Über ikonische Beweise in der Mathematik – Summen von Quadraten in der Zahlentheorie

NICOLA M. R. OSWALD, WUPPERTAL

***Zusammenfassung**: Der Beitrag fokussiert ikonische Beweise in der Mathematik. Insbesondere werden zahlentheoretische Beispiele zur Darstellung von ganzen Zahlen als Summen von Quadraten diskutiert und Anregungen für deren Einbettung im Hochschul- und Schulcurriculum gegeben. Als Grundlage dient die Sammlung von so genannten „Beweisen ohne Worte" von Roger B. Nelsen. Derartige Veranschaulichungen können in der Lehre an Schule und Hochschule als frühe Stufe des mathematischen Argumentierens eingesetzt werden.*

***Abstract:** The article is focusing on iconic proofs in mathematics. In particular, number theoretical examples of the representation of integers as sums of squares are discussed and ideas for the integration into school education and higher education are given. Hereby, the collection of so called "Proofs without Words" of Roger B. Nelsen can be considered as basis. Those illustrations may be used in school as well as for higher education teaching at an early stage of mathematical reasoning.*

1. Motivation

Mathematik ist eine (vielleicht die einzige) exakte Wissenschaft. Der Preis für diese Exaktheit basiert nicht selten auf einem hohen Grad an Abstraktion. Diese wiederum stellt eine große Hürde bei den ersten ernsthaften Begegnungen mit Mathematik an der Schule und der Hochschule dar (jenseits des Rechnens) und betrifft somit eine wesentliche Frage der Mathematik-Didaktik: Wie ist ein Stoff zu vermitteln, so dass einerseits sinnvolle Hilfestellung für das Erlernen des mathematischen Hintergrundes geleistet wird, andererseits aber auch jedem Individuum eine selbständige und kreative Herangehensweise ermöglicht. Wie beispielhaft darf die Behandlung einer Fragestellung sein, und wie abstrakt sollte sie gerade im weiteren theoretischen Kontext sein?

Es ist zu bezweifeln, dass es eine endgültige und befriedigende Antwort auf dieses Dilemma gibt. Begründet liegt das in uns Individuen selbst. Wir denken und erarbeiten uns mathematische Zusammenhänge in unterschiedlicher Weise. Zudem ist Mathematik aber auch zu facettenreich, als dass es eine ein einzige oder nur wenige Strategien des Erkenntnisgewinns geben könnte.

Im Folgenden sollen die Möglichkeiten von Illustrationen zur Veranschaulichung mathematischer Zusammenhänge und deren Einbettung in ein Hochschul- oder Schulcurriculum an einigen Beispielen diskutiert werden. Das Werkzeug für einen solchen visuellen Zugang sind so genannte „Proofs Without Words", wie sie von Roger B. Nelsen seit über zwanzig Jahren gesammelt und veröffentlicht werden, zunächst in mathematischen Zeitschriften mit einer breiten Leser_innenschaft wie *Mathematics Magazine* oder *American Mathematical Monthly*, dann auch in mittlerweile drei Büchern, herausgegeben von der *Mathematical Association of America* (MAA) (siehe Nelsen, 1993, 2000, 2016). Diese in deutscher Übersetzung *wortlosen Beweise* transportieren in Bildern, manchmal wie ein Comic strukturiert, oft mit einer erklärenden Formel versehen, mathematische Aussagen unterschiedlichsten Niveaus aus den verschiedensten Gebieten der Mathematik. In Mathematikveranstaltungen an Hochschulen treten solche so genannten ikonischen Beweise jedoch eher selten auf.

