Visualisierungen bedingter Wahrscheinlichkeiten – Präferenzen von Schülerinnen und Schülern

STEFANIE RACH, PADERBORN

***Zusammenfassung**: Zum Begriff „bedingte Wahrscheinlichkeit“ treten häufig Fehlvorstellungen auf. Um Lernende beim Begriffsaufbau zu unterstützen, werden Visualisierungen als gute Hilfsmittel angesehen. Welche Visualisierungen und Informationsformate sich anbieten, ist Gegenstand aktueller Forschung. Der Beitrag nähert sich dieser Frage, indem die Präferenzen verschiedener Visualisierungen und das Begriffswissen von Lernenden einer zehnten Klasse vorgestellt werden. Die Ergebnisse der Befragung geben Hinweise darauf, dass Schülerinnen und Schüler das Baumdiagramm mit absoluten Häufigkeiten gegenüber dem Einheitsquadrat präferieren. Darüber hinaus gelingt den meisten die Interpretation eines Einheitsquadrates.*

***Abstract:** Bayesian reasoning problems are a field for misconceptions. Visualizations are assumed to support students when dealing with such problems. Which visualisations (tree diagram or unit square) and information format (probabilities or natural frequencies) support learning, is subject matter of current research. This contribution approaches this question by presenting preferences of visualisations and conceptual knowledge of learners of a 10^{th}-class after a lesson sequence. The results of the survey indicate that students prefer tree diagrams with natural frequencies rather than unit squares. Moreover, many students are able to interpret a unit square. Implications of this explorative study for mathematics education are discussed.*

1. Einführung

Schon seit langem wird berichtet, dass die Schätzung und Interpretation von Wahrscheinlichkeiten ein Bereich ist, in dem die menschliche Intuition häufig zu fehlerhaften Ergebnissen führt (Tversky & Kahneman, 1975). Anhand geeigneter Visualisierungen können intuitive Fehlschlüsse möglicherweise vermieden werden (Sedlmeier & Gigerenzer, 2001). Die (bedingte) Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses A unter der Bedingung des Eintretens eines Ereignisses B ist eines der zentralen Konzepte (nicht nur) in der „schulischen“ Wahrscheinlichkeitstheorie. Aus mathematischer Sicht ist dieser Begriff grundlegend und in realitätsnahen Anwendungssituationen essentiell, beispielsweise bei der Bewertung der Güte von Diagnoseverfahren oder der Fehlerbetrachtung bei Produktionsverfahren bzw. generell bei Fragen der Inferenzstatistik. Dass beim Begriffsaufbau Hürden zu bewältigen sind, zeigen Studien zu Fehlvorstellungen von Lernenden (z. B. Bea & Scholz, 1995; Wassner, 2007). Die Frage, die sich daraus ergibt, ist, wie dieser Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit für Schülerinnen und Schüler zugänglich gemacht werden kann. Eine Möglichkeit bieten die Visualisierungen Baumdiagramm und Einheitsquadrat (Binder, Krauss & Bruckmaier, 2015; Böcherer-Linder, Eichler & Vogel, 2016). In der Literatur werden zudem Vorteile der Verwendung von absoluten Häufigkeiten gegenüber Wahrscheinlichkeiten, z. B. bei Baumdiagrammen, berichtet (Gigerenzer & Hoffrage, 1995).

In diesem Artikel werden Ergebnisse einer Lernendenbefragung vorgestellt, die am Ende einer Unterrichtssequenz zum Begriff „bedingte Wahrscheinlichkeit“ durchgeführt wurde. In der verwendeten Unterrichtssequenz in einer zehnten Klasse werden insbesondere die beiden Visualisierungen „Baumdiagramm mit absoluten Häufigkeiten“ und „Einheitsquadrat“ in den Vordergrund gestellt. In der anschließenden Befragung wurden das Interesse bezüglich der verwendeten Aufgaben, die Präferenz der Visualisierung der Schülerinnen und Schüler sowie das gezeigte Begriffswissen in den Blick genommen. Der Fokus der Befragung und die Wahl der Visualisierungen werden anhand theoretischer Analysen und empirischer Forschungsergebnisse begründet (Abschnitt 2). Nach der Präzisierung der Forschungsfragen (Abschnitt 3) werden die Konzeption und die verwendeten Materialien der Unterrichtssequenz erläutert (Abschnitt 4). Die Ergebnisse der Lernendenbefragung werden im Anschluss präsentiert (Abschnitt 5). In der Diskussion werden die Erfahrungen mit der Unterrichtssequenz und die Ergebnisse der Befragung zusammengefasst, um zum einen Anregungen für Forschungsarbeiten in diesem Bereich zu geben und zum anderen Vorschläge für die Verbesserung der Unterrichtssequenz zu generieren (Abschnitt 6). Neben der Konzeption und Evaluation der Unterrichtssequenz besteht der wissenschaftliche Mehrwert dieses Beitrages insbesondere in den von den Schülerinnen und Schülern geäußerten Einschätzungen bezüglich der Visualisierungen und des gezeigten Begriffswissens nach der Unterrichtssequenz.

2. Theoretische Analysen und empirische Studien zum Begriff „bedingte Wahrscheinlichkeit“

2.1 Begriffsklärung und Visualisierungsmöglichkeiten

Sei (Ω, A', P) ein Wahrscheinlichkeitsraum. Seien $A, B \in A'$ mit $P(A) > 0$. Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_A(B)$ ist definiert durch $P_A(B) = P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$. Seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $A_1, \ldots, A_n$ und $B_1, \ldots, B_m$ paarweise disjunkte Ereignisse mit $\bigcup_{j=1}^{m} B_j = \Omega$, $P(B_j) \neq 0$ für alle $j \in \{1, \ldots, m\}$ und $P(A_i) \neq 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Um eine bedingte Wahrscheinlichkeit $P_{A_i}(B_j)$ mit $j \in \{1, \ldots, m\}$ und $i \in \{1, \ldots, n\}$ aus den Wahrscheinlichkeiten $P_{B_j}(A_i)$ und $P(B_j)$ zu berechnen, kann die Formel von Bayes (kombiniert mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit) verwendet werden:

$$P_{A_i}(B_j) = \frac{P_{B_j}(A_i) \cdot P(B_j)}{P(A_i)} = \frac{P_{B_j}(A_i) \cdot P(B_j)}{\sum_{j=1}^{m} P_{B_j}(A_i) \cdot P(B_j)}.$$

Um diese Formel zu nutzen, müssen die (bedingten) Wahrscheinlichkeiten $P_{B_j}(A_i)$ und $P(B_j)$ für alle $j \in \{1, \ldots, m\}$ und das vorher gewählte $i \in \{1, \ldots, n\}$ bekannt sein.

Typische Fehlvorstellungen zu diesem Begriff „bedingte Wahrscheinlichkeit“ sind in mehreren Beiträgen zu finden (z. B. Barth, 1994; Bea & Scholz, 1995; Wassner, 2007). Ein typisches Problem, das zur Fehlinterpretationen führt, ist die Vernachlässigung der Basisraten, auch Basisratenproblem genannt. Dieses Problem tritt insbesondere bei der Interpretation von Ergebnissen von Diagnoseverfahren auf. Um nicht nur diese, sondern auch weitere Fehlvorstellungen frühzeitig zu adressieren, haben sich Visualisierungen als hilfreich erwiesen (Überblick älterer Studien in Wassner, 2002).

Mögliche Visualisierungen für Ereignisse inkl. deren (bedingte) Wahrscheinlichkeiten sind das Baumdiagramm, das umgekehrte Baumdiagramm und die Vierfeldertafel bzw. das Einheitsquadrat. Beim Baumdiagramm führen die Pfade von den Ereignissen $A_i, i \in \{1, \ldots, n\}$, zu den Ereignissen $B_j, j \in \{1, \ldots, m\}$, (Abb. 1 und Anhang), beim umgekehrten Baumdiagramm ist es andersherum. Das hier dargestellte Baumdiagramm beinhaltet als Informationsformat die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten. Während die Angabe von Wahrscheinlichkeiten in Baumdiagrammen in vielen Schulbüchern zu finden ist, empfehlen Mathematikdidaktikerinnen und Mathematikdidaktiker Baumdiagramme mit absoluten Häufigkeiten (siehe Abschnitt 2.3).

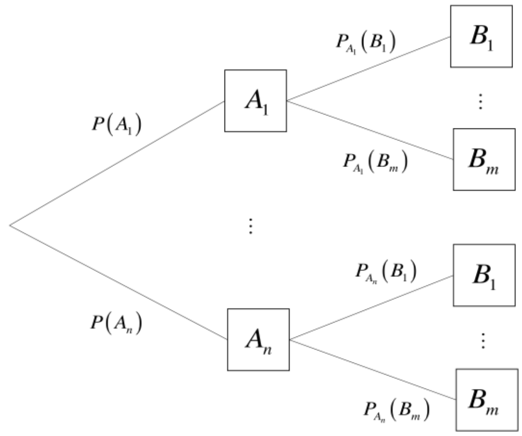


Abb. 1: Baumdiagramm zu den Ereignissen $A_1, \ldots, A_n$ und $B_1, \ldots, B_m$ mit ausgewählten Wahrscheinlichkeiten.

Eine alternative Visualisierung bedingter Wahrscheinlichkeiten bietet das Einheitsquadrat (mit Wahrscheinlichkeiten, siehe Abb. 2).

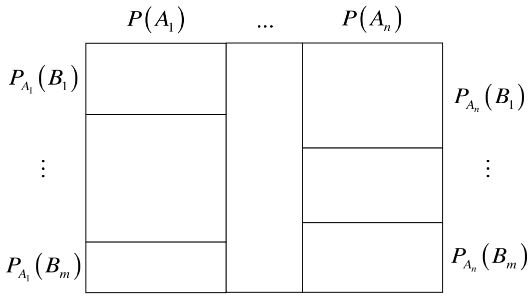


Abb. 2: Einheitsquadrat mit Ereignissen $A_1, \ldots, A_n$ und $B_1, \ldots, B_m$ und ausgewählten Wahrscheinlichkeiten.

Man kann das Einheitsquadrat sowohl als graphische Darstellung der Vierfeldertafel (Abb. 3) (für zwei oder mehr als jeweils zwei Ereignisse) als auch als Weiterentwicklung des Venn-Diagramms bezeichnen (Borovcnik, 1990).

	A	$\bar{A}$	
B	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(B)$
$\bar{B}$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
	$P(A)$	$P(\bar{A})$	1

Abb. 3: Vierfeldertafel für die Ereignisse A und B mit entsprechenden Wahrscheinlichkeiten.

2.2 Ziele mathematischer Lernprozesse in Bezug auf das Begriffsverständnis

Wissen zu mathematischen Begriffen liegt mathematischen Kompetenzen fundamental zu Grunde. Systematisiert wird dieses Wissen in den KMK-Bildungsstandards für das Fach Mathematik (2003) in Form der Leitideen. In der Literatur wird häufig zwischen prozeduralem und konzeptuellem Wissen unterschieden, jedoch liegen diese beiden Wissensfacetten eher auf einem Kontinuum und sind oft nicht klar voneinander zu trennen. Rittle-Johnson, Siegler und Wagner Alibali (2001, S. 346-347) definieren die Enden des Kontinuums folgendermaßen:

> We define procedural knowledge as the ability to execute action sequences to solve problems. [...] In contrast to procedural knowledge, we define conceptual knowledge as implicit or explicit understanding of the principles that govern a domain and of the interrelations between units of knowledge in a domain.

