Probleme durch ein systematisches explizites Training erfolgreicher lösen – quantitative Ergebnisse der Langzeitstudie HeuRekAP

DIRK BROCKMANN-BEHNSEN, HANNOVER & BENJAMIN ROTT, KÖLN

Zusammenfassung: *In diesem Artikel wird ein langfristiges Training (1,5 Jahre im regulären Unterricht) zur Steigerung der Problemlösekompetenz in einer achten (später neunten) Klasse sowie die entsprechende Begleitforschung vorgestellt; eine weitere Klasse diente als Vergleichsgruppe. Es werden sowohl die allgemeine Konzeption des Trainings als auch exemplarisch eine konkrete Trainingseinheit zum Thema Hilfslinien beschrieben. Die Ergebnisse der Begleitforschung deuten auf einen Erfolg des Trainings hin: In der trainierten Klasse zeigen sich keine (signifikant) schlechteren Leistungen bei den regulären Unterrichtsinhalten (insb. bei der Vergleichsarbeit „VERA 8"). Im Gegensatz dazu zeigt sich bei Tests mit Problemen ein signifikanter Unterschied zugunsten der trainierten Klasse.*

Abstract: *This article describes a long-term-training (1.5 years included into regular lessons) to increase the competence of problem solving in an eighth (later ninth) grade class and the accompanying research; another class served as a control group. The conception of the training will be described in general and exemplarily illustrated by a detailed presentation of the unit about auxiliary lines. The results of the accompanying research indicate a success of the training: While the trained class showed no significant differences in regular curricular tasks, they achieved significantly better results referring to tasks requiring problem solving.*

1. Einleitung

Das mathematische Problemlösen stellt als eine der prozessbezogenen Kompetenzen einen wichtigen Inhalt des Mathematikunterrichts dar (KMK, 2003). In den Winter'schen (1995) Grunderfahrungen wird explizit der Erwerb einer Problemlösefähigkeit und heuristischer Fähigkeiten thematisiert. Dass dies allerdings für viele Lernende schwierig ist, wird übereinstimmend berichtet (z. B. Schoenfeld, 1985; Hembree, 1992).

Es gibt eine Vielzahl verschiedener Ansätze, Problemlösekompetenz zu vermitteln, wobei es insbesondere um die Gestaltung von Heurismentrainings geht; eine Übersicht über eine Auswahl solcher Verfahren findet sich u. a. in Rott (2013). Die Länge solcher Heurismentrainings variiert stark zwischen ein bis zwei Trainingssitzungen (z. B. Putz-Osterloh, 1974), einigen Wochen (z. B. Schoenfeld, 1985, Kap. 6; Rott & Gawlick, 2014) und mehreren Monaten (z. B. Koichu, Berman & Moore, 2007). Obwohl sich die meisten Forscher einig sind, dass die Entwicklung der Problemlösekompetenz und des Heurismeneinsatzes nur über einen längeren Zeitraum erfolgen kann (Bruder & Collet, 2011), sind Langzeitstudien hierzu – insbesondere aus Gründen der Praktikabilität – sehr selten (beispielsweise hat Collet, 2009 eine Studie über ein Schuljahr durchgeführt, im Fokus dieser Studie standen allerdings eher die Lehrpersonen als die Lernenden).

Das Thema dieses Beitrags ist ein solches, langfristiges und systematisches Heurismentraining zur Verbesserung der Problemlösekompetenz von Schülerinnen und Schülern. Im Rahmen der HeuRekAP-Studie wurde eine achte (später neunte) Klasse eines Hannoveraner Gymnasiums über einen Zeitraum von eineinhalb Jahren in der Verwendung von Heurismen trainiert. Dieses Heurismentraining inklusive aller zugehörigen Problemlöseaktivitäten fand dabei im normalen Mathematikunterricht statt. Heuristische Hilfsmittel, Prinzipien und Strategien wurden in separaten Einheiten vermittelt, die auch thematisch vom laufenden Unterricht abgehoben wurden. Eine weitere Klasse derselben Schule diente als Vergleichsklasse ohne entsprechendes Heurismentraining. In regelmäßigen Abständen haben die Lernenden beider Klassen Tests mit mathematischen Problemen und Routineaufgaben bearbeitet.

Der Fokus dieses Artikels liegt auf der Auswertung dieser Tests, um den Trainingserfolg der Experimentalgruppe im Vergleich zur Kontrollgruppe zu evaluieren.

2. Theorieteil

2.1 Probleme und Problemlösen

Unter einem Problem verstehen wir eine Aufgabe, die von ihrem Bearbeiter nicht durch die Anwendung von Routine-Schemata gelöst werden kann, d. h. eine sogenannte Barriere verhindert eine direkte Transformation des Ausgangszustands in den Zielzustand. Der Begriff der Barriere stammt aus der psychologischen Literatur, beispielsweise von Dörner (1979). Dörner selbst unterscheidet vier Typen von Problemen bzw. von Barrieren, in Abhängigkeit von der Klarheit der Zielkriterien (gering / hoch) und dem Bekanntheitsgrad der Mittel (gering / hoch). Im Mathematikunterricht kommen fast ausschließlich sogenannte „Interpolationsprobleme“ vor: Die Zielkriterien sind meist recht klar (es geht darum, eine gesuchte Größe zu bestimmen oder eine Aussage zu begründen) und die benötigten Mittel sind in der Regel zu großen Teilen bekannt und müssen nur entsprechend kombiniert werden (für eine Synthese neuer mathematischer Methoden durch einen Großteil der Lernenden fehlt in der Schule alleine schon die Zeit) – dies gilt insbesondere für geometrische Probleme (vgl. Holland, 2007).

Aus der Definition eines Problems – des Nicht-Vorhandenseins eines Lösungsschemas für den jeweiligen Bearbeiter – folgt direkt, dass der Problemlöser in gewisser Weise kreativ sein muss: Um das Problem zu lösen, benötigt er einen Einfall bzw. eine Idee. Die Wichtigkeit einer solchen Idee im Prozess des Problemlösens wird in vielen Modellen des Problemlöseprozesses (siehe Rott, 2014, für eine Übersicht) hervorgehoben: Beispielsweise hat schon Dewey (1910 / 2002) in der dritten Phase seines fünfstufigen Modells des Problemlöseprozesses die „leitende Idee“ (guiding idea) betont, die in den nachfolgenden Phasen überprüft, ausgearbeitet und weiterentwickelt werden sollte. Einen noch größeren Stellenwert nehmen Einfälle und Ideen in den vierstufigen Modellen von Wallas (1926) und Hadamard (1945) ein, die beide auf den introspektiven Berichten von Poincaré (1914) basieren: Nach einer intensiven Einarbeitung in ein Problem und einer Phase der Inkubation gehöre ein Moment der „Illumination“ als zentrales Moment zum Prozess des Problemlösens.

Auch wenn sich die zuvor genannten Modelle auf „große mathematische Entdeckungen“ beziehen – Poincaré beschreibt beispielsweise wichtige Entdeckungen im Umfeld der Fuchs’schen Funktionen –, sind Einfälle auch für „kleine Probleme“, z. B. Aufgaben in der Schule, von Bedeutung. Beispielsweise spricht Pólya (1949, S. 133 ff.) in seinem „Kleinen Wörterbuch der Heuristik“ in diesem Zusammenhang von einer „glänzenden“ oder „guten Idee“ als „plötzlichen Fortschritt auf dem Weg zur Lösung“. In seinem Buch *Vom Lösen mathematischer Aufgaben* (1967) geht Pólya noch wesentlich ausführlicher auf die „Geburt“, „Entwicklung“ und „Durchführung der Idee“ (Kapitelüberschriften) ein.

2.2 Ideen und Heurismen beim Problemlösen

Wenn „glänzende Ideen“ für das Problemlösen so wichtig sind, ist Problemlösen dann nur etwas für begabte oder leistungsstarke Schülerinnen und Schüler? Kann man von Lernenden erwarten, im Unterricht regelmäßig „gute Ideen“ zu haben? Van der Waerden ist dieser Frage jenseits der Schulmathematik, im Zusammenhang mit großen Entdeckungen der Mathematik nachgegangen. Er begründet, dass auch in solchen Fällen eine Idee vorbereitet werden kann:

> Man könnte schließlich einwenden: ‚Ja, aber ohne Einfall nützt das alles nichts!‘
>
> Der Einwand ist berechtigt, aber mir scheint doch, dass die bewusste Überlegung den Einfall vorbereitet. Das bewusste Denken setzt die Vorstellungen in der richtigen Weise in Bewegung; es steckt ein Ziel und gibt die Richtung an. Wenn das Problem richtig angesetzt ist und man die richtigen Analogien zu bereits gelösten Problemen heranzieht, so genügt oft ein ganz kleiner Einfall. (van der Waerden, 1973, S. 6)

Mit Blick auf Schülerinnen und Schüler sowie auf Studierende hat Pólya (1949) in seiner *Schule des Denkens* vier Phasen mit heuristischen Anregungen und Fragen ausgearbeitet, die Problemlösern dabei helfen sollen, Probleme auch ohne „glückliche Ideen“ zu lösen:

> Jede dieser Phasen hat ihre Bedeutung. Es mag vorkommen, daß ein Schüler auf eine ausnehmend gescheite Idee verfällt und einfach mit der Lösung herausplatzt, indem er alle Vorbereitungen überspringt. Solche glücklichen Ideen sind natürlich sehr erwünscht, aber etwas sehr wenig Wünschenswertes und Unglückliches wird herauskommen, wenn der Schüler irgendeine der vier Phasen ausläßt, ohne eine gute Idee zu haben. [...] (Pólya, 1949, S. 19)

Vergleichbares beschreibt König auf der Basis langjähriger Unterrichtserfahrung: „fehlende Intuition oder mangelnde geistige Beweglichkeit [lasse sich] durch Einsatz heuristischer Vorgehensweisen teilweise kompensieren“ (König 1992, S. 24). Bruder und Collet formulieren diesen Sachverhalt, die Kompensation mangelnder geistiger Beweglichkeit (oder eben fehlender Ideen) durch das Erlernen und Anwenden von Heurismen, im Rahmen ihres „Wirkprinzips heuristischer Bildung“ folgendermaßen:

> Wenn es in der Mathematik geistig weniger beweglichen Lernenden gelingt, geeignete Problemlösestrategien (Heurismen) zu erlernen und flexibel anzuwenden, können von ihnen in begrenzten Themenbereichen ähnliche Lösungsergebnisse erzielt werden wie von den intuitiven Problemlösern. (Bruder & Collet, 2011, S. 36)

Unter dem Begriff *Heurismen* subsumieren wir „weichere“ mathematische Tätigkeiten, die helfen können, Problemsituationen besser zu verstehen und Fortschritte auf dem Weg zu einer Lösung zu machen (vgl. Schoenfeld, 1985, S. 22 f.; Koichu et al., 2007, S. 101; Rott, 2013, Kap. 4). Im Gegensatz zu „harten“ Verfahren – Algorithmen und Lösungsschemata, die nur auf bestimmte Aufgabentypen anwendbar sind und dort sicher zu einer Lösung führen – lassen sich Heurismen bei vielen verschiedenen Aufgabentypen einsetzen, ohne allerdings eine Lösung zu garantieren (vgl. Bruder & Collet, 2011). Beispiele für Heurismen sind das Anfertigen von Skizzen, das Betrachten von Spezial- und Extremfällen oder das Suchen nach ähnlichen, evtl. leichter zu lösenden Aufgaben.

Des Weiteren lassen sich Heurismen als kognitive Aktivitäten abgrenzen von metakognitiven und selbstregulativen Tätigkeiten zur Steuerung und Regulation von (Problemlöse-) Prozessen sowie zur Kontrolle von (Zwischen-) Ergebnissen (vgl. Schoenfeld, 1985, S. 27; Rott, 2013, Kap. 5). Letztere können ebenfalls helfen, Fortschritte auf dem Weg zu einer Problemlösung zu machen bzw. Fehlschritte zu vermeiden, es handelt sich aber um anders geartete Aktivitäten, die insbesondere anders geschult werden.

2.3 Problemlöse- und Heurismentrainings

In vielen empirischen Studien (z. B. Kilpatrick, 1967; Kantowski, 1974; Rott, 2013, Kap. 13) konnte nachgewiesen werden, dass die Verwendung von Heurismen positiv mit der Problemlöseperformanz korreliert ist (für Überblicke siehe z. B. Schoenfeld, 1992; Hembree, 1992). Außerdem konnte beispielsweise Schoenfeld (1985, Kap. 6) zeigen, dass ein Problemlösetraining erst dann erfolgversprechend ist, wenn neben dem Bearbeiten von Problemen auch zusätzliche Kenntnisse wie z. B. Fertigkeiten im Umgang mit Heurismen vermittelt werden (siehe auch Rott & Gawlick, 2014). Es gibt daher vielfache Bemühungen, Problemlöse- und Heurismentrainings zu entwickeln und zu erproben, um die Problemlösekompetenz von Lernenden zu verbessern.

Die Entwicklung solcher Trainings begann in den 1970er Jahren in Amerika, beispielsweise hat Lucas (1972) 30 Studienanfänger in Experimental- und Kontrollgruppe aufgeteilt und acht Wochen lang Probleme lösen lassen. Die Experimentalgruppe hat zusätzliche Hinweise zum Einsatz von Heurismen und zur sorgfältigen Erstellung von Lösungen erhalten. Diese Gruppe schnitt im Nachtest signifikant besser ab und zeigte mehr Bemühungen, Ergebnisse zu prüfen, als die Kontrollgruppe (auch wenn dieser Effekt nicht besonders stark war). Kantowski (1974) hat acht Neuntklässler über einen Zeitraum von insgesamt fünf Monaten heuristisch trainiert und konnte signifikante Zunahmen im Durchhaltevermögen und in der Anzahl verwendeter Heurismen feststellen. Schoenfeld (1992) fasst die Ergebnisse dieser und weiterer Bemühungen, Problemlösetrainings durchzuführen, wie folgt zusammen:

> Studies of problem solving behaviors […] did indicate that students' use of heuristic strategies was positively correlated with performance on ability tests, and on specially constructed problem solving tests; however, the effects were relatively small. (Schoenfeld, 1992, S. 352 f.)