Hier bietet sich die ebene Geometrie als Themengebiet an. Der Mathematiker George Pólya äußerte hierzu, „*Geometrie sei die Wissenschaft des korrekten Beweisens an inkorrekten Bildern*"[1]. Pólya, welcher insbesondere didaktischen Fragestellungen aufgeschlossen war und etliche, viel zitierte Bücher zu den Anfängen der Mathematik sowie des Lernens und Lehrens derselben verfasst hat, wollte sicherlich nicht die Bilder aus der Geometrie verbannen, sondern vielmehr auf deren Wert hinweisen. Illustrationen liefern keine allgemeingültige Beweismethode, dürfen jedoch für sich in Anspruch nehmen, Anregungen für rigorose formale Beweise zu motivieren. Die Schwierigkeiten im Umgang mit ikonischen Beweisen sind nicht zu unterschätzen. Ein *Beweis ohne Worte* kann nicht das Denken vereinfachen, aber vielleicht die Fantasie anregen und den Ehrgeiz herausfordern, sich den mathematischen Inhalt selbst zu erarbeiten. Das Lesen und Verstehen eines formalen (schriftlichen) Beweises ist hingegen kein kreativer Prozess. Vielleicht ist ein ikonischer (wortloser) Beweis also ein Zwischending, weder ein fertig vorliegender, lediglich zu konsumierender Beweis einer mathematischen Aussage, noch eine offene Vermutung, sondern ein *Appetizer* für den (oder einen) wegweisenden Gedanken zur Erkenntnis.

2. Einige konkrete Beispiele ikonischer Beweise

Claudi Alsina und Roger B. Nelsen (2010) geben in ihrer *Einladung zu Beweisen ohne Worte* Beispiele aus der Kombinatorik (basierend auf dem Prinzip des zweifachen Abzählens bzw. Bijektionen). Figurierte Zahlen tragen ja bereits in ihrer Bezeichnung ein Bild in sich. Wer bei Quadratzahlen nur an x^2 und nicht an ein geometrisches Quadrat denkt, dem verschließt sich beim Lösen quadratischer Gleichungen der geometrische Hintergrund der *quadratischen Ergänzung*. Bestenfalls kann diese formal vollzogen werden; an der Schule wird oft genug aber nur die Lösungsformel auswendig gelernt:

$$x^2 + ax + b = 0 \implies x_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b};$$

und an der Hochschule wird auf den geometrischen Hintergrund auch eher selten eingegangen (womöglich in der Annahme, dass das Lösen quadratischer Gleichungen Gegenstand der Schulmathematik ist). Die Ergänzung des Terms $x^2 + ax$ zu einem Quadrat liefert bekanntlich:

$$x^2 + ax = \left(a + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Diese Idee besitzt eine einfache und einprägsame bildliche Entsprechung:

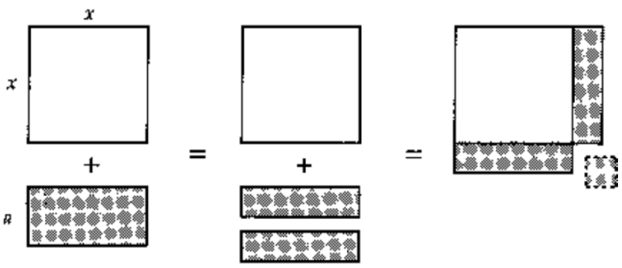


Abb. 1: Ausschnitt aus dem *Mathematics Magazine*: Ein „Beweis ohne Worte“ von Charles D. Gallant (1983, S. 110).

Den Fall eines negativen a kann man ähnlich (wie in Abb. 1) geometrisch herleiten.

Ein verwandtes Bild illustriert eine wesentlich beeindruckendere zahlentheoretische Erkenntnis: *Die Menge der Zahlen, die sich als Summe von zwei Quadraten ganzer Zahlen darstellen lassen, ist multiplikativ abgeschlossen*. So gilt etwa

$$\begin{aligned} 5 \cdot 25 &= (1^2 + 2^2) \cdot (3^2 + 4^2) \\ &= (1 \cdot 4 + 2 \cdot 3)^2 + (2 \cdot 4 - 1 \cdot 3)^2 \\ &= 10^2 + 5^2 = 125\,. \end{aligned}$$

Bereits in Diophants *Arithmetica* (ca. 3. Jhd.) finden sich hierfür zahlreiche Beispiele; angesichts der Komplexität der nachstehenden, dies erklärenden Formel ist davon auszugehen, dass der Grieche eher einen geometrischen Beweis wie in Abbildung 2 vor Augen hatte.