Beide Facetten von Wissen in unterschiedlichen Qualitäten (de Jong & Ferguson-Hessler, 1996) sind zentral für ein umfassendes Verständnis für mathematische Konzepte und darauf aufbauende mathematische Kompetenzen (Schneider, 2006). Für das Konzept „bedingte Wahrscheinlichkeit" fallen unter das prozedurale Wissen das Kennen und Anwenden der Pfadregel bzw. einer Formel zur Berechnung einer bedingten Wahrscheinlichkeit. Konzeptuelles Wissen meint die Verknüpfung von verschiedenen Bedeutungen des Konzepts, wie beispielsweise dessen Darstellung in verschiedenen Visualisierungen (Ainsworth, 2006) und der Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungen (Heinze, Star & Verschaffel, 2009) sowie die Entwicklung eines mathematischen Modells zu einer Anwendungssituation, z. B. mit Hilfe von Grundvorstellungen (vom Hofe, 1995). Das Bewerten qualitativer Zusammenhänge verschiedener (bedingter) Wahrscheinlichkeiten kann als Verknüpfung zwischen beiden Wissensfacetten angesehen werden. Eine klare Unterscheidung der beiden Wissensfacetten ist zudem nicht nur theoretisch, sondern auch bei der empirischen Messung nicht immer klar möglich (Schneider, 2006).

Neben dem Erwerb konzeptuellem und prozeduralem Wissen nennen Bea und Scholz (1995) ein weitergreifendes Ziel des Mathematikunterrichts im Bereich Stochastik: eine Förderung dessen, was sie als „stochastisches Denken" bezeichnen. Darunter verstehen sie unter anderem „die Fähigkeit, im täglichen Leben auftretende stochastische Situationen zu erkennen und geeignet zu bewältigen" (Bea & Scholz, 1995, S. 302). In der neueren mathematikdidaktischen Forschung wird in diesem Zusammenhang der Begriff „stochastische Kompetenz" verwendet (Maxara, 2010). Dieses Unterrichtsziel, der Erwerb stochastischer Kompetenz, spiegelt sich auch in der ersten von Winters Grunderfahrungen (1995) wider, die die Wahrnehmung und das Verstehen von Erscheinungen der Welt in einer für die Mathematik spezifischen Form fordert. Insgesamt soll also konzeptuelles, prozedurales und verknüpftes Begriffswissen aufgebaut werden, was für Lernende angesichts der häufig berichteten Fehlvorstellungen anscheinend mit Hürden verbunden ist. Dass Visualisierungen beim Wissenserwerb in diesem Bereich eine große Rolle spielen könnten, wird im nächsten Abschnitt erläutert.

2.3 Bedeutung von Visualisierungen im Bereich Stochastik

Visualisierungen, auch als graphische Darstellungen bzw. Darstellungsformen bezeichnet, sind in mathematischen Lehr-Lern-Prozessen eine wichtige didaktische Hilfe, um Begriffe für Lernende ikonisch erfahrbar zu machen (Bruner, 1971). Beispielsweise zeigt die empirische Studie von Wassner, Martignon und Sedlmeier (2002) den positiven Einfluss des Einsatzes von Visualisierungen auf den Lernerfolg von Schülerinnen und Schülern in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Doch nicht die Verwendung jeder beliebigen Visualisierung ist lernförderlich, sondern eine Visualisierung muss auch eine gewisse Güte aufweisen. Diese Güte kann durch verschiedene Bedingungen überprüft werden. Drei Bedingungen, die an graphische Modelle bzw. Darstellungen zu stellen sind, stellt Fischbein (1987) auf (vgl. Bea & Scholz, 1995): (1) ein hohes Maß an struktureller Übereinstimmung mit dem zugrunde liegenden Konzept (alle relevanten Sachverhalte sind enthalten); (2) kognitiv leicht zugängliche Gestaltungsmöglichkeiten (Lernende müssen ohne ein hohes Maß an extraneous cognitive load mit dieser Darstellung arbeiten können); (3) eine gewisse Autonomie (ohne andere Darstellungen ist die Darstellung verständlich). Bedingungen (1) und (3) sagen aus, dass das Modell die prototypischen Eigenschaften des zugrundeliegenden Konzeptes zeigen soll; Bedingung (2) nimmt auf die didaktische Qualität des Modells Bezug. Für den Begriff „bedingte Wahrscheinlichkeit" könnte als Bedingung (4) das Informationsformat genannt werden, auf das später noch genauer eingegangen wird. Diese Kriterien für gute Visualisierungen werden im Folgenden auf die zwei[1] genannten Visualisierungen für den Begriff „bedingte Wahrscheinlichkeit" (siehe Abschnitt 2.1) angewendet, um die Vorzüge der Visualisierungen herauszuarbeiten: das Einheitsquadrat und das Baumdiagramm (mit Wahrscheinlichkeiten). Die Konstruktion der Darstellung und das Erkennen der

Pfadregeln sind bei beiden Modellen ähnlich intuitiv bzw. gut zugänglich. Zudem können beide Darstellungen nicht nur dazu genutzt werden, eine Problemsituation zu beschreiben, sondern auch durch die Visualisierung wesentlicher Rechenschritte am Modell Problemlöseprozesse zu unterstützen. Jedoch sind nach Bea und Scholz (1995) qualitative Zusammenhänge nur beim Einheitsquadrat gut erkennbar und weniger beim Baumdiagramm mit Wahrscheinlichkeiten; beispielsweise kann die Veränderung der Basisrate auf die bedingten Wahrscheinlichkeiten sichtbar gemacht werden. Da die Visualisierung Einheitsquadrat bisher aber nur wenig erprobt wurde, ist unklar, wie Lernende mit dieser Visualisierung im Lernprozess umgehen und ob diese Visualisierung für weitere als die oben genannten Problemsituationen geeignet ist.

Neben theoretischen Analysen liefern empirische Studien Hinweise zur Bedeutung verschiedener Visualisierungen für den Lernerfolg. Im Beitrag von Bea und Scholz (1995) werden die Visualisierungen zum Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeiten bei Studierenden im Bereich der Wirtschaftswissenschaften empirisch miteinander verglichen. Zum Ersten war eine Überlegenheit der Visualisierungen gegenüber einem rein nummerischen bzw. symbolischen Vorgehen erkennbar. Zum Zweiten zeigte sich, dass die Gruppe, die mit dem Einheitsquadrat gearbeitet hat, bessere Ergebnisse in einem anschließenden Test zum stochastischen Denken erzielte als die Gruppen, die mit den beiden anderen untersuchten Visualisierungen „Baumdiagramm“ bzw. „umgekehrtes Baumdiagramm“ mit Wahrscheinlichkeiten gearbeitet hatten. Insbesondere bei Aufgaben, die ein Grundverständnis bedingter Wahrscheinlichkeiten bzw. die Definition des bedingenden Ereignisses bedürfen, zeigte das Training mit Hilfe des Einheitsquadrates Vorteile. Eine neuere Studie in diesem Bereich haben Böcherer-Linder et al. (2016) in Hinblick auf die Frage durchgeführt, welche Visualisierung (in Performanzaufgaben) besser geeignet ist, um bedingte Wahrscheinlichkeiten anzugeben und qualitative Zusammenhänge zwischen Wahrscheinlichkeiten zu beschreiben. Testergebnisse zu einer Krankheit wurden entweder in der Visualisierung „Einheitsquadrat“ oder in der Visualisierung „Baumdiagramm mit absoluten Häufigkeiten“ den Probandinnen und Probanden vorgelegt. Diese schätzen dann z. B. ein, wie viel Prozent der positiv getesteten Personen wirklich krank waren bzw. wie sich die (bedingten) Wahrscheinlichkeiten bei Änderung der Personenanzahl, also der Mengenmächtigkeit, verändern. Die eingeschätzten Angaben waren meistens direkt aus den Visualisierungen abzulesen und benötigten keine komplexeren Rechnungen. Diese getesteten Anforderungen müssen bewältigt werden, um weitere bedingte Wahrscheinlichkeiten aus den abgelesenen Wahrscheinlichkeiten z. B. mit der Formel von Bayes berechnen zu können, und gehören in den Bereich der Analyse qualitativer Zusammenhänge zwischen Wahrscheinlichkeiten. Bei einer Stichprobe mit 148 Lehramtsstudierenden zeigte sich das Einheitsquadrat beim Testen sowohl von prozeduralem als auch konzeptuellem Wissen dem Baumdiagramm mit absoluten Häufigkeiten überlegen.

Wichtig ist letztlich außerdem nicht nur, welche Darstellung verwendet wird, sondern auch welche Detailinformationen („information format“) die Darstellung über ihre strukturellen Aspekte hinaus enthält (Gigerenzer & Hoffrage, 1995). Mathematisch äquivalente Darstellungen mit verschiedenen Informationsformaten können unterschiedlich hilfreich sein, um Algorithmen auszuführen. In den meisten Lehrbüchern sind im Baumdiagramm als Informationsformat jeweils die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse angegeben. Möglich ist jedoch auch eine Angabe der absoluten Häufigkeiten der Ereignisse (auch als natürliche Häufigkeiten bezeichnet). Der Vorteil der Verwendung von absoluten Häufigkeiten liegt darin, dass die Teilmengenstruktur deutlich wird, die Größe der einzelnen Teilmengen erkennbar ist und der natürliche sampling Prozess widergespiegelt wird. Der natürliche sampling Prozess bedeutet, dass realistische Anzahlen der Teilgruppen vorhanden sind – beispielsweise werden in den meisten Studien deutlich weniger Personen betrachtet, die an einer bestimmten Krankheit leiden, als gesunde Personen. Das bedeutet, dass verschiedene Anforderungen an die Lernenden gestellt werden und somit unterschiedliche kognitive Prozesse ablaufen, je nachdem welches Informationsformat verwendet wird. In Gigerenzer und Hoffrage (1995) sind die unterschiedlichen Anforderungen und Prozesse detailliert beschrieben, z. B. was den Berechnungsaufwand oder die Anzahl der zu verknüpfenden Informationen angeht.

Insgesamt plädieren Binder et al. (2015), Dreibholz (2014), Krauss (2003) sowie Wassner (2007) für die Verwendung von absoluten Häufigkeiten, da dann Fehlvorstellungen bei Aufgaben zu Diagnosetests weniger stark ausgeprägt auftreten würden. Bei Aufgaben zu Diagnosetests ist intuitiv unklar, warum eine Person, die bei einem Testverfahren (mit einer hohen Sensitivität und Spezifität) positiv getestet wurde, in der Mehrzahl der Fälle nicht krank ist. Mit der Verwendung von absoluten Häufigkeiten wird diese Barriere z. T. aufgelöst:

> Der Widerspruch zwischen Mathematik und Intuition wird also „repariert“, wenn man die probabilistische

> Information in ein natürliches Informationsformat übersetzt. (Krauss, 2003, S. 4)

Empirisch gezeigt wurde der Vorteil von Baumdiagrammen mit absoluten Häufigkeiten gegenüber Baumdiagrammen mit Wahrscheinlichkeiten beim Berechnen von bedingten Wahrscheinlichkeiten beispielsweise von Binder und Kollegen (2015) oder, implementiert in einer Computerumgebung, von Sedlmeier und Gigerenzer (2001). Den Vorteil von Baumdiagrammen mit Häufigkeitsangaben gegenüber der Verwendung einer reinen Formel haben empirisch beispielsweise Wassner et al. (2002) mit Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe II gezeigt (vgl. auch Binder et al., 2015).