Neuere Ansätze zu solchen Heurismentrainings stammen beispielsweise von Koichu, Berman und Moore (2007), die 37 Achtklässler über fünf Monate lang trainiert haben. Auch sie konnten eine signifikante Zunahme der Anzahl verwendeter Heurismen sowie eine Steigerung der allgemeinen mathematischen Leistung (gemessen mit dem v. a. in Amerika verbreiteten Scholastic Assessment Test – SAT) feststellen; insbesondere schwache Schülerinnen und Schüler haben von diesem Training profitiert. Collet (2009) hat Lehrerfortbildungen durchgeführt und deren Auswirkungen auf der Schülerebene untersucht. In je vier Klassen der Jahrgänge 7 und 8 wurde über ein Schuljahr entweder (1) ein spezielles Training zum Problemlösen, (2) zur Selbstregulation oder (3) zum Problemlösen und zur Selbstregulation (kombiniertes Training) bzw. (4) kein spezieller Unterricht (Kontrollgruppe) durchgeführt. Alle drei Trainingsgruppen zeigten insgesamt signifikante Steigerungen ihrer Leistungen; mit Blick ausschließlich auf Problemlöseaufgaben waren das (1) Problemlöse- und (3) kombinierte Training erfolgreicher als das (2) Selbstregulations-Training. Diese Unterschiede zwischen den Gruppen waren auch in einem Follow-Up-Test ein Jahr nach dem Training noch nachweisbar.

Von einem theoretischen Standpunkt lassen sich diese und weitere in der Literatur beschriebenen Heurismentrainings grob in zwei Arten von Trainings unterscheiden: implizites und explizites Training (vgl. Rott & Gawlick, 2014 sowie Brockmann-Behnsen, 2014a). Beim Konzept eines impliziten Trainings (IT) wird davon ausgegangen, dass die Lernenden durch die eigenständige Aktivität des Problemlösens und das Vorbild einer Lehrperson heuristische Fähigkeiten erwerben, diese Position wird u. a. von Pólya (1949, S. 18) vertreten. Im Gegensatz dazu vertreten beispielsweise Schoenfeld (1985, Kap. 6) und König (1992) die These, dass der erfolgreiche Aufbau von Problemlösekompetenz im Rahmen eines expliziten Trainings (ET) erfolgen solle, in dem beispielsweise Heurismen bewusst herausgestellt und eingeführt werden sollten. In den oben genannten Studien werden beide Trainingsarten beispielsweise von Lucas (1972) miteinander verglichen; Kantowski (1974) hat ausschließlich ein explizites Training durchgeführt.

Ausgehend von den Erfahrungen der Studie von Collet (2009) und dem „Wirkprinzip heuristischer Bildung“ haben Bruder und Collet (2011, S. 114 –

122) ein vierstufiges Phasenkonzept zum Erlernen von Heurismen im Mathematikunterricht entwickelt, das den Charakter eines expliziten Trainings besitzt: In der ersten Phase geht es bei Bruder und Collet um das „*Gewöhnen an Heurismen*". Der Lehrer leitet seine Schülerinnen und Schüler durch Vorbildwirkung zu einem „strukturierten Vorgehen bei einer Problembearbeitung" (ibid., S. 114) an. In der zweiten Phase dieses Heurismentrainings geht es um das „*Bewusstmachen heuristischer Elemente und Einsicht in deren Wirksamkeit*". Das gelingt unter anderem durch „geeignete Aufgaben, an denen durch eigenes Erleben der Wirkmechanismus von Heurismen die Lernenden von der Nützlichkeit des Erlernens von Problemlösestrategien überzeugt werden können" (ibid., S. 116 f.). Die dritte Phase bei Bruder und Collet sieht die „*zeitweilige bewusste Übung und Anwendung*" des Heurismus vor. In der vierten Phase schließlich wird die „*Kontexterweiterung und unterbewusste Nutzung von Heurismen*" angestrebt. Diese Phase beinhaltet im Sinne eines unterrichtlichen Maximalzieles die unterbewusste Übertragung erlernter Heurismen auf Probleme aus unterschiedlichen mathematischen Teilbereichen. Nach Bruder und Collet (2011, S. 121) erfordert dieses Ziel jedoch „größere Zeiträume und ist kein realistisches Ziel für alle". In einer neueren Version des Phasenkonzeptes wird als fünfte Phase das Aufschreiben und Erweitern des *eigenen Problemlösemodells* geführt (vgl. AG Bruder, o. J.).

3. Forschungsziele und -fragen

Aus den in Abschnitt 2.3 beschriebenen Studien und insbesondere dem Vergleich der Wirksamkeit von Trainings unterschiedlicher Dauer lässt sich folgern, dass ein Problemlöse- und Heurismentraining langfristig angelegt sein sollte, um messbare Erfolge zu erzielen, die über den Zeitraum des Trainings hinweg Bestand haben. Allerdings sind solche langfristigen Studien – von der Dauer her mindestens ein halbes Schuljahr – alleine schon aus organisatorischen und forschungspraktischen Gründen sehr selten. Umso wichtiger ist es, entsprechende Studien durchzuführen und auszuwerten.

Aufgrund der genannten organisatorischen Schwierigkeiten bei der Umsetzung eines langfristigen Problemlösetrainings im Mathematikunterricht stellt sich zunächst der folgende Frageblock: Inwiefern kann es gelingen, ein Heurismentraining in den normalen Unterricht zu integrieren bzw. inwiefern muss Unterricht umgestaltet werden, um ein entsprechendes Training zu ermöglichen? Fragen dieser Art werden im vorliegenden Artikel auf einer deskriptiven Ebene beantwortet: Es wird geschildert, wie das Training umgesetzt wurde und wie viel Zeit in der trainierten Klasse – im Vergleich zur Kontrollgruppe – für reguläre Unterrichtsinhalte weniger zur Verfügung stand.

Der zweite Frageblock bezieht sich auf die Wirksamkeit des vorgestellten Trainings: Welche Auswirkungen hat das Heurismentraining auf die Problemlösekompetenz der Lernenden? Welche Auswirkung hat die Durchführung des Trainings auf die Beherrschung regulärer Unterrichtsinhalte? Von dem Training wird erwartet, dass sich bei der trainierten Gruppe im Vergleich zur Kontrollgruppe eine Steigerung der Problemlöseperformanz, aber kein Leistungsabfall bei routinemäßig zu lösenden Aufgaben zeigt.

Dieser Teil der Auswertung erfolgt quantitativ auf der Basis regelmäßig eingesetzter Tests.

4. Methodenteil

4.1 Beschreibung der Studie

4.1.1 Allgemeines

Die HeuRekAP-Studie (**Heu**ristisch **rek**onstruiertes **A**rbeiten und **P**roblemlösen) wurde in vier zu Beginn der Studie achten Klassen (Alter: 14 bis 15 Jahre) eines Hannoveraner Gymnasiums durchgeführt. Es nahmen insgesamt 128 Lernende daran teil. Zwei Klassen waren schulorganisatorisch mit einem mathematisch-naturwissenschaftlichen Profil versehen, das sich insbesondere in einer Erhöhung der Mathematik-Wochenstundenzahl in den Jahrgängen 7 und 9 niederschlug; das Training dieser beiden Klassen wird im vorliegenden Artikel betrachtet. Je eine Klasse mit und eine ohne Profil wurde über den vollen Zeitraum von eineinhalb Jahren vom Erstautor unterrichtet, siehe Tab. 1.

	Mit math.-nat. Profil	Ohne math.-nat. Profil
Vom Erstautor unterrichtet	**Klasse D** (Trainingsklasse „ET") 14 Mädchen und 16 Jungen	Klasse C (Trainingsklasse „IT")
Vom Erstautor nicht unterrichtet	**Klasse A** (Vergleichsklasse „V_1") 13 Mädchen und 16 Jungen	Klasse B (Vergleichsklasse „V_2")

Tab. 1: Übersicht über die Klassen, die an der HeuRekAP-Studie teilgenommen haben. In diesem Beitrag werden Matched Samples aus den Klassen D und A untersucht, in späteren Beiträgen werden die Klassen C und B untersucht.

Der vorliegende Beitrag bezieht sich auf Matched Samples zu je 21 Schülerinnen und Schüler aus den beiden Klassen mit schulinternem mathematisch-naturwissenschaftlichen Profil, das heißt auf die vom Erstautor unterrichtete und trainierte Klasse D

(11 Schülerinnen und 10 Schüler) sowie die fremd unterrichtete Klasse A (10 Schülerinnen und 11 Schüler), die als Vergleichsklasse diente. Das Training in der Klasse D wurde als „Explizites Training“ (ET) zum Problemlösen (speziell in der Verwendung von Heurismen) und Argumentieren durchgeführt, es wird in Abschnitt 4.1.2 detailliert beschrieben.[1]

Zu Beginn der Studie, Anfang August 2011, wurden die unterrichtlichen Vornoten in Mathematik und Deutsch der letzten vier Schuljahre erhoben sowie im Rahmen von zwei Pretests die inhaltlich-mathematischen Kompetenzen und die Problemlöse- und Argumentationsfähigkeit untersucht. Das Heurismentraining dauerte bis Ende Januar 2013.

Während der Zeit des Heurismentrainings wurden allen Schülerinnen und Schülern in regelmäßigen Abständen Problemaufgaben vorgelegt, die individuell schriftlich bearbeitet wurden (In-Course-Tests: ICT). Einige Aufgaben dienten dabei als Ankeraufgaben, die identisch oder in wenig veränderter Form in mehreren Tests gestellt wurden. Auf solche Aufgaben wird in diesem Beitrag fokussiert. Sie wurden im Rahmen von Pretest 2, ICT02, und ICT04 erhoben (vgl. Tab. 3); weitere Aufgaben aus diesen und anderen Erhebungen sind Gegenstand zukünftiger Auswertung. Im achten Jahrgang wurde die landesweite Vergleichsarbeit VERA 8 (2012) durchgeführt. Außerdem erfolgte im Juni 2014 ein Follow-Up-Test (Aufgabe „K10A“, eine Variante der Aufgabe „K10“ aus der TIMS Studie, vgl. Baumert et al., 1999, S. 94). Alle für diesen Artikel relevanten Erhebungen sind im Übersichtplan (Abb. 1) eingetragen.

Die Besonderheit an der Studie war zunächst einmal der ausgesprochen lange Zeitraum von eineinhalb Jahren, in dem ein Training ununterbrochen durchgeführt werden konnte. Neben dieser Trainingskontinuität zeichnete sich die Studie aber auch durch ihre Unmittelbarkeit aus: Weil der unterrichtende Lehrer auch Mitglied des inneren Forscherstabes des Projektes war, gab es praktisch keine Verluste bei der Umsetzung des Forschungsdesigns. Aufgrund der durchgehenden Einsicht in die im Unterricht ablaufenden Prozesse bestand stets die Möglichkeit, auf aktuelle Entwicklungen während der Projektdurchführung spontan zu reagieren. Durch diese Charakteristika hebt sich die Studie von anderen deutlich ab. Collet (2009) untersucht beispielsweise den mittelbaren Einfluss von Lehrerfortbildungen auf die Leistungsentwicklung der Schülerinnen und Schüler. Man muss in diesem Fall also sicherstellen, dass die ausführenden Lehrkräfte die Intentionen des Trainings auch richtig interpretieren und entsprechend umsetzen.

Ziel der hier beschriebenen Studie war es in diesem Sinne zu untersuchen, wie sich ein Langzeittraining auf die Problemlöse- und Argumentationsleistung der Schülerinnen und Schüler auswirkt bei einer gleichzeitigen Überprüfung der Folgen bezüglich der regulär im Curriculum geforderten Leistungen.

4.1.2 Allgemeine Beschreibung des expliziten Heurismentrainings (ET)

Das im Rahmen des HeuRekAP-Projektes in der Klasse D eingesetzte explizite Training stützt sich theoriegeleitet unter anderem auf König (1992) sowie Bruder und Collet (2011). Es wird im Folgenden im Vergleich mit dem vierstufigen Phasenkonzept zum Erlernen von Heurismen von Bruder und Collet (2011) beschrieben:

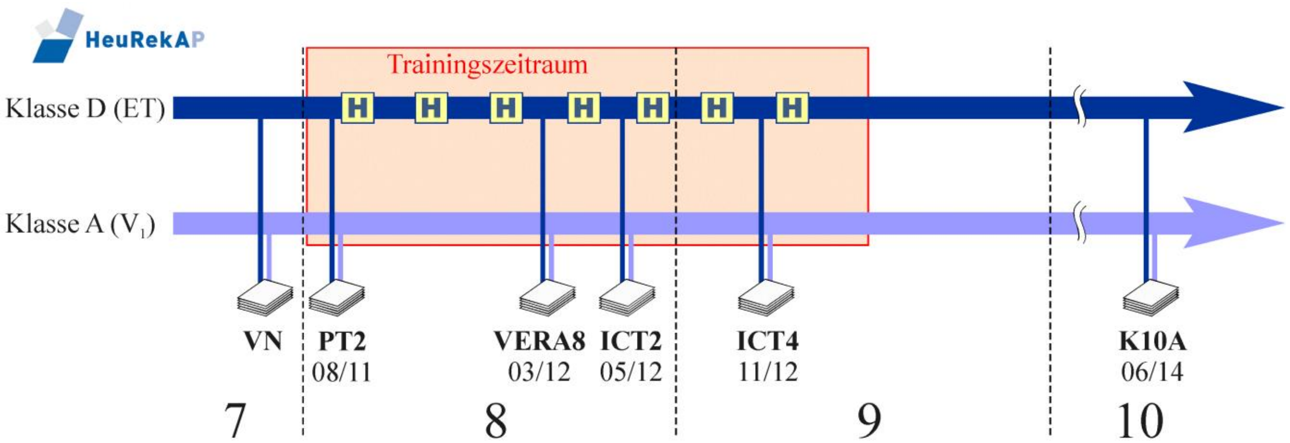

Abb. 1: Übersicht über die Studie: Legende ET: Explizites Training, PT2: Pretest 2, ICT: In Course Test (Erhebungen während des Trainingszeitraumes), K10A: Follow-Up-Erhebung.

