

Epistemologische Überzeugungen und innermathematische Experimente – Eine Interventionsstudie mit mathematisch interessierten Lernenden

SARAH BEUMANN, WUPPERTAL; SEBASTIAN GEISLER, HILDESHEIM

Zusammenfassung: In diesem Artikel wird eine Studie zur möglichen Veränderbarkeit epistemologischer Überzeugungen durch Bearbeitung innermathematischer Experimente vorgestellt. Neunzig elf- bis vierzehnjährige Schülerinnen und Schüler nahmen an einer Interventionsstudie an der Junior Uni Wuppertal teil. Im Rahmen sieben einwöchiger Unterrichtseinheiten zum Thema innermathematische Experimente wurde untersucht, ob solche experimentellen Unterrichtseinheiten Veränderungen in den epistemologischen Überzeugungen interessierter und teilweise begabter Schülerinnen und Schüler hervorrufen können. Die Ergebnisse zeigen, dass vor der Intervention die mathematikspezifischen epistemologischen Überzeugungen bei den befragten Schülerinnen und Schülern eher im naiven Bereich zu verorten sind, nach der Intervention sich die Überzeugungen in Richtung erfahrenerer Überzeugungen verändern.

Abstract: This article describes an intervention study on changing epistemological beliefs via working on intramathematical experiments. Ninety eleven- to fourteen-year-old students took part on a study to change their epistemological beliefs. This study took place in out-of-school learning location, called Junior Uni Wuppertal. As part of this intervention study it will be analyzed, how far a learning setting based on student experiments supports change of epistemological beliefs of interested and partially gifted students. The results show, that the mathematical epistemological beliefs of these students are naive at the beginning of the intervention and changed into more sophisticated beliefs after the intervention.

1. Einleitung und Motivation

Epistemologische Überzeugungen sind Vorstellungen über die Natur des Wissens und des Wissenserwerbs und spiegeln sich zum Beispiel in subjektiven Antworten auf folgende Fragen wider:

- Wie ist mathematisches Wissen aufgebaut und verändert sich dieses Wissen im Laufe der Zeit?
- Wie wird mathematisches Wissen weitergegeben und besteht mathematisches Wissen rein aus Fakten, aus zusammenhängenden Konzepten oder gar aus veränderbaren Konstrukten?

Derartigen Überzeugungen werden vielfältige Wirkungen auf Lernprozesse sowie den Lernerfolg zugeschrieben (z. B. Muis, 2004, Schommer, Crouse & Rhodes, 1992).

Während in den Naturwissenschaften aktuelle Erkenntnisse dazu vorliegen, welche naturwissenschaftsbezogenen epistemologischen Überzeugungen bei Schülerinnen und Schülern in Deutschland vorliegen (z. B. Schiefer, Stark, Gaspard, Wille, Trautwein & Golle, 2020), fehlen aktuelle Studien zu mathematikbezogenen epistemologischen Überzeugungen in dieser angesprochenen Altersgruppe. In den Naturwissenschaften zeigen die Studien von Conley, Pintrich, Vekiri und Harrison (2004), Wegner, Krooß, Cordes und Grotjohann (2012) sowie Schiefer et al. (2020) einen positiven Einfluss von schulischen und insbesondere auch außerschulischen Interventionen, die das eigenständige Erarbeiten neuer Inhalte und das selbstständige Experimentieren betonen, auf die epistemologischen Überzeugungen von Schülerinnen und Schülern. Inwiefern auch mathematikbezogene epistemologische Überzeugungen durch Interventionen zum eigenständigen Experimentieren beeinflusst werden können, ist bislang nicht bekannt. Eine direkte Übertragung der Ergebnisse aus den Naturwissenschaften scheint fraglich, da epistemologische Überzeugungen zunehmend als domänenspezifisch und zum Teil sogar als kontextabhängig verstanden werden (vgl. z. B. Sandoval, Greene & Braten, 2016).

Daher geht die in diesem Artikel vorgestellte Studie den Fragen nach, welche mathematikbezogenen epistemologischen Überzeugungen bei Schülerinnen und Schülern vorliegen und ob diese Überzeugungen sich im Rahmen einer außerschulischen Intervention zum innermathematischen Experimentieren verändern. Die Studie orientiert sich dabei an den Arbeiten von Conley et al. (2004), Wegner et al. (2012) sowie Schiefer et al. (2020), welche die Veränderungen epistemologischer Überzeugungen bei Schülerinnen und Schülern jeweils innerhalb einer (naturwissenschaftlichen) handlungsorientierten Unterrichtseinheit mit Schülerexperimenten untersuchen.

Auch wenn experimentelles Arbeiten meist mit den Naturwissenschaften und nur selten mit der Mathematik assoziiert wird, nehmen experimentelle Denk- und Arbeitsweisen auch im Prozess der Generierung mathematischen Wissens eine relevante Rolle ein

(vgl. Leuders & Phillips, 2014). Ein positiver Einfluss experimentellen Arbeitens auf die epistemologischen Überzeugungen von Schülerinnen und Schülern scheint daher möglich.

Im Folgenden wird zunächst das Konstrukt der epistemologischen Überzeugungen ausführlich erläutert, bevor die Rolle des experimentellen Arbeitens für die Wissensgenerierung in Mathematik diskutiert wird und mögliche Einflüsse experimentellen Arbeitens auf epistemologische Überzeugungen aus dieser Diskussion abgeleitet werden.

2. Epistemologische Überzeugungen

2.1 Konzeptualisierung

Epistemologische Überzeugungen bezeichnen subjektive Theorien und Vorstellungen, die einzelne Personen über Wissen und Wissenserwerb entwickeln (Gruber & Stamouli, 2009 vgl. auch Trautwein et al., 2004). Diese Vorstellungen werden generell oder in einer spezifischen Domäne entwickelt (Hofer & Pintrich, 1997).

Hofer und Pintrich (1997, S. 113 ff.) konzeptualisierten ihr Modell zu epistemologischen Überzeugungen auf Basis ihrer Reviews und Bildung der Schnittmenge verschiedener anderer Konzepte von Perry (1970), Belenky, Clinchy, Goldberger & Tarule (1986), Baxter Magolda (1992), King und Kitchener (1994), Kuhn (1991) und Schommer (1990). Als Synthese bisheriger Arbeiten zu epistemologischen Überzeugungen identifizierten sie dabei aus der Schnittmenge zwei übergeordnete Bereiche. Diese beiden übergeordneten Bereiche sind die Überzeugungen zur *Natur des Wissens* (nature of knowledge)

und zur *Natur des Wissenserwerbs* (nature of knowing). Überzeugungen zur *Natur des Wissens* beschreiben dabei, wie Wissen selbst beschaffen und organisiert ist („what one believes knowledge is“, Hofer, 2004, S. 46). Überzeugungen zur *Natur des Wissenserwerbs* beziehen sich eher darauf, wie der Prozess des Wissenserwerbs abläuft sowie auf die Vorstellung zur Herkunft des Wissens („how one comes to know“, Hofer, 2004, S. 46). Die beiden übergeordneten Bereiche bezeichnen somit die subjektiven Vorstellungen darüber, wie Wissen aufgebaut ist und wie es angeeignet wird.

Zur weiteren Ausdifferenzierung dieser übergeordneten Bereiche bestehen verschiedene Konzeptionen (siehe Conley et al. (2004) oder Urhahne und Hopf (2004) für eine ausführliche Diskussion). In der vorliegenden Arbeit orientieren wir uns an der Konzeptualisierung von Conley et al. (2004), die im deutschsprachigen Raum auch schon durch Urhahne und Hopf (2004) verwendet wurde und unserer Ansicht nach die wesentlichen Facetten epistemologischer Überzeugungen abdeckt (vgl. auch Schiefer et al., 2020).

Epistemologische Überzeugungen sind dabei ein multidimensionales Konzept, das in vier Dimensionen unterschieden wird:

1. *Sicherheit des Wissens*: Diese Dimension thematisiert Überzeugungen darüber, ob es auf wissenschaftliche Fragestellungen eine einzige richtige Antwort gibt oder es bei komplexen Problemen auch mehrere Antworten und Lösungswege geben kann.

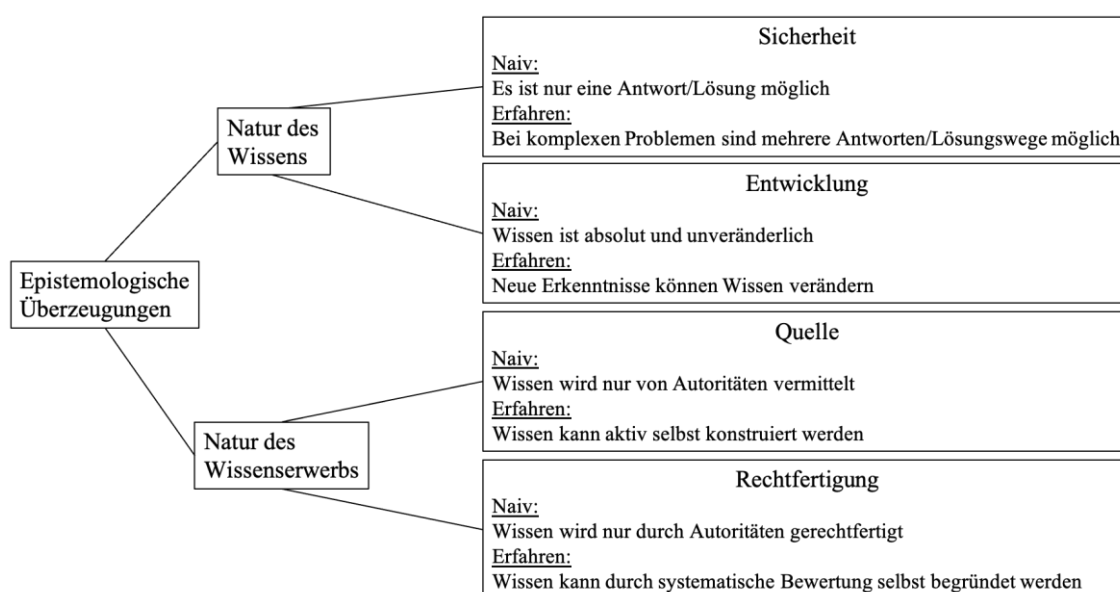


Abb. 1: Darstellung epistemologischer Überzeugungen mit der Bedeutung der jeweiligen Ausprägungen der einzelnen Dimensionen, in Anlehnung an Conley et al. (2004)

2. *Entwicklung des Wissens*: Diese Dimension beschreibt Überzeugungen zur (zeitlichen) Stabilität des Wissens. Dabei zeigt sich ein Kontinuum von der Überzeugung, dass Wissen für alle Zeit fest ist, zu der Überzeugung, dass neue Erkenntnisse das Wissen verändern können.
3. *Quelle des Wissens*: Diese Dimension umfasst die Vorstellung über den Ursprung des Wissens, d. h. die Vorstellung, dass Wissen durch Autoritäten vermittelt wird, sowie die entgegengesetzte Vorstellung, dass Wissen selbst oder durch Interaktion mit Anderen konstruiert werden kann.
4. *Rechtfertigung des Wissens*: Diese Dimension umfasst Vorstellungen, wie Wissen begründet wird, d. h. die Vorstellung, dass Wissen durch Konsens von Expertinnen und Experten legitimiert wird sowie die konträre Vorstellung, dass Wissen durch eigene Erkenntnisse und Erfahrungen gerechtfertigt wird.