Die vorgestellten Arbeiten befürworten die Verwendung der Visualisierungen Einheitsquadrat und Baumdiagramm mit absoluten Häufigkeiten im Lernprozess. Jedoch werden diese Empfehlungen in Materialien für den Lernprozess, z. B. in Schulbüchern, bisher noch wenig umgesetzt. Beispielsweise bemängeln Bea und Scholz (1995), dass in den meisten Schulbüchern nur das Baumdiagramm (mit Wahrscheinlichkeiten und weniger mit absoluten Häufigkeiten) und beispielsweise nicht das Einheitsquadrat verwendet wird. Eine knappe Recherche in verbreiteten Schulbüchern (BSV, 2008, Delta, 2008, Fokus, 2008 und Lambacher Schweizer, 2008) unterstützt diesen Eindruck. Der Autorin dieses Beitrages ist bisher keine Studie bekannt, die den kombinierten Einsatz verschiedener Visualisierungen im Praxisfeld Schule untersucht hat.

Mathematische Aufgaben unterscheiden sich nicht nur in den angesprochenen Visualisierungen und damit in der Anregung von Wissenskonstruktionsprozessen, sondern auch in den verwendeten Kontexten und im Bezug zur Realität (inner- oder außermathematische Problemstellungen). Maaß und Mischo (2012) gehen davon aus, dass die Verwendung von (außermathematischen) Modellierungsaufgaben das Interesse (genauer die Freude an Mathematik) von Schülerinnen und Schüler positiv beeinflusst bzw. eine entwicklungsbedingt negative Entwicklung vermieden werden kann. Schukajlow et al. (2012) haben jedoch für Aufgaben aus den Bereichen „Satz von Pythagoras“ und „lineare Funktionen“ keine Unterschiede im Interesse von Schülerinnen und Schülern zwischen innermathematischen, eingekleideten und außermathematischen Problemstellungen identifizieren können.

Aus diesen Ergebnissen lässt sich vermuten, dass Modellierungsaufgaben nicht per se ein spezifischer Wert und Freude durch die Lernenden zugeschrieben werden kann, sondern dass weitere Merkmale der Aufgaben die Einschätzung beeinflussen. Neben der Aufgabenschwierigkeit (Schwierigkeitsgrad von Rheinberg, 2006) wird beispielsweise der Kontext von Aufgaben diskutiert, der an die Lebenswelt der Lernenden orientiert sein sollte (Pierce & Stacey, 2006; Wassner, 2007). In der PISA-Studie werden beispielsweise die vier folgenden Kontextkategorien verwendet, um möglichst viele Interessenslagen abzudecken: persönliche, berufliche, gesellschaftliche und wissenschaftliche. Neben der Fokussierung individueller Interessen der Jugendlichen kann damit die Relevanz der gestellten mathematischen Anforderungen hervorgehoben werden (OECD, 2013).

Für den Bereich Stochastik, speziell den Begriff „bedingte Wahrscheinlichkeit“ ist festzuhalten, dass sich Visualisierungen, insbesondere Baumdiagramme mit absoluten Häufigkeiten und Einheitsquadrate, in experimentellen Studien als hilfreich bei der Bewertung von Diagnoseverfahren herausgestellt haben. Der Einsatz von Aufgaben mit außermathematischen, z. B. persönlichen Kontexten, wird auch im Bereich Stochastik als relevant für eine positive Motivationsentwicklung der Lernenden angesehen (vgl. Wassner, 2007). Bisher ist aber unklar, ob diese Visualisierungen und Aufgaben in einem regulären Unterricht umsetzbar sind und welches konzeptuelle und prozedurale Begriffswissen die Schülerinnen und Schüler durch einen derartigen Unterricht erwerben.

3. Fragestellungen der Studie

Die Fragestellungen der Studie fokussieren insbesondere auf die Wahrnehmung der Schülerinnen und Schüler bezüglich der verwendeten Unterrichtsmaterialien und auf das erworbene Begriffswissen. Aufgrund der nur wenigen bekannten berichteten empirischen Studienergebnisse sind die folgenden Fragestellungen als explorativ zu sehen.

1) Welches Interesse berichten die Schülerinnen und Schüler bezüglich der eingesetzten Aufgaben mit verschiedenen Kontexten?
2) Welche Visualisierungen (Einheitsquadrat bzw. Baumdiagramm mit absoluten Häufigkeiten oder Wahrscheinlichkeiten) präferieren die Lernenden?
3) Welches Begriffswissen zeigen Schülerinnen und Schüler nach dieser Unterrichtssequenz?

4. Methodisches Vorgehen: Konzeption der Unterrichtssequenz und der Befragungsinstrumente

Um die Ergebnisse interpretieren zu können, wird in diesem Abschnitt die Unterrichtssequenz vorgestellt, auf der die Einschätzungen und der Begriffserwerb der Lernenden basieren.

4.1 Ziele und Aufbau der Unterrichtssequenz

Die Unterrichtssequenz diente vielfältigen Zielen, die vor allem auf kognitiver Ebene zu verorten sind. Insbesondere der Aufbau eines möglichst umfangreichen Begriffsverständnisses des Konzepts „bedingte Wahrscheinlichkeit“ stand im Vordergrund. Sowohl konzeptuelles als auch prozedurales Wissen sollte dabei erworben werden. Die Schülerinnen und Schüler sollten in der Lage sein, außermathematische Situationen zu dem Begriff „bedingte Wahrscheinlichkeit“, die in verschiedenen Darstellungen visualisiert werden, zu interpretieren. Zur Mathematisierung außermathematischer Problemsituationen sollten sie Visualisierungen nutzen und diese möglichst adaptiv anwenden können (stochastische Kompetenz). Konkret sollten Schülerinnen und Schüler verschiedene Anwendungssituationen kennen, bedingte Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen in verschiedenen Kontexten berechnen und Bayesianische Umkehrprobleme lösen können. Nicht explizit angesprochen wurden der Satz von Bayes, die stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen und der formal-technische Umgang mit Mengen.

Diese Ziele deckten sich mit den Zielen zum Begriff „bedingte Wahrscheinlichkeit“ der Jahrgangsstufe 10 im Fach Mathematik in Bayern (ISB, 2004) und waren somit im regulären Unterricht zentral:

> Die Schüler haben sich bereits in der vorhergehenden Jahrgangsstufe mit zusammengesetzten Zufallsexperimenten beschäftigt, dabei aber nur einfachere Fälle betrachtet. Nun wenden sie sich anspruchsvolleren Fragestellungen zu, wobei sie Zusammenhänge durch Vierfeldertafeln und Baumdiagramme veranschaulichen. Daran lernen sie den Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit kennen und erfahren insbesondere bei Fragestellungen aus dem Alltag, dass bei Aussagen über die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses Zusatzinformationen zu berücksichtigen sind. Die Jugendlichen gewinnen so zunehmend an objektiver Urteilsfähigkeit.

Diese Unterrichtssequenz war eingebettet in eine zwölfstündige Unterrichtseinheit mit dem Thema „zusammengesetzte Zufallsexperimente“ in der zehnten Jahrgangsstufe in einem Gymnasium. Vor dieser Unterrichtssequenz wurden die Visualisierungen „Baumdiagramm mit Wahrscheinlichkeiten“ und „Vierfeldertafel mit Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten“ im Zusammenhang mit der ersten und zweiten Pfadregel wiederholt (fünf Stunden inkl. Klausur zu weiteren Themen).

4.1.1 Didaktische Konzeption

Als wichtige Visualisierungen wurden aus der Literatur das Baumdiagramm und das Einheitsquadrat gewählt, als symbolische Darstellung wurde auch die Definition einer bedingten Wahrscheinlichkeit genutzt (siehe Abschnitt 2.1 und Abschnitt 4.1.3). Die sprachliche Darstellung erfolgte durch die Einbettung des Begriffes in Kontexte sowie über eine (sprachliche) Definition und die Kommunikation über verschiedene sprachliche Beschreibungen. Neben der Qualität der Visualisierungen war die Verwendung authentischer Anwendungskontexte (in diesem Bereich) essentiell (Wassner et al., 2002). Die verwendeten persönlichen, gesellschaftlichen und wissenschaftlichen Kontexte (z. B. Regenmacher: Eichler & Vogel, 2013, Güte von Diagnosetests: Dreibholz, 2014) werden in zahlreichen didaktischen Beiträgen genannt bzw. finden sich in verschiedenen Schulbüchern. Einen Überblick über die Ziele, verwendeten Aufgaben, Visualisierungen und die methodische Umsetzung jeder Stunde findet sich im Anhang (Tab. 4).

4.1.2 Methodische Konzeption

Die methodische Umsetzung erfolgte mit Hilfe von Lösungsbeispielen. Bei der Gestaltung von Lösungsbeispielen sind zwei Designkriterien wichtig: (1) Wenige kognitive Kapazitäten werden für die Erschließung des Lösungsbeispiels verbraucht, (2) das Rationale hinter den Lösungsschritten ist klar erkennbar (Draxler, 2005). Lücken in einem Lösungsbeispiel haben sich beispielsweise für den Bereich des Beweisens im Mathematikunterricht als nicht lernförderlich herausgestellt, wenn Selbsterklärungen von den Schülerinnen und Schülern gefordert werden (Hilbert, Renkl, Kessler & Reiss, 2008).

Für die *Implementierung von Lösungsbeispielen* im konkreten Unterricht haben sich die sogenannten SEASITE-Prinzipien als hilfreich erwiesen. Die SEASITE-Prinzipien stehen für *Self-Explanation Activity Supplemented by InsTructional Explanations* und basieren grundsätzlich auf den folgenden beiden Prinzipien: „(1) *So viel Selbsterklärung wie möglich, so viel instruktionale Erklärungen wie nötig* […] (2) *Rückmeldung*“ (Renkl, 2001, S. 45). Das Prinzip (1) wird damit begründet, dass sich Selbsterklärungen als gute Elaborationsstrategie erwiesen haben. Instruktionale Erklärungen über das Lösungsbeispiel hinaus sollten nur im Notfall und nur bei explizitem Aufruf der Lernenden gegeben werden. *Selbsterklärungen* können beschrieben werden als „Generating explanations to oneself“ (Chi, de Leeuw, Chiu & Lavancher, 1994, S. 439). Spontane Selbsterklärungen werden in Lernsituationen selten beobachtet (Renkl, 1997). Aus diesem Grund sind sogenannte Prompts notwendig, um Selbsterklärungen bei Lernenden anzuregen. Diese Prompts können dazu ermutigen, über das Ziel der Operation oder des Schemas, über die Anwendungsvoraussetzungen des Schemas bzw. über das hinter der Lösung stehende Prinzip zu reflektieren (Hilbert, Renkl & Holzäpfel, 2008; Renkl, 2001). Selbsterklärungen haben jedoch den Nachteil, dass ihre Qualität innerhalb der Schülerschaft deutlich variieren kann und dass durch falsche Selbsterklärungen Verständnisillusionen entstehen können. Diesen Verständnisillusionen können durch gezielte Rückmeldungen, (2) der SEASITE-Prinzipien, entgegengesteuert werden. Für den Physikunterricht hat beispielsweise Draxler (2005) diese beiden Prinzipien erfolgreich eingesetzt. Bei der Verwendung im Mathematikunterricht hat sich der Vergleich verschiedener Lösungen, in diesem Fall verschiedener Lösungsbeispiele, als lernförderlich gezeigt (vgl. Hilbert et al., 2008a).

