der Mathematik, wie sie Carnap vor Augen hat zu unterscheiden. Es kann nur derjenige Teil der Mathematik in S_T vorausgesetzt werden, der auch tatsächlich den Lernenden im Unterricht zugänglich gemacht wurde; oder genauer, der von den einzelnen Lernenden tatsächlich beherrscht wird. Zur Beschreibung einer mathematischen Modellierung im Unterricht umfasst S_T immer nur einen Ausschnitt von mathematischen Begriffen. Ferner ist nicht davon auszugehen, dass seitens der Lernenden ein Verständnis von Mathematik in Carnaps formalen Sinne vorherrscht. Dies ist jedoch insofern unproblematisch, weil es zur Beschreibung einer Modellierung hier genügt, die von Lernenden verwendeten Begriffe im Sinne Carnaps reformulieren zu können. Dabei werden die von den Lernenden in theoretischer Hinsicht gebrauchten mathematischen Begriffe zu den *T*-Termen gezählt und solche, die sich offensichtlich auf beobachtbare Objekte beziehen, zu den *O*-Termen.

Das aus semantischer Sicht adressierte Problem der theoretischen Terme in empirischen Theorien ist gewichtig. Dennoch kann man im Zusammenhang mathematischer Modellierungen mit einiger Berechtigung daran festhalten, die mathematische Begriffe – auch in der Form, wie sie von Lernenden verwendet werden – zu den *T*-Termen zu zählen. So weisen mathematische Begriffe auch im Schulunterricht eine gewisse Theorizität auf, wenn sie in ein Netz mathematischer Begriffe eingesponnen sind und in diesem Netz von den Lernenden in gewissem Umfang *L*-interpretiert werden können. Ebenso können auch Lernende ein Verständnis dafür entwickeln, inwiefern mathematische Begriffe, auch wenn sie veranschaulicht werden können, im Prinzip unbeobachtbar sind. Achinsteins (1963, 1965) und Putnams (1962) Einwände gegenüber der Trennung von theoretischen und empirischen Begriffen bleiben hier jedoch insofern berücksichtigt, als dass die im Zusammenhang von mathematischen Modellierungen gebrauchten *T*-Terme stets *T*-theoretisch sind, wobei dies in Bezug auf die Modellierungen von Lernenden meint, dass die *T*-Terme abhängig sind von der den Lernenden zur Verfügung stehenden Mathematik.

Die von Putnam (1962, S. 245 ff.) formulierten Einwände gegenüber den unterschiedlichen Möglichkeiten, partielle Interpretation zu verstehen, bleiben auch bei der Übertragung der syntaktischen Sicht Carnaps auf die Beschreibung von mathematischen Modellierungen von Lernenden berücksichtigt. Wenn man unter der partiellen Interpretation mathematischer Begriffe das Bilden einer Menge intendierter Modelle versteht, bedarf es tatsächlich wieder theoretischer Begriffe, wodurch die Konstruktion zirkulär wird. Allerdings handelt es sich hierbei um ein wissenschaftstheoretisches Problem, welches die Konsistenz der syntaktischen Sicht auf Theoriebildung betrifft. Für die Beschreibung von Realitätsbezügen mathematischer Inhalte aus dem Unterricht mag dieses Problem von nachrangiger Bedeutung sein. Ebenso ist es zutreffend, dass der Versuch, für jeden *T*-Term eine geeignete Prozedur zur Bestätigung oder Widerlegung anzugeben, zu teilweise kuriosen Aussagen führen kann. Für die Bearbeitung von Modellierungsproblemen kann es sich jedoch auch hierbei um ein eher nachrangiges Problem handeln, wenn berücksichtigt wird, dass in der Regel nur solche Bereiche der Realität durch Modellierungsaufgaben im Unterricht adressiert werden, für die solche Bestätigungs- oder Widerlegungsprozeduren angegeben werden können. Ferner ist die von Putnam genannte dritte Möglichkeit, partielle Interpretation zu verstehen, einen Teil von S_T zu interpretieren und die restlichen Begriffe beiseite zu lassen, vielmehr Auftrag für den Mathematikunterricht als ein echter Einwand. Jeder *T*-Term der Mathematik sollte den Lernenden semantisch zugänglich gemacht werden. Das lernpsychologische Argument lautet hier, dass Interpretation mathematischer Inhalte durch ihre Anwendung zu einem verbesserten und tieferen Verständnis und einem längeren Behalten solcher Inhalte führen (vgl. Blum, 1996, S. 21 f.).