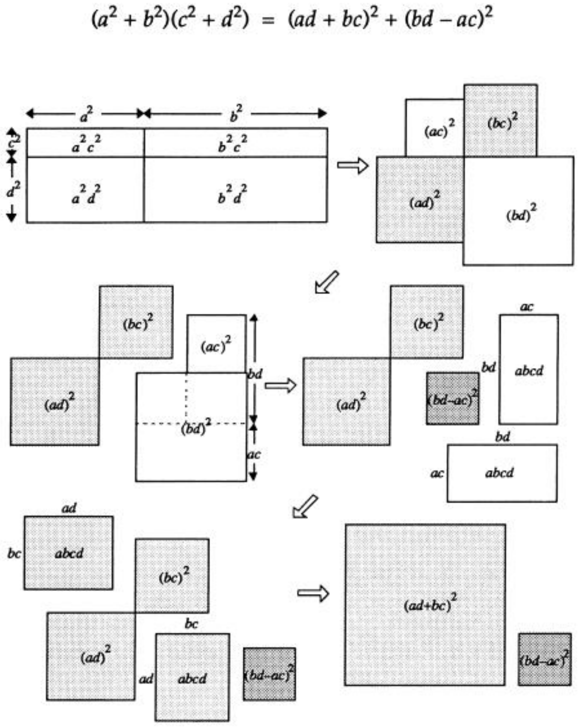


Abb. 2: Ausschnitt aus dem *Mathematics Magazine*: Die Veranschaulichung eines Beweises von Roger B. Nelsen (1993, S. 180).

Darstellungen von Zahlen als Summen von Quadraten werden an der Hochschule meist in der elementaren Zahlentheorie untersucht, aber auch in der algebraischen Zahlentheorie treten im Rahmen der Teilbarkeitlehre im Ring der ganzen Gauß‘schen Zahlen Quadratsummen auf und Diophants Formel beschreibt in diesem Zusammenhang die Multiplikativität der Norm in diesem Ring. Heutzutage wird diese Identität üblicherweise im Zusammenhang mit komplexen Zahlen (oder mit Hilfe von assoziierten 2×2-Matrizen) hergeleitet: Das Produkt zweier komplexer Zahlen $a + ib$ und $c + id$ (mit $i = \sqrt{-1}$) berechnet sich als $ac - bd + i(ad + bc)$ und für deren Betragsquadrate ergibt sich somit

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) &= |a + ib|^2 \cdot |c + id|^2 \\ &= |(a + ib) \cdot (c + id)|^2 \\ &= |ac - bd + i(ad + bc)|^2 \\ &= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2\,. \end{aligned}$$

Natürlich ist das kein Appell (an der Hochschule) an dieser Stelle stehen zu bleiben, sondern die entsprechende Formel für vier Quadrate zu entwickeln; wahrscheinlich ist hier der abstrakte Weg mit Hilfe der Quaternionen dem geometrischen Beweis vorzuziehen (siehe Stillwell, 2010, Kap. 20) was letztlich zu einer Balance von Anschauung und Abstraktion führte.

Prinzipiell ist es auch möglich experimentell zu entdecken, dass *eine natürliche Zahl n genau dann eine Darstellung als Summe von zwei Quadraten besitzt, wenn in ihrer Primfaktorzerlegung die Potenzen von Primzahlen der Form $p = 4m + 3$ausnahmslos gerade sind* (wenn solche überhaupt vorkommen). Weil Quadrate bei Division durch 4 den Rest 0 oder 1 lassen, sind Primzahlen $p = 4m + 3$ tatsächlich keine Summen von zwei Quadraten. Dass Primzahlen der Form $p = 4m + 1$ hingegen als Summe zweier Quadrate darstellbar ist, wurde von Pierre de Fermat im 17. Jahrhundert entdeckt und kommuniziert; wahrscheinlich konnte er dies auch mit seiner unendlichen Abstiegmethode beweisen. Alternativ lässt sich dies etwa auch mit der Arithmetik im Ring der ganzen Gauß'schen Zahlen $a + ib$ begründen (vgl. etwa Opolka & Scharlau, 1980, Kap. 2). Die einzige gerade Primzahl ist sowieso eine Summe zweier Quadrate