Aufgrund dieser Ergebnisse wurden in der Unterrichtssequenz Lösungsbeispiele mit Prompts verwendet, die zu Selbsterklärungen anregen sollen. Diese Prompts wurden insbesondere anhand des Beitrags von Hilbert et al. (2008a) entwickelt:

- Welches sind die wichtigsten Schritte auf dem Weg zur Lösung? -> Nennen wichtiger Schritte!
- Was wird mit diesem Schritt berechnet oder begründet? -> Nennen der Ziele!
- Warum darf dieser Schritt durchgeführt werden? -> Nennen der Regel, des Prinzips bzw. der Formel!

Insgesamt folgt die Konzeption den SEASITE-Prinzipien (vgl. Renkl, 2001).

4.1.3 Konkreter Ablauf

Um die Ergebnisse, z. B. die Einschätzung der Schülerinnen und Schüler zu den eingesetzten Aufgaben und Visualisierungen einordnen zu können, werden der konkrete Ablauf inkl. der Unterrichtsmaterialien knapp vorgestellt. Die Unterrichtssequenz wurde von der Autorin dieses Beitrages selbst durchgeführt. Die Sequenz bestand aus sechs aufeinanderfolgenden Stunden à 45 Minuten, die überblicksartig in Tabelle 4 (Anhang) dargestellt sind. Die Einführung des Begriffs „bedingte Wahrscheinlichkeit“ (*1. Stunde*) wurde anhand eines einfachen Urnenbeispiels durchgeführt (Fokus, 2008, S. 91), um verstärkt die Definition des Begriffes und weniger einen authentischen Kontext in den Vordergrund zu rücken. Dabei wurde als Visualisierung ein Baumdiagramm mit absoluten Häufigkeiten verwendet. Diese für die meisten Schülerinnen und Schüler unbekannte Kombination aus einer bekannten Visualisierung und einem bekannten Informationsformat wurde genutzt, um den Fokus auf den Begriffsaufbau und weniger auf das Kennenlernen einer ganz neuen Visualisierung zu legen. Für die Versprachlichung der symbolischen Darstellung wurde die Aufgabe „Alarmanlage“ verwendet, bei der es um die zwei Ereignisse A: „Die Alarmanlage springt an“ und E: „Jemand versucht einzubrechen“ geht. Die Schülerinnen und Schüler sollten Ereignisse der Form $P_E(A)$ oder $P(A \cap E)$ beschreiben und erläutern, welche der Wahrscheinlichkeiten möglichst klein bzw. groß sein sollten (ISB, 2004).

Nach der Einführung des Begriffs wurde aufgrund der Vorkenntnisse der Lernenden zuerst die Visualisierung „Baumdiagramm mit absoluten Häufigkeiten“ genutzt, um bedingte Wahrscheinlichkeiten in einfachen Kontexten zu berechnen (*2. Stunde*). Nach den Ausführungen von Eichler und Vogel (2013, S. 192) ist die Aufgabe „Regenmacher“ gut geeignet, da durch die Comicform Vereinfachungen des Kontextes sich sinnvoll einbetten. Zudem erscheint die Modellierung der Situation klar und weniger komplex, als es für Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe I bei Diagnosetests der Fall sei. Die Lernenden nutzten ein Lösungsbeispiel, um die Visualisierung Baumdiagramm und die Berechnung von bedingten Wahrscheinlichkeiten sich selber zu erklären. Dabei wurden zwei unterschiedliche Lösungswege vorgegeben (einmal mit Wahrscheinlichkeiten, einmal mit absoluten Häufigkeiten; Auszug siehe Anhang). Als Hausaufgabe (und Sicherung) diente die von der mathematischen Struktur ähnliche Aufgabe „Fahrscheinkontrolle“ (BSV, 2008, S. 79), in der es um die Ereignisse „Dauerkartenbesitzer sein“ und „Fahrschein vergessen“ geht. In der *3. Stunde* übten die Lernenden diese Berechnung anhand der Aufgabe „Frühstücksgewohnheiten“ (BSV, 2008, S. 80) weiter, wobei die Ereignisse „Tee trinken“ und „Engländer sein“ betrachtet wurden. Das Basisratenproblem wurde im Unterrichtsgespräch durch Vorlesen und Diskutieren von Aussagen der Form „Bei einer Befragung unter 1000 Mitgliedern eines großen deutschen Automobilclubs haben 576 angegeben, dass ein BMW ihr Traumauto ist. Also sind Autos der Marke BMW die Traumautos der Deutschen“ initiiert[2] (Fokus, 2008, S. 106).

In der *4. Stunde* wurde die Visualisierung Einheitsquadrat anhand eines GeoGebra-Sheets eingeführt (siehe Dill, 2010). Zur Einführung wurde die schon bekannte Aufgabe „Regenmacher“ verwendet, damit der behandelte Kontext nicht zusätzliche Arbeitsgedächtniskapazitäten benötigt. In Einzelarbeit konnten die Schülerinnen und Schüler das GeoGebra-Sheet nutzen, um die Auswirkungen der Veränderungen von Einzelwahrscheinlichkeiten auf eine bedingte Wahrscheinlichkeit zu untersuchen. Auf einem vorbereiteten Arbeitsblatt fassten die Lernenden ihre Ergebnisse zusammen. Das Einheitsquadrat wurde zur Bearbeitung der bekannten

Aufgabe „Frühstücksgewohnheiten“ verwendet. Als Hausaufgabe (Sicherung) wurde die Aufgabe „Spamfilter“ (Fokus, 2008, S. 107) verwendet, die von der mathematischen Struktur her der Aufgabe „Frühstücksgewohnheiten“ ähnelt. Diese Stunde diente der Einführung der Visualisierung „Einheitsquadrat“, die von der Struktur der Vierfeldertafel ähnlich ist. Das vorher aufgebaute Begriffsverständnis zur bedingten Wahrscheinlichkeit sollte hierdurch vertieft werden.

In der *5. Stunde* wurde ein komplexeres Problem behandelt, für dessen Lösung der Begriff „bedingte Wahrscheinlichkeit“ essentiell ist: die Interpretation von Ergebnissen bei Diagnoseverfahren, hier für den HI-Virus (siehe Aufgabe „Diagnose – sicher oder unsicher?“ im Anhang). Das überraschende Ergebnis sollte für Erstaunen sorgen. Das Ergebnis für einen HIV-Test wurde im Unterrichtsgespräch erarbeitet, die Schülerinnen und Schülern bestimmten die Güte der anderen Tests anhand des Lösungsbeispiels selbstständig. Anhand dieses Beispiels wurden bei einem anderen Diagnosetest (Mammographie) die Vor- und Nachteile der verschiedenen Visualisierungen mit absoluten Häufigkeiten in der *6. Stunde* diskutiert. Die Lernenden sollten begründet entscheiden, welche der vorgegebenen Visualisierungen sie in einer Zeitschrift abdrucken würden (Wassner, 2007, S. 40). Die 6. Stunde diente zudem als Zusammenfassungs- und Übungsstunde für die Kurzarbeit in der darauffolgenden Stunde. Für das Interpretieren von qualitativen Zusammenhängen von Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe eines Einheitsquadrats wurden die Aufgabe „Frühstücksgewohnheiten“ und für die sprachliche Beschreibung die Aufgabe „Werfen einer Münze“ verwendet. In der *7. Stunde* bearbeiten die Jugendlichen neben der Kurzarbeit (als Leistungstest) einen Fragebogen zur Unterrichtssequenz.

4.2 Konzeption der Test- und Befragungsinstrumente

Die Unterrichtssequenz und die anschließende Befragung sowie die Kurzarbeit wurde in einer bayerischen zehnten Klasse mit 18 Schülerinnen und 11 Schülern durchgeführt. Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten auf freiwilliger Basis einen Fragebogen zu wichtigen motivationalen Lernvoraussetzungen. Da es sich um relativ stabile individuelle Merkmale handelt, ist es legitim und war zudem aus praktischen Gründen notwendig, diese Merkmale nach der Unterrichtssequenz zu erheben. Zudem berichteten die Jugendlichen ihre Wahrnehmung der Unterrichtssequenz. Als wichtige motivationale Lernvoraussetzungen wurden von Marsh, Trautwein, Lüdtke, Köller und Baumert (2005) das Interesse an Mathematik und das mathematikbezogene Selbstkonzept identifiziert. Die verwendeten Skalen folgen der Konzeption von Ufer, Rach und Kosiol (2017). Die Wahrnehmung der Unterrichtssequenz wurde insbesondere bezüglich der Nutzung der Lösungsbeispiele, der Einschätzung der Visualisierungen und der Beurteilung der eingesetzten Aufgaben (Interesse: „Ich finde diese Aufgabe interessant.“ und Nutzen: „Diese Aufgabe hat mir geholfen, das Konzept der bedingten Wahrscheinlichkeiten zu verstehen.“) eingeschätzt. Bei der Einschätzung der Aufgaben konnten die Jugendlichen ihre Aufzeichnungen zur Hand nehmen, um sich an die entsprechenden Aufgaben zu erinnern. Als Antwortskala wurde eine vierstufige Likert-Skala von „trifft zu“ (entspricht 3) bis „trifft nicht zu“ (entspricht 0) verwendet. Darüber hinaus wurde am Ende des Fragebogens ein offenes Item zu Verbesserungsvorschlägen verwendet. Der Fragebogen wurde von 26 Schülerinnen bzw. Schülern bearbeitet.