Die beiden Dimensionen *Sicherheit* sowie *Entwicklung des Wissens* sind dem Bereich der Vorstellungen über *die Natur des Wissens* - nature of knowledge - zugeordnet, die beiden Dimensionen *Quelle* und *Rechtfertigung des Wissens* dem Bereich der Vorstellungen über *die Natur des Wissenserwerbs* - nature of knowing (s. Abb. 1). Alle angegebenen vier Dimensionen können dabei als Kontinuum mit zwei Polen betrachtet werden. Dabei kann ein Pol als eher naive (oder weniger erfahrene) und der andere Pol als eher erfahrene (oder fortgeschrittene, im Englischen häufig als sophisticated bezeichnete) Überzeugungen betrachtet werden (Hofer & Pintrich, 1997). Naive Überzeugungen beispielsweise in der Dimension *Sicherheit* zeichnen sich durch den Glauben an eine exakt richtige Antwort aus, wohingegen erfahrene Überzeugungen sich dadurch auszeichnen, dass die Möglichkeit von vielfältigen Antworten besteht (vgl. Abb. 1).

Muis (2004) stellt in ihrem Review heraus, dass die vier einzelnen Dimensionen epistemologischer Überzeugungen unabhängig voneinander sind, sodass eine Person in unterschiedlichen Dimensionen unterschiedlich weit fortgeschrittene Überzeugungen besitzen kann. So kann eine Person beispielsweise in der Dimension *Entwicklung* eher naive, aber in der Dimension *Quelle* eher erfahrene epistemologische Überzeugungen aufweisen. Epistemologische Überzeugungen sind keine stabilen Persönlichkeitsmerkmale, sondern verändern sich im Laufe der Zeit (Grossnickle, Alexander & List, 2017). Zu bemerken ist, dass sich die epistemologischen Überzeugungen von Lernenden während ihrer (schulischen) Ausbildung meist in Richtung erfahreneren Überzeugungen verändern (Hofer & Pintrich, 1997). Vor dem Hintergrund, dass erfahreneren Überzeugungen als lernförderlich gelten, scheint es zudem vorteilhaft, im Unterricht eine Förderung erfahrener Überzeugungen zu forcieren (z. B. Hofer, 2001).

Hofer (2001) schlägt auf Basis eines Reviews ein Arbeitsmodell vor (siehe Abb. 2), das sowohl mögliche Einflussfaktoren auf die epistemologischen Überzeugungen von Lernenden berücksichtigt als auch die Wirkungen dieser Überzeugungen im Lernprozess. Hofer geht davon aus, dass die epistemologischen Überzeugungen von Lehrkräften deren unterrichtliches Handeln und damit z. B. auch die verwendeten Aufgaben bedingen. Die Charakteristika der Lernumgebung haben wiederum einen Einfluss auf die epistemologischen Überzeugungen der Lernenden. So scheinen konstruktivistische Lernumgebungen mit erfahreneren epistemologischen Überzeugungen der Lernenden einherzugehen (Hofer, 2000). Die epistemologischen Überzeugungen der Lernenden wirken auf die Lernmotivation, die Überzeugungen über Lernen und Unterricht, die Wahl von Lernstrategien und infolgedessen auch auf die Leistungen von Schülerinnen und Schülern (Schommer-Aikins, 2004; Urhahne & Hopf, 2004; Schommer, 1993; Cano, 2005). Die epistemologischen Überzeugungen wirken also vermutlich nicht direkt auf den Lernerfolg, sondern

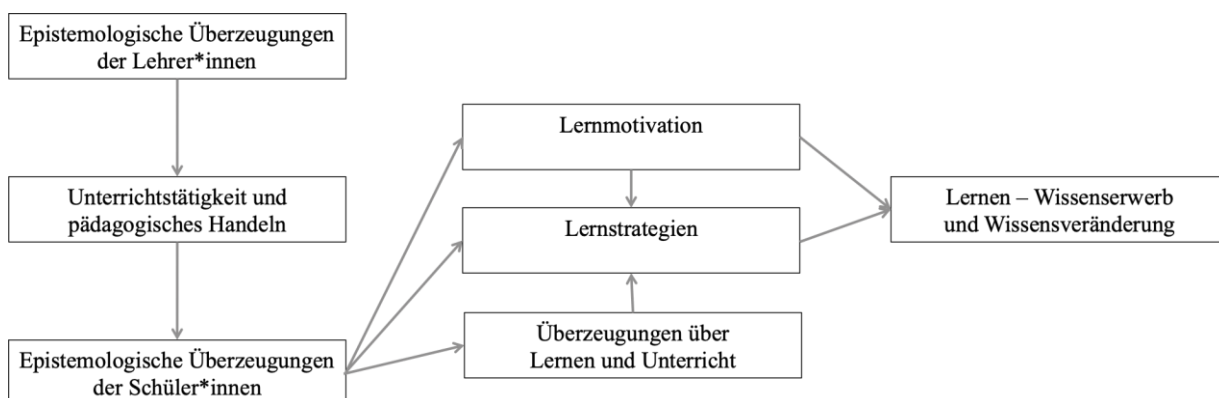


Abb. 2: Modell zum Einfluss epistemologischer Überzeugungen auf Lernprozesse (adaptiert nach Hofer, 2001, S. 372)

der Zusammenhang von Überzeugungen und Lernerfolg wird durch die Motivation und die Wahl von Lernstrategien mediiert (vgl. Schommer et al., 1992). Dabei gelten erfahrenere Überzeugungen, sprich Überzeugungen darüber, dass Wissen eher komplex und veränderlich ist, in Interaktion selbstständig konstruiert werden kann und eigener Reflexion bedarf, als lernförderlicher als naive Überzeugungen, welche eher als lernhinderlich betrachtet werden (Hofer & Pintrich, 1997; Schoenfeld, 1992; Trautwein et al., 2004; Bromme, 2010; Muis, 2004; Schommer, 1998). So sehen Lernende mit naiven Überzeugungen ihre Beziehung zu Lehrenden (Expertinnen und Experten bzw. Autoritäten) stark hierarchisch, sie empfinden sich bloß als Empfangende von Wissen, während Lernende mit fortgeschrittenen Überzeugungen der Meinung sind, dass Wissen aus empirischer Evidenz und Logik resultiert, der sie selbst nachgehen können (Belenky et al., 1986; Kitchener, 1986). Urhahne und Hopf (2004) berichten beispielsweise, dass erfahrenere epistemologische Überzeugungen mit mehr Lernmotivation, während naive Überzeugungen mit der Nutzung von Wiederholungsstrategien anstelle von Elaborationsstrategien einhergehen.

Während frühe Studien zu epistemologischen Überzeugungen unter der Annahme durchgeführt wurden, dass diese Überzeugungen domänenübergreifend sind, wird zunehmend davon ausgegangen, dass epistemologische Überzeugungen domänenabhängig sind (vgl. Muis, 2004; Sandoval et al., 2016). In der Studie von Hofer (2000) wurden beispielsweise 326 Collegestudierende des 1. Jahres eines Psychologiekurses mit einem disziplin-fokussierten Fragebogen zur Psychologie und zu den Naturwissenschaften befragt. Hofer stellte fest, dass jeder Studierende über allgemeine epistemologische Überzeugungen verfügt, diese jedoch je nach Disziplin unterschiedlich ausgeprägt und somit domänenspezifisch sind.

2.2 Epistemologische Überzeugungen von Schülerinnen und Schülern

Mit Blick auf die positiven Wirkungen eher erfahrener epistemologischer Überzeugungen stellt sich die Frage, welche epistemologischen Überzeugungen bei Schülerinnen und Schülern vorliegen. Für den deutschsprachigen Bereich liegen hier insbesondere Erkenntnisse zu naturwissenschaftsbezogenen epistemologischen Überzeugungen vor. Urhahne und Hopf (2004) berichten, dass die Neuntklässlerinnen und Neuntklässler aus ihrer Studie überwiegend erfahrenere Überzeugungen aufwiesen. Zudem zeigten sich in dieser Studie nur recht geringe Zusammenhänge zwischen den einzelnen Dimensionen, was die theoretisch postulierte Unabhängigkeit der Dimensionen unterstützt. Bernholt, Lindfors & Winberg

(2021) berichten in einer groß angelegten Studie mit Schülerinnen und Schülern von Klasse 5 bis Klasse 11, dass sich zu den Dimensionen *Quelle* und *Sicherheit des Wissens* eher naive Überzeugungen finden, während in den Dimensionen *Rechtfertigung* und *Entwicklung des Wissens* eher erfahrenere Überzeugungen vorherrschten. Wegner et al. (2012) und Schiefer et al. (2020) haben jeweils die Überzeugungen naturwissenschaftlich interessierter Schülerinnen und Schüler untersucht. Während Wegner et al. (2012) von eher naiven Überzeugungen in der Dimension *Quelle des Wissens* berichten, kommen Schiefer et al. (2020) zu ähnlichen Ergebnissen wie Urhahne und Hopf (2004) und konnten überwiegend erfahrenere Überzeugungen feststellen. Allerdings zeigten sich bei den von Schiefer et al. (2020) untersuchten Grundschülerinnen und Grundschülern zum Teil deutlich stärkere Zusammenhänge zwischen den einzelnen Dimensionen epistemologischer Überzeugungen. Am stärksten zeigt sich dies an der Korrelation von $r = 0,92$ zwischen *Sicherheit* und *Quelle des Wissens*.

Zu mathematikbezogenen epistemologischen Überzeugungen fehlen aktuelle Ergebnisse. Frühe Studien aus dem angloamerikanischen Raum deuten jedoch auf überwiegend naive Überzeugungen bei Schülerinnen und Schülern hin. Insbesondere die Überzeugung, dass mathematisches Wissen hauptsächlich über Autoritäten wie Lehrkräfte und Schulbücher vermittelt wird, scheint recht verbreitet (Garofalo, 1989; Schoenfeld, 1985).

3. Experimentelles Arbeiten und Generierung neuen Wissens in Mathematik

Mathematik gilt gemeinhin als beweisende Disziplin, welche neue Erkenntnisse durch formale Beweise absichert (vgl. Heintz, 2000). Damit hebt sich die Mathematik von Naturwissenschaften ab, in denen neue Erkenntnisse mit Hilfe von Experimenten auf Plausibilität geprüft aber nicht bewiesen werden können.