$$2 = 1^2 + 1^2$$

und die Darstellung ist eindeutig (bis auf Vorzeichen und Reihenfolge von Summanden). Damit folgt obiges Darstellbarkeitskriterium mit Hilfe der Diophant'schen Formel zur multiplikativen Abgeschlossenheit; hierbei ist noch zu berücksichtigen, was das folgende Beispiel illustriert:

$$3^2 \cdot (1^2 + 2^2) = (3 \cdot 1)^2 + (3 \cdot 2)^2$$

Quadratische Faktoren multiplizieren sich in jedes Quadrat der Summe hinein und haben insofern keinerlei Einfluss auf die Darstellbarkeit als Summe von Quadraten.

Weil das obige Kriterium nicht von der Primzahl 2 abhängt, lässt sich folgern, dass *mit n auch $2n$ eine Summe von zwei Quadraten ist und umgekehrt*; tatsächlich gilt sogar, dass sich n auf genauso viele Weisen als Summe von zwei Quadraten darstellen lässt wie $2n$. Diesen doch erstaunlichen Zusammenhang illustriert folgender ikonischer Beweis:

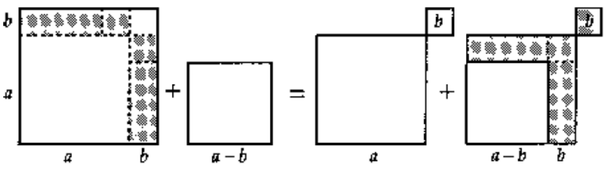


Abb. 3: Ausschnitt aus dem *Mathematics Magazine*: Dieser Beweis stammt von Shirley A. Wakin (1984, S. 231).

In abstrakter Form ließe sich dies so formulieren: Ist $n = a^2 + b^2$ dann gilt ebenso

$$\begin{aligned} 2n &= 2a^2 + 2b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 \\ &= (a + b)^2 + (a - b)^2 \end{aligned}$$

Und umgekehrt folgt aus $2n = u^2 + v^2$ ganz ähnlich

$$n = \left(\frac{u - v}{2}\right)^2 + \left(\frac{u + v}{2}\right)^2,$$

wobei hier noch anzumerken ist, dass sowohl $\frac{u-v}{2}$ als auch $\frac{u+v}{2}$ganze Zahlen sind, weil u und v entweder beide gerade oder beide ungerade sind (wegen $2n = u^2 + v^2$). Diesen Sachverhalt könnte man in einer Hochschulveranstaltung beispielsweise durch Experimentieren zunächst vermuten und anschließend durch Mustererkennung beweisen lassen. Der geometrische Zugang scheint aber der einfachere zu sein.

Wesentlich schwieriger zu behandeln sind Summen von drei Quadraten. Wie zuerst Gauß zeigte, lassen sich *genau die $n \neq 4^k(8m + 7)$ als Summen von drei Quadraten darstellen*. Hieraus folgt unmittelbar, dass sich alle natürlichen Zahlen als Summe von vier Quadraten schreiben lassen, was vor Gauß bereits Lagrange bewiesen hatte (siehe Scheid, 1991). Einen interessanten, wahrscheinlich nicht allzu bekannten Zusammenhang zwischen derartigen Quadratsummen liefert der nachstehende ikonische Beweis:

$$\begin{aligned} &(a + b + c)^2 + (a + b - c)^2 + (a - b + c)^2 + (a - b - c)^2 \\ &= (2a)^2 + (2b)^2 + (2c)^2 \end{aligned}$$