Am Ende der Unterrichtssequenz bearbeiteten die Schülerinnen und Schüler zudem einen kompetenzorientierten Leistungstest, deren Ergebnis als Kurzarbeit gewertet wurde (maximale Bearbeitungszeit einer Kurzarbeit: 25 min). Der Test beinhaltete fünf Aufgaben (plus einer Zusatzaufgabe[3]) mit Subaufgaben, die verschiedene Kontexte, Visualisierungen und Informationsformate ansprechen. Bei der Aufgabe „Lehrerkollegium“ (Lambacher Schweizer, 2008, S. 102) geht es um die Ereignisse „Brillenträger“ und „Geschlecht“. Die Jugendlichen sollten verschiedene (z. T. bedingte) Wahrscheinlichkeiten berechnen. Bei der Aufgabe Qualitätskontrolle (Fokus, 2008, S. 98) geht es um die Enkodierung der symbolischen Darstellung von bedingten Wahrscheinlichkeiten und deren Interpretation in einer Situation mit der Aufforderung, welcher der bedingten Wahrscheinlichkeiten bei einem Prüfverfahren möglichst groß bzw. klein sein sollten. Bei der Aufgabe „Schlagzeile“ sollten die Schülerinnen und Schüler begründet Stellung nehmen zu der Schlagzeile „Fußballer sind besonders gefährdet, denn bei der Ausübung ihres Sports ereignen sich fast die Hälfte aller Sportunfälle.“ Bei dieser Aufgabe wird das Basisratenproblem implizit fokussiert. Bei der Aufgabe „Auswirkungen eines Tests“ geht es um die Güte von zwei Tests, die anhand jeweils einer Visualisierung (Einheitsquadrat bzw. Baumdiagramm mit absoluten Häufigkeiten) bewertet werden sollten (siehe Anhang). Die Aufgabe „Down-Syndrom“ (Fokus, 2008, S. 107) fokussiert auf das Berechnen bedingter Wahrscheinlichkeiten mit den im Aufgabentext angegebenen prozentualen Informationen.

Aufgabe	Gegebene Visualisierung	Gegebenes Informationsformat	Anforderung und Lösungsansatz
Lehrerkollegium	Keine	Absolute Häufigkeiten	Berechnung von (bedingten) Wahrscheinlichkeiten, z. B. dass eine zufällig ausgewählte Lehrkraft weiblich ist bzw. dass eine zufällig ausgewählte Lehrkraft eine Lesebrille benötigt, wenn man weiß, dass die Lehrkraft weiblich ist.
Qualitätskontrolle	Symbolisch	Keine numerischen Informationen	Interpretation von bedingten Wahrscheinlichkeiten; Argumentation, welche bedingte Wahrscheinlichkeit in einem Prüfverfahren möglichst klein bzw. groß sein soll; Anzahl der falsch getesteten Computerchips gering halten
Schlagzeile	Keine	Relative Häufigkeit	Bewertung einer Aussage; absolute Zahlen seien nicht ausreichend zur Bewertung, sondern die Basisrate müsse bekannt sein
Auswirkungen eines Tests	a) Einheitsquadrat b) Baumdiagramm	a) keine numerischen Informationen b) absolute Häufigkeit	Bewertung der Güte eines Tests, deren Testresultate in den Visualisierungen gegeben sind; Anzahl der kranken Personen, die negativ getestet wurden, gering halten
Down-Syndrom	Keine	Wahrscheinlichkeiten	Berechnung von bedingten Wahrscheinlichkeiten in Testsituationen
Urne	Symbolisch	Absolute Häufigkeiten und eine Wahrscheinlichkeit	Berechnung einer Mengenmächtigkeit mit Hilfe einer gegebenen bedingten Wahrscheinlichkeit

Tab. 1: Überblick über die Aufgaben im Leistungstest.

Bei der Zusatzaufgabe „Urne“ (Fokus, 2008, S. 99) sollen die gegebenen bedingten Wahrscheinlichkeiten dazu genutzt werden, eine Mengen-mächtigkeit zu berechnen. Tabelle 1 gibt einen Überblick über die eingesetzten Aufgaben.

In keiner der sechs Aufgaben war vorgegeben, welche Visualisierung als Hilfsmittel zur Problemlösung verwendet werden soll. Insgesamt zielten die Aufgaben darauf ab, bedingte Wahrscheinlichkeiten bzw. Mengenmächtigkeiten in einfachen und komplexen Kontexten bzw. Problemstellungen zu berechnen. Zudem wurde die sprachliche Formulierung bedingter Wahrscheinlichkeiten gefordert und die Bedeutung der Basisrate in einer Anwendungssituation erfragt. Bei einer Aufgabe sind zwei Visualisierungen vorgegeben, die die Jugendlichen interpretieren mussten. Mit diesen Aufgaben wurden sowohl das konzeptuelle als auch das prozedurale Begriffswissen adressiert und Anforderungssituationen für das Zeigen von stochastischer Kompetenz wurden verwendet. Es liegen Testbearbeitungen von 22 Schülerinnen bzw. Schülern vor.

5. Ergebnisse

Bevor die Ergebnisse zu den drei Forschungsfragen präsentiert werden, wird die befragte Schulklasse bezüglich ihrer motivationalen und kognitiven Lernvoraussetzungen charakterisiert. Diese Charakterisierung dient dazu, die Ergebnisse der Lernendenbefragung besser einzuschätzen.

5.1 Charakterisierung der Lerngruppe bezüglich Interesse an Mathematik und mathematischem Leistungsvermögen

Die zehnte Klasse an einem bayerischen Gymnasium, in der die Unterrichtssequenz durchgeführt wurde, bestand aus 18 Schülerinnen und 11 Schülern. Die Klasse war im Vergleich zu anderen zehnten Klassen der Schule (wovon die Autorin dieses Beitrages zwei persönlich unterrichtete) insgesamt leistungsschwach im Fach Mathematik und eher wenig an Mathematik interessiert. Diese Aussagen lassen sich an der Einschätzung des Interesses an Mathematik ($M = 1{,}81$; $SD = 0{,}75$; vierstufige Likert-Skala von 0 (trifft nicht zu) bis 3 (trifft zu)) und des mathematikbezogenen Selbstkonzepts ($M = 1{,}27$; $SD = 0{,}67$; Skala von 0 (trifft nicht zu) bis 3 (trifft zu)) sowie an der Mathematiknote im Halbjahreszeugnis ($M = 3{,}50$; $SD = 0{,}88$) belegen. Die individuellen Mathematiknoten zeigen auch, dass es sich um eine eher leistungsschwächere Klasse mit nur einem sehr guten Schüler und einigen sehr leistungsschwachen Schülerinnen und Schülern handelt. Die Skalenmittelwerte für das Interesse zu verschiedenen mathematischen Aktivitäten liegen bei der Kategorie „trifft eher nicht zu“ (entspricht 1): Rechnen ($M = 1{,}04$; $SD = 0{,}78$), außermathematisches Anwenden ($M = 1{,}22$; $SD = 0{,}67$) und Beweisen ($M = 0{,}60$; $SD = 0{,}42$).

Bei diesem Thema konnte jedoch beobachtet werden, dass die Lernenden sich eher mehr für das Thema interessieren und bessere Leistungen zeigen als bei anderen mathematischen Inhalten der Jahrgangsstufe 10 (z. B. Funktionseigenschaften).

	Urne	Regen-macher	Fahrschein-kontrolle	Frühstücks-gewohnheiten	Werfen einer Münze	Spamfilter	HIV-Test
Interesse	1,77 (0,76)	1,19 (0,75)	1,73 (0,92)	1,77 (0,95)	1,31 (1,01)	1,36 (0,70)	1,65 (1,06)
Nutzen	2,15 (0,61)	1,50 (0,86)	1,92 (0,91)	2,23 (0,86)	1,62 (1,06)	1,36 (0,81)	1,38 (0,98)

Tab. 2: Mittelwerte und Standardabweichungen der Einschätzung der Aufgaben. Vierstufige Skala von 0 (trifft zu) bis 3 (trifft nicht zu).

In der Schulaufgabe direkt vor dieser Unterrichtssequenz zeigten die Schülerinnen und Schüler gute Kenntnisse bei Vierfeldertafeln mit verschiedenen Informationsformaten und Baumdiagrammen mit Wahrscheinlichkeiten. Insgesamt waren in diesem Bereich 15 Punkte zu erreichen: 80% der Jugendlichen erreichten mindestens die Hälfte der Punkte (im Bereich „Eigenschaften von Funktionen" nur 54% der Jugendlichen), 38% erreichten mehr als Dreiviertel der Punkte (im anderen Bereich nur 4% der Jugendlichen).

Wichtige Vorkenntnisse zu dieser Unterrichtssequenz im Bereich der Stochastik brachten die Jugendlichen demnach mit.

5.2 Interesse an den eingesetzten Aufgaben

Das Interesse an den Aufgaben ist unterschiedlich eingeschätzt worden. Die Nützlichkeit der Aufgaben zum Begriffsverständnis wurde ebenfalls miterhoben, um als Kontrolle für die Einschätzung der Jugendlichen zu dienen. In Tabelle 2 sind die Mittelwerte und Standardabweichungen der Einschätzungen dargestellt. Interessant an den Ergebnissen ist, dass bei den meisten Aufgaben das Interesse als eher niedrig eingeschätzt wurde. Eine absolute Interpretation derartiger Ergebnisse ist schwierig; bei einem Vergleich mit der Einschätzung für die Nützlichkeit im Lernprozess wird jedoch deutlich, dass das Interesse an den Aufgaben generell niedriger als der Nutzen für den Lernprozess eingeschätzt wird. Die einzige Aufgabe, die nicht unter dieses Schema fällt, ist die Aufgabe „HIV-Test". Jedoch ist selbst diese Aufgabe in den Kategorien nicht besonders hoch eingeschätzt worden trotz der persönlichen Relevanz und des sehr überraschenden Ergebnisses (Die Lernenden haben zu Beginn der Unterrichtsstunde im Mittel und konsistent eingeschätzt, dass bei einer positiven Diagnose in mindestens 80% der Fälle der Mensch erkrankt ist – korrekt waren bei diesen Daten etwa in 8% der Fälle). Die Aufgabe „Regenmacher" wurde als am wenigsten interessant und auch als nur mittelmäßig hilfreich im Vergleich zu den anderen Aufgaben eingeschätzt, obwohl die Aufgabe aus theoretischer Sicht (Eichler & Vogel, 2013) aufgrund der einfachen Situationsstruktur als lernförderlich beurteilt werden kann.

5.3 Präferenz verschiedener Visualisierungen und Informationsformate

Die Präferenz der verschiedenen Visualisierungen wird anhand von zwei Indikatoren bestimmt. Zum Ersten wird die freiwillige Wahl der Visualisierungen zum Lösen einer Aufgabe, zum Zweiten werden die direkt erfragten Präferenzen der Schülerinnen und Schülern analysiert.

In der Kurzarbeit waren bei den Aufgaben „Lehrerkollegium", „Down-Syndrom" und „Urne" keine Visualisierungen vorgegeben. Nun stellt sich die Frage, ob Schülerinnen und Schüler aus eigenen Stücken eine Visualisierung verwenden und wenn ja, welche. In Tabelle 3 ist die Anzahl der Schülerinnen und Schüler angegeben, die eine Vierfeldertafel mit absoluten Häufigkeiten bzw. Wahrscheinlichkeiten, ein Baumdiagramm mit absoluten Häufigkeiten bzw. Wahrscheinlichkeiten oder nur eine symbolische Darstellung (eine Formel) verwendet haben (Mehrfachkodierung einer Aufgabenbearbeitung möglich, wenn ein Lernender bei einer Aufgabe mehr als eine Visualisierung verwendet hat). Die meisten der 22 Schülerinnen und Schüler haben eine Visualisierung zur Lösung verwendet. Dabei scheint es keine generelle Tendenz für eine Visualisierung zu geben, sondern die Lernenden nutzten bei verschiedenen Aufgaben unterschiedliche Darstellungen (61% der Jugendlichen nutzen im Test mindestens zwei verschiedene Darstellungen). Das Einheitsquadrat wurde von keinem verwendet.