In der ersten Phase, dem „*Gewöhnen an Heurismen*“, dient die Lehrperson als Vorbild im Umgang mit Problemen. Typische Fragen, die sich die Lernenden in dieser Phase zunächst noch unter Anleitung der Lehrperson zu Beginn der Bearbeitung eines jeden Problems stellen sollten, beziehen sich auf das Verstehen der Aufgabe und auf Sachverhalte, die im Zusammenhang mit dem Problem schon bekannt sind. Wurden bereits Heurismen eingeführt, sollen die Schülerinnen und Schüler darüber hinaus prüfen, ob diese für die Bearbeitung des vorliegenden Problems hilfreich sind. Im ET-Training wurden derartige Fragen vor Beginn einer jeden Problembearbeitung von der Lehrperson zunächst noch regelmäßig gestellt, im Laufe des Trainings dann aber immer weniger, damit sich die Lernenden die Fragen zunehmend automatisiert selbst stellen. Da sich diese Fragen nicht auf einen speziellen Heurismus oder eine spezielle Problemsituation beziehen, ist diese erste Phase als eine Art allgemeine Einleitungsphase vor jeder Problemlöse- bzw. Heurismeneinheit zu verstehen. Anhand unterschiedlicher Problemsituationen kann und soll diese Fragetechnik geübt werden. Ein typisches Beispiel für die Beantwortung der Frage: „Was wissen wir schon im Zusammenhang mit dem Problem?“ (Bruder & Collet, 2011, S. 115) findet sich in Brockmann-Behnsen (2014b, S. 27): Im Rahmen des Beweises vom Satz des Pythagoras tragen die Schülerinnen und Schüler u. a. die Eigenschaften von Dreiecken und Quadraten zusammen, notieren Flächenformeln und suchen nach flächentreuen Abbildungen.

In der zweiten Phase des Heurismentrainings, bei Bruder und Collet als „*Bewusstmachen heuristischer Elemente*“ bezeichnet, werden im ET-Training neue Heurismen eingeführt. Die explizite Vermittlung fand in separaten Heurismen-Einführungsphasen von ein bis zwei Schuldoppelstunden statt. Hier wurde König (1992, S. 24) gefolgt, der ein „explizites Abheben von methodologischen Erkenntnissen“ fordert, da „ein nur implizites Vermitteln etwa durch Vorbildwirkung“ im laufenden Unterricht nach seiner Ansicht und Erfahrung nicht ausreicht. Dieser Gebrauch des Begriffs „explizit“ dient als Grundlage für die Bezeichnung des hier beschriebenen expliziten (und entsprechend: impliziten) Trainings.

Wie sah die Planung dieser vom laufenden Unterricht separierten Phase zur Einführung neuer Heurismen im HeuRekAP-Training aus? Zunächst wurde die Unterrichtseinheit, der die separate Heurismen-Einführungsphase vorgelagert werden sollte, von der Lehrperson heuristisch rekonstruiert (vgl. Gawlick, 2013, 2014): Der Prozess der heuristischen Rekonstruktion beinhaltet u. a. die Analyse des heuristischen Potentials der Problemaufgaben sowie deren Überarbeitung mit dem Ziel, den Schülerinnen und Schülern bei der Bearbeitung der veränderten Aufgabe so häufig wie möglich eigene heuristische Entscheidungen zu ermöglichen (Gawlick, 2013, S. 43 ff.). Problemübergreifend wurde daher u. a. auch ein für die Inhalte der jeweiligen Unterrichtseinheit zentraler Heurismus gesucht. Tab. 2 gibt eine Übersicht über die Unterrichtseinheiten während des HeuRekAP-Trainings, die zugeordneten Heurismen (und Argumentationshilfen) und den zusätzlichen Zeitbedarf für die entsprechenden separaten Unterrichtseinheiten in Schulstunden zu 45 Minuten.

Unterrichtseinheit	**Heurismen**	**Schulstd.**
Winkel am Kreis	Hilfslinie (Zwei-Spalten-Beweis) Bezeichnungen	2 (4) i. U.
Terme und Gleichungen	Informative Figur („Zwei-Tore-Regel“ [a])	2 1
Quadratwurzel, reelle Zahlen	Tabellen	2
Lineare Gleichungen, Lineare Gleichungssysteme (LGS)	Gleichungen, operative Figur	2 i. U.
Sätze von Pythagoras und Pappus	Analogieprinzip I DGS-Heurismen [b] (Zugmodus, Spurpunkte, Ortslinie, dynamisches Messen)	2 2
Parabeln, quadratische Funktionen	Analogieprinzip II	2
Ähnlichkeit / zentrische Str.	Vorwärtsarbeiten / Rückwärtsarbeiten	2

[a] siehe Brockmann-Behnsen (2013)

[b] Bei der Verwendung einer dynamischen Geometriesoftware ergeben sich neue, softwarespezifische Heurismen. So kann der Zugmodus bei geeigneter Benutzung beispielsweise als digitales Pendant zum systematischen Probieren angesehen werden.

Tab. 2: Übersicht über die Unterrichtseinheiten während des Trainings („i. U.“ bedeutet, dass der betreffende Heurismus in einer kürzeren expliziten Phase innerhalb einer Doppelstunde vermittelt wurde)

Im Unterricht wurde der durch die heuristische Rekonstruktion jeweils festgelegte Heurismus dann zunächst kurz vorgestellt. Die Lernenden wurden danach aufgefordert, im Rahmen einer vorbereitenden Hausaufgabe aufzuschreiben, wo und wann sie diesen Heurismus schon verwendet haben und warum er in jener Situation hilfreich war. Spielte er im Mathematikunterricht schon einmal eine Rolle, in anderen Fächern, jetzt oder in der Vergangenheit oder im außerschulischen Kontext? Dieser außerunterrichtliche Teil in der Phase der Bewusstmachung von Heurismen soll die Schülerinnen und Schüler dazu anregen, sich auch außerhalb des Klassenraumes mit solchen Fragestellungen zu beschäftigen.

Im Unterricht wurden die Ergebnisse dieser Hausaufgabe dann gesammelt und die Nützlichkeit des Heurismus wurde mittels eines Metaplans unter folgender Frage ausgelotet: „Wie kann der Heurismus beim Lösen (math.) Probleme hilfreich sein?“

Nach dieser einleitenden Übung, die zum Teil auf der Metaebene stattfand, wurden anschließend sensu Bruder und Collet markante, stoffübergreifende Probleme vorgestellt, bei denen die Nützlichkeit des betreffenden Heurismus besonders deutlich zu Tage trat. Die Metaebene wurde nun also wieder verlassen. Inhaltlich waren diese Probleme vom engeren curricularen Kontext unabhängig, sie entstammten verschiedenen Schulbüchern, mathematischen Knobelbüchern oder Schulwettbewerben (Mathematik ohne Grenzen, Känguru etc.). Mit abnehmender Tendenz lieferte die Lehrkraft während des Trainings Impulse zur Verwendung des jeweiligen Heurismus.

Diese zweite Phase des Heurismentrainings zeichnet sich also sowohl durch eine zeitliche als auch durch eine inhaltliche Abhebung vom laufenden Unterricht aus und macht den expliziten Charakter des Trainings daher besonders deutlich. Sie umfasst die drei zuvor beschriebenen charakteristischen Aktivitäten: (1) die Sammlung von früheren Verwendungen des Heurismus im Rahmen einer vorbereitenden Hausaufgabe durch die Schülerinnen und Schüler, (2) die gemeinsame Zusammenführung der Ergebnisse im Rahmen eines Metaplans und (3) das Stellen geeigneter stoffübergreifender Problemaufgaben durch die Lehrperson. Die konkrete Umsetzung dieser Trainingsphase wird Abschnitt 4.1.3 exemplarisch dargestellt.

Die dritte Phase des expliziten Trainings entspricht der dritten Phase bei Bruder und Collet, der „*bewussten Übung und Anwendung*“ des Heurismus. In der ET-Trainingsvariante geschah dies in der auf die Heurismen-Einführungsphase folgenden Unterrichtseinheit. Dort wurde anhand von curriculumsimmanenten Inhalten die Anwendung des Heurismus trainiert. Ziel war dabei stets, die Lernenden im Laufe der Zeit zu einem immer selbstständigeren Transfer der eingeführten Heurismen auf die gestellten Probleme zu bewegen.

Die vierte Phase, die „*Kontexterweiterung und unterbewusste Nutzung von Heurismen*“, wird von Bruder und Collet (2011, S. 121) insofern relativiert, dass dieses Maximalziel nicht von allen Lernenden erreicht werden könne. Der lange Trainingszeitraum der HeuRekAP-Studie ermöglichte aber gerade eine langfristige Begleitung und Pflege der eingeführten Heurismen im unterrichtlichen Kontext. Zuvor eingeführte Heurismen wurden dabei ebenso wie die aktuell thematisierten Heurismen immer wieder hervorgehoben, wenn sie bei der Lösung eines Problems eine wichtige Rolle spielten. Daher besteht die Hoffnung, dass dies zu einer tieferen Verinnerlichung der Heurismen und einem allmählichen Aufbau eines abrufbaren Heurismenrepertoires in den Köpfen der Schülerinnen und Schüler führt.

4.1.3 Beschreibung der separaten Einführungsphase für den Heurismus „Hilfslinie“

Beispielhaft für die explizite Thematisierung von Heurismen im Verlauf des ET-Kurses wird im Folgenden auf den der Unterrichtseinheit „Winkel am Kreis“ zugeordneten Heurismus eingegangen. Die heuristische Rekonstruktion, die im Vorfeld der Planung für diese Unterrichtseinheit durchgeführt wurde, zeigte u. a. die Bedeutsamkeit des heuristischen Hilfsmittels „Hilfslinie“. Sowohl der ausgewählte Beweis vom Satz des Thales als auch jener des Umfangswinkelsatzes basieren auf geeignet gewählten Hilfslinien. Daher wurde eine separate Einführungsphase für diesen Heurismus geplant.

Die Lernenden überlegten sich im Zuge der vorbereitenden Hausaufgabe, wo sie den Heurismus „Hilfslinie“ schon verwendet haben und warum er in jenen Situationen hilfreich war. Die Ergebnisse bezogen sich vorwiegend auf Beweise von Sätzen, die in der jüngeren Vergangenheit im Unterricht eine Rolle gespielt hatten. Die Ergebnisse dieser Hausaufgabe wurden im Unterricht an der Tafel in Form eines Metaplans (siehe Abb. 2) gesichert.

Im weiteren Verlauf des Unterrichtes stellte der Lehrer den Schülern dann lehrplanübergreifende Aufgaben, die sensu Bruder und Collet die Nützlichkeit des Heurismus „Hilfslinie“ besonders deutlich zeigten. Als Beispiel für eine solche Aufgabe wurde hier die Aufgabe „Rechtecke“ aus dem mathematischen Rätselbuch *Der Wettlauf mit der Schildkröte* von Heinrich Hemme (2002, S. 40; Hemme nennt Gale, 1996, als Quelle für diese Aufgabe) gewählt (siehe Abb. 3).