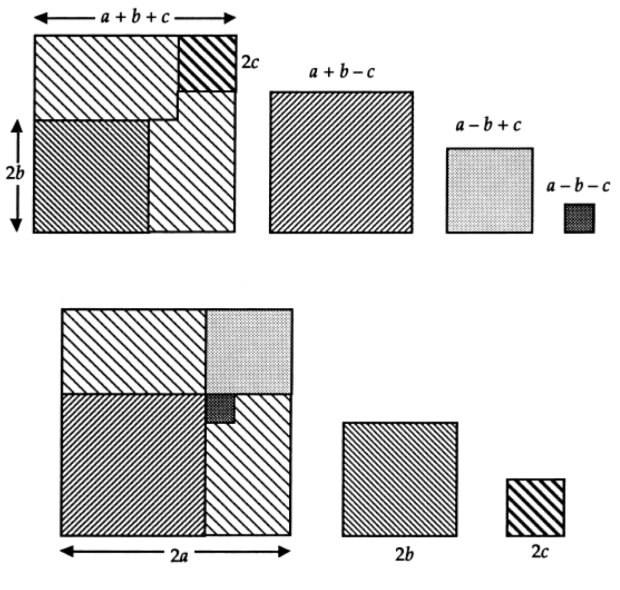


Abb. 4: Ausschnitt aus dem *Mathematics Magazine*: Ein „Beweis ohne Worte" von K. Ann Drude & Sam Pooley (1991, S. 138).

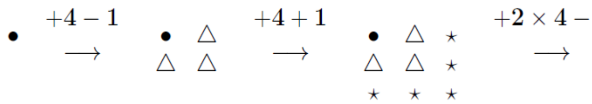
Wiederum liefert die geometrische Anschauung eine Idee für einen Zusammenhang zwischen unterschiedlichen Summen von Quadraten, welche sich arithmetisch verifizieren lässt. Durch einfaches Raten hingegen scheint sich die zugrundeliegende Formel (von Studierenden) kaum entdecken zu lassen. Und besser noch: Diese Illustrationen motivieren, sich selbst kreativ zu betätigen und einen solchen bildlichen Beweis zu entdecken!

Hier ein Beispiel für eine solche Illustration in diesem Kontext. Wir hatten oben schon angesprochen, dass Quadrate bei Division durch 4 den Rest 0 oder 1 lassen. Die nachstehenden Bilder zeigen, dass die Quadrate tatsächlich von der Form $4m$ oder $4m+1$ sind:

•	•	…	•	•
•	•		•	•
⋮				⋮
•	•		•	•
•	•	…	•	•

1	2	2	…	2	2
2	•	•	…	•	•
2	•	•		•	•
⋮	⋮				⋮
2	•	•		•	•
2	•	•	…	•	•

Das linke Bild behandelt den Fall eines Quadrates einer geraden Zahl, also $(2n)^2 = 4 \cdot n^2 + 0$ während das rechte für das Quadrat einer ungeraden Zahl die Formel $(2n+1)^2 = 4n^2 + 2 \cdot 2n + 1 = 4 \cdot (n^2 + n) + 1$ liefert. Natürlich ist dies durch einfaches Rechnen sofort zu verifizieren, aber die visuelle Einbettung mag eine zusätzliche Hilfe und Motivation sein. Ein alternatives Diagramm hierzu ist:



Diesem zweiten bildlichen Beweis kann man zudem noch den schönen Sachverhalt entnehmen, dass die ersten n ungeraden natürlichen Zahlen sich zum Quadrat von n aufsummieren.