	Vierfeldertafel		Baumdiagramm		Rein symbolisch
	Absolute Häufigkeiten	Wahrscheinlichkeiten	Absolute Häufigkeiten	Wahrscheinlichkeiten	
Lehrerkollegium	15	0	7	1	4
Down-Syndrom	2	3	6	9	7
Urne	5	0	9	0	5

Tab. 3: Verwendung der Darstellungen im Leistungstest.

Die Dominanz der Verwendung von absoluten Häufigkeiten bei der Aufgabe „Lehrerkollegium“ und „Urne“ ist dadurch zu erklären, dass entweder das gegebene bzw. das gewünschte Informationsformat absolute Häufigkeiten waren (vgl. Tab. 1). Verschiedene Darstellungen sind insbesondere bei der Aufgabe „Down-Syndrom“ zu finden. Dieses ist wahrscheinlich darauf zurückzuführen, dass bei der Aufgabenstellung als Informationsformat „Wahrscheinlichkeiten“ genutzt wurden, im Unterricht jedoch absolute Häufigkeiten fokussiert wurden. Möglicherweise spielt es auch eine Rolle, dass in der Aufgabe davor ein Baumdiagramm mit absoluten Häufigkeiten eingesetzt wurde. Die Abbildungen 4-8 zeigen die verschiedenen Herangehensweisen:

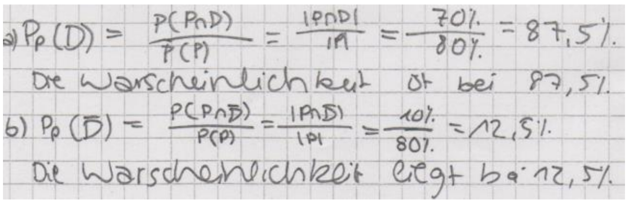


Abb. 4: Reine Verwendung einer symbolischen Darstellung (fehlerhafte Lösung).

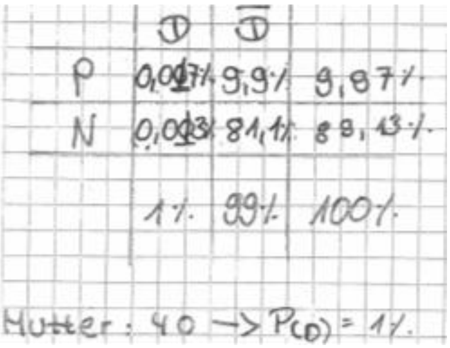


Abb. 5: Verwendung einer Vierfeldertafel mit Wahrscheinlichkeiten (fehlerhafte Lösung).

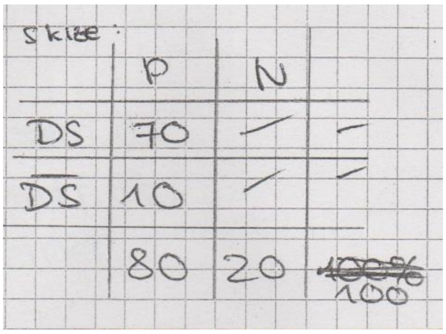


Abb. 6: Verwendung einer Vierfeldertafel mit absoluten Häufigkeiten (fehlerhafte Lösung).

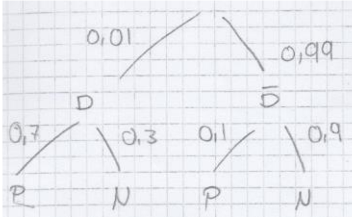


Abb. 7: Verwendung eines Baumdiagramms mit Wahrscheinlichkeiten (fehlerhafte Lösung).

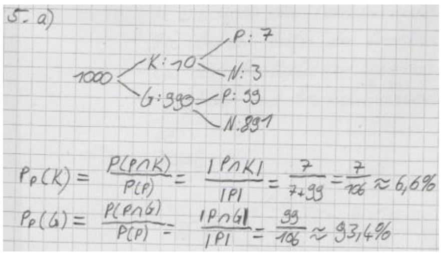


Abb. 8: Verwendung eines Baumdiagramms mit absoluten Häufigkeiten (richtige Lösung).

Auffällig ist, dass innerhalb einer Aufgabe auch verschiedene Visualisierungen zur Lösung herangezogen wurden, falls die zuerst verwendete nicht hilfreich war (Beispiel siehe Abb. 9).

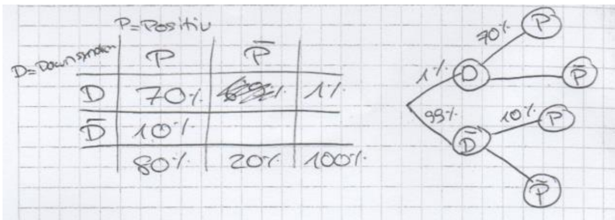


Abb. 9: Verschiedene Darstellungen zur Aufgabe „Down-Syndrom“.

Die Befragung der Jugendlichen gibt Hinweise, dass das Baumdiagramm insgesamt als (emotional) interessant und hilfreich empfunden wurde ($M = 2{,}26$, $SD = 0{,}93$; Skala von 0 (trifft nicht zu) bis 3 (trifft zu)). Im Gegensatz dazu wurde das Einheitsquadrat negativ bewertet ($M = 1{,}10$, $SD = 0{,}65$). Beim Vergleich der beiden Visualisierungen haben bis auf eine Schülerin alle Lernende das Baumdiagramm als lernförderlicher bewertet als das Einheitsquadrat. Diese Rückmeldung hängt sicherlich mit mehreren Aspekten zusammen: Erstens scheint die Konstruktion eines Baumdiagrammes deutlich weniger aufwändig zu sein als die Konstruktion eines Einheitsquadrates. Zweitens haben sich die Schülerinnen und Schüler bei der Einführung des Einheitsquadrates im Computerraum der Wahrnehmung nach und auch erkennbar an den fehlenden Bearbeitungen des Arbeitsblattes zu wenig auf die Aufgabe konzentriert – derartige, selbstkritische Äußerungen waren auch im offenen Item am Ende der Befragung zu finden (Zitat einer Schülerin mit mittleren mathematischen Leistungen: „Und das Arbeiten im Computerraum hat mir persönlich nichts gebracht –

ich war zu abgelenkt“). Drittens kannten die Schülerinnen und Schüler verschiedene Formen des Baumdiagramms schon aus früheren Unterrichtseinheiten, das Einheitsquadrat in dieser Form noch nicht. Und viertens wurde das Einheitsquadrat nicht gleich zu Beginn der Unterrichtssequenz eingeführt, sondern erst in der Mitte, so dass die Beschäftigungszeit mit dieser Visualisierung geringer war als mit dem Baumdiagramm mit absoluten Häufigkeiten.

5.4 Wissen zum Begriff „bedingte Wahrscheinlichkeit“

Die meisten Schülerinnen und Schüler waren in der Lage, eine bedingte Wahrscheinlichkeit sprachlich zu formulieren. Bei der Aufgabe „Qualitätskontrolle“ (Lösungsrate[4] = 72%) sind nur wenige Fehlvorstellungen, z. B. dieses Antwortbeispiel einer sehr schwachen Schülerin in Mathematik (Abb. 10), aufgetreten. Wahrscheinlich hat die Schülerin sowohl Probleme Ereignisse zu beschreiben als auch das Konzept bedingte Wahrscheinlichkeit zu nutzen.

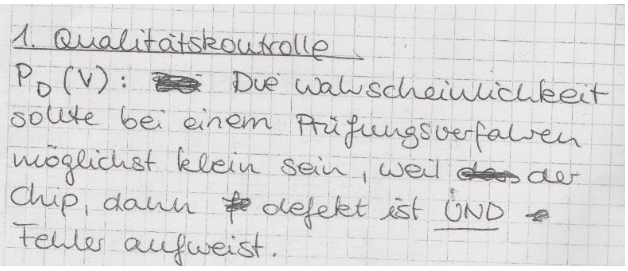


Abb. 10: Bearbeitung der Aufgabe „Qualitätskontrolle“.

Das Basisratenproblem, das häufig in der Literatur beschrieben wird (vgl. Abschnitt 2.1), war in zwei Aufgaben zu finden. Bei der Bewertung eines Testes mit Hilfe eines Einheitsquadrates (Aufgabe „Auswirkungen eines Tests“) waren sehr viele Lernende in der Lage, die Güte des Tests zu beschreiben und damit eine Situation, dargestellt in einem Einheitsquadrat, zu interpretieren (Lösungsrate = 70%). Das explizite Nutzen der Basisrate dagegen konnten deutlich weniger Lernende leisten (Lösungsrate = 37%): Bei der Aufgabe „Schlagzeile“ waren nur wenige in der Lage, die Aussage zu bewerten, ob Fußball eine sehr gefährliche Sportart sei.

Insgesamt kann das konzeptuelle und prozedurale Wissen der Lernenden nach der Unterrichtssequenz als heterogen eingeschätzt werden. Insbesondere die Verwendung des Konzeptes zur Modellierung einer komplexeren Situation oder eines Problems (Aufgabe „Down-Syndrom“, Lösungsrate = 44%, und Aufgabe „Urne“, Lösungsrate = 28%) stellte für viele Lernende auch nach der Unterrichtssequenz noch eine Herausforderung dar.

6. Diskussion

Ausgangspunkte dieses Beitrages waren die Schwierigkeiten von Lernenden, Situationen mit Hilfe von bedingten Wahrscheinlichkeiten richtig zu interpretieren. Als hilfreich bei der Situationsinterpretation haben sich in experimentellen Studien Visualisierungen herausgestellt (Binder et al., 2015; Böcherer-Linder et al., 2016). Umsetzungen dieser Visualisierungen im regulären Unterricht sind aber meines Wissens nach bisher wenig berichtet. Dadurch ist für das Praxisfeld unklar, welche Visualisierungen Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht präferieren und welches Begriffswissen sie erwerben. Um sich dieser Forschungslücke zu nähern, wurde eine Unterrichtssequenz eingesetzt, die auf die zwei wichtigen Darstellungen, Baumdiagramm mit absoluten Häufigkeiten und Einheitsquadrat, fokussiert. Nach der Unterrichtssequenz waren die meisten Jugendlichen in der Lage, Situationen, die mit diesen Darstellungen visualisiert wurden, zu interpretieren. Zudem konnten viele Lernende auch verschiedene Visualisierungen nutzen, insbesondere Baumdiagramme mit absoluten Häufigkeiten oder Wahrscheinlichkeiten, um bedingte Wahrscheinlichkeiten in realitätsnahen Situationen zu berechnen (vgl. Bea & Scholz, 1995; Binder et al., 2015). Auch in der Aufgabe, in denen als Informationsformat „Wahrscheinlichkeiten“ gegeben sind, haben viele Jugendliche mit absoluten Häufigkeiten gearbeitet und somit die Vorteile dieses Informationsformats anerkannt. Obwohl die Jugendlichen in der Lage waren, die Güte eines Tests dargestellt in einem Einheitsquadrat zu interpretieren, beurteilen sie im Vergleich zum Baumdiagramm das Einheitsquadrat als wenig lernförderlich.