Neben der Absicherung neuen Wissens erfüllen Beweise in der Mathematik weitere Funktionen, wozu unter anderem auch die Kommunikation neuen Wissens gehört (de Villiers, 1990). Allerdings stehen formale Beweise erst am Ende des Erkenntnisprozesses in der Mathematik. In diesem Zusammenhang unterscheidet Hersh (1991, S. 128) zwischen einem „front“- und einem „back“-Bereich der Mathematik:

“the ‘front’ of mathematics is mathematics in ‘finished’ form, as it is presented to the public in classrooms, textbooks, and journals. The ‘back’ would be mathematics as it appears among working mathematicians, in informal settings, told to one another in an office behind closed doors.”

Als Analogie zieht Hersh einen Vergleich mit einem Theaterbetrieb, bei dem der „front“-Bereich der für Gäste zugängliche Bereich ist, in dem das fertige Theaterstück vorgeführt wird. Demgegenüber steht der für die Öffentlichkeit nicht zugängliche „back“-Bereich, in dem u. a. geprobt wird. Analog wird im „front“-Bereich Mathematik als „fertiges“ Produkt präsentiert. Neue mathematische Erkenntnisse werden mittels formalen rein deduktiven Beweisen kommuniziert. Der Prozess, der zu diesem Beweis geführt hat, findet jedoch im „back“-Bereich statt. Laut Hersh (1991) findet hier im „back“-Bereich die eigentliche mathematische Tätigkeit statt, die deutlich weniger formal ist und auch Intuition sowie induktives Vorgehen beinhaltet. Auch wenn neue Erkenntnisse schlussendlich über formale Beweise kommuniziert werden, stellt sich aus epistemologischer Perspektive vor allem die Frage, wie die Generierung neuer Erkenntnisse im „back“-Bereich abläuft.

Da mathematische Publikationen in der Regel nicht den Erkenntnisweg wiedergeben, der zu einem neuen Satz und dessen Beweis geführt hat, gibt es vergleichsweise wenige Einblicke in den „back“-Bereich. Eine Ausnahme stellen Arbeiten von Euler dar, der detaillierte Einblicke in seine Arbeitsweise gewährt und dabei die Bedeutung von Beobachtungen und experimentellem Arbeiten betont (Euler, 1761, zitiert nach Leuders & Philipp, 2014). In Eulers Aufzeichnungen wird deutlich, dass am Beginn eines Erkenntnisprozesses das Betrachten von Beispielen, das Aufstellen von Vermutungen und deren Prüfung anhand weiterer Beispiele steht, während der Beweis als Absicherung der Erkenntnis am Ende des Prozesses steht (vgl. Leuders & Philipp, 2014).

Auch Wiener (1923, S. 237 f.) betont die Bedeutung des Aufstellens und Überprüfens von Hypothesen in der Mathematik und geht sogar so weit, Mathematik explizit als experimentelle Wissenschaft zu beschreiben:

„Die Mathematik ist eine experimentelle Wissenschaft. Die Formulierung und Überprüfung von Hypothesen spielt in der Mathematik keine andere Rolle als in der Chemie, Physik, Astronomie oder Botanik. [. . .] Es ist unerheblich, dass der Mathematiker mit Bleistift und Papier experimentiert, während der Chemiker Reagenzglas und Retorte oder der Biologe Färbemittel und Mikroskop verwendet.“

Ähnlich berichtet auch Heintz (2000) in ihrer soziologischen Studie über die Arbeitsweisen von Mathematikerinnen und Mathematikern, dass Experimentieren und insbesondere das Aufstellen von Hypothesen und deren Prüfung an Beispielen dem Auffinden neuer Erkenntnisse dient und somit am Beginn des Erkenntnisprozesses steht, während das Absichern der Erkenntnisse anschließend durch Beweise geschieht. Im Gegensatz zu den Naturwissenschaften

experimentieren Mathematikerinnen und Mathematiker jedoch mit mathematischen und damit meist geistigen Objekten (Heintz, 2000), nutzen dafür aber teilweise auch Anschauungsmittel als Repräsentation mathematischer Objekte. Zudem ist das Ziel innermathematischer Experimente, Erkenntnisse über rein mathematische Aussagen und Zusammenhänge zu erhalten. Für diese Tätigkeit – das Aufstellen von Hypothesen bezüglich mathematischer Objekte und Zusammenhänge sowie deren Prüfung an Beispielen – haben Leuders, Naccarella und Philipp (2011) den Begriff innermathematisches Experimentieren, als Abgrenzung zu naturwissenschaftlichen Experimenten, geprägt. Dennoch können auch naturwissenschaftliche (und somit außermathematische) Experimente zu neuen (inner-)mathematischen Erkenntnissen führen, sowie gewinnbringend für den Lernprozess im Fach Mathematik sein (z. B. Ganter, 2013). Eine ausführliche Diskussion, welche Bedeutung experimentelles Arbeiten in der Mathematik hat, findet sich bei Leuders und Philipp (2014).

Wie bereits erwähnt, besteht ein wesentlicher Unterschied zu den Naturwissenschaften jedoch nicht nur darin, dass in der Mathematik überwiegend mit geistigen Objekten sowie Anschauungsmitteln als deren Repräsentanten experimentiert wird, sondern auch darin, dass sich an den experimentellen Prozess der Prozess des Beweisens anschließt. Ob ein formaler Beweis jedoch eine mathematische Erkenntnis abschließend (und für alle Zeit) absichert, ist umstritten (vgl. Rott, Leuders & Stahl, 2014).

Einerseits kann argumentiert werden, dass formale und strikte Beweise sowie eine strenge Axiomatik mathematisches Wissen dauerhaft absichern. Andererseits sind Beweise menschengemacht und können Fehler enthalten. Zudem können sich die Kriterien, nach denen die mathematische Community über Ablehnung oder Akzeptanz von Beweisen entscheidet, mit der Zeit verändern. Ein Beispiel hierfür ist der Vier-Farben-Satz, der bisher nur über einen Computerbeweis gezeigt werden konnte und die Diskussion darum, ob derartige Beweise akzeptiert werden sollten (vgl. Rott et al., 2014 für eine ausführlichere Diskussion).

Mit Blick auf epistemologische Überzeugungen ergeben sich aus den Charakteristika der Erkenntnisprozesse in Mathematik Besonderheiten aber auch Gemeinsamkeiten mit anderen Disziplinen. Innermathematisches Experimentieren ist genauso wie Beweisen nicht allein ausgebildeten Mathematikerinnen und Mathematikern also Autoritäten vorbehalten. Leuders et al. (2011) beschreiben in ihrer qualitativen Studie zum innermathematischen Experimentieren, dass sowohl Schülerinnen und Schüler im Grund-

schulalter als auch Studierende in der Lage sind eigene Hypothesen aufzustellen und an Beispielen zu prüfen sowie ggf. ihre Hypothesen zu modifizieren. Innermathematisches Experimentieren ermöglicht somit eigene mathematische Erkenntnisse unabhängig von Autoritäten wie der Lehrkraft oder Schulbüchern (*Natur des Wissenserwerbs*). Ähnlich wird auch in den naturwissenschaftlichen Fächern argumentiert, dass experimentelles Arbeiten im Unterricht zu mehr Unabhängigkeit von Autoritäten führt (Barzel, Reinhofer & Schrenk, 2012). Da sowohl experimentelles Arbeiten als auch deduktive Beweise Teil des Erkenntnisprozesses in Mathematik sind, gibt es gute Argumente sowohl für die Position, dass mathematisches Wissen eher experimentell und induktiv gerechtfertigt wird, als auch für die Position, dass mathematisches Wissen deduktiv gerechtfertigt wird. Beide Positionen sind sowohl unter Mathematikern und Mathematikerinnen als auch Studierenden verbreitet (Rott, 2020). Die Frage, ob mathematisches Wissen eher induktiv oder deduktiv gerechtfertigt wird, ist jedoch zunächst unabhängig von der Frage, ob Wissen über Konsens von Autoritäten oder eigene Erkenntnisse gerechtfertigt wird, wie sie in der Konzeptualisierung von Conley et al. (2004) im Zentrum der Dimension *Rechtfertigung des Wissens* steht. Ob Zusammenhänge zwischen Überzeugungen bezüglich der deduktiven bzw. induktiven Rechtfertigung mathematischen Wissens und naiven bzw. erfahrenen Überzeugungen im Sinne von Conley et al. (2004) bestehen, ist bisher nicht bekannt.

Ähnlich gibt es auch bezüglich der Dimension *Entwicklung des Wissens* gute Argumente (s.o.) sowohl für die Position, dass mathematisches Wissen zeitlich stabil ist – einmal bewiesene Aussagen also für immer gelten – als auch für die gegenteilige Position (vgl. Rott et al., 2014). Während also z. B. in den Naturwissenschaften überwiegend Einigkeit besteht, dass Wissen veränderlich ist und die Überzeugung Wissen sei zeitlich stabil als naive epistemologische Überzeugung gilt, lassen sich die Positionen „Wissen ist sicher“ vs. „Wissen ist veränderlich“ in der Disziplin Mathematik nicht eindeutig als naiv oder erfahren charakterisieren. Rott et al. (2014) argumentieren, dass es vielmehr auf die Begründung der Position ankommt als auf die Position selbst.

Bezüglich der Dimension *Sicherheit des Wissens* kann angemerkt werden, dass in der Mathematik verschiedene Lösungswege zielführend sein können (wie z. B. bei Modellierungs- oder Problemlöseaufgaben). Dies gilt sowohl für das experimentelle Arbeiten als auch das anschließende Beweisen. Beispielsweise sind für den Satz des Pythagoras – und damit für eine Aussage mit hoher Bedeutung auch im Mathematikunterricht – viele verschiedene Beweise bekannt. Dennoch ist die Überzeugung, dass es in der

Mathematik nur eine richtige Lösung bzw. einen Lösungsweg gibt, unter Schülerinnen und Schülern weit verbreitet (Schoenfeld, 1992).