3. Rezeption ikonischer vs. formaler Beweise

Im Mathematikstudium (und vielleicht auch schon im Mathematikunterricht an der Schule) hört man früher oder später die *Legende*, dass Carl Friedrich Gauß als Volksschulkind die als Fleissaufgabe angedachte Beschäftigung, die natürlichen Zahlen von 1 bis 100 aufzusummieren, zügig wie folgt löste:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (1 + \cdots + 99 + 100) &= 1 + 2 + \cdots + 99 + 100 \\ &\quad +100 + 99 + \cdots + 2 + 1 \\ &= 101 + 101 + \cdots + 101 + 101 = 50 \cdot 101, \end{aligned}$$

woraus sich leicht die Summenformel

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2} n(n+1)$$

herleiten lässt. Der nachstehende ikonische Beweis greift diese Idee auf:

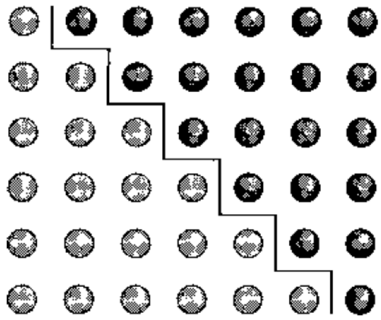


Abb. 5: Ausschnitt aus dem *Scientific American*: Ein Beweis nach Martin Gardner (1973, S. 114).

Üblicherweise wird besagte Formel jedoch mit vollständiger Induktion bewiesen. Hierzu bemerken David Tall et al. (2012, S. 38): *“the generic pictorial and algebraic proofs made more sense to the students because they gave a meaningful explanation as to why the proof is true, whilst the formal proof by induction is more obscure because it seems to use the result of the proof (...) during the proof itself.”*

Der hierbei erwähnte *algebraische* Beweis könnte in Anlehnung an Gauß wie folgt geführt werden:

$$\begin{aligned} 2\sum_{j=1}^{n} j = \sum_{j=1}^{n} (j + n + 1 - j) &= \sum_{j=1}^{n} (n+1) \\ &= n(n+1) \end{aligned}$$

Die oben zitierte Einschätzung teilt Giuseppe Longo (2012, S. 56): „More generally, *proving a theorem is answering a question*, like Gauss' teacher's question, about a property of a mathematical structure or about relating different structures; *it is not proving an already given formula*.“

Natürlich ist das Induktionsprinzip eine wichtige Beweismethode und die *Gauß'sche Summenformel* sicherlich ein sehr gutes Beispiel für deren Anwendung, allerdings verrät der Induktionsbeweis nicht den Ursprung der Formel. In der mathematischen Praxis ist in der Regel zuerst ein Zusammenhang (wie etwa die obige Formel) zu erahnen und erst dann kann ein rigoroser Beweis geführt werden. Insofern scheint es sinnvoll einem Induktionsbeweis, wenn möglich, auch eine Erklärung zur Seite zu stellen, die den Hintergrund des Sachverhaltes beleuchtet. Die Gauß'sche Legende liefert mit dem zugehörigen ikonischen Beweis einen solchen Beitrag.

Erich Ch. Wittmann und Jochen Ziegenbalg diskutieren ikonische Beweise an der Hochschule allgemeiner. Zu deren Rigorosität, gerade auch im Vergleich zu den üblichen formalen Beweise äußern sie:

„Die Muster zeigen, wie Zahlen geometrisch konstruiert sind, und offenbaren dadurch Eigenschaften, die den Zahlen durch die Konstruktion („Erzeugung") aufgeprägt werden. Auf dieser Basis lassen sich stichhaltige mathematische Beweise führen, da die Operationen offensichtlich bei jedem derartigen Muster unabhängig von seiner „Größe" durchführbar sind. Selbstverständlich wäre es kein stichhaltiger mathematischer Beweis, wenn die Richtigkeit der Behauptung nur für einige Fälle verifiziert würde. Dadurch, dass aber nicht auf einzelne Beispiele, sondern *auf allgemein ausführbare Operationen und deren Wirkungen* zurückgegriffen wird, ist die Allgemeingültigkeit gesichert. Man nennt Beweise dieser Art deshalb *operative Beweise*." (Wittmann & Ziegelbalg, 2007, S. 38)