Der wesentliche Unterschied zwischen syntaktischen und semantischen Ansätzen besteht darin, dass diese Theorien hinsichtlich der zum Tragen kommenden mathematischen Strukturen analysieren, während jene den Blick auf die zur Formulierung von Theorien verwendete Sprache richten. Der seitens der semantischen Sicht vorgebrachte Einwand ist sicherlich berechtigt. Theorien und Modelle derart stark an eine bestimmte formale Sprache zu binden ist in mehrerlei Hinsicht problematisch. Dennoch sind nicht alle der dadurch entstehenden Probleme im Kontext von Mathematikunterricht und mathematikdidaktischer Forschung gleichermaßen relevant. Während die semantische Sicht eher dazu geeignet scheint, unterschiedliche individuelle Modellierungen über den Vergleich mathematischer Strukturen in Verbindung zu bringen (z. B. durch Ähnlichkeitsbeziehungen oder durch einen Isomorphismus), gelingt dies aus syntaktischer Perspektive womöglich nicht, wenn die unterschiedlichen Modellierungen voneinander abweichende *T*-Terme und *Z*-Postulate verwenden, d. h. auf ein unterschiedliches Begriffsrepertoire zurückgreifen. Dennoch eignet sich der syntaktische Ansatz zur Beschreibung individueller Modellierungsprozesse gerade, weil der Blick auf Aussagen gerichtet ist. In der Regel sind es Aussagen von Lernenden, die zur Rekonstruktion individueller Modellierungsprozesse zur Verfügung stehen. Es kann sich dabei um geschriebene oder gesprochene Aussagen handeln. Auch Skizzen und Gesten sind Aussagen in einem erweiterten Sinne.

5.1 Epistemologische Fragestellung

Derart verstanden ermöglicht es Carnaps syntaktische Sicht, den Zusammenhang zwischen Mathematik und Realität genauer zu fassen (epistemologische Fragestellung). Anders als in der dichotomen Trennung zwischen Mathematik und Realität, wie sie in vielen Modellierungskreisläufen auftritt, ergibt sich hier eine zumindest zweifache Abstufung von der Mathematik in S_T, über empirisch-mathematischen Begriffe in S_O bis zu den realen Phänomenen.

Außerdem können die als getrennt angenommen Bereiche „Mathematik“ und „Realität“ bzw. „Rest der Welt“ usw. eingegrenzt werden: Mit Mathematik sollen fortan die theoretischen sprachlichen Mittel verstanden werden, die den Lernenden jeweils zur Verfügung stehen und mit denen sie syntaktisch verfahren können. Um hier etwaige Verwechslungen oder implizite, nicht intendierte Aussagen zu vermeiden, sollte im Zusammenhang von Modellierungen womöglich von Schulmathematik anstelle von Mathematik gesprochen werden. Die Realität bzw. der Rest der Welt wird unterteilt in die Beobachtungssprache, also einen Teil, der noch nicht die Realität selbst ist, und einen Teil, der mit den tatsächlichen Phänomenen identifiziert wird.

Die Kritik der syntaktischen Sicht zeigt zudem, dass das Verhältnis von Mathematik und Realität eher als ein Kontinuum gedacht werden sollte, dessen Enden durch die im idealisierten Sinne gebrauchten Begriffe Mathematik und Realität markiert werden. So können auf der Beobachtungsseite keine von jeder theoretischen und insbesondere mathematischen Deutung befreiten Erfahrungen gemacht werden. Ebenso ist auch der theoretische Teil der Sprache in einer empirischen Theorie, wie sie für den Realitätsbezug von Mathematik notwendig ist, nicht frei von aus der Erfahrung entlehnten Begriffen, z. B. wenn Metabegriffe verwendet werden, deren Gebrauch auf Konventionen einer Forschergemeinschaft beruht (Putnam, 1962; Quine, 1957).