Inwiefern innermathematisches Experimentieren tatsächlich die epistemologischen Überzeugungen beeinflusst, ist bislang nicht systematisch untersucht worden. Die wenigen Studien zum innermathematischen Experimentieren (im deutschsprachigen Raum sind hier insbesondere die Arbeiten von Phillipp und Leuders zu nennen) fokussieren eher den Prozess des innermathematischen Experimentierens als auf mögliche Wirkungen (z. B. Leuders et al., 2011; Wu, Wong, Chen & Lien, 2006). Im Gegensatz dazu finden sich im Bereich der Naturwissenschaften bereits Interventionsstudien, die einen positiven Einfluss von Lernumgebungen mit Schülerexperimenten auf die naturwissenschaftsbezogenen epistemologischen Überzeugungen von Schülerinnen und Schülern unterstützen. Conley et al. (2004) führten eine Intervention zum eigenständigen Experimentieren mit Schülerinnen und Schülern der Klasse 5 durch und konnten insbesondere eine Steigerung von erfahrenen Überzeugungen in den Dimensionen *Quelle* und *Sicherheit des Wissens* feststellen. In einer ähnlichen Studie untersuchten Wegner et al. (2012) den Einfluss einer Intervention an einem außerschulischen Lernort auf die naturwissenschaftsbezogenen epistemologischen Überzeugungen von Fünftklässlerinnen und Fünftklässlern. Sie kommen zu demselben Ergebnis, dass die Überzeugungen in den Dimensionen *Quelle* und *Sicherheit des Wissens* sich in Richtung eher erfahrener Überzeugungen entwickeln, während keine signifikante Änderung in den Dimensionen *Entwicklung* und *Rechtfertigung des Wissens* nachgewiesen werden konnte. Schiefer et al. (2020) berichten von einer Interventionsstudie mit Kontrollgruppe. Wie bei Wegner et al. (2012) fand die zehnwöchige Intervention an einem außerschulischen Lernort statt, so dass überwiegend an den Naturwissenschaften interessierte Schülerinnen und Schüler an der Studie teilnahmen. Schiefer et al. (2020) kommen zu dem Ergebnis, dass die Schülerinnen und Schüler in der Experimentalgruppe nach der Intervention erfahrenere Überzeugungen in allen vier Dimensionen aufwiesen als die Lernenden in der Kontrollgruppe, wobei insbesondere Schülerinnen von der Intervention profitierten.

Auf Grund der Domänenspezifität von epistemologischen Überzeugungen scheint zunächst unklar, ob diese Ergebnisse sich auch auf mathematikbezogene epistemologische Überzeugungen und Interventionen zum innermathematischen Experimentieren übertragen lassen. Hinweise, dass innermathematisches Experimentieren einen positiven Effekt auf mathematikbezogene epistemologische Überzeugungen haben könnte, lassen sich jedoch aus Arbeiten zu

konstruktivistischen Interventionen ableiten (z. B. Higgins, 1997; Hofer, 1999), welche das selbstständige Arbeiten an Problemaufgaben fokussierten – ein Gestaltungsmerkmal, das auch für innermathematisches Experimentieren konstitutiv ist. So berichtet Higgins (1997), dass Schülerinnen und Schüler aus den Klassen 6 und 7 nach einer einjährigen Intervention zum eigenständigen Problemlösen erfahrenere Überzeugungen zur *Quelle* und *Rechtfertigung des Wissens* aufwiesen als Lernende, die nicht an der Intervention teilgenommen hatten. Zu ähnlichen Ergebnissen kommt Lampert (1990), die nach einer Intervention zum eigenständigen Problemlösen eine Zunahme erfahrener Überzeugungen in den Dimensionen *Quelle* und *Sicherheit des Wissens* bei Schülerinnen und Schülern aus Klasse 5 berichtet.

4. Empirische Studie

4.1 Forschungsfragen und Hypothesen

Während aktuelle Studien zu den naturwissenschaftsbezogenen epistemologischen Überzeugungen von Schülerinnen und Schülern vorliegen und Interventionsstudien einen positiven Einfluss von Schülerexperimenten auf diese epistemologischen Überzeugungen zeigen, liegen zu mathematikbezogenen epistemologischen Überzeugungen keine vergleichbaren aktuellen Befunde vor. Vor diesem Hintergrund ergeben sich die folgenden Forschungsfragen und entsprechenden Hypothesen:

- 1) Welche mathematikbezogenen epistemologischen Überzeugungen zeigen sich bei Schülerinnen und Schülern und welche Zusammenhänge zeigen sich zwischen den vier betrachteten Dimensionen mathematikbezogener epistemologischer Überzeugungen (*Quelle des Wissens*, *Rechtfertigung des Wissens*, *Sicherheit des Wissens* und *Entwicklung des Wissens*)?

Hypothesen:

Urhahne und Hopf (2004) berichten jeweils positive Zusammenhänge innerhalb der beiden Bereiche *Natur des Wissens* und *Natur des Wissenserwerbs*. Im Bereich *Natur des Wissenserwerbs* erwarten wir ebenfalls, dass eher erfahrene Überzeugungen bezüglich der *Quelle des Wissens* mit erfahrenen Überzeugungen bezüglich der *Rechtfertigung des Wissens* einhergehen (Hypothese 1). Innerhalb des Bereichs *Natur des Wissens* haben wir keine konkrete Hypothese bezüglich des Zusammenhangs zwischen Überzeugungen zur *Sicherheit des Wissens* und Überzeugungen zur *Entwicklung des Wissens*. Wie bereits diskutiert, lassen sich die mathematikbezogenen Überzeugungen in der Dimension *Entwicklung des Wissens* nicht sinnvoll als naiv oder erfahren klassi-

fizieren. Beide Sichtweisen – also, dass mathematisches Wissen zeitlich stabil ist oder entgegengesetzt, dass mathematisches Wissen Veränderungen unterzogen werden kann – lassen sich sinnvoll begründen. Wie Überzeugungen in dieser Dimension mit Überzeugungen innerhalb der übrigen Dimensionen zusammenhängen, scheint somit unklar, so dass die Überprüfung möglicher Zusammenhänge als explorativ angesehen werden sollte.

- 2) Inwiefern lassen sich Unterschiede bezüglich der mathematikbezogenen epistemologischen Überzeugungen vor und nach der Intervention zum innermathematischen Experimentieren feststellen?

Hypothesen:

Studien zu naturwissenschaftsbezogenen epistemologischen Überzeugungen zeigen eine Zunahme eher erfahrener Überzeugungen in allen vier Dimensionen durch Interventionen mit Schülerexperimenten (Conley et al., 2004; Wegner et al., 2012; Schiefer et al., 2020). Vor dem Hintergrund, dass experimentelle Denk- und Arbeitsweisen auch im Prozess der Wissensgenerierung in Mathematik eine Rolle spielen, gehen wir davon aus, dass auch die mathematikbezogenen epistemologischen Überzeugungen sich im Laufe einer Intervention zum innermathematischen Experimentieren verändern können.

Da die teilnehmenden Schülerinnen und Schüler anhand der eingesetzten Aufgaben zum innermathematischen Experimentieren eigenständig (für sie) neue mathematische Zusammenhänge erschließen und anhand eigener Argumente begründen sollten, erwarten wir bezüglich der Dimensionen *Quelle* und *Rechtfertigung des Wissens* (Bereich *Natur des Wissenserwerbs*) jeweils eine Veränderung in Richtung eher erfahrener Überzeugungen (Hypothese 2). Nach der Intervention sollten somit Überzeugungen, dass eigene mathematische Erkenntnisse möglich und diese anhand eigener Erfahrungen und Argumente gerechtfertigt werden können, im Vergleich zu Überzeugungen, dass mathematisches Wissen durch Autoritäten vermittelt und über diese gerechtfertigt wird, an Relevanz gewinnen.

Bezüglich der Dimension *Sicherheit des Wissens* gehen wir ebenfalls von einer Änderung zugunsten eher erfahrener Überzeugungen aus (Hypothese 3). Die während der Intervention eingesetzten Aufgaben zum innermathematischen Experimentieren sind offen gestaltet – sowohl was Lösungen als auch Lösungswege betrifft. Die Schülerinnen und Schüler können beim innermathematischen Experimentieren unterschiedliche Vorgehensweisen nutzen und Ergebnisse auf unterschiedlichen Niveaus erarbeiten. Daher erwarten wir, dass die eher erfahrenere Über-

zeugung, dass bei komplexen mathematischen Problemen mehrere Lösungswege und Lösungen existieren, nach der Intervention größere Zustimmung unter den Schülerinnen und Schülern erfährt als vor der Intervention.

Die im Rahmen der Intervention eingesetzten Aufgaben (siehe Kapitel 4.3 für eine beispielhafte Darstellung der Aufgaben) liefern unserer Ansicht nach keine direkten Anlässe darüber nachzudenken, ob mathematisches Wissen zeitlich stabil oder Veränderungen unterworfen ist, und somit bieten sich vermutlich keine Anlässe seine Position bezüglich der Dimension *Entwicklung des Wissens* zu revidieren. Darüber hinaus gibt es, wie bereits diskutiert, im Fach Mathematik gute Argumente für beide skizzierten Überzeugungen. Daher erwarten wir keine relevanten Änderungen bezüglich der Überzeugungen in der Dimension *Entwicklung des Wissens* (Hypothese 4).

4.2 Design und verwendete Instrumente

Zur Beantwortung der Forschungsfragen wurde eine längsschnittliche Interventionsstudie an der *Junior Uni Wuppertal* durchgeführt. Die Intervention selbst wird im folgenden Abschnitt 4.3 beschrieben. In sieben einwöchigen Ferienkursen nahmen insgesamt 90 Lernende (39 Schülerinnen und 51 Schüler) im Alter von 11 bis 14 Jahren ($M = 12,7$ Jahre; $SD = 0,53$) freiwillig an der Studie teil. Insgesamt handelt es sich somit um eine eher kleine Stichprobe. Vor Beginn der Intervention (T1) wurden alle Schülerinnen und Schüler mittels Fragebögen zu ihrer letzten Klassenarbeitsnote sowie Zeugnisnote im Fach Mathematik, zu ihrem Interesse an Mathematik und ihren mathematikbezogenen epistemologischen Überzeugungen befragt. Nach Ende der Intervention (T2) wurden die Schülerinnen und Schüler mit einem zweiten Fragebogen nur zu ihren epistemologischen Überzeugungen befragt.

Zur Erhebung des Interesses an Mathematik wurde eine Fragebogenskala von Rakoczy et al. (2005) genutzt. Für die Messung der mathematikbezogenen epistemologischen Überzeugungen wurden in beiden Fragebögen die Skalen von Urhahne und Hopf (2004) adaptiert. Diese Skalen differenzieren die vier bereits diskutierten Dimensionen epistemologischer Überzeugungen (*Quelle des Wissens, Rechtfertigung des Wissens, Sicherheit des Wissens und Entwicklung des Wissens*). Im Original beziehen sich alle Items auf naturwissenschaftliches Wissen beziehungsweise Wissenserwerb. Dementsprechend liegt ein starker Fokus auf der Bedeutung von Experimenten für die Generierung und Absicherung neuen Wissens (z. B.: „Ein wichtiger Teil der Naturwissenschaften ist es, Experimente durchzuführen, um neue Ideen zu finden.“) Für die vorliegende Studie wurden die einzelnen Items derart umformuliert, dass sie sich auf Mathematik anstatt auf Naturwissenschaften beziehen. In Hinblick auf den Fokus der Experimentierkurse, in deren Rahmen die Studie stattfand, sowie aufgrund der Bedeutung experimenteller Arbeitsweisen für den mathematischen Erkenntnisprozess (vgl. Abschnitt 3), wurde die Fokussierung auf Experimente jedoch beibehalten.