Allerdings sehen die Autoren *„dass viele, die mit operativen Beweisen erstmalig in Berührung kommen, diese Form von beweisen nur schwer akzeptieren können, weil sie im Gegensatz zu den gewohnten Vorstellungen von Beweisen steht."* Diese mangelnde Akzeptanz sehen Wittmann und Ziegenbalg in der schulmathematischen Prägung begründet:

„Als Übung erhielten die Studierenden die Aufgabe, die beiden Beweise zu vergleichen und zu bewerten. Die Auswertung der Antworten zeigte deutlich, wie stark viele Studierende von ihrer Schulzeit her auf symbolische Beweise festgelegt sind und wie schwer es ihnen fällt, sich auf „ikonische" Beweise einzustellen." (ebenda, S. 41)

Aber auch für die Schule haben ikonische Beweise bereits einiges zu bieten. Für den Unterricht in der Sekundarstufe bieten sich neben den Quadratzahlen beispielsweise die mit diesen verbandelten Dreieckszahlen an. Für die Primarstufe verweisen wir auf die bereits oben angerissenen operativen Beweise, beispielsweise zu Eigenschaften von geraden und ungeraden Zahlen mit so genannten *Plättchen*, wie sie Erich Ch. Wittmann (2014, S. 214 ff.) beschreibt; hier wird auch kurz der interessante Bezug zur Schule des Pythagoras hergestellt, in der „beim Legen von Steinchen allgemeingültige zahlentheoretische Muster entdeckt und bewiesen [wurden]." Der Autor betont den Vorteil solcher und anderer operativer Beweise (die sich durch die Erforschung eines mathematischen Problems ergeben, sich auf Operationen mit „quasi-realen" mathematischen Objekten begründen, die Darstellungsmittel der Lernenden benutzen und sich in einer schlichten und symbolarmen Sprache führen lassen) und weist auf die Nähe zwischen diesen und formalen Beweisen hin (ebenda, S. 226). Dieser Zugang zur Mathematik lässt sich bereits in der Schule mit ikonischen Beweisen wunderbar realisieren.

Natürlich wird dies auch bereits im mathematischen Schulunterricht umgesetzt. Im Rahmen einer Aufgabe *Kino* sollen „die Schülerinnen und Schüler zeigen, dass sie das Aufbauprinzip des gezeigten Publikumsraumes verstanden haben, die zu Grunde liegende Zählstrategie erkennen und auf die basierte Situationen anwenden können", so schreiben H. Achilles et al. (2007, S. 52) im Rahmen der Lernstandserhebungen in Nordrhein-Westfalen. In diesem Zusammenhang werden *Eckzahlen* und insbesondere *Dreieckzahlen* diskutiert, welche sich gemäß ihrer geometrischen Definition durch Plättchen visualisieren lassen. Durch einfache Verschiebungen der Plättchen lassen sich Identitäten zwischen beispielsweise Dreieckzahlen und Rechtecken herleiten.

Plädoyer

Diese Gedanken zu *Beweise ohne Worte* mit Blick auf Quadrate in der elementaren Zahlentheorie ließen sich ohne weiteres noch ausdehnen. Mathematische Stichworte in diesem Kontext sind etwa die pythagoräischen Tripel, Gauß' Methode des Abzählens von Punkten mit ganzzahligen Koordinaten in einem Kreis und Minkowskis Geometrie der Zahlen. Weitere anregende Illustrationen zu den verschiedensten Themen der Mathematik finden sich in der deutschen Herausgabe der Sammlungen von Roger B. Nelsen (2016). Einige davon gehen zurück auf Alfinio Flores, der sich auch intensiv mit den didaktischen Möglichkeiten ikonischer Beweise auseinandergesetzt hat (siehe etwa Flores, 2002).