Vor diesem theoretischen Hintergrund können nun die Aktivitäten genauer gefasst werden, durch die in Modellierungskreisläufen der Übergang von der realen Welt zur Mathematik erfolgt. Als eine solcher Aktivitäten wird im PISA-Rahmenkonzept (OECD, 2009) das Verbinden der Sprache, in der das reale Problem gefasst ist, mit der symbolischen und formalen Sprache der Mathematik aufgeführt. Wie diese Verbindung erfolgen kann, macht die syntaktische Sicht auf Theorien und Modelle deutlich.

Ebenso können nun die im Modellierungskreislauf beschriebenen Teilkompetenzen gedeutet werden. Das mathematische Arbeiten (Schritt 4 im Modellierungskreislauf nach Blum & Leiß, 2006) kann mit den *L*-Interpretationen identifiziert werden. Das Mathematisieren als Übergang vom „Rest der Welt“ zur „Mathematik“ (Schritt 3, ebd.) und das Interpretieren als Übergang in die umgekehrte Richtung (Schritt 5, ebd.) wird mit der *P*-Interpretation in Verbindung gebracht. Dabei sollte noch einmal daran erinnert werden, dass die *P*-Interpretation nicht den Übergang zwischen Mathematik und der Realität markiert, sondern lediglich einen Übergang zwischen zwei Teilen einer Sprache. Es bedarf einer weiteren Interpretation, der *D*-Interpretation, um den Übergang von der Beobachtungssprache zu den Phänomenen herzustellen (Schritt 1, ebd.).

Ein weiterer Unterschied in Beschreibung von Modellierungen mittels eines Modellierungskreislaufs und der Beschreibung vor dem Hintergrund von Carnaps syntaktischer Sicht besteht darin, dass in Carnaps Ansatz nur ein einziges Modell Teil der Modellierung ist, während mit Modellierungskreisläufen in der Regel zwei Modelle (Realmodell und mathematisches Modell), mitunter auch drei Modelle (Situationsmodell) voneinander unterschieden werden.

Vor diesem Hintergrund ist es nun ersichtlich, warum, wie Meyer und Voigt (2010) beobachten, bereits beim Schritt der Vereinfachung Zusammenhänge aus der Mathematik berücksichtigt werden müssen. Lernende arbeiten beim Schritt der Vereinfachung zwar mit *O*-Termen. Diese müssen jedoch, wenn auch implizit, mit *T*-Termen in Verbindung stehen. Für Carnap wird diese Verbindung mittels Korrespondenzregeln, den *Z*-Postulaten, hergestellt. Sie machen den „Zwischenbereich“ (Voigt, 2011) aus.

5.2 Methodologische Fragestellung

Die Möglichkeit, methodische Werkzeuge abzuleiten, die es erlauben, Modellierungsprozesse angemessener und genauer als im Kontext von Modellierungskreisläufen zu beschreiben (methodologische Fragestellung), soll nun anhand eines Beispiels verdeutlicht werden.

Prediger (2009) verwendet einen Modellierungskreislauf (nach vom Hofe et al., 2006, siehe auch vom Hofe, 2003) als theoretisches Konstrukt zur Beschreibung von Modellierungsprozessen beim Bearbeiten der folgenden Schulbuch-Textaufgabe durch Lernende im Übergang von Klasse 5 zu 6:

„Der afrikanische Graupapagei kann bis zu 40 cm lang werden, ein Flamingo etwa 200 cm. Wie viel mal größer ist der Flamingo gegenüber dem Graupapagei?“

Abb. 3: Textaufgabe aus Prediger, 2009, S. 6

Dabei werde die im Text beschriebene Situation zunächst strukturiert, indem z. B. die Ausgangsfrage umstrukturiert wird in die Frage „Wie oft passt der Papagei in den Flamingo?“. Dieses Situationsmodell werde dann in ein mathematisches Modell („40 · ? = 200“) überführt. Der Übergang zwischen „Mathematik“ und „Welt“ erfolgt in den Schritten „mathematisieren“ und „interpretieren“. Nach Prediger (2009) bilden dabei Grundvorstellungen „Übersetzungsscharniere“, die es ermöglichen, mathematische Sachverhalten lebensweltlich zu interpretieren oder mathematische Konzepte zur Mathematisierung von Situationen zu nutzen. Der Begriff der Grundvorstellung kann nun aus syntaktischer Sicht reformuliert und genauer gefasst werden:

In syntaktischer Terminologie kann bei der Bearbeitung dieser Aufgabe der Bereich der Mathematik auf die Struktur eingegrenzt werden, die sich aus den natürlichen Zahlen in Verbindung mit der Multiplikation ergibt. Auf der Beobachtungsseite können Sätze formuliert werden, wie etwa „wie oft passt die eine Länge in eine andere?“ oder „wie viel mal größer ist diese Länge gegenüber einer anderen?“. Die Verbindung wird dann mittels einer partiellen Interpretation hergestellt. Diese Verbindung erfolgt durch mindestens zwei *Z*-Postulate in einer *P*-Interpretation. Ein *Z*-Postulat verbindet die Zahl 1 mit der beobachtbaren Länge 1 cm, ein weiteres interpretiert die Multiplikation partiell mit einer zeitlich-sukzessiven Handlung: Eine empirische Länge wird sooft aneinandergelegt, bis sich die zum Vergleich herangezogene Länge ergibt.

Grundvorstellungen sind demnach *Z*-Postulate, sie verbinden jedoch nicht die Mathematik mit der Welt, der Realität, dem Rest der Welt oder der Lebenswelt, sondern theoretische Begriffe der Mathematik mit empirischen Begriffen. Es handelt sich so verstanden um eine rein sprachliche Verbindung. Die Verbindung zu realen Phänomenen wird erst in einer weiteren davon unabhängigen Interpretation, der *D*-Interpretation hergestellt.

Anders als bei Prediger würden Formulierungen wie etwa „40 · ? = 200“ oder „Wie oft passt der Papagei in den Flamingo?“ nicht als Modelle bezeichnet werden. Es handelt sich hier einfach um Sätze, die im ersten Fall in S_T formuliert sind und im zweiten Fall in S_O, sofern man mit Papagei und Flamingo Längen meint. Aus syntaktischer Sicht gibt es hier lediglich ein Modell, das ist die Beschreibung einer Struktur mit den sprachlichen Mitteln aus S_O. Für diese in S_O beschriebene Struktur sind alle Sätze wahr, die in S_T bezüglich der mathematischen Struktur $(\mathbb{N}, \cdot)$ aufgestellt werden. Die Struktur besteht z. B. aus empirisch messbaren Längen (in ganzen Zentimetern) und deren Vergleich über eine sukzessive Handlung, z. B. Aneinanderlegen einer Länge bis die so zusammengelegte Länge mit der zu vergleichenden Länge übereinstimmt. Damit wird auch ersichtlich, wie Meyer und Voigt (2010) feststellen, warum bereits beim Schritt des Vereinfachens Zusammenhänge aus dem Bereich der Mathematik zu berücksichtigen sind: Wie schon beim Vereinfachen, so geht es auch beim Mathematisieren und dem mathematischen Arbeiten stets um dieselbe zugrundeliegende Struktur.

Die Interpretation von $(\mathbb{N}, \cdot)$ als sukzessive Handlung bleibt partiell, weil die mathematische Struktur $(\mathbb{N}, \cdot)$ z. B. ebenso räumlich-simultan gedeutet werden kann, beispielsweise dann, wenn es um die Beschreibung von Flächeninhalten geht. Eine *L*-Interpretation von $(\mathbb{N}, \cdot)$ wäre möglich als Addition gleicher Summanden. Diese Interpretation ist vollständig und erfolgt ausschließlich in S_T. Die *D*-Interpretation im Zusammenhang mit dieser Aufgabe bleibt unklar. „Kann bis zu 40 cm bzw. 200 cm lang werden“ könnte auf alle jemals tatsächlich gemessenen Graupapageie bzw. Flamingos verweisen, wobei die maximale Länge dann mit dem jemals größten gemessenen Vogel identifiziert wird. Oder es handelt sich hier um ein theoretisches Konstrukt, bei dem aus bestimmten Merkmalen dieser Vogelarten auf eine maximal mögliche Größe geschlossen wird. Ebenso unklar, bleibt, wie eine Länge in diesem Zusammenhang ermittelt wird. Die verwendeten Zahlen legen nahe, dass hier vermutlich eine Beobachtung mit einem Maßband (in ganzen Zentimetern) gemeint ist.