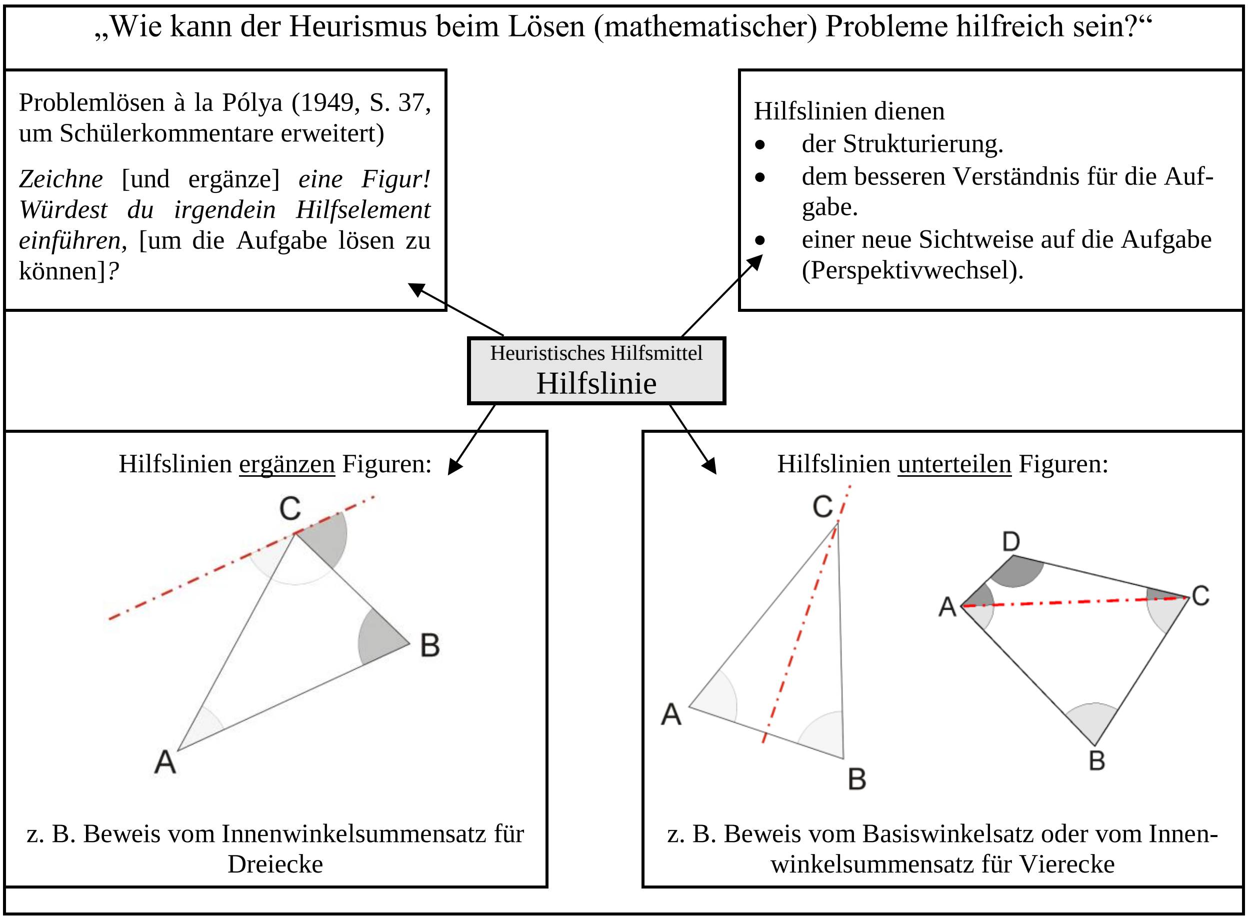

Abb. 2: Metaplan der Klasse D zum Heurismus „Hilfslinie“ (Tafelbild)

Rechtecke

Zwei deckungsgleiche Rechtecke aus Papier sind so aufeinander gelegt worden, wie es die Skizze zeigt. Eine lange Seite des grauen Rechtecks läuft dabei von einer Ecke des weißen Rechtecks quer über seine Fläche bis zur gegenüberliegenden langen Seite.

Verdeckt das graue Rechteck mehr oder weniger als die Hälfte des weißen Rechtecks?

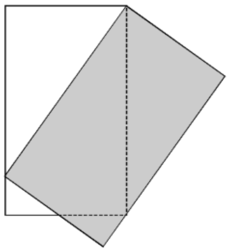

Abb. 3: Aufgabe „Rechtecke“

Nachdem die Schülerinnen und Schüler die Aufgabe eine Zeit lang selbstständig bearbeitet hatten, stellte der Lehrer einen Lösungsweg vor, bei dem die Einführung von Hilfslinien die zentrale Idee darstellt (siehe Abb. 4): Unterteilt man das weiße Rechteck mittels zweier Hilfslinien in drei Teilrechtecke, sieht man die Lösung sofort: Das graue Rechteck verdeckt zwei der Teilrechtecke je zur Hälfte (die Fläche A hat dasselbe Maß wie die Fläche A* und die Fläche B entspricht der Fläche B*). Das dritte Teilrechteck (C) wird hingegen vollständig bedeckt. Daher deckt das graue Rechteck mehr als die Hälfte des weißen Rechtecks ab.

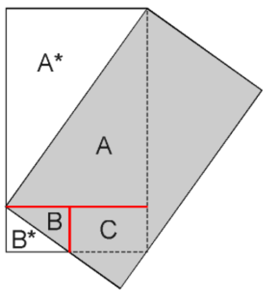

Abb. 4: Lösungsskizze zur Aufgabe „Rechtecke“

4.2 Methodisches Vorgehen

4.2.1 Probandenauswahl

Für die in diesem Artikel beschriebenen Untersuchungen wurden die beiden Klassen mit mathematisch-naturwissenschaftlichem Profil gewählt: Klasse D als Experimental- oder Trainingsklasse „ET“ sowie Klasse A als Vergleichsklasse „V_1“. Die anderen zwei oben genannten Klassen ohne dieses Profil unterschieden sich in ihrer unterrichtlichen Vorgeschichte zu sehr von den Profilklassen, so dass bei einer Zusammenfassung der Gruppen mit bzw. ohne Profil insbesondere die unterschiedliche Zahl an Mathematikstunden zur Störvariablen geworden wäre. In der vom Erstautor unterrichteten Klasse D, wurde – wie oben beschrieben – das Problemlösen in vom eigentlichen Unterricht abgehobenen Phasen explizit thematisiert, die andere Profilklasse (A) wurde von einer nicht in die Studie und deren Trainingsphilosophie eingeweihte Lehrkraft unterrichtet. Dieser Unterricht wurde im Nachhinein durch Inspektion der Klassenbücher und Befragung der Lehrkraft rekonstruiert; er wies kein spezielles Heurismen- bzw. Problemlösetraining auf. Da die beiden Profilklassen sich – gemessen an den schulischen Vorleistungen – auch untereinander unterschieden, wurden 21 Matched Samples (vgl. Bortz & Döring, 2006, S. 527) zwischen den Schülerinnen und Schülern der beiden Profilklassen gebildet, um eine bessere Vergleichbarkeit von Experimental- und Vergleichsgruppe zu gewährleisten. Dazu wurden die Schulnoten in den Fächern Mathematik und Deutsch der letzten vier Jahre herangezogen. Auch soziokulturelle Faktoren wie Migrationshintergründe wurden bei der Bildung der Paare berücksichtigt. Lernende, die den Jahrgang wiederholten, wurden nicht mit einbezogen. Der besseren Vergleichbarkeit zwischen den Gruppen, die durch die Paarbildung erreicht wird, steht als Nachteil eine leichte Verkleinerung der Gruppenumfänge gegenüber.

4.2.2 Untersuchungsmaterial

Das zu untersuchende Material besteht aus schriftlichen Bearbeitungen von mathematischen Problemaufgaben, die den Schülerinnen und Schülern über den Zeitraum der Studie in regelmäßigen Abständen gestellt wurden. Abb. 5 zeigt beispielsweise die Bearbeitung der Aufgabe „Winkel 1“ durch Proband D16 in der Erhebung „Pretest 2“. Dieses Beispiel wird im Folgenden zur Illustration des methodischen Vorgehens verwendet.

Die Aufgaben wurden aus unterschiedlichen Quellen ausgewählt: Die in den Erhebungen verwendeten Aufgaben stammten vorwiegend aus Schulbüchern und Mathematik-Wettbewerben (vgl. Tab. 3). Sie zeichnen sich durch Praxisnähe und wissenschaftliche Auswertbarkeit aus. Die Trainingsaufgaben wurden darüber hinaus mathematischen Problemsammlungen entnommen. Verschiedene Bücher von Heinrich Hemme (u. a. 2002, 2010) bildeten hier eine wichtige Grundlage.

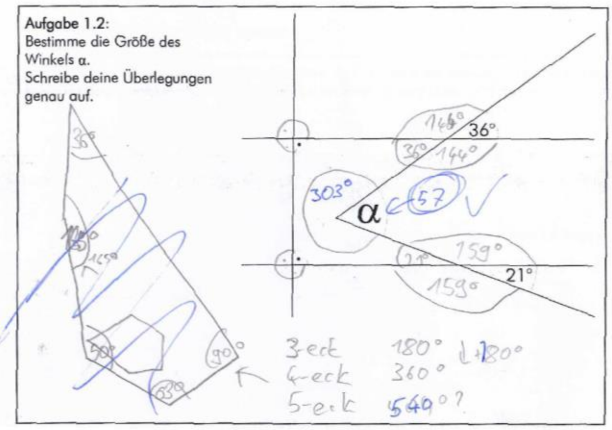

Abb. 5: Bearbeitung der Aufgabe „Winkel 1“ durch Schüler D 16

Für die in diesem Artikel dargestellten Untersuchungen wurden vier unterschiedliche Aufgaben in teilweise variierten Versionen verwendet, die zu vier Zeitpunkten erhoben wurden. In Tab. 3 wird eine Übersicht gegeben. Die Tatsache, dass Aufgaben in derselben oder leicht veränderter Form im Laufe der Untersuchung als Ankeraufgaben erneut gestellt wurden, mag die Frage aufwerfen, ob es sich dann überhaupt noch um Problemaufgaben handelt. Eigene Pilotstudien zeigten aber, dass die Probanden sich in einem typischen zeitlichen Abstand von einem halben bis ganzem Jahr in der Regel vielleicht noch an die Aufgabe, nicht aber mehr an ihre damaligen Bearbeitungen erinnerten. In praktisch keinem Fall wurde eine reine Wiederholung des Lösungsweges festgestellt. Gerade Probanden mit guten Ergebnissen verfolgten in der Wiederholung oft andere, ebenfalls gute Wege. Die untersuchten Aufgaben und deren Lösungen wurden im Unterricht nach der Erhebung auch bewusst nicht thematisiert.

Zusätzlich wurden die Bearbeitungen der Vergleichsarbeit „VERA 8“ (März 2012) herangezogen, um den Lernstand der beiden Klassen einzuschätzen.

Die Aufbereitung des zu untersuchenden Materials geschah mithilfe der Qualitativen Inhaltsanalyse (Mayring, 2010). Kategoriensysteme spielen bei qualitativen Analysen eine zentrale Rolle bezüglich der „Nachvollziehbarkeit der Analyse für andere, die Intersubjektivität des Vorgehens“ (ebd., S. 49). Daher kommt im Rahmen der (qualitativen) Inhaltsanalyse der Konstruktion sowie der Begründung des Kategoriensystems eine besondere Bedeutung zu.

Pretest 2 August 2011	**ICT02** Mai 2012	**ICT04** November 2012	**Follow-Up** Juni 2014
Winkel 1 (Lergenmüller et. al., 2006, S. 64)		Winkel 1 (ebd.)	
Raute 1 (Griesel et. al., 2006, S. 27 f.)	Raute 2 (Beuthan, 2008, S. 53)	Raute 2 (ebd.)	
		K10 (Baumert, Bos, Klieme et al., 1999, S. 94)	K10A (Eigene Entwicklung)
	K18 (spiegelbildlich) (Baumert, Bos, Klieme et al., 1999, S. 90 (geändert))	K18 (Baumert, Bos, Klieme et al., 1999, S. 90)	

Tab. 3: Übersicht über die vernetzten Probleme in den studienbegleitenden Tests und deren Quellen

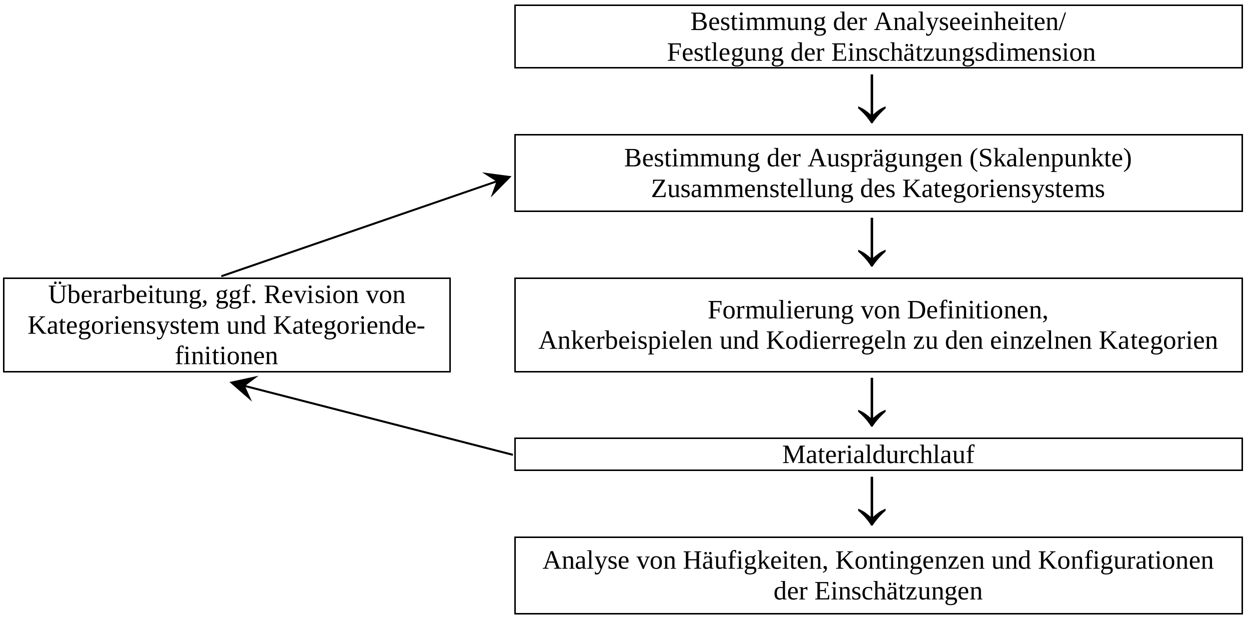

Abb. 6: Ablaufmodell skalierender Strukturierung nach Mayring (2010, S. 102), vereinfacht

Mayring entwickelt ein allgemeines Ablaufmodell der Analyse, und konkretisiert es für drei unterschiedliche Analysetechniken, die er „Grundformen des Interpretierens“ (ebd., S. 64) nennt. Für die Auswertungen in diesem Artikel wurde die Analysetechnik der *skalierenden Strukturierung* angewendet. Nach Mayring (ibid., S. 101) ist es das „Ziel skalierender Strukturierung […], das Material bzw. bestimmte Materialteile auf einer Skala (in der Regel Ordinalskala) einzuschätzen“. Dies geschieht in diesem Fall mittels der ordinalskalierten Kategorien sensu Rott (2013, S. 184 ff.), die in Abschnitt 4.2.4 erläutert werden.