Zwei Items wurden bereits vor der Datenerhebung vollständig aus den Skalen von Urhahne und Hopf (2004) entfernt. Dies betraf ein Item aus der Dimension *Sicherheit des Wissens* („Es gibt nur die eine Lösung, wenn Naturwissenschaftler einmal das Ergebnis eines Experiments gefunden haben.“) sowie ein Item aus der Dimension *Rechtfertigung des Wissens* („Ein Experiment ist ein guter Weg, um herauszufinden, ob etwas wahr ist.“). Beide Items wurden entfernt, weil innermathematische Experimente zwar Teil des mathematischen Erkenntnisprozesses sind, mathematisches Wissen über diese aber nicht abgesichert beziehungsweise als wahr klassifiziert werden kann – dafür wären jeweils Beweise notwendig. Zwei weitere Items wurden aus Gründen der Reliabilität

	Konstrukt	Quelle	Anzahl Items	Reliabilität (α) zu T1/T2	Beispielitem
	Interesse	Rakoczy et al., 2005	8	0,73 (nur T1)	Mathematik ist mir persönlich wichtig.
Epistemologische Überzeugungen	Quelle des Wissens	Urhahne & Hopf, 2004	3	0,62/0,9	Was Mathematiker herausfinden, muss man glauben.
	Sicherheit des Wissens	Urhahne & Hopf, 2004	4	0,63/0,67	Alle Fragen in Mathematik haben genau eine Lösung.
	Entwicklung des Wissens	Urhahne & Hopf, 2004	5	0,62/0,60	Manchmal verändern sich die Vorstellungen in Mathematik.
	Rechtfertigung des Wissens	Urhahne & Hopf, 2004	8	0,64/0,74	In der Mathematik können sich neue Vorstellungen aus den eigenen Fragen und Experimenten entwickeln.

Tab. 1: Überblick über die Erhebungsinstrumente mit Anzahl der Items, Reliabilität (Cronbachs α) und Beispielitem

aus der Skala *Quelle des Wissens* entfernt. Des Weiteren wurde aus den Skalen *Sicherheit des Wissens* und *Entwicklung des Wissens* jeweils ein Item aus Reliabilitätsgründen entfernt.

Tabelle 1 gibt einen Überblick über die in der Studie eingesetzten Instrumente. Alle Items wurden auf einer vierstufigen Likert-Skala (1 = stimmt nicht, 4 = stimmt vollkommen) beantwortet. Die Items der Skalen *Quelle des Wissens* sowie *Sicherheit des Wissens* wurden umkodiert, so dass bei allen Skalen hohe Werte eher erfahrenen Überzeugungen entsprechen, während niedrige Werte eher naiven Überzeugungen entsprechen. Abgesehen von der Skala *Quelle des Wissens* zu T2 zeigen die Skalen niedrige (insbesondere zu T1) bis akzeptable Reliabilität. Urhahne und Hopf (2004) berichten für die ursprünglichen Skalen ähnliche beziehungsweise niedrigere Reliabilitäten (zwischen 0,41 und 0,68). Aufgrund der geringen Reliabilitäten zu T1 müssen die Ergebnisse jedoch vorsichtig interpretiert werden. Mögliche Gründe für die besonders zu T1 niedrige Reliabilität der Skalen werden in der Diskussion (6.2) thematisiert.

4.3 Aufbau und Ablauf der Intervention

Innerhalb der an der *Junior Uni Wuppertal* angebotenen Experimentierkurse sollen vorwiegend interessierte (wie auch begabte) Schülerinnen und Schüler Mathematik auf einem für sie vielleicht neuen Weg kennenlernen. Sie sollen die Möglichkeit haben zu erleben, dass Mathematik nicht nur aus Formeln, Zahlen, Rechnungen und Algorithmen besteht, sondern dass sie eigene Entdeckungen machen, eigenen Vermutungen nachgehen und ganz selbstständig arbeiten können. Insgesamt ist der Kurs mit seinen einzelnen Experimenten so aufgebaut, dass die Schülerinnen und Schüler mathematische Sachverhalte erkunden, entdecken und dabei ihre eigenen Erfahrungen sammeln, solche Tätigkeiten, für die es innerhalb der eigentlichen Unterrichtszeit seltener Möglichkeit gibt. Um diese Ziele der Intervention zu verfolgen, wurde das Schülerexperiment als Lehr-Lern-Methode gewählt.

Inhalt der dieser Studie zugrundeliegenden Kurse waren ausschließlich innermathematische Experimente, die zum selbstständigen Erkunden und Begründen einladen. Die verwendeten Aufgaben wiesen alle einen arithmetischen und problemhaltigen Charakter (wie beispielsweise Zahlenmauern, Magische Quadrate oder ANNA-Zahlen) auf. Die Schülerinnen und Schüler experimentierten hier vorwiegend mit Stift und Papier, vereinzelt wurden nach eigenem Bedarf Arbeitsmittel wie Plättchen, Münzen, Würfel oder ähnliches eingesetzt und verwendet. Das Besondere bei allen Aufgaben war, dass (1) diese über eine offene Fragestellung verfügten, (2) die Schülerinnen

und Schüler problemlos konkrete Beispiele zur Überprüfung ihrer Ideen generieren konnten und (3) eine Vielzahl von Vermutungen und Wegen/Prozessen zugelassen wurden (Leuders et al., 2011).

Zur Illustration wird im Folgenden die Aufgabe der Treppenzahlen (vgl. Schwätzer & Selzer, 1998; Leuders et al., 2011) näher betrachtet (siehe Abb. 3).

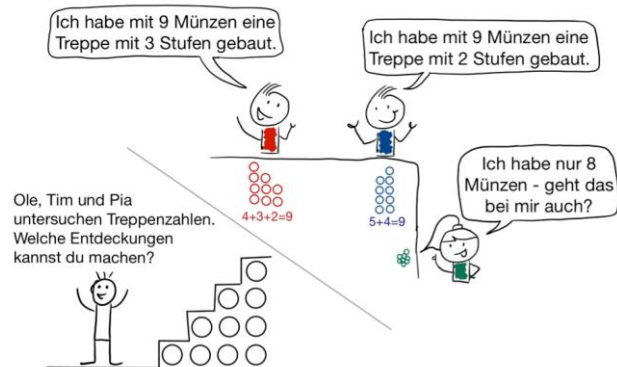


Abb. 3: Aufgabe Treppenzahlen, eigene Darstellung in Anlehnung an Leuders et al. (2011)

In der Studie von Leuders et al. (2011) konnte gezeigt werden, dass mit einer solchen Aufgabe das innermathematische Experimentieren bei den Schülerinnen und Schülern angeregt wird und diese sich ausgiebig mit einer solchen Aufgabenstellung im Sinne eines experimentellen Vorgehens auseinandersetzen.

Die Aufgabenstellung ist bewusst offen gestellt, so dass Schülerinnen und Schüler ihrem Niveau entsprechend ihre eigenen Entdeckungen machen können. Lernende können sowohl Treppen betrachten, die bei 1 beginnen und somit die Dreieckszahlen abbilden, als auch Treppen mit bestimmter (gewählter) Stufenanzahl. In den der Studie zugrundeliegenden Kursen wurde die Aufgabe ohne jeglichen Hinweis bearbeitet, dass sich Treppenzahlen >2 als Summe von aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darstellen lassen.

Bei Aufgaben dieser Art steht neben diesen Entdeckungen mit dem Aufstellen und Überprüfen von eigenen Hypothesen natürlich auch das Argumentieren im Vordergrund.

Die hier analysierten Kurse wurden für Schülerinnen und Schüler im Alter von 11 bis 14 Jahren konzipiert und wurden identisch im regelmäßigen Turnus einige Jahre lang angeboten. Innerhalb der einwöchigen Intervention experimentieren die teilnehmenden Schülerinnen und Schüler zwei Stunden pro Tag selbstständig und erarbeiten (meist für sie) neue Problemfelder. Die maximale Teilnehmerzahl eines einzelnen Kurses war seitens der *Junior Uni Wuppertal* auf 15 beschränkt.

4.4 Methoden der Datenauswertung

Um die vorgestellten Forschungsfragen aus Kap. 4.1 beantworten zu können, wurden statistische Test der klassischen Testtheorie angewendet. Die statistischen Auswertungen erfolgten mit Hilfe der Statistiksoftware SPSS Volume 27.

Neben deskriptiven Analysen wurden Korrelationsanalysen angestellt, um mögliche Zusammenhangshypothesen zwischen Leistung, Interesse und den vier Dimensionen epistemologischer Überzeugungen zu überprüfen. Genutzt wurde hierbei der Korrelationskoeffizient nach Pearson, der aufgrund der vorliegenden intervallskalierten Daten zum Einsatz kommt (Brosius, 2013). Neben den Korrelationsanalysen wurden auch *t*-Test für verbundene Stichproben durchgeführt.

5. Ergebnisse

5.1 Charakteristika der Stichprobe

Die Stichprobe der teilnehmenden Schülerinnen und Schüler ist vergleichsweise homogen und zeichnet sich durch hohes Interesse an Mathematik ($M=3,2$, $SD=0,37$) sowie gute Mathematikleistungen in der Schule aus. Die Durchschnittsnote in der vorangegangenen Klassenarbeit im Fach Mathematik lag bei 1,9. Zwischen den Teilnehmenden der sieben einwöchigen Ferienkurse konnten mittels MANOVA keine signifikanten Unterschiede bezüglich des Interesses an Mathematik oder der Leistung festgestellt werden ($F(18, 249)=0,75$, $p>0,8$, $\eta^2=0,05$). Da alle Kurse von derselben Dozentin und mit denselben Aufgaben unterrichtet wurden, wird zur Beantwortung der Forschungsfragen jeweils die gesamte Stichprobe genutzt und auf eine gruppenspezifische Auswertung verzichtet.

5.2 Zusammenhänge zwischen den Dimensionen epistemologischer Überzeugungen

Zur Beantwortung der ersten Forschungsfrage wurden die zu T1 erhobenen Daten deskriptiv ausgewertet sowie Korrelationsanalysen durchgeführt. Tabelle 2 zeigt sowohl die deskriptiven Kennwerte der Dimensionen epistemologischer Überzeugungen, des

Interesses an Mathematik und der Schulleistungen (Mathematiknote in der letzten Klassenarbeit) als auch die Korrelationen zwischen den Konstrukten.

Insgesamt zeigt sich, dass die epistemologischen Überzeugungen der Schülerinnen und Schüler vor Beginn der Intervention eher im Bereich der naiven Überzeugungen liegen. Bezüglich der Dimensionen *Quelle des Wissens* ($M=2,22$) und *Rechtfertigung des Wissens* ($M=2,05$) herrschen demnach die Überzeugungen vor, dass (neues) mathematisches Wissen überwiegend von Autoritäten wie Mathematikerinnen und Mathematikern vermittelt und auch anhand eines Konsens unter Autoritäten gerechtfertigt wird. Die Überzeugung, dass (zumindest subjektiv) neue Erkenntnisse auch selbst gemacht und anhand eigener Argumente gerechtfertigt werden können, tritt bei den Schülerinnen und Schülern kaum auf.