Indem Grundvorstellungen als Regeln der Verbindung von *O*- und *T*-Termen gefasst werden, kann auch das Mathematisieren und das Interpretieren im Modellierungskreislauf im Sinne von Meyer und Voigt (2010) anhand von *Z*-Postulaten analysiert werden: Sie deuten individuelle Modellierungsprozesse, indem sie die Rationalität einer Argumentation innerhalb einer Modellierung mithilfe des Toulmin-Schemas (Toulmin, 1996) rekonstruieren. In diesem Schema wird ein Datum über eine Regel mit einer Konklusion verbunden. Der Regelgebrauch kann dabei auch implizit erfolgen.

Prediger (2009) zitiert aus einer Interviewstudie, wie der Schüler Anton, die Aufgabe zum Größenvergleich zwischen Graupapagei und Flamingo löst. Anton sagt relativ zu Beginn „1,60 m ist der größer, der Flamingo". Seine Feststellung lässt sich rational wie folgt rekonstruieren:

- *Datum 1:* „Der afrikanische Graupapagei kann bis zu 40 cm lang werden, ein Flamingo etwa 200 cm." (Aufgabentext)
- *Regel 1 (Z-Postulat/Grundvorstellung):* Vergleich zweier Größen durch Subtraktion
- *Konklusion 1 / Datum 2:* 200 – 40 = ?
- Regel 2: Subtraktion (Kalkül in S_T)
- Konklusion 2 / Datum 3: 200 – 40 = 160
- *Regel 1 (Z-Postulat/Grundvorstellung):* Vergleich zweier Größen durch Subtraktion
- *Konklusion 3 / Datum 4:* Der Flamingo ist 160 cm größer.
- *Regel 3:* 100 cm entsprechen messbar 1 m (Kalkül in S_O)
- *Konklusion 4 / Datum 5:* „1,60 m ist der größer, der Flamingo." (Anton)

Prediger deutet Antons Feststellung und weitere Aussagen in diesem Zusammenhang als die individuelle Konstruktion eines Situationsmodells. Die rationale Rekonstruktion zeigt jedoch, dass Antons Aussage nicht das bloße Ergebnis einer Strukturierung sein kann, die ausschließlich im „Rest der Welt" stattfindet. Antons Aussage lässt sich nicht ohne Übersetzungsschritte zwischen S_O und S_T deuten, auch wenn diese rudimentär sind und implizit bleiben.

Während die Deutung einer Modellierung anhand eines Modellierungskreislaufs in wesentlichen Punkten von der Deutung in syntaktischer Terminologie abweicht, ergeben sich jedoch auch ähnliche Befunde. So macht Prediger (2009) anhand von Grundvorstellungen deutlich, dass es sich beim Strukturieren, Mathematisieren und Interpretieren, anders als in den Bildungsstandards behauptet, um gegenstandsspezifische Teilkompetenzen des Modellierens handeln muss, da bei jeder Übersetzungsaktivität gegenstandsspezifische Wissenselemente benötigt werden. Aus syntaktischer Sicht kann dieser Befund theoretisch untermauert werden. Alle drei der genannten Teilprozesse setzen die Verwendung von Grundvorstellungen im Sinne von *Z*-Postulaten voraus. Antons Fallbeispiel zeigt jedoch, dass es nicht nur auf die Aktivierung von Grundvorstellungen ankommt. Seine implizit verwendete Grundvorstellung „Vergleich zweier Größen durch Subtraktion" interpretiert die mathematische Struktur $(\mathbb{N}, +)$ partiell. Diese passt jedoch nicht zur in S_O formuliert Frage („wie viel mal …?"). Es müssen also Grundvorstellungen in Kombination mit *T*-Termen aktiviert werden.

Anmerkungen

[1] Programme for International Student Assessment.

[2] International Commission on Mathematical Instruction.

[3] International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications.