Die Aussagen dieser Studie zu den Einstellungen und der Performanz der Schülerinnen und Schüler sind durch das Design beschränkt. Die Unterrichtssequenz mit anschließender Lernendenbefragung wurde nur in einer eher wenig an Mathematik interessierten Klasse durch die Autorin dieses Beitrages durchgeführt. Dementsprechend hat dieser Beitrag auch nicht den Anspruch, die Qualität der Unterrichtssequenz nachzuweisen, sondern eine erste praktische Umsetzung der in der Literatur geforderten Visualisierungen im Praxisfeld vorzustellen und Hypothesen für die Wahrnehmung durch die Schülerinnen und Schüler zu entwickeln.

Als Verbesserungsmöglichkeiten für das Praxisfeld ist anzuregen, dass die Reihenfolge erst „Baumdiagramm mit absoluten Häufigkeiten“, dann „Einheitsquadrat“ getauscht werden könnte, um das Einheitsquadrat in der Unterrichtssequenz frühzeitiger und häufiger zu nutzen. Auch wenn das Informationsformat „absolute Häufigkeiten“ in Baumdiagrammen ungewohnt für die Lernenden ist, hatten sie nach den Ergebnissen deutlich größere Schwierigkeiten mit dem Einheitsquadrat. Für den weiteren Einsatz im Unterricht sollte zudem stärker darauf geachtet werden, dass die Vorteile des Einheitsquadrates, z. B. ein schnelles Erkennen der qualitativen Zusammenhänge zwischen Wahrscheinlichkeiten (Bea & Scholz, 1995), auch von den Lernenden besser erkannt werden. Dieses wäre möglich, wenn zuerst das Einheitsquadrat unabhängig von der Betrachtung der bedingten Wahrscheinlichkeit eingeführt wird (vgl. Böcherer-Linder et al., 2016). Dadurch kann die Konzentration auf das Einheitsquadrat und das Ablesen von Einzelwahrscheinlichkeiten gelegt werden. Diese Visualisierung ist den Schülerinnen und Schülern bisher nur in Form der Vierfeldertafel bekannt, so dass das Kennenlernen der „neuen" Visualisierung Einheitsquadrat zuerst im Vordergrund stehen sollte, da auch das Kennenlernen einer „neuen" Visualisierung Zeit benötigt (Ainsworth, 2006). Bei der Implementation der Aufgaben sollte nachgesteuert werden, denn die eingesetzten Aufgaben wurden z. T. von den Schülerinnen und Schülern eher negativ bewertet. Zu untersuchen wäre, wie diese Aufgaben so implementiert werden können, dass Jugendliche sie als hilfreich für ihren Lernprozess ansehen. Auch ist bisher wenig untersucht, worauf die Einschätzung von Lernenden zur Güte von Aufgaben, z. B. Interessantheit, basiert (vgl. Schukajlow et al., 2012) und wann Schülerinnen und Schüler eine persönliche Relevanz für ihr eigenes Leben herstellen (Wassner, 2007). Um stärker den Modellierungscharakter in den Aufgaben in den Vordergrund zu stellen, wäre eine Öffnung einzelner Aufgaben sinnvoll (vgl. Maaß & Mischo, 2012). Beispielsweise könnten die Lernenden aufgefordert werden, selber zu überlegen, welche Gütekriterien ein Testverfahren mindestens erfüllen sollte, um für sie ein befriedigendes Ergebnis zu erhalten. Die Einschätzungen der Lernenden zeigen auch, dass mathematische Modellierungsaufgaben nicht pauschal als interessant angesehen werden (vgl. Schukajlow et al., 2012). Deshalb sollte stärker untersucht werden, welche Aufgabenkriterien das Interesse von Lernenden wecken. Beispielsweise scheint die Interessantheit einer Aufgabe nicht unbedingt durch eine große Divergenz zwischen vermutetem Resultat und berechnetem Resultat bestimmt zu sein (siehe Aufgabe „Hi-Virus"). Möglicherweise wichtiger ist die Authentizität und die Korrektheit der Informationen in der Aufgabe, z. B. in diesem Fall die Diagnosegüte der Testverfahren.

Die Forschung im Feld von Visualisierungen im Bereich Wahrscheinlichkeiten wird durch diese Studie in dem Sinne erweitert werden, dass die in experimentelleren Studien generierten Ansätze im realen Schulkontext umgesetzt wurden. Dabei wird deutlich, dass das Arbeiten mit dem Einheitsquadrat den meisten Schülerinnen und Schülern zwar gelingt, sie dieses jedoch nicht als hilfreich empfinden. Diese Wahrnehmung kann darauf zurückzuführen sein, dass die Schülerinnen und Schüler in unteren Jahrgängen die Visualisierung Einheitsquadrat noch nicht kennengelernt haben. Bezogen auf die Curriculumsforschung stellt sich also die Frage, inwiefern diese Visualisierung besser in den Mathematikunterricht (auch für jüngere Schülerinnen und Schüler) integriert werden kann. Obwohl die Lernenden das Einheitsquadrat als weniger lernförderlich als das Baumdiagramm ansehen und das Einheitsquadrat für Problemlösesituationen nicht selbstständig konstruieren, sind sie größtenteils in der Lage, ein gegebenes Einheitsquadrat zu interpretieren. Es stellt sich also die Frage, welche Fähigkeiten für die Interpretation und welche für die Konstruktion einer Visualisierung notwendig sind und ob diese Fähigkeiten zusammen erlernt werden können. Insgesamt zeigt diese Unterrichtssequenz eine Möglichkeit auf, konzeptuelles und prozedurales Wissen zum Begriff „bedingte Wahrscheinlichkeiten" aufzubauen. Für diesen Begriffsaufbau scheinen sowohl das Einheitsquadrat als auch das Baumdiagramm mit absoluten Häufigkeiten wertvolle Visualisierungen darzustellen.

Anmerkungen

[1] Auf die Vierfeldertafel wird nicht explizit eingegangen, da diese Visualisierung eine ähnliche, vereinfachte Struktur des Einheitsquadrats besitzt. Ebenso wird das umgekehrte Baumdiagramm nicht fokussiert.

[2] Bemerkung zur konkreten Umsetzung: In dieser Stunde musste zusätzlich eine vorher geschriebene Klausur zurückgegeben werden.

[3] Die Zusatzaufgabe konnte aufgrund der Zeitvorgabe einer Kurzarbeit in dieser Schule nicht regulär als Aufgabe bearbeitet werden. Da diese Aufgabe aber einen wichtigen Aspekt des Begriffsverständnisses beinhaltet, wurde sie als Zusatzaufgabe deklariert.

[4] Die Lösungsrate ist definiert als der Prozentsatz der erreichten Punkte.

Danksagung

Ich danke den gutachtenden Personen für die konstruktiven Anmerkungen und Kommentare.

Literatur

Ainsworth, S. (2006). DeFT: a conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction, 16*, 183-198.

Barth, F. (1994). *Erstens kommt es anders und zweitens als man denkt: Paradoxien im Umfeld der bedingten Wahrscheinlichkeiten*. Abgerufen von https://www.ethz.ch/content/dam/ethz/special-interest/dual/educeth-dam/documents/Unterrichtsmaterialien/mathematik/gruene-berichte/barth-paradoxien.pdf.

Bea, W. & Scholz, R (1995). Graphische Modelle bedingter Wahrscheinlichkeiten im empirisch-didaktischen Vergleich. *JMD, 16*(3/4), 299–327.

Binder, K., Krauss, S. & Bruckmaier, G. (2015). Effects of visualizing statistical information – an empirical study on tree diagrams and 2×2 tables. *Frontiers in Psychology, 6*, 1–9.

Böcherer-Linder, K., Eichler, A. & Vogel, M. (2016). The impact of visualization on understanding conditional probabilities. In ICME (Eds.), *Proceedings of the 13th International Congress of Mathematics Education (ICME-13)*. Hamburg, Germany.

Borovcnik, M. (1990). Ein intuitiver Zugang zur bedingten Wahrscheinlichkeit und zur Bayes-Formel. *Stochastik in der Schule, 10*(3), 22–35.

Bruner, J. (1971). *Studien zur kognitiven Entwicklung*. Stuttgart: Klett.

Chi, M. T. H., de Leeuw, N., Chiu, M.-H. & Lavancher, C. (1994). Eliciting self-explanations improves understanding. *Cognitive Science, 18*(3), 439–477.

Dill, F. (2010). *GeoGebra-sheet zur Aufgabe „Zaubergesang"*. Abgerufen von www01.ph-heidelberg.de/wp/vogel/vogel_phheidelberg/buch_aemv/aufgabe_zaubergesang.zip.

Distel, B. & Feuerlein, R. (2008). *Mathematik 10: Unterrichtswerk für das G8*. München: Bayerischer Schulbuchverlag.

Draxler, D. (2005). *Aufgabendesign und basismodellorientierter Physikunterricht*. Dissertation an der Universität Duisburg-Essen. Abgerufen von http://d-nb.info/983890943/34.

Dreibholz, S. (2014). *Testergebnisse richtig interpretieren – Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten*. Abgerufen von http://www.schulentwicklung.nrw.de/materialdaten-bank/upload/4355/104030_M_E_S2_Testergebnisse_richtig_interpretieren.pdf.

Eichler, A. & Vogel, M. (2013). *Leitidee Daten und Zufall: Von konkreten Beispielen zur Didaktik der Stochastik* (2. Auflage). Wiesbaden: Vieweg + Teubner.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: an educational approach*. Dordrecht: Reidel.

Freytag, C., Herz, A., Kammermeyer, F., Kurz, K., Peteranderl, M., Schmähling, R., Schmitt, B., Sinzinger, M., Zebhauser, E. & Zebhauser, M. (2008). *Fokus Mathematik 10*. Berlin: Cornelsen Verlag.

Garcia-Retamero, R. & Hoffrage, U. (2013). Visual representation of statistical information improves diagnostic inferences in doctors and their patients. *Social Science & Medicine, 83*, 27-33.

Gigerenzer, G. & Hoffrage, U. (1995). How to improve bayesian reasoning without instruction: frequency formats. *Psychological review, 102*(4), 684-704.

Heinze, A., Star, J. & Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 21*, 535-540.

Hilbert, T., Renkl, A. & Holzäpfel, L. (2008a). Ach so geht das! Üben mit Lösungsbeispielen. *mathematik lehren, 147*, 47–49.

Hilbert, T., Renkl, A., Kessler, S. & Reiss, K. (2008b). Learning to prove in geometry: learning from heuristic examples and how it can be supported. *Learning and Instruction, 18*, 54–65.

Hofe, R. v. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg: Spektrum.

ISB (2004). *Lehrplan 10 Mathematik*. Abgerufen von http://www.isb-gym8-lehrplan.de/contentserv/3.1.neu/g8.de/index.php?StoryID=26221&PHPSESSID =bb85af97805679d22d6fffe8325710c5.

De Jong, T. & Ferguson-Hessler, M. G. M. (1996). Types of qualities of knowledge. *Educational Psychologist, 31*(2), 105–113

KMK (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Bildungsabschluss*. Abgerufen von http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2003/2003_12_04-Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA.pdf.