Ähnliche Ergebnisse zeigen sich bezüglich der Dimension *Sicherheit des Wissens* ($M=2,35$). Auch hier überwiegt die eher naive Überzeugung, dass es bei mathematischen Fragen oder Problemen nur eine richtige Lösung geben kann, während die eher erfahrene Überzeugung, dass komplexe mathematische Probleme auch mehrere Lösungen haben können, selten auftritt.

Bezüglich der Dimension *Entwicklung des Wissens* ($M=1,97$) überwiegt die Überzeugung, dass mathematisches Wissen stabil ist und sich im Laufe der Zeit keine neuen Vorstellungen in der Mathematik entwickeln. Wie bereits diskutiert, lassen sich mathematikbezogene Überzeugungen in dieser Dimension nicht gut als naiv oder erfahren klassifizieren, da für unterschiedliche Überzeugungen gute Argumente existieren.

Auffällig ist, dass alle untersuchten Dimensionen epistemologischer Überzeugungen weder mit dem Interesse an Mathematik noch mit den Leistungen der Schülerinnen und Schüler korrelieren und somit keine Zusammenhänge festgestellt werden können (vgl. Tabelle 2). Dabei muss jedoch beachtet werden, dass die hier untersuchte Stichprobe bezüglich Interesse und Leistung äußerst homogen ist und somit kaum Varianz bezüglich dieser Merkmale vorliegt.

	Bivariate Korrelationen					
	<i>M</i> (<i>SD</i>)	2	3	4	5	6
Leistung (1)	1,9 (0,57)	-0,43**	0,1	-0,05	0,01	0,14
Interesse (2)	3,2 (0,37)	-	0,03	-0,01	0,06	-0,04
Quelle des Wissens (3)	2,22 (0,56)		-	0,25*	0,64**	0,57**
Sicherheit des Wissens (4)	2,35 (0,52)			-	0,24**	0,11
Entwicklung des Wissens (5)	1,97 (0,49)				-	0,42**
Rechtfertigung des Wissens (6)	2,05 (0,4)					-

Tab. 2: Deskriptive Statistik und bivariate Korrelationen zwischen den einzelnen Konstrukten nach Pearson, ** $p < .01$

	T1		T2		<i>t</i> (89)	Cohens <i>d</i>
	<i>M</i>	<i>SD</i>	<i>M</i>	<i>SD</i>		
Quelle des Wissens (3)	2,22	0,56	2,9	0,77	-6,06	0,64***
Sicherheit des Wissens (4)	2,35	0,52	2,98	0,62	-7,10	0,75***
Entwicklung des Wissens (5)	1,97	0,49	3,23	0,46	-16,79	1,77***
Rechtfertigung des Wissens (6)	2,05	0,40	2,95	0,51	-12,35	1,30***

Tab. 3: Ergebnisse des *t*-Test für verbundene Stichproben, ****p*<.001

Die vier Dimensionen epistemologischer Überzeugungen korrelieren jeweils signifikant positiv miteinander mit schwacher bis mittlerer Effektstärke (*r* zwischen 0,24 und 0,64). Eine Ausnahme besteht nur bei den Dimensionen *Sicherheit des Wissens* und *Rechtfertigung des Wissens*, zwischen denen kein signifikanter Zusammenhang bestätigt werden kann. Hypothese 1 kann somit bestätigt werden. Obwohl eine Klassifikation in naive und erfahrene Überzeugungen bezüglich der Dimension *Entwicklung des Wissens* nicht angemessen scheint, korreliert auch diese Dimension positiv mit den übrigen Dimensionen. Naive Überzeugungen bezüglich der *Quelle*, *Rechtfertigung* und *Sicherheit* des mathematischen Wissens scheinen somit mit der Überzeugung einherzugehen, dass mathematisches Wissen zeitlich stabil ist.

5.3 Veränderungen der epistemologischen Überzeugungen

Zur Beantwortung der zweiten Forschungsfrage wurden *t*-Tests mit verbundenen Stichproben durchgeführt. Tabelle 3 gibt einen Überblick über die Mittelwerte bezüglich der vier Dimensionen epistemologischer Überzeugungen vor (T1) und nach (T2) der Intervention, sowie über die Ergebnisse der *t*-Tests.

In allen vier Dimensionen lassen sich signifikante Veränderungen der epistemologischen Überzeugungen der Schülerinnen und Schüler feststellen. Hypothese 2, dass sich die Überzeugungen bezüglich der beiden Dimensionen *Quelle* und *Rechtfertigung des Wissens* im Bereich *Natur des Wissenserwerbs* von eher naiven zu eher erfahrenen Überzeugungen entwickeln, kann durch die Daten bestätigt werden. Bezüglich der *Quelle des Wissens* (*t*(89)=-6,06, *p*<0,001, *d*=0,64) bestätigt der *t*-Test einen signifikanten Effekt mittlerer Stärke. Die Überzeugung, dass mathematisches Wissen nicht nur durch Autoritäten wie Mathematikerinnen und Mathematiker vermittelt, sondern auch selbst erzeugt werden kann, gewinnt somit im Vergleich von Beginn und Ende der Intervention an Bedeutung. Bezüglich der Dimension *Rechtfertigung des Wissens* (*t*(89)= -12,35; *p*<0,001; *d*= 1,30) liegt sogar ein starker Effekt vor. Auch hier gewinnt die Überzeugung, dass Wissen anhand eigener Erfahrungen und Argumente gerechtfertigt und begründet werden kann gegenüber der ursprünglich

stärker verbreiteten Überzeugung, dass mathematisches Wissen über den Konsens von Autoritäten gerechtfertigt wird, an Relevanz.

Auch im Bereich der *Natur des Wissens* lassen sich signifikante Entwicklungen der epistemologischen Überzeugungen nach der Intervention feststellen. Wie erwartet (Hypothese 3), bestätigt der *t*-Test eine signifikante und starke Änderung der Überzeugungen innerhalb der Dimension *Sicherheit des Wissens* (*t*(89)= -7,10, *p*<0,001; *d*=0,75) hin zu eher erfahrenen Überzeugungen. Während vor der Intervention die Zustimmung zur Überzeugung unter den Schülerinnen und Schülern noch hoch war, dass es bei mathematischen Fragen und Problemen nur eine richtige Lösung gibt, wird diese nach der Intervention eher abgelehnt. Stattdessen zeigt sich eine größere Zustimmung dazu, dass es für komplexe mathematische Probleme auch mehrere Lösungsansätze geben kann. Die stärksten Veränderungen zeigen sich in der Dimension *Entwicklung des Wissens* (*t*(89)=-16,79, *p*<0,001; *d*=1,77). Hier verliert die Überzeugung, dass mathematisches Wissen zeitlich stabil ist, deutlich an Zustimmung gegenüber der Überzeugung, dass sich auch Wissen im Bereich der Mathematik verändert.

6. Diskussion

6.1 Zusammenfassung und Interpretation der Ergebnisse

Forschung zu epistemologischen Überzeugungen zeigen, dass erfahrene Überzeugungen mit größerem Lernerfolg korrelieren (Trautwein & Lüdtke, 2007). D. h. wenn eine Person eine reflektierte Vorstellung davon hat, wie Wissen entsteht und wie es begründet wird, dann lernt diese nachhaltiger und kann ihr Wissen besser vernetzen (Tsai, 1998). Darüber hinaus werden positive Zusammenhänge mit motivationalen und affektiven Variablen angenommen (Hofer, 2001). In diesem Zusammenhang scheinen zwei Ergebnisse überraschend:

In der vorliegenden Studie konnten keine signifikanten Zusammenhänge zwischen epistemologischen Überzeugungen und schulischen Leistungen festgestellt werden. Ebenso wenig zeigten sich Zusammenhänge zum Interesse an Mathematik. Allerdings

wurde eine bezüglich Leistung und Interesse sehr homogene Stichprobe betrachtet.

Obwohl die hier untersuchten Schülerinnen und Schüler leistungsstark im Fach Mathematik sind (Durchschnittsnote der letzten Klassenarbeit 1,9), stimmen diese vor der Intervention überwiegend eher naiven epistemologischen Überzeugungen zu. Es stellt sich somit die Frage, wieso naive Überzeugungen überwiegen und welche Rolle gegebenenfalls der Mathematikunterricht für diesen Befund spielt. Laut dem Model von Hofer (2001) werden die epistemologischen Überzeugungen von Schülerinnen und Schülern unter anderem durch den Unterricht und das pädagogische Handeln der Lehrkräfte beeinflusst. Aktuelle Ergebnisse aus der TALIS-Videostudie zeigen beispielsweise, dass im Mathematikunterricht nur selten verschiedene Lösungswege für Problemstellungen thematisiert werden (Klieme & Schreyer, 2020), so dass für Schülerinnen und Schüler der Eindruck entstehen könnte, dass es für mathematische Probleme nur eine Lösung gibt (naive Überzeugung zur *Sicherheit des Wissens*). Gleichzeitig werden eher selten kognitiv anspruchsvolle Inhalte thematisiert (Klieme & Schreyer, 2020). Ähnliche Ergebnisse zeigte auch die COACTIV-Studie (Jordan, Krauss, Löwen, Blum, Neubrand, Brunner, Kunter & Baumert, 2008). Anspruchsvolle Aufgaben (z. B. zum Modellieren und Problemlösen), die zum selbstständigen Nachdenken anregen, werden offenbar seltener genutzt als Routineaufgaben. Möglicherweise führt die seltene Behandlung von Aufgaben, bei denen die Schülerinnen und Schüler eigene Erkenntnisse haben, zu eher naiven Überzeugungen zu *Quelle* und *Rechtfertigung des Wissens*.

6.1.1 Zusammenhänge zwischen den Dimensionen epistemologischer Überzeugungen

Zwischen fast allen Dimensionen epistemologischer Überzeugungen zeigen sich in der hier untersuchten Stichprobe vor Beginn der Intervention signifikante Zusammenhänge. Diese fallen zum Teil stärker aus als beispielsweise in der Untersuchung von Urhahne und Hopf (2004) bezüglich epistemologischer Überzeugungen in den Naturwissenschaften, die jedoch ebenfalls keine Zusammenhänge zwischen *Rechtfertigung* und *Sicherheit des Wissens* feststellen konnten. Im Gegensatz zur vorliegenden Studie fanden Urhahne und Hopf (2004) zudem keinen Zusammenhang zwischen *Quelle* und *Entwicklung des Wissens*. Auffällig an den Ergebnissen der vorliegenden Studie ist, dass zwischen den drei Dimensionen *Rechtfertigung*, *Quelle* und *Entwicklung des Wissens* signifikante Korrelationen bestehen, während die jeweiligen Zusammenhänge zur Dimension *Sicherheit des*

Wissens deutlich geringer oder nicht signifikant ausfallen. Die grundsätzliche Struktur der beiden Bereiche *Natur des Wissenserwerbs* und *Natur des Wissens* kann somit für das Fach Mathematik in dieser Stichprobe nicht uneingeschränkt repliziert werden.