[4] Um diese These zu belegen, hat der Autor dieses Artikels die Literaturverzeichnisse aller Beiträge in den 14 bisher erschienenen ICTMA-Bänden gesichtet (wobei ICMTA für die „International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications" steht). Dabei zeigt sich, dass in keinem dieser Beiträge auf einschlägige Arbeiten aus der Wissenschaftsphilosophie verwiesen wird.

[5] Auch, wenn die Mitglieder des Wiener Kreises für sich selbst die Bezeichnung *Logischer Positivismus* nicht verwendet haben, wird in diesem Artikel nicht zwischen Logischem Positivismus und Logischem Empirismus unterschieden. Creath (2017) weist darauf hin, dass eine Unterscheidung zwischen beiden Begriffen entlang theoretischer Annahmen und soziologischer Gesichtspunkte ohnehin nicht sinnvoll getroffen werden kann.

[6] Ob dabei die reduktionistischen Bestrebungen in den Naturwissenschaften zum Vorbild für Mathematiker gedient haben oder ob es sich genau umgekehrt verhalten hat, ist hier nicht von Belang. Zu vermuten ist, dass es sich gerade wegen der großen personellen Überschneidungen zwischen Mathematikern und Naturwissenschaftlern um eine wechselseitige Beeinflussung gehandelt hat.

Literatur

Achinstein, P. (1963). Theoretical Terms and Partial Interpretation. *British Journal for the Philosophy of Science*, *14*(54), 89–10.

Achinstein, P. (1965). The problem of theoretical terms. *Am. Philos. Q., 2*(3), 193–203.

Barbrousse, A. & Ludwig, P. (2009). Fictions and Models. In M. Suárez (Hrsg.), *Fictions in Science, Philosophical Essays on Modelling and Idealisation* (S. 56–75). London: Routledge.

Bartels, A. (2005). *Strukturale Repräsentation*. Paderborn: Mentis.

Biehler, R., Kortemeyer, J. & Schaper, N. (2015). Conceptualizing and studying students' processes of solving typical problems in introductory engineering courses requiring mathematical competences. In K. Krainer & N. Vondrová (Hrsg.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 2060–2066). Prague: Charles University, Faculty of Education.

Blum, W. (1996). Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht - Trends und Perspektiven, in: G. Kadunz et al. (Hrsg.), *Trends und Perspektiven. Schriftenreihe der Didaktik der Mathematik, 23* (S. 15–38). Wien: Hölder-Pichler-Temsky.

Blum, W. & Leiß, D. (2006). “Filling up” – The Problem of Independence-Preserving Teacher Interventions in Lessons with Demanding Modelling Tasks. In M. Bosch (Hrsg.), *Proceedings of the Fourth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 1623–1633), Sant Feliu de Guíxols, Spain: FUNDEMI IQS – Universitat Ramon Llull and ERME.

Blum, W., Galbraith, P., Henn, H.-W. & Niss, M. (Hrsg.) (2007). Introduction. In W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn & M. Niss (Hrsg.), *Modelling and applications in mathematics education – The 14th ICMI Study* (S. 3–32). New York: Springer.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 38*(2), 86–95.

Borromeo Ferri, R. (2011). *Wege zur Innenwelt des mathematischen Modellierens – Kognitive Analysen von Modellierungsprozessen im Mathematikunterricht*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Büchter A., Henn, H.-W. (2015). Schulmathematik und Realität – Verstehen durch Anwenden. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 19–49). Heidelberg: Springer.

Carnap, R. (1932). Über Protokollsätze, *Erkenntnis, 3*(1), 215–228.

Carnap, R. (1939). *Foundations of Logic and Mathematics*. Chicago: Univ. Chicago Press.

Carnap, R. (1956). The methological character of theoretical concepts. In H. Feigl & M. Scriven (Hrsg.), *Minnesota Studies in the Philosophy of Science* (S. 38–76). Minneapolis: University of Minnesota Press.

Carnap, R. (1958). Beobachtungssprache und theoretische Sprache. *Dialectica 12*, 236–248.

Carnap, R. (1969). *Einführung in die Philosophie der Naturwissenschaft*. München: Nymphenburger Verlagshandlung.