Krauss, S. (2003). Wie man das Verständnis von Wahrscheinlichkeiten verbessern kann: Das "Häufigkeitskonzept". *Stochastik in der Schule, 23*(1), 2–9.

Marsh, H. W., Trautwein, U., Lüdtke, O., Köller, O. & Baumert, J. (2005). Academic self-concept, interest, grades, and standardized test scores: reciprocal effects models of causal ordering. *Child Development, 76*(2), 397–416.

Maaß, K. & Mischo, C. (2012). Fördert mathematisches Modellieren die Motivation in Mathematik? Befunde einer Interventionsstudie bei HauptschülerInnen? *mathematica didactica, 35*, 25-49.

Maxara, C. (2010). *Stochastische Simulation von Zufallsexperimenten mit Fathom – Eine theoretische Werkzeuganalyse und explorative Fallstudie*. Abgerufen von https://kobra.bibliothek.uni-kassel.de/bitstream/urn:nbn:de:hebis:34-2006110215452/3/Kadisto7.pdf.

Renkl, A. (2001). Explorative Analysen zur effektiven Nutzung von instruktionalen Erklärungen beim Lernen aus Lösungsbeispielen. *Unterrichtswissenschaft, 29*(1), 41–63.

Renkl, A. (1997). Learning from worked-out examples: a study on individual differences. *Cognitive Science, 21*(1), 1–29.

Rheinberg, F. (2006). Intrinsische Motivation und Flow-Erleben. In J. Heckhausen & H. Heckhausen (Hrsg.), *Motivation und Handeln* (3. Auflage). Heidelberg: Springer.

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S. & Wagner Alibali, M. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: an iterative process. *Journal of Educational Psychology, 93*(2), 346–362.

Schätz, U. & Eisentraut, F. (2008). *Delta 10*. Berlin: Duden Paetec GmbH.

Schmid, A. & Weidig, I. (2008). *Lambacher Schweizer 10*. Stuttgart: Ernst Klett Verlag GmbH.

Schneider, M. (2006). *Konzeptuelles und prozedurales Wissen als latente Variablen: Ihre Interaktion beim*

Lernen mit Dezimalbrüchen. Dissertation an der TU Berlin. Abgerufen von https://depositonce.tu-berlin.de/bitstream/11303/1605/1/Dokument_15.pdf.

Schukajlow, S., Leiss, D., Pekrun, R., Blum, W., Müller, M. & Messner, R. (2012). Teaching methods for modelling problems and students' task-specific enjoyment, value, interest and self-efficacy expectations. *Educational Studies in Mathematics, 79*, 215–237.

Sedlmeier, P. & Gigerenzer, G. (2001). Teaching bayesian reasoning in less than two hours. *Journal of Experimental Psychology: General, 130*, 380–400.

Sälzer, C., Reiss, K., Prenzel, M., Schiepe-Tiska, A., & Heinze, A. (2013). Zwischen Grundlagenwissen und Anwendungsbezug: Mathematische Kompetenz im internationalen Vergleich. In M. Prenzel, C. Sälzer, E. Klieme & O. Köller (Hrsg.), *PISA 2012: Fortschritte und Herausforderungen in Deutschland* (S. 47–97). Münster u. a.: Waxmann.

Tversky, A. & Kahneman, D. (1975). Judgment under uncertainty: heuristics and biases. *Science, 185*, 1124–1131.

Ufer, S., Rach, S. & Kosiol, T. (2017). Interest in mathematics = interest in mathematics? What general measures of interest reflect when the object of interest changes. *ZDM Mathematics Education, 49*(3), 397–409.

Wassner, C. (2007). *Förderung Bayesianischen Denkens – Kognitionspsychologische Grundlagen und didaktische Analysen*. Abgerufen von http://kobra.bibliothek.uni-kassel.de/bitstream/urn:nbn:de:hebis:34-2006092214705/3/Kadisto4.pdf.

Wassner, C., Martignon, L. & Sedlmeier, P. (2002). Die Bedeutung der Darbietungsform für das alltagsorientierte Lehren von Stochastik. In M. Prenzel & J. Doll (Hrsg.), *Bildungsqualität von Schule: Schulische und außerschulische Bedingungen mathematischer, naturwissenschaftlicher und überfachlicher Kompetenzen* (S. 35–50). Weinheim: Beltz.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 61*, 37–46.

Anschrift der Verfasserin

Stefanie Rach
Universität Paderborn
Institut für Mathematik
Warburger Str. 100
33098 Paderborn
rach@math.uni-paderborn.de

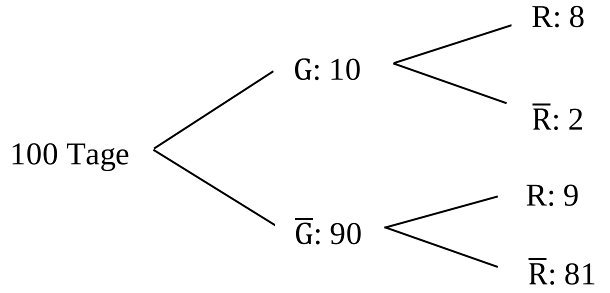
Anhang

Stunde	Ziele	Aufgabe	Visualisierungen	Methodische Umsetzung
1. Stunde	- Einführung des Begriffs „bedingte Wahrscheinlichkeit“ - Versprachlichen der symbolischen Darstellung	- Urnenbeispiel - Alarmanlage	- Baumdiagramm mit absoluten Häufigkeiten - sprachliche Darstellung	Einzelarbeit und Unterrichtsgespräch
2. Stunde	- Berechnung von bedingten Wahrscheinlichkeiten	- Regenmacher - Fahrscheinkontrolle	- Baumdiagramm mit absoluten Häufigkeiten und Baumdiagramm mit Wahrscheinlichkeiten - symbolische Darstellung (Formel)	Einzelarbeit mit Lösungsbeispiel und Prompts
3. Stunde	- Berechnung von bedingten Wahrscheinlichkeiten - Basisratenproblem	- Frühstücksgewohnheiten - Aussagen	symbolische Darstellung (Formel)	Partnerarbeit und Unterrichtsgespräch
4. Stunde	- Darstellung der bedingten Wahrscheinlichkeiten im Einheitsquadrat	- Regenmacher - Frühstücksgewohnheit - Spamfilter	- Einheitsquadrat - symbolische Darstellung (Formel)	Einzelarbeit mit GeoGebra-Sheet als Lösungsbeispiel
5. Stunde	- Modellierung einer komplexen Situation mit Hilfe bedingter Wahrscheinlichkeiten	HI-Virus	- Baumdiagramm mit absoluten Häufigkeiten oder Wahrscheinlichkeiten - symbolische Darstellung (Formel)	Einzel- und Gruppenarbeit mit Lösungsbeispiel
6. Stunde	- Diskussion der verschiedenen Darstellungsformen	- Mammographie - Frühstücksgewohnheit	- Einheitsquadrat - Baumdiagramm mit absoluten Häufigkeiten - symbolische Darstellung (Formel)	Unterrichtsgespräch

Tab. 4: Übersicht über die Unterrichtssequenz.

Aufgabe mit Kurzlösungen: „Regenmacher“

[…] Übersetzung in ein Baumdiagramm mit den Ereignissen R: „Es regnet.“ und G: „Gesang vom Regenmacher“



Man weiß demnach, dass es regnet. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass der Regenmacher gesungen hat unter der Bedingung „Es regnet“?

1. Möglichkeit: $P_R(G) = \frac{P(R \cap G)}{P(R)} = \frac{P(G) \cdot P_G(R)}{P(G) \cdot P_G(R) + P(\overline{G}) \cdot P_{\overline{G}}(R)}$

$= \frac{0{,}08}{0{,}08 + 0{,}09} \approx 0{,}47$

2. Möglichkeit: $P_R(G) = \frac{|R \cap G|}{|R|} = \frac{8}{8+9} \approx 0{,}47$ […]

Aufgabe: Diagnose – sicher oder unsicher?

Mona macht einen HIV-Test, da sie ungeschützten Sex hatte. Dieser fällt positiv aus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie den Virus in sich trägt?

> *Informationen zum ELISA-Test*: Der Test gibt Auskunft, ob man vor drei Monaten den Virus in sich trägt – erst müssen sich Antikörper gegen das Virus im Körper gebildet haben, auf die dann getestet wird. Von 1000 HIV-Trägern erkennt der Test 997 richtig (sog. Sensitivität = 99,7%), d. h. der Test auf HIV ist positiv. Von 1000 nicht infizierten Personen gibt der Test bei 15 Personen fälschlicherweise ein positives Testergebnis (sog. Spezifität = 98,5%). In Deutschland ist ungefähr 1 von 1000 Menschen mit HIV infiziert.

Ist die Diagnose immer so unsicher?

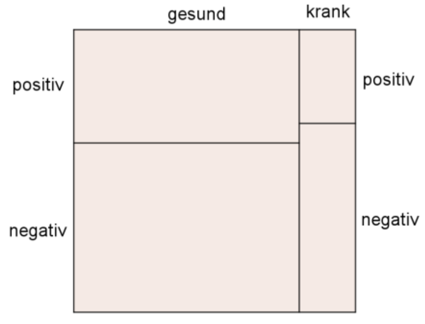
a) Arbeite nun in einer Gruppe von vier Personen zusammen. Jeder von euch berechnet zuerst für einen Fall die Wahrscheinlichkeit, dass die positiv getestete Person kein HIV hat.
   1. Mona macht einen Haustest aus den USA mit einer 92% Sensitivität und einer 99,98% Spezifität.
   2. Mona macht einen zweiten aufwändigeren Test, den Western-Blot-Test mit einer 80% Sensitivität und einer 99,99% Spezifität.
   3. Marcel, 6 Jahre alt, wird mit dem ELISA-Test getestet. Nur 0,02% (2 von 10000) der Kinder sind mit HIV infiziert.
   4. Michael hat Sex mit Männern und wird mit dem ELISA-Test getestet. 6 von 100 homosexuellen Männern sind mit HIV infiziert.

b) Vergleicht eure Lösungen und diskutiert in der Gruppe:
   - Welchen der Tests würdet ihr bevorzugen?
   - Welche weiteren Tests kennt ihr und welche Wirkungen zieht jeweils ein positives Testergebnis nach sich?

Aufgabe: Auswirkungen eines Tests

Um zu diagnostizieren, ob Personen krank oder gesund sind, werden verschiedene Tests eingesetzt. Ein Test kann sowohl positiv als auch negativ ausfallen.

a) Dieses Einheitsquadrat beschreibt die Güte eines Tests. Beurteile die Güte des Tests.



b) Das unten abgebildete Baumdiagramm beschreibt die Güte eines Tests. Kreuze die wahren Aussagen an (Punktabzug bei falschem oder fehlendem Kreuz).

- ☐ Die meisten Patienten sind gesund.
- ☐ Die meisten positiv getesteten Personen sind gesund.
- ☐ Die meisten kranken Personen werden negativ getestet.
- ☐ Die meisten negativ getesteten Personen sind gesund.