Mit Blick auf die Tatsache, dass die epistemologischen Überzeugungen in der Dimension *Entwicklung des Wissens* nicht sinnvoll als naiv oder erfahren charakterisiert werden können und es für beide Ausprägungen dieser Dimension gute Argumente gibt, überrascht der starke Zusammenhang zu den Dimensionen *Quelle* und *Rechtfertigung des Wissens*. Naive Überzeugungen bezüglich der Rolle von Autoritäten bei der Generierung neuen Wissens gehen offenbar mit der Überzeugung einher, dass mathematisches Wissen zeitlich stabil ist. Anhand der hier präsentierten Daten lässt sich dieser Befund nicht erklären. Qualitative Untersuchungen, bei denen von den Schülerinnen und Schülern zusätzlich Begründungen für ihre Überzeugungen eingefordert werden, könnten zu einem besseren Verständnis dieser Ergebnisse beitragen.

6.1.2 Veränderungen der epistemologischen Überzeugungen

Bisherige Studien aus den Naturwissenschaften, die sich mit dem Einfluss von Experimenten auf epistemologische Überzeugungen beschäftigt haben, berichten vor allem eine Änderung innerhalb der Dimensionen *Quelle* und *Sicherheit des Wissens* hin zu eher erfahrenen Überzeugungen (Conley et al., 2004; Wegner et al., 2012). In der vorliegenden Studie konnten signifikante Änderungen in allen vier Dimensionen epistemologischer Überzeugungen gemessen werden.

Eine positive Entwicklung im Bereich *Natur des Wissenserwerbs* ließ sich erwarten, da die in der Intervention eingesetzten Aufgaben zum innermathematischen Experimentieren einen wesentlichen Teil mathematischer Erkenntnisprozesse abbilden. Darüber hinaus waren die Aufgaben so konzipiert, dass die Schülerinnen und Schüler eigene (für sie) neue mathematische Erkenntnisse unabhängig von Autoritäten wie der Lehrkraft generieren konnten.

Da die Aufgaben zudem bezüglich Lösungswegen völlig offen waren und Erkenntnisse auf verschiedenen Niveaus zuließen, ist nicht verwunderlich, dass auch in der Dimension *Sicherheit des Wissens* eher erfahrene Überzeugungen derart, dass bei komplexen Problemen verschiedene Lösungen existieren gegenüber naiveren Überzeugungen, dass es nur eine mögliche Lösung für mathematische Problemstellungen gibt, an Zustimmung gewinnen.

Überraschend ist hingegen die sehr starke Veränderung innerhalb der Dimension *Entwicklung des Wissens*. Während die Schülerinnen und Schüler vor der Intervention eher überzeugt waren, dass mathematisches Wissen zeitlich stabil ist (einmal bewiesene Aussagen also für alle Zeit gelten), herrscht nach der Intervention die Überzeugung vor, dass mathematisches Wissen sich im Laufe der Zeit ändern kann.

Da die eingesetzten Aufgaben nicht auf Änderungen in dieser Dimension abzielten und keinen direkten Anlass dazu gaben darüber nachzudenken, ob mathematisches Wissen zeitlich stabil ist oder nicht, kann eine eindeutige Erklärung für diesen Befund zunächst nicht erbracht werden. Möglicherweise hat die eigenständige Beschäftigung mit innermathematischen Experimenten und die Einsicht, dass eigene (subjektiv) neue mathematische Erkenntnisse möglich sind, auch eine Reflexion bezüglich der Stabilität mathematischen Wissens und möglicher Veränderungen des Wissens angeregt. Schon vor der Intervention zeigte sich, dass die Dimension *Entwicklung des Wissens* vergleichsweise stark mit den Dimensionen *Quelle* und *Rechtfertigung des Wissens* zusammenhängt. Es besteht jedoch auch die Möglichkeit, dass die Schülerinnen und Schüler die Items dieser Dimension nicht richtig verstanden haben und somit einen falsch-sachlichen Wert dokumentiert haben.

Interviews mit Schülerinnen und Schülern über ihre Erfahrungen beim innermathematischen Experimentieren könnten dazu beitragen besser zu verstehen, warum die Schülerinnen und Schüler insbesondere auch in der Dimension *Entwicklung des Wissens* derart starke Änderungen ihrer Überzeugungen berichten.

6.2 Limitationen

Trotz der erfreulichen Ergebnisse bezüglich der Veränderungen der epistemologischen Überzeugungen, sind bei der vorliegenden Studie einige Limitationen und Grenzen zu diskutieren. Zunächst einmal ist anzumerken, dass die Stichprobengröße für eine quantitative Aussage recht gering ist. Allerdings wurden ausschließlich statistische Verfahren verwendet, die auch bei eher geringen Stichprobengrößen zuverlässige Ergebnisse liefern und robust gegenüber der Verletzung ihrer Voraussetzungen (insbesondere der Normalverteilungsannahme) sind (Bortz & Schuster, 2010). Des Weiteren wurde die außerschulisch durchgeführte Intervention nur teilweise randomisiert. Die teilnehmenden Schülerinnen und Schüler der *Junior Uni Wuppertal* entstammen einer selektiven Stichprobe mit überwiegend mathematisch interessierten Lernenden. Es ist somit unklar, ob die Zusammenhänge zwischen den Dimensionen episte-

mologischer Überzeugungen in einer weniger selektiven Stichprobe anders ausfallen. Insbesondere stellt sich die Frage, ob Schülerinnen und Schüler mit geringeren Mathematikleistungen sowie geringerem Interesse an Mathematik von einer Intervention zu innermathematischen Experimenten im gleichen Maße bezüglich ihrer epistemologischen Überzeugungen profitieren.

Anzumerken ist auch, dass die Kurse an der *Junior Uni Wuppertal* alle einen experimentellen Charakter aufweisen, sodass an der *Junior Uni Wuppertal* keine Kontrollgruppe herangezogen werden konnte. Es kann also nicht mit Sicherheit davon ausgegangen werden, dass die experimentelle Intervention der Grund für die hier vorliegende Entwicklung epistemologischer Überzeugungen ist, da der Vergleich einer Kontrollgruppe fehlt. Zwar ist grundsätzlich eine Entwicklung der epistemologischen Überzeugungen hin zu eher erfahreneren Überzeugungen während der Schullaufbahn dokumentiert, allerdings scheint der geringe zeitliche Abstand von einer Woche zwischen den Erhebungen in dieser Studie eher dafür zu sprechen, dass ein Effekt der Intervention vorliegt.

Eine Wiederholung dieser Studie unter Einbezug einer größeren weniger selektiven Stichprobe und einer Kontrollgruppe erscheint allerdings lohnend. Dennoch wird angenommen, dass eine weitere Studie mit hoher Wahrscheinlichkeit ähnliche Ergebnisse (sowohl bezüglich der Zusammenhänge zwischen den einzelnen Dimensionen, als auch bezüglich der Veränderungen der epistemologischen Überzeugungen) mit anderen Stichproben liefern würde, da die vorliegenden Ergebnisse sich mit denen von Conley et al. (2004), Urhahne und Hopf (2004) sowie Wegner et al. (2012) vergleichen lassen.

Als weitere Limitation dieser Studie kann das Erhebungsinstrument genannt werden. Hierbei ist zunächst der Faktor der sozialen Erwünschtheit zu nennen, der bewirkt, dass Befragte oftmals Antworten ankreuzen, von denen sie denken, dass es so von ihnen erwartet wird und nicht, weil sie der eigenen Überzeugung entsprechen (Di Martino & Sabena, 2010). Ebenfalls gibt es bei epistemologischen Überzeugungen die Schwierigkeit, generelle domänenunabhängige von domänenspezifischen Überzeugungen zu unterscheiden (vgl. Muis, 2004). Aus diesem Grund wurde in der vorliegenden Studie das Likert-Skala-Instrument von Urhahne und Hopf (2004) als domänenspezifisches Instrument anstatt z. B. des gängigen domänenunspezifischen Instruments von Schommer (1990) eingesetzt. Hierbei ist anzumerken, dass sich die Formulierungen der Items im Original auf Naturwissenschaften beziehen und nicht spezifisch für die Mathematik entwickelt wurden.

Ein Likert-Skala-Instrument für die Erfassung mathematischer epistemologischer Überzeugungen liegt bislang nicht vor. In dieser Studie wurden nicht alle Items verwendet, da sie teilweise inhaltlich nicht zur Mathematik passen. Eine weitere Limitation liegt in den Reliabilitäten der Skalen, die insbesondere zu T1 eher gering ausfallen. Dass die Reliabilitäten zu T2 höher ausfallen, könnte darauf hindeuten, dass die Items für die Schülerinnen und Schüler vor Beginn der Intervention schwerer einzuschätzen sind als danach. Eine mögliche Erklärung liegt in dem Fokus auf die Bedeutung von Experimenten und den wenigen Vorerfahrungen der Schülerinnen und Schüler mit Experimenten im Mathematikunterricht. Allerdings zeigen sich geringe Reliabilitäten in vielen Studien zu epistemologischen Überzeugungen, welche auf Fragebögen in Anlehnung an Conley et al. (2004) zurückgreifen (z. B. Urhahne & Hopf, 2004; Bernholt et al., 2021). Auch das Muster, dass die Reliabilitäten vor einer Intervention geringer ausfallen als danach, fällt in weiteren Studien auf (z. B. Schiefer et al., 2020). Es ist sicherlich lohnend, auch über andere alternative Erhebungsmethoden nachzudenken, da insbesondere im Bereich von Überzeugungen der Gebrauch von geschlossenen Items kritisiert wird. Für eine quantitative Untersuchung erweisen sich geschlossene Items jedoch als ökonomische Erhebungsmethode (vgl. Mason, 2016).

7. Fazit

Epistemologische Überzeugungen von Lernenden beeinflussen Lernprozesse auf vielfältige Weise. Dabei gelten erfahrene Überzeugungen als lernförderlicher als eher naive Überzeugungen. In der vorliegenden Studie konnte gezeigt werden, dass im Fach Mathematik Zusammenhänge zwischen den Dimensionen *Rechtfertigung*, *Quelle* und *Entwicklung des Wissens* bestehen. Erfahrene Überzeugungen, dass mathematisches Wissen nicht nur über Autoritäten gewonnen und gerechtfertigt werden kann, scheinen mit der Überzeugung einherzugehen, dass mathematisches Wissen veränderlich ist.

Die Ergebnisse der Studie legen zudem nahe, dass Aufgaben zum innermathematischen Experimentieren eine Änderung von eher naiven hin zu eher erfahrenen epistemologischen Überzeugungen bewirken können. Da diese als vorteilhaft im Lernprozess gelten, sprechen die Ergebnisse für eine Integration innermathematischen Experimentierens in den Mathematikunterricht.

Danksagung

Wir danken allen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern der *Junior Uni Wuppertal* für Ihre Unterstützung sowie allen teilnehmenden Schülerinnen und Schülern. Des Weiteren danken wir den Gutachterinnen und Gutachtern für die konstruktiven Hinweise, die insbesondere zur besseren Lesbarkeit des Artikels wesentlich beigetragen haben.