Ich schließe meine kurzen Ausführungen zum Wert von Anschauung in der Mathematik mit einem Plädoyer, in der Lehre an Schule und Hochschule, dort wo es möglich und sinnvoll ist, Illustrationen als frühe Stufe des mathematischen Argumentierens einzusetzen!

Anmerkungen

[1]Im Original: "Geometry is the science of correct reasoning on incorrect figures." (Pólya, 1945, S. 75).

Danksagung

Ich danke den anonymen Gutachtern sowie dem Herausgeber Andreas Eichler für die hilfreichen und konstruktiven Anmerkungen und Kommentare.

Literatur

Alsina, C. & Nelsen, R. B. (2010). An Invitation to Proofs Without Words. *European J. Pure Appl. Math., 3*, 118-127.

Achilles, H.; Kliemann. S.; Kusnierek, F. S.; Peek, R. & Pallack, A. (2007). Umgang mit den Materialien der Lernstandserhebungen. In Ernst Klett Schulbuchverlage (Hrsg.), *Lernstandserhebungen Mathematik in Nordrhein-Westfalen* (S. 47-90). Stuttgart, Leipzig: Klett.

Drude, K. A. & Pooley, S. (1991). *Mathematics Magazine,* 64(2): 138.

Flores, A. (2002). Geometric representation in the transition from arithmetic to algebra. In F. Hitt (Hrsg.), *Representations and Mathematics Visualization* (S. 9-30). International Group for the Psychology of Mathematics Education North American Chapter and Cinvestav-IPN. México.

Gallant C. D. (1983). *Mathematics Magazine, 56*(2): 110.

Gardner, M. (1973). *Scientific American, 229*(4): 114.

Opolka, H. & Scharlau, W. (1980). *Von Fermat bis Minkowski. Eine Vorlesung über Zahlentheorie und ihre Entwicklung*. Berlin: Springer.

Pólya, G. (1945). *How to Solve it?* Princeton University Press.

Longo, G. (2012). Theorems as Constructive Visions. In G. Hanna & M. de Villiers (Hrsg.), *Proofs and Proving in Mathematics Education* (S. 51-66). Springer.

Nelsen, R. B. (1993). *Proofs Without Words – Exercises in Visual Thinking.* Mathematical Association of America.

Nelsen, R. B. (1993). *Mathematics Magazine*, *63*(3), 180.

Nelsen, R. B. (2000). *Proofs Without Words II -- More Exercises in Visual Thinking.* Mathematical Association of America.

Nelsen, R. B. (2016). *Proofs Without Words -- Further Exercises in Visual Thinking.* Mathematical Association of America.

Nelsen, R. B. (2016). *Beweise ohne Worte*. Springer. (herausgegeben von Nicola M.R. Oswald).

Scheid, H. (1991). *Zahlentheorie*. B.I.-Wissenschaftsverlag, Mannheim.

Stillwell, J. (2001) *Mathematics and its History*. 2. Auflage, Springer.

Tall, D.; Yevdokimov, O.; Koichu, B.; Whiteley, W.; Kondratieva, M. & Cheng, Y.-H. (2012). Cognitive Development of Proof. In G. Hanna & M. de Villiers (Hrsg.), *Proofs and Proving in Mathematics Education* (S. 13-49). Springer.

Wakin, S. A. (1984). *Mathematics Magazine*, 57(4): 231.

Wittmann, E. Ch. (2014). Operative Beweise in der Schul- und Elementarmathematik. *mathematica didactica, 37,* 213-230

Wittmann, E. Ch. & Ziegenbald, J. (2007) Sich Zahl um Zahl hochhangeln. In G. N. Müller, H. Steinbring, E. Ch. Wittmann (Hrsg.), *Arithmetik als Prozess* (S. 35-54), 2. Auflage, Klett.

Anschrift der Verfasserin

Nicola M.R. Oswald
Bergische Universität Wuppertal
Arbeitsgruppe für Didaktik & Geschichte der Mathematik
Gaußstraße 20
42119 Wuppertal
oswald@uni-wuppertal.de