Abb. 6 stellt das auf diese Analysetechnik zugeschnittene Ablaufmodell vereinfacht dar (vgl. Mayring 2010, S. 102). Bei den „Analyseeinheiten“ (ibid., S. 59) handelt es sich in dieser Studie um die einzelnen schriftlichen Problembearbeitungen der Lernenden.

4.2.3 Festlegung der Einschätzungsdimension

Die Fragestellungen, die mithilfe des hier beschriebenen Kategoriensystems untersucht werden sollen, beziehen sich auf die Problemlösekompetenz in schriftlichen Bearbeitungen mathematischer Aufgaben. Im Theorieteil dieses Beitrags wurde die zentrale Bedeutung von Ideen bei der Lösung eines Problems herausgearbeitet. Daher wurde im Vorfeld der Auswertung der Lösungsraum jeder Aufgabe analysiert und die entsprechenden Lösungswege katalogisiert. Dieser Katalog wurde im laufenden Prozess fortgeschrieben, falls eine Schülerin oder ein Schüler auf einen bislang nicht erfassten Lösungsweg kam. Für jeden Lösungsweg einer gestellten Aufgabe wurde sodann nach deren zentraler Idee gesucht. Dann wurde analysiert, aus welchen Teilideen diese zentrale Idee aufgebaut ist. Es zeigte sich, dass sich die Lösungen der in diesem Beitrag untersuchten Aufgaben immer recht gut in zwei Teilideen unterteilen ließen, deren Verknüpfung für die Lösung des Problems unabdingbar war. Die Herstellung dieser Verknüpfung scheint für viele Probanden eine Barriere auf dem jeweiligen Lösungsweg dargestellt zu haben. Als Konsequenz dieser Beobachtung ergaben sich vier Abstufungen bezüglich der Qualität einer Problemlösung, die sich grob wie folgt betiteln lassen:

1) Keine Teilidee ist ansatzweise erkennbar.
2) Details einer oder beider Teilideen werden formuliert, eine Verknüpfung fehlt aber.
3) Verknüpfungen zwischen den Teilideen werden formuliert (Überwindung der Barriere), der Lösungsweg bleibt aber unvollständig.
4) Ein vollständiger und richtiger Lösungsweg wird geliefert

4.2.4 Bestimmung der Ausprägungen (Skalenpunkte) / Zusammenstellung des Kategoriensystems

Die bei der ersten Sichtung des Materials festgestellten Abstufungen in der Qualität der Problemlösungen i) bis iv) aus dem vorherigen Abschnitt (in Tab. 4 grau eingepflegt) wurden danach in Beziehung gesetzt zu den Kategorien, die Rott (2013, S. 185 f.) im Rahmen seiner Dissertation zum Problemlösen entwickelt hat (in Tab. 4 schwarz geschrieben). Auf diese Weise ergab sich ein allgemein formuliertes Kategoriensystem, das in den nachfolgenden Untersuchungen Anwendung fand.

Dieses zunächst allgemein formulierte Kategoriensystem musste im Folgenden für jeden bekannten Lösungsweg aller zu untersuchenden Aufgabe konkretisiert werden (vgl. Rott, 2013, S. 133 – 136). Dieses Vorgehen dient der „*Exploration des Problemraums* und soll helfen, die Schwierigkeit der einzelnen Lösungswege sowie ihre Korrektheit einzuschätzen“ (ibid.). Es soll Hinweise zur Kategorisierung einer Bearbeitung in Bezug auf den jeweiligen Lösungsweg der Aufgabe liefern.

Zur Veranschaulichung dieses Verfahrens wird im Folgenden exemplarisch die Konkretisierung des Kategoriensystems für die Aufgabe „Winkel 1“ nachgezeichnet. Die Idee zu dieser Aufgabe entstammt dem niedersächsischen Schulbuch *Neue Wege 7* (Lergenmüller & Schmidt, 2006, S. 64) und wurde u. a. im Rahmen von Pretest 2 und ICT04 gestellt. Abb. 7 gibt die konkrete Aufgabenstellung bei den Erhebungen wieder.

(0)	*Kein Ansatz* – die Aufgabe wurde nicht sinnvoll bearbeitet und / oder es wurde keine Lösung abgegeben. Es finden sich keine Notationen, die auf Details einer der beiden Teilideen hinweisen. Eine Zuordnung zu einem katalogisierten Lösungsweg ist nicht möglich. Die (zentrale) Barriere wurde nicht wahrgenommen.
(1)	*Einfacher Ansatz* – das Problem wurde zu Teilen korrekt bearbeitet, dabei zeigen sich aber deutliche Mängel; wenn die Lösung Erklärungen erfordert, fehlen diese. Es finden sich Details mindestens einer Teilidee, die eine Zuordnung zu einem katalogisierten Lösungsweg ermöglichen. Die (zentrale) Barriere wurde dabei aber nicht überwunden. Als einfacher Ansatz gilt auch zielführendes systematisches Probieren bzw. Messen.
(2)	*Erweiterter Ansatz* – das Problem wurde zu großen Teilen korrekt bearbeitet; wenn die Lösung Erklärungen erfordert, sind zumindest Ansätze dazu vorhanden. Es findet sich eine Verknüpfung beider Teilideen eines katalogisierten Lösungsweges. Die (zentrale) Barriere wurde überwunden, allerdings fehlen einige Details des Lösungsweges.
(3)	*Korrekter Ansatz* – das Problem wurde korrekt gelöst; wenn die Lösung Erklärungen erfordert, sind diese angemessen gegeben. Es findet sich eine Verknüpfung beider Teilideen. Die (zentrale) Barriere wurde überwunden. Die Lösung ist vollständig und richtig.

Tab. 4: Kategorienschema zur Bewertung des Bearbeitungserfolgs bei den Problemen

Winkel 1

Bestimme die Größe des Winkels α.
Schreibe deine Überlegungen genau auf.

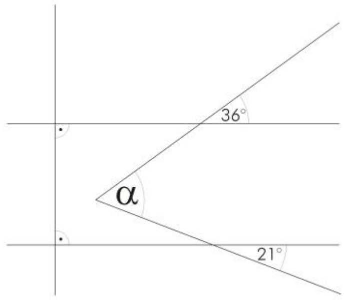

Abb. 7: Aufgabe „Winkel 1“

4.2.5 Darstellung des Lösungsraums

Der Lösungsraum für diese Aufgabe wurde von Ann-Christin Mix in ihrer Bachelorarbeit (Fränzel, Mix & Soyta 2014a) dezidiert dargestellt. Sie unterscheidet sieben inhaltlich unterschiedliche Lösungen, von denen zwei in jeweils zwei Varianten vorkommen. In der nachfolgenden Übersicht werden für zwei dieser Lösungen eine Lösungsskizze sowie die sich daraus ergebenen Teilideen stichpunktartig dargestellt.

Lösung W1-1 stellt dabei den naheliegendsten und kürzesten Lösungsweg dar, der von sehr vielen Schülerinnen und Schülern beschritten wird. Lösung W1-3a ist einer von zwei konstatierten Lösungswegen, bei denen in die Figur ein konkaves Fünfeck mit den beiden eingezeichneten rechten Winkeln eingedacht wird. Proband D16 wählt bei dem hier zur Illustration verwendeten Beispiel diesen Lösungsweg (vgl. Abb. 5).

Lösung **W1-1** (Hilfslinie-Lösung):

Lösungsskizze/ *Teilideen und zentrale Barriere*

1) Teile den gesuchten Winkel durch eine Hilfslinie parallel zu f und g in zwei Teilwinkel.
2) Übertrage die Winkelbeträge der gegebenen Winkel auf die Teilwinkel, die ja jeweils Stufenwinkel zu ihnen sind.
3) Addiere die Winkelmaße.

Die Barriere besteht hier in der Verknüpfung der beiden Teilideen:

- *a) Der gesuchte Winkel soll mit einer Hilfslinie in zwei Teilwinkel zerlegt werden; deren Beträge sollen am Ende addiert werden.*
- *b) Die Beträge der beiden Teilwinkel entsprechen den Beträgen der gegebenen Winkel, zu denen sie Stufenwinkel sind.*

Lösung **W3-1a** (Fünfeck-Lösung):

Lösungsskizze/ *Teilideen und zentrale Barriere*

1) Betrachte den Innenbereich der gegebenen Figur als Fünfeck mit zwei rechten Winkeln.
2) Bestimme den Betrag des gesuchten Winkels mithilfe seines Ergänzungswinkels, der ein Innenwinkel des Fünfecks ist.
3) Bestimme den Betrag dieses Innenwinkels mithilfe der anderen vier Innenwinkel des Fünfecks.
4) Nutze dazu u. a. die Tatsache, dass zwei Innenwinkel jeweils Scheitelwinkel der gegebenen Winkel sind; übertrage deren Maße.

Die Barriere besteht hier in der Verknüpfung der beiden Teilideen:

- *a) Der Betrag des gesuchten Winkels soll mithilfe seines Ergänzungswinkels, der Innenwinkel eines in die Figur eingedachten Fünfecks ist, bestimmt werden.*
- *b) Der Betrag dieses Innenwinkels soll mittels der vier weiteren Innenwinkel des Fünfecks, die z. T. Scheitelwinkel zu den gegebenen Winkeln sind, bestimmt werden.*

4.2.6 Hinweise und Konkretisierungen zur Bewertung der Lösungswege für die Aufgabe „Winkel 1“

Für diese beiden Problemlösungen soll nun das oben beschriebene, allgemeine Kategoriensystem exemplarisch konkretisiert werden. Zur genauen Kategorienfestlegung schlägt Mayring (2010, S. 92) dazu ein Verfahren in drei Schritten vor:

1) Definitionen der Kategorien: Es wird genau definiert, welche Textbestandteile unter eine Kategorie fallen.
2) Ankerbeispiele: Es werden konkrete Textstellen angeführt, die unter eine Kategorie fallen und als Beispiele für diese Kategorie gelten sollen.
3) Kodierregeln: Es werden dort, wo Abgrenzungsprobleme zwischen Kategorien bestehen, Regeln formuliert, um eindeutige Zuordnungen zu ermöglichen.

Dieses Verfahren wurde für jeden bekannten Lösungsweg aller untersuchten Aufgaben durchgeführt. Exemplarisch werden in Tab. 5 die Resultate für die beiden Lösungswege W1-1 und W1-3a zur Aufgabe „Winkel 1“ vorgestellt.

4.2.7 Anwendung des Kategoriensystems für die Aufgabe „Winkel 1“ auf die Bearbeitung von D16

Die Bearbeitung der Aufgabe Winkel 1 durch Schüler D16 (siehe Abb. 5) stellt einen vitalen Problemlöseprozess dar: Der Proband ergänzt die Neben- und Scheitelwinkel zu den beiden gegebenen Winkeln. Auch der Winkelbogen des Ergänzungswinkels zum Zielwinkel α wird eingezeichnet, dessen Betrag bleibt vorerst noch unbestimmt. Es kann aber vermutet werden, dass D16 an dieser Stelle bereits die Idee zur Verwendung des Fünfecks gekommen ist, denn unterhalb der Figur findet sich eine Tabelle, in deren ersten beiden Spalten die Innenwinkelsummen für Dreiecke und Vierecke aufgelistet werden. In die folgende Zeile soll die Innenwinkelsumme für Fünfecke geschrieben werden. Diese versucht der Proband zunächst unter Zuhilfenahme einer operativen Figur induktiv zu ermitteln.

<table>
<tr><th>Bew.</th><th>Lösung W1-1 (HL1)</th><th>Lösung W1-3a (Fünfeck)</th></tr>
<tr><td>Kein Ansatz</td><td>Definition:
Die Aufgabe wurde nicht sinnvoll bearbeitet und / oder es wurde keine Lösung abgegeben.

Ankerbeispiele:
Schüler D04, Pretest 2, Aufgabe Winkel 1: Es werden lediglich zwei Fragezeichen notiert.

Kodierregeln:
Schüler A20, Pretest 2, Aufgabe Winkel 1: Es werden die beiden Nebenwinkel eingetragen und notiert: „Ich weiß nicht, wie ich den Winkel bestimmen soll.“
Abgrenzung zur Kategorie Einfacher Ansatz: Schüler A03, Pretest 2, Aufgabe Winkel 1 (s.u.)</td><td>Definition:
Die Aufgabe wurde nicht sinnvoll bearbeitet und / oder es wurde keine Lösung abgegeben.</td></tr>
<tr><td>Einf. Ansatz</td><td>Definition:
Es werden a) entweder Details der Teilidee, den gesuchten Winkel mit einer Hilfslinie zu zerlegen und später deren Beträge zu addieren genannt oder b) Details der Teilidee, die beiden gegebenen Winkel auf die Teilwinkel zu übertragen.
Erklärungen fehlen.

Ankerbeispiele:
Ad a)
Nur die Hilfslinie wird gezeichnet.

Schüler D03, Pretest 2, Aufgabe Winkel 1: Die gegebenen Winkel werden als Lösung kommentarlos addiert.