Literatur

- Barzel, B., Reinhoffer, B. & Schrenk, S. (2012). Das Experimentieren im Unterricht. In W. Rieß, M. Wirtz, B. Barzel & A. Schulz (Hrsg.), *Experimentieren im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht. Schüler lernen wissenschaftlich denken und arbeiten* (S. 103-138). Münster: Waxmann.
- Baxter Magolda, M. B. (1992). Students' epistemologies and academic experiences: Implications for pedagogy. *Review of Higher Education*, 15, 265-287.
- Belenky, M. F., Clinchy, B. M., Goldberger, N. R. & Tarule, J.M. (1986). *Women's ways of knowing*. New York: Basic Books.
- Bernholt, A., Lindfors, M. & Winberg, M. (2021). Students' Epistemic Beliefs in Sweden and Germany and Their Interrelations with Classroom Characteristics. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 65(1), 54-70.
- Bortz, J. & Schuster, C. (2010). *Statistik*. Berlin: Springer.
- Bromme, R. (2010). Epistemological beliefs are standards for adaptive learning: A functional theory about epistemological beliefs and metacognition. *Metacognition and Learning*, 5(1), 7-26.
- Brosius, F. (2013). *SPSS 21*. Heidelberg: mitp.
- Cano, F. (2005). Epistemological beliefs and approaches to learning: Their change through secondary school and their influence on academic performance. *British Journal of Educational Psychology*, 75(2), 203-221.
- Conley, A. M., Pintrich, P. R., Vekiri, I. & Harrison, D. (2004). Changes in epistemological beliefs in elementary science students. *Contemporary Educational Psychology*, 29, 186-204.
- Di Martino, P. & Sabena, C. (2010). Teachers' beliefs: the problem of inconsistency with practice. In M. Pinto & T. Kawasaki (Hrsg.), *Proceedings of the 34th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, S. 313-320). Belo Horizonte: PME.
- De Villiers, M. (1990). The Role and Function of Proof in Mathematics. *Pythagoras*, 24, 17-24.
- Euler, L. (1761). Specimen de usu observationum in mathesi pura. (Example of the use of observation in pure mathematics). *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae: Anonymos*, Vol. 6, 185-230.
- Ganter, S. (2013). *Experimentieren – ein Weg zum Funktionalen Denken. Empirische Untersuchung zur Wirkung von Schülerexperimenten*. Hamburg: Verlag Dr. Kovac.
- Garofalo, J. (1989). Beliefs and their influence on mathematical performance. *Mathematics Teacher*, 82, 502-505.
- Grossnickle, E. M., Alexander, P. A. & List, A. (2017). The argument for epistemic competence. In A. Bernholt, H. Gruber & B. Moschner (Hrsg.), *Wissen und lernen. wie epistemische Überzeugungen Schule, Universität und*

- Arbeitswelt beeinflussen* (S. 255-270). Münster and New York: Waxmann.
- Gruber, H. & Stamouli, E. (2009). Intelligenz und Vorwissen. In E. Wild & J. Möller (Hrsg.), *Pädagogische Psychologie* (S. 28-46). Heidelberg: Springer Medizin Verlag.
- Heintz, B. (2000). *Die Innenwelt der Mathematik: Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin*. Ästhetik und Naturwissenschaften. Bildende Wissenschaften – Zivilisierung der Kulturen. Berlin: Springer.
- Hersh, R. (1991). Mathematics has a front and a back. *Synthese*, 88(2), 127-133.
- Higgins, K. M. (1997). The effect of year-long instruction in mathematical problem solving on middle-school students' attitudes, beliefs, and abilities. *Journal of Experimental Education*, 66, 5–28.
- Hofer, B. K. (1999). Instructional context in the college mathematics classroom: Epistemological beliefs and student motivation. *Journal of Staff, Program, and Organizational Development*, 16, 73–82.
- Hofer, B. K. (2004). Epistemological understanding as a metacognitive process: Thinking aloud during online searching. *Educational Psychologist*, 39(1), 43-55.
- Hofer, B. K. (2000). Dimensionality and disciplinary differences in personal epistemology. *Contemporary Educational Psychology*, 25, 378-405.
- Hofer, B. K. (2001). Personal epistemology research: Implications for learning and transfer. *Educational Psychology Review*, 13, 353-383.
- Hofer, B. K. & Pintrich, P. R. (1997). The development of epistemological theories: Beliefs about knowledge and knowing and their relation to learning. *Review of Educational Research*, 67(1), 88-140.
- Jordan, A., Krauss, S., Löwen, K., Blum, W., Neubrand, M., Brunner, M., Kunter, M. & Baumert, J. (2008). Aufgaben im COACTIV-Projekt: Zeugnisse des kognitiven Aktivierungspotentials im deutschen Mathematikunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 29(2), 83-107.
- King, P. M., & Kitchener, K. S. (1994). *Developing reflective judgement*. San Francisco: Jossey-Bass.
- Kitchener, K. S. (1986). The reflective judgement model: Characteristics, evidence, and measurement. In R.A. Mines & K. S. Kitchener (Hrsg.), *Adult cognitive development: Methods and models* (S. 76-91).
- Klieme, E., & Schreyer, P. (2020). Unterrichtsgestaltung und Unterrichtsqualität. In J. Grünkorn, E. Klieme, A.-K. Praetorius & P. Schreyer (Hrsg.), *Mathematikunterricht im internationalen Vergleich. Ergebnisse aus der TALLIS-Videostudie Deutschland* (S. 13-30). Frankfurt am Main: DIPF Leibniz-Institut für Bildungsforschung und Bildungsinformation.
- Kuhn, D. (1991). *The skills of argument*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal*, 27, 29–63.
- Leuders, T., Naccarella, D. & Philipp, K. (2011). Experimentelles Denken - Vorgehensweisen beim innermathematischen Experimentieren. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 32(2), 205-231.
- Leuders, T. & Philipp, K. (2014). Mit Beispielen zum Erkenntnisgewinn Experiment und Induktion in der Mathematik. *Mathematica Didactica*, 37, 163–190.
- Mason, L. (2016). Psychological perspectives on measuring epistemic cognition. In J. A. Greene, W. A. Sandoval & I. Braten (Hrsg.), *Handbook of epistemic cognition* (S. 375–392). New York: Routledge.
- Muis, K. R. (2004). Personal epistemology and mathematics: A critical review and synthesis of research. *Review of Educational Research*, 74(3), 317-377.
- Perry, W. G. (1970). *Forms of intellectual and ethical development in the college years: A scheme*, Holt, Rinehart & Winston, Troy, MO.
- Rakoczy, K., Buff, A. & Lipowsky, F. (2005). Befragungsinstrumente. In E. Klieme, C. Pauli & K. Reusser (Hrsg.), *Dokumentation der Erhebungs- und Auswertungsinstrumente zur schweizerisch-deutschen Videostudie "Unterrichtsqualität, Lernverhalten und mathematisches Verständnis" (Teil 1)*. Frankfurt a.M.: GPF/DIPF.
- Rott, B., Leuders, T. & Stahl, E. (2014). "Is Mathematical Knowledge Certain? – Are You Sure?" – An Interview Study to Investigate Epistemic Beliefs. *Mathematica Didactica*, 37, 118–132.
- Rott, B. (2020). Inductive and deductive justification of knowledge: epistemological beliefs and critical thinking at the beginning of studying mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 106, 117–132.
- Sandoval, W. A., Greene, J. A. & Bråten, I. (2016). Understanding and Promoting Thinking About Knowledge: Origins, Issues, and Future Directions of Research on Epistemic Cognition. *Review of Research in Education*, 40(1), 457–496.
- Schiefer, J., Stark, L., Gaspard, H., Wille, E., Trautwein, U. & Golle, J. (2020). Scaling up an Extracurricular Science Intervention for Elementary School Students: It Works, and Girls Benefit More From It Than Boys. *Journal of Educational Psychology*. <https://doi.org/10.1037/edu0000630>
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. Grouws (Hrsg.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 334-370). New York: MacMillan.
- Schommer, M. (1990). The effects of beliefs about the nature of knowledge on comprehension. *Journal of Educational Psychology*, 82, 498-504.
- Schommer, M. (1998). The influence of age and schooling on epistemological beliefs. *Educational Psychology*, 68, 551-562.
- Schommer-Aikins, M. (2004). Explaining the epistemological belief system: Introducing the embedded systemic model and coordinated research approach. *Educational Psychologist*, 39(1), 19-29.
- Schommer, M. (1993). Epistemological development and academic performance among secondary students. In *Journal of Educational Psychology*, 85(3), 406-411.
- Schommer, M., Crouse, A. & Rhodes, N. (1992). Epistemological beliefs and mathematical text comprehension: Believing it is simple does not make it so. *Journal of Educational Psychology*, 84, 435-443.
- Schwätzer, U. & Selzer, C. (1998). Summen von Reihenfolgezahlen – Vorgehensweisen von Viertklässlern bei einer arithmetisch substantiellen Aufgabenstellung. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 19(2/3), 123-148.

- Trautwein, U, Lüdtke, O. & Beyer, B. (2004). Rauchen ist tödlich, Computerspiele machen aggressiv? Allgemeine und theorienspezifische epistemologische Überzeugungen bei Studierenden unterschiedlicher Fachrichtungen. *Zeitschriften für Pädagogische Psychologie*, 18, 187-199.
- Trautwein, U. & Lüdtke, O. (2007). Students' self-reported effort and time on homework in six school subjects: Between-students differences and within-student variation. *Journal of Educational Psychology*, 99(2), 432–444.
- Tsai, C.-C. (1998). An analysis of scientific epistemological beliefs and learning orientations of Taiwanese eighth graders. *Science Education*, 82, 473-489.
- Urhahne, D. & Hopf, M. (2004). Epistemologische Überzeugungen in den Naturwissenschaften und ihre Zusammenhänge mit Motivation, Selbstkonzept und Lernstrategien. *Zeitschrift für die Didaktik der Naturwissenschaften*, 10, 70-86.
- Wiener, N. (1923). *Collected works: With commentaries*. Cambridge, MA: The MIT Press.
- Wegner C, Krooß M, Cordes, S. & Grotjohann, N. (2012). Epistemologische Überzeugungen im naturwissenschaftlichen Unterricht. *ABB-Information*, 43-59.
- Wu, C.-J., Wong, W.-K., Cheg, Y.-H. & Lien, Y.-W. (2006). Generating and evaluating Geometry Conjectures with self-directed Experiments. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Hrsg.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 5 (S. 401-408). Prague: PME.

Anschrift des Verfassers

Sarah Beumann
Bergische Universität Wuppertal
Fakultät 4 – Didaktik und Geschichte der Mathematik
Gaußstr. 20
42119 Wuppertal

beumann@uni-wuppertal.de

Sebastian Geisler
Stiftung Universität Hildesheim
Institut für Mathematik und angewandte Informatik
Samelsonplatz 1
31141 Hildesheim

geisler@imai.uni-hildesheim.de