Châtelet, G. (2000). *Figuring space – Philosophy, mathematics, and physics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Creath, R. (2017). Logical Empiricism. In E. N. Zalta (Hrsg.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2017 Edition)*. Abgerufen von https://plato.stanford.edu/archives/fall2017/entries/logical-empiricism/

de Freitas, E. (2013). The mathematical event: Mapping the axiomatic and the problematic in school mathematics. *Studies in Philosophy and Education, 32*(6), 581–599.

de Freitas, E. & Sinclair, N. (2014). *Mathematics and the Body: Material Entanglements in the Classroom*. Cambridge: Cambridge University Press.

Deleuze, G. (1994). *Difference and repetition*. Translated by P. Patton, New York: Columbia University Press.

Deleuze, G. & Guattari, F. (1987). *A thousand plateaus: capitalism and schizophrenia*. Translated by B. Massumo, Minneapolis, MN: University of Minnesota Press.

Foucault, M. (1996). *Die Ordnung der Dinge, Eine Archäologie der Humanwissenschaften*. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Frege, G. (1884). *The foundations of arithmetic: A logico-mathematical enquiry into the concept of Number*. New York: Harper (1960).

Frege, G. (1892). Über Sinn und Bedeutung. *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, NF 100*, 25–50.

Frigg, R. & Salis, F. (2019). Of rabbits and men: fiction and scientific modelling. In B. Armour-Garb & F. Kroon (Hrsg.), *Fictionalism in Philosophy* (S. 187–206). Oxford: Oxford University Press.

Frigg, R. & Hartmann, S. (2020). Models in Science. In E. N. Zalta (Hrsg.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2020 Edition)*. Abgerufen von https://plato.stanford.edu/archives/spr2020/entries/models-science/

Gelfert, A. (2017). The Ontology of Models. In L. Magnani & T. Bertolotti (Hrsg.), *Springer Handbook of Model-Based Science* (S. 5–23). Heidelberg/New York: Springer.

Greefrath, G. (2011). Using Technologies: New Possibilities of Teaching and Learning Modelling – Overview. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri & G. Stillman (Hrsg.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling – ICTMA 14* (S. 301–304). Dordrecht: Springer.

Hanson, N. R. (1958). *Patterns of Discovery – An Inquiry into the Conceptual Foundations of Science.* Cambridge: Cambridge University Press.

Hilbert, D. (1903). *Grundlagen der Geometrie*. Leipzig: Teubner.

Keitel, C. (1989). Mathematics Education and Technology, *for the Learning of Mathematics, 9*(1), 7–13.

Liu, C. (1997). Models and theories I – The semantic view revisited. *Int. Stud. Philos. Sci. 11*(2), 147–164.

Ludwig, M. & Reit, X.-R. (2013). A Cross-Sectional Study about Modelling Competency in Secondary School. In G. Stillman, G. Kaiser, W. Blum & J. P. Brown (Hrsg.), *Teaching Mathematical Modelling: Connecting to Research and Practice – ICTMA 15* (S. 327–337). Dordrecht: Springer.

Meyer, M. & Voigt, J. (2010). Rationale Modellierungsprozesse. In B. Brandt, M. Fetzer & M. Schütte (Hrsg.), *Auf den Spuren interpretativer Unterrichtsforschung in der Mathematikdidaktik* (S. 117–148). Münster: Waxmann.

Niss, M. (1994). Mathematics in Society. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Sträßer & B. Winkelmann (Hrsg.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (S. 367–378). Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

OECD (2009). *PISA 2009 assessment framework – key competencies in reading, mathematics and science*. Abgerufen von http://www.oecd.org/dataoecd/11/40/44455820.pdf

Portides, D. (2017) Models and Theories. In L. Magnani & T. Bertolotti (Hrsg.), *Springer Handbook of Model-Based Science* (S. 25–48). Heidelberg/New York: Springer.

Prediger, S. (2009). „Aber wie sag ich es mathematisch?“ – Empirische Befunde und Konsequenzen zum Lernen von Mathematik als Mittel zur Beschreibung von Welt.

In D. Höttecke (Hrsg.), *Entwicklung naturwissenschaftlichen Denkens zwischen Phänomen und Systematik* (S. 6–20). Berlin: LIT-Verlag.

Putnam, H. (1962). What theories are not. In E. Nagel, P. Suppes & A. Tarski (Hrsg.), *Logic, Methodology and Philosophy of Science* (S. 240–251). Stanford: Stanford University Press.