Schüler D07, Pretest 2, Aufgabe Winkel 1:
Die gegebenen Winkel werden addiert, die Idee an einem selbst erdachten Beispiel überprüft. Die Idee der Hilfslinie fehlt aber.

Kodierregeln:
Schüler A30, Pretest 2, Aufgabe Winkel 1:
Es werden lediglich die Scheitel- und Nebenwinkel eingetragen, zusätzlich werden Beschreibungen geliefert (Frage nach analoger Aufgabe, Beschreibung von Hilfslinien und Gradmaßen)
Abgrenzung zur Kategorie »Kein Ansatz«: Schüler A20, Pretest 2, Aufgabe Winkel 1 (s. o.)</td><td>Definition:
Es werden a) entweder Details der Teilidee, den gesuchten Winkel als Innenwinkel eines Fünfecks zu bestimmen, genannt oder Details der Teilidee, Beträge von Innenwinkel u. a. als Scheitelwinkel zu den gegebenen Winkeln zu bestimmen.
Erklärungen fehlen.

Ankerbeispiele:
Ad a)
Schüler A10, Pretest 2, Aufgabe Winkel 1:
Es finden sich Angaben zu vier Innenwinkeln des Fünfecks, nicht aber der Ergänzungswinkel. Der Zielwinkel wird richtig angegeben. Ebenfalls findet sich die Hilfslinie für die Lösung W1-1, allerdings werden hier nicht die Teilwinkel angegeben, Erklärungen fehlen vollständig.

Schüler A13, Pretest 2, Aufgabe Winkel 1:
Innenwinkel des Fünfecks werden bestimmt, aber Hinweise auf die Übertragung auf den gesuchten Winkel und dessen Ergänzungswinkel fehlen ebenso wie Erklärungen.</td></tr>
<tr><td>Erw. Ansatz</td><td>Definition:
Es werden Details der Teilidee, den gesuchten Winkel mit einer Hilfslinie zu zerlegen und später deren Beträge zu addieren mit Details der Teilidee, die beiden gegebenen Winkel auf die Teilwinkel zu übertragen, verbunden.
Erklärungsansätze sind vorhanden.

Ankerbeispiele:
Schüler D12, Pretest 2, Aufgabe Winkel 1:
Die Hilfslinie wird eingezeichnet, die Winkelbeträge übertragen und ein (falsch addiertes) Ergebnis wird formuliert.</td><td>Definition:
Es werden Details der Teilidee, den gesuchten Winkel als Innenwinkel eines Fünfecks zu bestimmen, genannt mit Details der Teilidee, Beträge von Innenwinkel u. a. als Scheitelwinkel zu den gegebenen Winkeln zu bestimmen, verbunden.
Erklärungsansätze sind vorhanden.

Ankerbeispiele:
Schüler D02, Pretest 2, Aufgabe Winkel 1:
Die Scheitelwinkel werden eingezeichnet und ihre Beträge bestimmt. Eine Rechnung zeigt, dass an der Bestimmung der Innenwinkelsumme eines Fünfecks gearbeitet wurde, die Berechnungen bleiben aber unvollständig.</td></tr>
</table>

Korr. Ansatz	**Definition:** Es wird die Teilidee, den gesuchten Winkel mit einer Hilfslinie zu zerlegen und später deren Beträge zu addieren mit der Teilidee, die beiden gegebenen Winkel auf die Teilwinkel zu übertragen, verbunden. Angemessene Erklärungen werden gegeben.	**Definition:** Es wird die Teilidee, den gesuchten Winkel als Innenwinkel eines Fünfecks zu bestimmen, mit der Teilidee, Beträge von Innenwinkel u. a. als Scheitelwinkel zu den gegebenen Winkeln zu bestimmen, verbunden. Angemessene Erklärungen werden gegeben. **Ankerbeispiele:** Schüler D28, Pretest 2, Aufgabe Winkel 1: Die Lösung wird vollständig, ausführlich und korrekt dargestellt.

Tab. 5: Kategoriensystem zur Bewertung des Bearbeitungserfolgs für zwei ausgewählte Lösungswege der Aufgabe „Winkel 1“

Pretest 2		**Rater 2 (BR)**				
		0	**1**	**2**	**3**	**Sum**
Rater 1 (DBB)	**0**	2				**2**
	1	1	27			**28**
	2		1	7		**8**
	3			1	3	**4**
	Sum	**3**	**28**	**8**	**3**	**42**
P_{obs}=0,93		P_{exp}=0,49		Cohens κ=0,86		

ICT04		**Rater 2 (BR)**				
		0	**1**	**2**	**3**	**Sum**
Rater 1 (DBB)	**0**					**0**
	1		7			**7**
	2		1	19		**20**
	3				15	**15**
	Sum	**0**	**8**	**19**	**15**	**42**
P_{obs}=0,98		P_{exp}=0,37		Cohens κ=0,96		

Tab. 6: Bestimmung der Interraterübereinstimmung bei der Aufgabe „Winkel 1“ (angegeben sind neben dem Wert für Cohens κ auch die zur Berechnung dieses Wertes ermittelten Wahrscheinlichkeiten der beobachteten („observed“) und der erwarteten („expected“) Übereinstimmung der Rater)

Er zeichnet dazu ein allgemeines Fünfeck und misst dessen Innenwinkel. Dabei unterläuft ihm aber ein Messfehler. Dennoch schreibt er das Resultat (404°) zunächst in die Tabelle. Offenbar kommen ihm aber Zweifel ob der Richtigkeit dieses Ergebnisses, die er durch ein Fragezeichen hinter dem Messwert verschriftlicht. D16 untersucht daraufhin den Zusammenhang der Innenwinkelsummen von Dreiecken und Vierecken. Ein beschrifteter Pfeil markiert, dass sich die Summe für Vierecke im Vergleich zu der von Dreiecken um 180° erhöht. Nun stellt er abduktiv die Vermutung auf, dass sich diese Erhöhung fortsetzt und überschreibt den zunächst ermittelten Wert von 404° durch den richtigen Wert von 540°. An dieser Stelle überwindet er im Dörner‘schen Sinne eine Synthese-Barriere, da er einen für die Lösung des Problems erforderlichen Operator nicht besitzt, sondern diesen erst synthetisieren muss. Nun kann der Plan durchgeführt werden: Über das vermutete Innenwinkelgesetz gelangt der Proband mithilfe der zuvor bestimmten Beträge der Scheitelwinkel sowie der gegebenen (rechten) Winkel zum Betrag des Ergänzungswinkels und darüber schließlich zum Betrag des gesuchten Winkels. Diese Lösung ist vollständig und richtig, fehlerhafte Stellen werden im Sinne Pólyas (1949, S. 37) durch eine ständige Kontrolle der einzelnen Schritte detektiert (geschriebenes Fragezeichen) und korrigiert (mittels Durchstreichen respektive Überschreiben), hinter das Endergebnis setzt der Proband einen Haken, vielleicht hat er auch dieses z. B. durch eine Messung noch kontrolliert. Schriftliche Erklärungen sind also implizit in der Bearbeitung enthalten. Die beiden oben beschriebenen Teilideen für diese Lösung werden vom Probanden verknüpft, daher fällt diese Bearbeitung in die oberste Kategorie 3 („Korrekter Ansatz“).

4.2.8 Objektivität der Anwendung des Kategoriensystems

Die Kodierung der Produkte mithilfe des vierstufigen Kategoriensystems wurde von den beiden Autoren unabhängig voneinander durchgeführt, um die (Auswertungs-) Objektivität (in Gestalt der Interraterübereinstimmung) der Kodierung zu ermitteln (vgl. Bortz & Döring, 2006, S. 196). Als Maß hierfür wurde – im Gegensatz zur reinen Bestimmung der prozentualen Übereinstimmung – das konservative, zufallskritische Maß „Cohens Kappa“ gewählt. Zunächst zeigen wir exemplarisch an der Aufgabe

„Winkel 1“ die Bestimmung der Interraterübereinstimmung (Tab. 6). Die errechnete Übereinstimmung beträgt $\kappa = 0{,}86$ im Pretest 2 bzw. $\kappa = 0{,}96$ im ICT04, wobei Übereinstimmungen größer als 0,75 als „exzellent“ gelten (Bakeman & Gottman, 1997).

Die Interraterübereinstimmung über alle neun in diesem Artikel diskutierten Probleme beträgt $\kappa = 0{,}88$ und ist damit ebenfalls sehr gut. Zusätzlich wurden alle nicht übereinstimmenden Kodierungen *konsensuell validiert*, d. h. diskutiert, bis eine Einigung erzielt werden konnte.

5. Ergebnisse

5.1 Allgemeine Eindrücke aus dem Training

Die Inhalte und Ziele des Mathematikunterrichtes sind in den Bildungsstandards, im niedersächsischen Kerncurriculum und den daraus entwickelten Schularbeitsplänen festgelegt. Auf deren Erreichung wurde während des HeuRekAP-Projektes genau geachtet. Natürlich mussten die einzelnen Unterrichtseinheiten etwas knapper gestaltet werden, um Raum für die separaten Heurismen-Einführungsphasen zu schaffen. Da es sich bei diesen Phasen aber typischerweise lediglich um eine oder zwei Doppelstunden handelte, blieb diese Einschränkung vergleichsweise klein. Konkret wurden während der Studie 21 von ca. 170 Unterrichtstunden für separate Heurismen- und Argumentationstrainingseinheiten verwendet.

Gleichwohl darf nicht verschwiegen werden, dass die Elternschaft das Training insbesondere wegen dieses zusätzlichen Zeitbedarfs nicht nur positiv beurteilte. Vor allem zum Ende der Studie übertrug sich eine kritische Haltung einiger Eltern z. T. auch auf deren Kinder. Daher fand eine regelmäßige Kommunikation zwischen dem Lehrer und dem Elternvertreter statt. Zwischenergebnisse der Studie, speziell auch positive Lernentwicklungstendenzen der Schülerinnen und Schüler wurden auf Elternabenden vom Lehrer vorgestellt. Zur Absicherung der inhaltlichen Standards legte der Lehrer dem Schulleiter und der Mathematik-Fachgruppenleiterin regelmäßig die Klassenarbeiten vor.

5.2 Auswirkungen des Trainings auf reguläre Unterrichtsinhalte

Zu verschiedenen Zeitpunkten während der Studie haben die Schülerinnen und Schüler beider Klassen Aufgaben bearbeitet, die nicht auf das Problemlösen, sondern auf reguläre Inhalte des Mathematikunterrichts abzielten. Damit sollte untersucht werden, ob sich das Problemlösetraining negativ auf Routine-Leistungen der Experimentalgruppe auswirkt, da für ein Einüben von Routine-Fähigkeiten weniger Zeit zur Verfügung stand.

Hier ist insbesondere die Vergleichsarbeit „VERA 8“ zu nennen, an der Anfang März 2012 – etwas mehr als ein halbes Jahr nach Beginn der Studie – alle achten Klassen der Schule teilgenommen haben. Der Test enthielt 18 Items, insgesamt konnten von den Lernenden 34 Punkte erreicht werden. Das Abschneiden beider Klassen ist in Tab. 7 zusammengefasst, der Vergleich der Gruppenmittelwerte erfolgt mit einem *t*-Test.

Das Ergebnis dieser Vergleichsarbeit durfte nicht zur Bestimmung der Schulnote herangezogen werden. Dies mag ein Grund dafür gewesen sein, dass zwei Schüler des Matched Samples der Klasse D nur wenige Aufgaben der VERA 8-Erhebung überhaupt bearbeitet haben. Die in Abschnitt 5.1 beschriebene kritische Haltung dieser Schülerinnen und Schüler mag ein weiterer Grund dafür sein. Schließt man diese beiden Ergebnisse aus dem Vergleich aus („Klasse D (ET) [ohne Ausreißer]“), zeigen beide Klassen absolut vergleichbare Leistungen ($t = 0.35$; $df = 37$; $p_{2\text{-seitig}} = 0.78$). Aber selbst wenn man diese beiden Ergebnisse nicht herausnimmt („Klasse D (ET) [alle Probanden]“), zeigen sich in den Ergebnissen keine signifikanten Unterschiede ($t = 1.07$; $df = 39$; $p_{2\text{-seitig}} = 0.29$) (vgl. Tab. 7). Damit kann die Annahme bestätigt werden, dass die Problemlösestunden in Klasse D nicht zu Lasten regulärer Unterrichtsinhalte gingen.

Klasse	Anzahl	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
Klasse D (ET) [alle Probanden]	20	20,65	4,37	9	25
Klasse D (ET) [ohne Ausreißer]	18	21,83	2,53	18	25
Klasse A (V1)	21	22,19	4,82	15	30

Tab. 7: Ergebnisse der Vergleichsarbeit „VERA 8“

5.3 Auswirkungen des Trainings auf die Problemlöse-Performanz

Um den Erfolg des Problemlösetrainings zu evaluieren, wurden die Bearbeitungen spezieller Probleme der ausgewählten Schülerinnen und Schüler der Experimental- und der Kontrollgruppe zu den verschiedenen Zeitpunkten miteinander verglichen.

Die Testergebnisse liegen in der Form ordinalskalierter Daten der Bewertung in Kategorien des Bearbeitungserfolgs (vgl. Abschnitt 4.2.4) vor. Die Mittelwerte und Streuungsmaße (Median und Interquartilsabstand als non-parametrische Entsprechung des arithmetischen Mittels und der Standardabweichung) als Maß für den Problemlöseerfolg der Lernenden bei den einzelnen Testaufgaben sind in Tab. 8 zusammengestellt. Die zugehörige statistische Auswertung erfolgt dabei entsprechend mithilfe non-parametrischer Tests (als Entsprechung abhängiger und unabhängiger t-Tests). Für eine Übersicht über die Testzeitpunkte, Testaufgaben und die angewendeten statistischen Verfahren siehe Abb. 8.[2]

Der Vergleich zwischen den beiden Gruppen (*Intergruppenvergleich*, in Abb. 8 die vertikale Pfeilrichtung) zu Beginn (Pretest 2) und zum Ende der Studie (ICT04) wurde mit dem Mann-Whitney-U-Test für unabhängige Stichproben durchgeführt:

- Vor dem Training (Pretest 2) zeigen beide Klassen vergleichbare Leistungen in den Aufgaben „Raute“ ($U_A = 201{,}5$; $z = 0{,}47$; $p_{2\text{-seitig}} = 0{,}634$) und „Winkel“ ($U_A = 221{,}5$; $z = -0{,}01$; $p_{2\text{-seitig}} = 0{,}992$).
- Zum Ende des Trainings (ICT04) schneidet die Experimentalgruppe sowohl bei der Aufgabe „Raute“ ($U_A = 298{,}5$; $z = -1{,}95$; $p_{1\text{-seitig}} = 0{,}026$), als auch bei der Aufgabe „Winkel“ ($U_A = 351$; $z = -3{,}27$; $p_{1\text{-seitig}} = 0{,}0006$) signifikant besser ab. Bei der Aufgabe „K18“ ($U_A = 260{,}5$; $z = -0{,}99$; $p_{1\text{-seitig}} = 0{,}161$) deutet sich ein entsprechender Vorteil für die Experimentalgruppe an, er ist allerdings nicht signifikant.
- Zum Zeitpunkt des Follow-Up-Tests schneidet die Experimentalgruppe bei der Aufgabe „K10A“ ($U_A = 248$; $z = -2{,}73$; $p_{1\text{-seitig}} = 0{,}003$) signifikant besser ab.

Diese Auswertung bestätigt die Erwartungen an das Training: Zu Beginn der Studie lassen sich in Bezug auf den Erfolg beim Problemlösen keine signifikanten Unterschiede zwischen den Matched Samples beider Gruppen feststellen. Nach dem Problemlösetraining zeigt sich ein signifikanter Vorteil für die Lernenden der Experimentalgruppe. Die Zunahme der Problemlöseleistung der Experimentalgruppe wird zusätzlich durch die Ergebnisse eines Tests in der Mitte der Trainingszeit (ICT02) gestützt. Dieser Unterschied bleibt auch eineinhalb Jahre nach dem Ende des Trainings (Follow-Up-Test) bestehen.

	Pretest 2 (August 2011)		ICT02 (Mai 2012)		ICT04 (November 2012)			Follow-Up (Juni 2014)
	Raute	Winkel	Raute	K18	Raute	Winkel	K18	K10
ET (Klasse D)	1 (0)	1 (1)	1 (1)	2 (1)	2 (1)	3 (1)	2 (2)	2 (2)
V_1 (Klasse A)	1 (0)	1 (0)	1 (0)	1 (1)	1 (0)	2 (1)	2 (1)	1 (1)

Tab, 8: Median und die Spannweite der Kategorien des Bearbeitungserfolgs der Experimentalgruppe (Klasse D) und der Kontrollgruppe (Klasse A) – sortiert nach Testzeitpunkten

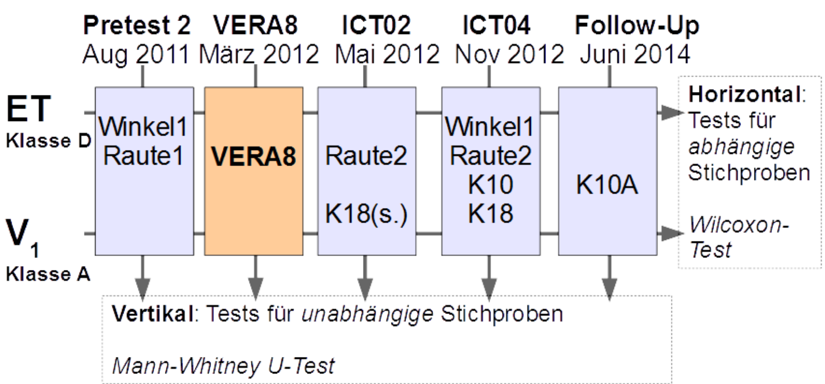

Abb. 8: Übersicht über die Testzeitpunkte, -aufgaben und -verfahren. VERA8 (oranger Hintergrund): metrische Werte, parametrische Ausgewertung. Alle übrigen Aufgaben (blauer Hintergrund): Probleme, die mithilfe des in Abschnitt 4.2.4 beschriebenen Kategoriensystems (ordinal) bewertet und non-parametrisch ausgewertet werden.

Die Größe dieser Unterschiede (als Ersatz für eine parametrisch berechnete Effektstärke) lässt sich wie folgt abschätzen: Bei den Problemen „Winkel“ und „Raute“ im Nachtest sowie bei der Aufgabe „K10“ im Follow-Up-Test (und der Aufgabe „K18“ im ICT02) schneiden die Schülerinnen und Schüler der Experimentalgruppe im Mittel eine Antwortkategorie besser ab. Auf der – recht groben – vierstufigen Skala, die das Spektrum von „kein Ansatz“ bis zu einer korrekten und vollständig begründeten Antwort („korrekter Ansatz“) umfasst, handelt es sich hierbei um einen inhaltlich gut interpretierbaren Zuwachs.

Zur Überprüfung dieser Ergebnisse wurden zusätzlich Vergleiche innerhalb der beiden Gruppen mit identischen Aufgaben zu verschiedenen Zeitpunkten (*Intragruppenvergleich,* in Abb. 8 die horizontale Pfeilrichtung) durchgeführt. Zur Untersuchung möglicher Unterschiede in der Problemlöseleistung zwischen Pre- und Posttest wurde der Wilcoxon-Test für abhängige Stichproben durchgeführt.

- Die Experimentalgruppe zeigt eine signifikante Steigerung des Problemlöseerfolgs (gemessen in ordinalen Kategorien) sowohl bei der Aufgabe „Raute“ ($W = –69$; $z = –2{,}39$; $p_{1\text{-seitig}} = 0{,}017$) als auch bei „Winkel“ ($W = –190$; $z = –3{,}81$; $p_{1\text{-seitig}} = 0{,}0001$).
- Bei der Vergleichsklasse zeigt sich bei der Aufgabe „Raute“ ($W = 3$; $z = $ ---; $p_{1\text{-seitig}} = $ ---) kein signifikanter Unterschied in der Problemlöseleistung. Bei der Aufgabe „Winkel“ ($W = –48$; $z = –1{,}66$; $p_{1\text{-seitig}} = 0{,}049$) lässt sich eine Steigerung der Problemlöseleistung nachweisen.

Dieses Ergebnis stützt die Ergebnisse des Intergruppenvergleichs: Die Schüler der Experimentalgruppe mit Heurismentraining zeigen eine deutliche Steigerung ihrer Problemlöseleistung zwischen den vergleichbaren Aufgaben der Tests zu Beginn und zum Ende der Studie. Die Lernenden der Vergleichsklasse zeigen – im Vergleich zur Experimentalgruppe – einen geringeren Zuwachs ihrer Problemlöseleistung; der entsprechende Unterschied ist nur bei einer der beiden Aufgaben (knapp) signifikant.

6. Zusammenfassung und Diskussion

6.1 Zusammenfassung

In diesem Artikel wurde eine langfristige Studie (1,5 Jahre im regulären Unterricht) zur Steigerung der Problemlösekompetenz in zwei achten (später neunten) Klassen beschrieben. Dabei wurde sowohl die allgemeine Konzeption des Trainings beschrieben als auch exemplarisch eine Trainingseinheit (Hilfslinien) konkreter ausgeführt. Für dieses Training wurden 21 von ca. 170 Schulstunden (à 45 Minuten) verwendet (ca. 12% der Unterrichtszeit).

Zusätzlich wurde im vorliegenden Artikel beschrieben, mit welchen Verfahren (Vergleichsklasse, Matched Samples) und Testaufgaben (Routineaufgaben und Probleme) der Versuch unternommen wurde, die Studie und ihre Auswirkungen zu evaluieren.

Die Ergebnisse der Begleitforschung deuten auf einen Erfolg des Trainings hin: Trotz der Tatsache, dass in der Experimentalgruppe ca. 12% der Unterrichtszeit für das Problemlösetraining verwendet wurde und daher nicht für reguläre Unterrichtsinhalte zur Verfügung stand, zeigen sich in dieser Klasse keine (signifikant) schlechtere Leistungen bei den regulären Unterrichtsinhalten (insbesondere bei der Vergleichsarbeit „VERA 8“). Im Gegensatz dazu zeigt sich bei Tests mit Problemen ein signifikanter Unterschied zugunsten der trainierten Klasse.

6.2 Diskussion

Die Schwierigkeiten, die sich bei der Umsetzung dieser langfristigen und komplexen Studie ergaben, wurden bereits skizziert. Es ist ein bislang ungelöstes Problem, inwiefern prozessbezogene Inhalte wie das Problemlösen in den stoffbezogen strukturierten Unterrichtskanon bestmöglich integriert werden können. In der LEMAMOP-Studie (Bruder et al., 2015) werden beispielsweise jeweils vier Schulstunden (eine Woche) im Block für die explizite Thematisierung des Argumentierens, Problemlösens und Modellierens verwendet. In der vorliegenden Studie wurde die Behandlung des Problemlösens (und des Argumentierens) auf einen längeren Zeitraum im Schuljahr gestreckt.

Nach unserer Erfahrung wird das unterrichtliche Engagement von Lehrpersonen bei ungewöhnlichen Methoden insbesondere bei der Elternschaft eher als kritisch denn als förderungswürdig betrachtet; von ähnlichen Erfahrungen berichten auch Bruder et al. (2015, S. 35). In der hier vorgestellten Studie ergab sich insbesondere zum Ende der Trainingszeit hin eine hohe Notwendigkeit der Rechtfertigung und Erklärung. Die zentrale Sorge der Eltern galt der Frage, inwieweit die zusätzlichen Heurismeneinheiten den normalen Schulstoff zeitlich einschränkten und welche Auswirkungen dies auf die Lernentwicklung der Kinder hat. Die Ergebnisse dieser Studie zeigen, dass diese Sorge unberechtigt war; zum damaligen Zeitpunkt indes konnten bezüglich dieses Befundes nur hoffnungsvolle Mutmaßungen angestellt werden. Auf der anderen Seite drückten einige Eltern, vorwiegend von Schülerinnen und Schülern des oberen Mittelfeldes und der Leistungsspitze, aber auch expressis verbis ihre Unterstützung für die expliziten Heurismeneinheiten aus und zeigten sich sehr interessiert nicht nur am messbaren Lernfortschritt ihrer Kinder, sondern auch an der Methode an sich. Nach Bruder und Collet (2011) sind es interessanterweise ja gerade die Schüler dieser Bereiche des Leistungsspektrums, die von erlernten Heurismen besonders stark profitieren können.

6.3 Grenzen der Studie

Auch wenn bei der Konzeption und Durchführung der Studie darauf geachtet wurde, möglichst objektive Trainingsbedingungen zu erzeugen, kann Unterricht nicht auf einzelne Variablen reduziert und entsprechend ausgewertet werden. Da die beiden Klassen von verschiedenen Lehrern unterrichtet wurden, könnten die Unterschiede nicht nur auf das Training, sondern auch auf die unterschiedlichen Lehrstile zurückgeführt werden. Dagegen spricht allerdings, dass die beiden Lehrer diese Lerngruppen auch in Jahrgang 7 unterrichtet haben und die ausgewählten Schülerinnen und Schüler (die Matched Samples) zu Beginn der Studie im Pretest vergleichbare Leistungen gezeigt haben. Anders als in Laborstudien konnte in der vorliegenden Studie die Variable „Problemlösetraining“ nicht komplett isoliert werden. Denn natürlich wurde auch in der Vergleichsklasse das Thema „mathematisches Problemlösen“ den Lehrplanvorgaben entsprechend behandelt – allerdings nicht in dem Umfang und dem Grad an Explizierung wie in der Experimentalgruppe.

Ein zentrales Element der HeuRekAP-Studie war die Personalunion von lehrender und forschender Person. Der Erstautor gehörte nicht nur zum inneren Stab der universitären Forschergruppe, sondern unterrichtete die Experimentalgruppe auch durchgängig über den kompletten Forschungszeitraum. Dies eröffnet natürlich die Möglichkeit zu vielfältiger Kritik. Ein besonders engagiertes Auftreten des Lehrers und eine besonders akribische Planung der Stunden könnten als Kovariaten in die Daten eingehen. Eine besonders akribische Planung gab es tatsächlich, allerdings bezog diese sich im Wesentlichen auf die expliziten Einheiten und deren Anknüpfung an die Inhalte der anschließenden Unterrichtseinheiten, also an die zentralen Komponenten des Heurismentrainings, dessen Wirkung untersucht werden sollte. Auf der anderen Seite bietet diese Personalunion aber den enormen Vorteil, dass die Intention und Philosophie des Heurismentrainings unmittelbar und in einer ansonsten unerreichbaren Kontinuität und Dauer realisiert werden können. Bei anderen Studien muss erst eine Lehrkraft instruiert werden und das fremdgeplante Training umsetzen. Interventionsphasen können dort, bedingt durch den Unterrichtalltag, in der Regel nicht länger als ein oder zwei Wochen dauern.