Quine, W. V. O. (1957) The scope and language of science. *British Journal for the Philosophy of Science, Vol. 8*, 1–17.

Quine, W. V. O. (1980). Two dogmas of empiricism. In W. V. O. Quine (Hrsg.), *From a Logical Point of View* (S. 20–46). Massachusetts: Harvard University Press.

Schürmann, U. (2018a). Towards an alternative approach to modelling in school mathematics. *The Mathematics Enthusiast, 15*(1), 228–250.

Schürmann, U. (2018b). The separation of mathematics from reality in scientific and educational discourse. In P. Ernest (Hrsg.), *The Philosophy of Mathematics Education Today – ICME-13 Monographs* (S. 241– 251), Cham: Springer.

Stegmüller, W. (1970). *Probleme und Resultate der Wissenschaftstheorie und Analytischen Philosophie, Bd. 2 Theorie und Erfahrung: Studienausgabe, Teil C Beobachtungssprache, theoretische Sprache und die partielle Deutung von Theorien*. Berlin/Heidelberg/ New York: Springer.

Skovsmose, O. & Borba, M. (2004). Issues of Power in Theory and Methodology. In P. Valero & R. Zevenbergen (Hrsg.), *Researching the Socio-Political Dimensions of Mathematics Education. Mathematics Education Library, Vol. 35* (S. 207–226). Boston, MA: Kluwer Academic Publishers.

Smith, D. W. (2006). Axiomatics and problematics as two modes of formalisation – Deleuze's epistemology of mathematics. In S. Duffy (Hrsg.), *Virtual mathematics – The logic of difference* (S. 145–168). Manchester: Clinamen.

Suárez, M. (2003). Scientific representation – Against similarity and isomorphism. *Int. Stud. Philos. Sci. 17*(3), 225–244.

Suppe, F. (1971). On Partial Interpretation. *The Journal of Philosophy, 68*(3), 57–76.

Suppe, F. (1989). *The Semantic Conception of Theories and Scientific Realism*. Urbana: Illinois University Press.

Suppe, F. (2000). Understanding scientific theories: An assessment of developments, 1969–1989. *Philos. Sci. 67*, S102–S115.

Suppes, P. (1957). *Introduction to Logic*. Princeton: Van Nostrand.

Suppes, P. (1960). A comparison of the meaning and uses of models in mathematics and the empirical sciences. *Synthese 12*(2/3), 287–301.

Suppes, P. (1962). Models of Data. In E. Nagel, P. Suppes & A. Tarski (Hrsg.), *Logic, Methodology and Philosophy of Science – Proceedings of the 1960 International Congress* (S. 252–261). Stanford: Stanford University Press.

Suppes, P. (1967). What is a scientific theory? In S. Morgenbesser (Hrsg.), *Philosophy of Science Today* (S. 55–67). New York: Basic Books.

Toulmin, S. E. (1996). *Der Gebrauch von Argumenten*. Weinheim: Beltz.

van Fraassen, B. C. (1983). *The scientific Image*. Oxford: Oxford University Press.

Voigt, J. (2011). Rationale Modellierungsprozesse. In GDM (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht – 45. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* (S. 867–870). Münster: WTM.

vom Hofe, R. (2003). Grundbildung durch Grundvorstellungen. *Mathematik lehren, 118*, 4–8.

vom Hofe, R., Kleine, M., Blum, W. & Pekrun, R. (2006). The effect of mental models ("Grundvorstellungen") for the development of mathematical competencies. In M. Bosch (Hrsg.), *Proceedings of the Fourth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 142–151). Sant Feliu de Guíxols, Spain: FUNDEMI IQS – Universitat Ramon Llull and ERME.

Winther, R. G. (2016). The Structure of Scientific Theories, In E. N. Zalta (Hrsg.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2016 Edition). Abgerufen von https://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/structure-scientific-theories/

Anschrift der Verfasser

Uwe Schürmann
Qualitäts- und UnterstützungsAgentur – Landesinstitut für Schule (QUA-LiS NRW)
Paradieser Weg 64
59494 Soest
uwe.schuermann@qua-lis.nrw.de