Kritisierbar ist sicherlich der geringe Umfang der hier vorgestellten Studie: Mit nur einer Experimental- und einer Kontrollgruppe lassen sich kaum verallgemeinerbare Aussagen über Lernprozesse von Schülerinnen und Schülern treffen. Es war aber auch gar nicht das Ziel der Studie, einen vergleichbaren Umfang wie beispielsweise die Studie von Collet (2009) zu erreichen. Stattdessen sollte am konkreten Beispiel erprobt bzw. gezeigt werden, wie bzw. dass ein kontinuierliches Heurismentraining in den Mathematikunterricht integriert werden kann, ohne dass die Vermittlung anderer Unterrichtsinhalte darunter leiden muss. Die quantitativen Daten, die letztere Aussage stützen, beziehen sich zwar nur auf je 21 Schülerinnen und Schüler der Experimental- und der Kontrollgruppe, durch das aufwändige Studiendesign (Erstellung von Matched Samples, Pre-Posttest-Design mit Zwischentests und Follow-Up, vgl. Bortz & Döring, 2006) sind diese Daten aber durchaus aussagekräftig.

Im Gegensatz zur Problemlöseleistung der Lernenden, die in mehreren Tests (ICT01 – ICT04) verteilt über das Schuljahr erhoben wurde, wurden die Routineleistungen der Schülerinnen und Schüler beider Klassen nicht durchgehend erhoben – beispielsweise mithilfe parallelisierter Klassenarbeiten. Es handelt es sich hierbei aber nicht primär um einen Fehler im Studiendesign; dass nicht weitere Daten erhoben werden konnten, ist vor allem den Gegebenheiten des Schulalltags und dessen Bedingungen geschuldet. Aus diesem Grund wurden die VERA 8-Ergebnisse in die Auswertung der Studie mit aufgenommen, um in diesem Bereich bessere Aussagen über die Schülerleistungen treffen zu können.

6.4 Ausblick

In diesem Beitrag beschränken sich die Auswertungen bezüglich der Items auf die zwischen den Tests parallelisierten Geometrie-Probleme und bezüglich der Probanden auf die Matched Samples der mathematisch-naturwissenschaftlichen Profilklassen.

Die Auswertung weiterer, vor allem nicht-geometrischer Probleme auch aus den Erhebungen ICT01, ICT03 u. a. wird zeigen, ob sich der Erfolg des Trainings auch auf andere mathematische Gebiete auswirkt. Erste Sichtungen des Materials deuten derzeit auf entsprechende Unterschiede zwischen den beiden Klassen gegen Ende der Studie hin.

Vergleichbare Untersuchungen zwischen Matched Samples aus der nicht mathematisch profilierten Klasse C, die ein implizites Training (IT) erhalten hat, mit der ebenfalls nicht mathematisch profilierten Klasse B ohne Training werden Rückschlüsse über Erfolg und Nichterfolg dieser Trainingsvariante gestatten.

Des Weiteren soll die hier vorgestellte, quantitative Analyse der Studie, um weitere quantitative sowie um qualitative Analysen ergänzt werden: Die von den Lernenden verwendeten Heurismen können gezählt und kategorisiert werden, um die Ergebnisse des Heurismentrainings noch deutlicher zu erfassen. Aus den Produkten der Lernenden sowie aus Videos, die im Rahmen der Erhebung angefertigt wurden, lassen sich noch deutlich mehr Informationen gewinnen, als Kategorien zur Messung des Erfolgs beim Problemlösen.

Anmerkungen

[1] Die ebenfalls vom Erstautor trainierte, aber hier nicht untersuchte Klasse C wurde mit einem „Impliziten Training“ (IT) unterrichtet. Dieses Training wird in diesem Beitrag nicht erläutert, eine vergleichende Beschreibung der beiden Trainingstypen findet sich bei Brockmann-Behnsen (2014a, S. 19 – 23) sowie Rott und Gawlick (2014).

[2] Aufgrund der Komplexität von Problemen wurde ein gestuftes Kategoriensystem zur Bewertung des Problemlöseerfolgs gewählt, entsprechend liegen nur ordinale Daten vor (s. Kap. 4; vgl. Rott, 2013). Dies führt dazu, dass zur Auswertung keine parametrischen Verfahren genutzt werden können. Das Studiendesign legt nahe, die Ergebnisse des Pretests auf Varianz zu kontrollieren und die zeitliche Entwicklung beider Gruppen mit einer mixed-design ANOVA auszuwerten, was beides leider nicht möglich ist. Die Vergleichbarkeit der Gruppen wird durch die Erstellung der Matched Samples sichergestellt (was deutlich mehr und einen längeren Zeitraum betreffende Daten einbezieht als ein Pretest). Eine non-parametrische Alternative zu einer mehrfaktoriellen oder mixed-design ANOVA kann es leider nicht geben: Entsprechende Verfahren konvertieren Werte zu Rängen, die nur relativ zueinander verglichen werden können – es sind keine Aussagen darüber möglich, was für ein Leistungszuwachs eventuell erzielt wurde.

Danksagung

Wir möchten dem Herausgeber, Herrn Prof. Andreas Eichler dafür danken, uns Gelegenheit gegeben zu haben, unsere Forschung in dieser Publikation veröffentlichen zu dürfen, ebenso den Reviewern für ihre sachkundigen und konstruktiven Kritiken. Ein weiterer Dank gilt unserem gemeinsamen akademischen Mentor, Herrn Prof. Thomas Gawlick, für seine kenntnisreichen Hinweise.

Literatur

AG Bruder – Arbeitsgruppe Fachdidaktik der Mathematik der TU Darmstadt (o. J.). *Phasen eines Unterrichtskonzepts zum Fördern mathematischer Problemlösekompetenz in Verbindung mit Selbstregulation*. http://www.problemloesenlernen.dvlp.de/unterrichtskonzept-phasen.html

Bakeman, R. & Gottman, J. M. (1997). *Observing interaction: An introduction to sequential analysis*. New York: Cambridge University Press. 2. Auflage.

Baumert, J.; Bos, W.; Klieme, E. et al. (Hrsg., 1999). Testaufgaben zu TIMSS/III. Mathematisch-naturwissenschaftliche Grundbildung und voruniversitäre Mathematik und Physik der Abschlußklassen der Sekundarstufe II (Population 3). In Max-Planck-Institut für Bildungsforschung (Hrsg.), *Materialien aus der Bildungsforschung*, Bd. 62. Berlin.

Beuthan, S. (2008). *VERA 8. Sicher in die Vergleichsarbeit. Mathematik 8. Gymnasium*, 3. Auflage, Stuttgart: Klett Verlag.

Bortz, J. & Döring, N. (2006). *Forschungsmethoden und Evaluation für Human- und Sozialwissenschaftler*, 4., überarb. Auflage. Heidelberg: Springer Medizin Verlag.

Brockmann-Behnsen, D. (2013). Zwei-Tore-Regel und Zwei-Spalten-Beweis. In G. Greefrath, F. Käpnick, & M. Stein (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013* (S. 204 – 207). Münster: WTM-Verlag.

Brockmann-Behnsen, D. (2014a). Explizites und implizites Heurismentraining im Unterricht. *MU – Der Mathematikunterricht 60*(5), 19 – 23.

Brockmann-Behnsen, D. (2014b). Heurismen- und Beweistraining in der Unterrichtseinheit „Satz des Pythagoras“. *MU. Der Mathematikunterricht 60(5)*, 24 – 33.

Bruder, R. & Collet, C. (2011). *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht*. Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

Bruder, R.; Meyer, D. & Bergmann, L. (2015). Ein Kompetenzentwicklungsmodell zur langfristigen Förderung mathematischer Problemlösekompetenz im Projekt LEMAMP. In A. Kuzle & B. Rott (Hrsg.), *Problemlösen – gestalten und beforschen. Herbsttagung des GDM Arbeitskreises Problemlösen 2014* (S. 33 – 58). Münster: WTM-Verlag.

Collet, C. (2009). *Förderung von Problemlösekompetenzen in Verbindung mit Selbstregulation – Wirkungsanalysen von Lehrerfortbildungen*. Münster: Waxmann.

Dewey, J. (2002). *Wie wir denken. Zürich*: Verlag Pestalozzianum. Unveränderter Nachdruck (How We Think, 1910).

Dörner, D. (1979). *Problemlösen als Informationsverarbeitung*. Stuttgart: Kohlhammer. 2., überarb. Auflage.

Fränzel, R.; Mix, A.-C. & Soyta, W. (2014a): *Strukturelle Analyse von Problemlöseerfolg und Heurismeneinsatz in Schülerbearbeitungen der Aufgaben K18, Raute und Winkel*, unveröffentlichte Bachelorarbeit am IDMP-AG Mathematik der Leibniz-Universität-Hannover.

Fränzel, R.; Mix, A.-C. & Soyta, W. (2014b): *Kodierhandbuch zu K18, Raute und Winkel*, interne Handreichung der IDMP-AG Mathematik der Leibniz-Universität-Hannover.

Gale, D. (1996). *The Mathematical Intelligencer* 18(3), S. 24. Springer, New York.

Gawlick, T. (2013). “Click, Drag, Think!” Posing and Exploring Conjectures with Dynamic Geometry Software. In S. Habre (Ed.), *Enhancing Mathematics Understanding through Visualization: The Role of Dynamical Software* (S. 37 – 69). IGI Global.

Gawlick, T. (2014). Die Idee der Heuristischen Rekonstruktion. *MU. Der Mathematikunterricht 60(5)*, 4 – 13.

Griesel, H., Postel, H., & Suhr, Fr. (Hrsg., 2006). *Elemente der Mathematik 7. Niedersachsen*, Braunschweig, Bildungshaus Schulbuchverlage.

Hadamard, J. (1945). *The psychology of invention in the mathematical field*. Princeton University Press. Unveränderter Nachdruck von 1954.

Hembree, R. (1992). Experiments and Relational Studies in Problem Solving: a Meta-Analysis. *Journal for Research in Mathematics Education,* 23(3), 242–273.

Hemme, H. (2002). *Der Wettlauf mit der Schildkröte. 100 mathematische Rätsel mit ausführlichen Lösungen*. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen.

Hemme, H. (2010). *Die Palasträtsel. Denksportaufgaben aus dem Reich Karls des Großen*. Köln: Anaconda Verlag.

Holland, G. (2007). *Geometrie in der Sekundarstufe. Entdecken – Konstruieren – Deduzieren*. Hildesheim: Franzbecker, 3. Auflage.

Kantowski, E. L. (1974). *Processes involved in Mathematical Problem Solving*. Unpublished doctoral dissertation, University of Georgia. (University Microfilms).

Kilpatrick, J. (1967). *Analyzing the solutions of word problems in mathematics: An exploratory study*. Unpublished doctoral dissertation, Stanford University. Dissertation Abstracts International, 1968, 28, 4380-A. (University Microfilms, 68-5, 442).

KMK (2003) – Beschlüsse der Kultusministerkonferenz (Hrsg.). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*. http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2003/2003_12_04-Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA.pdf

Koichu, B.; Berman, A. & Moore, M. (2007). Heuristic literacy development and its relation to mathematical achievements of middle school students. *Instructional Science, 35*, 99 – 139.

König, H. (1992). Einige für den Mathematikunterricht bedeutsame heuristische Vorgehensweisen. *Der Mathematikunterricht*, 38 (3), 24 – 38.

Lergenmüller, A. & Schmidt, G. (Hrsg., 2006). *Elemente der Mathematik 7. Niedersachsen*, Braunschweig. Bildungshaus Schulbuchverlage.

Lucas, J. F. (1972). *An exploratory study of the diagnostic teaching of heuristic problem-solving strategies in calculus*. Unpublished doctoral dissertation, University of Wisconsin. Dissertation Abstracts International, 1972, 6825-A. (University Microfilms, 72-15, 368).

Mayring, P. (2010). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Technik*. 11., aktualisierte und überarb. Auflage. Weinheim und Basel: Beltz.

Poincaré, H. (1914). *Wissenschaft und Methode*. Berlin: Teubner.

Pólya, G. (1949). *Schule des Denkens*. Bern: Francke.

Pólya, G. (1967). *Vom Lösen mathematischer Aufgaben – Einsicht und Entdeckung, Lernen und Lehren. Band II*. Basel: Birkhäuser Verlag.

Putz-Osterloh, W. (1974). Über die Effektivität von Problemlösungstraining. *Zeitschrift für Psychologie, 182* (3), 253 – 276.

Rott, B. (2013). *Mathematisches Problemlösen – Ergebnisse einer empirischen Studie*. Münster: WTM-Verlag.

Rott, B. (2014). Mathematische Problembearbeitungsprozesse von Fünftklässlern – Entwicklung eines deskriptiven Phasenmodells. *Journal für Mathematik-Didaktik, 35*(2), 251–282.

Rott, B. & Gawlick, T. (2014). Explizites oder implizites Heurismentraining – was ist besser? *mathematica didactica, 27*, 191 – 212.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. A. Grouws (Hrsg.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (S. 334 – 370). New York: MacMillan.

van der Waerden, B. L. (1973). *Einfall und Überlegung – Beiträge zur Psychologie des mathematischen Denkens*. Basel: Birkhäuser. 3. verbesserte Auflage (1. Auflage von 1954).

Wallas, G. (1926). *The Art of Thought*. London: C.A. Watts & Co.

Winter, H. (1989). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht – Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik*. Braunschweig: Vieweg.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 61*, 37 – 46.

Anschrift der Verfasser

Dirk Brockmann-Behnsen
Bismarckschule Hannover
An der Bismarckschule 5
30171 Hannover
dirk_brockmann@web.de

Benjamin Rott
Universität zu Köln
Institut für Mathematikdidaktik
Gronewaldstr. 2
50931 Köln
benjamin.rott@uni-koeln.de