Hilfestellungen beim Problemlösen in Form von „Lösungsbildern“

GABRIELLA AMBRUS, BUDAPEST & BENJAMIN ROTT, KÖLN

Zusammenfassung: *Zur Steigerung der Problemlösekompetenz von Lernenden in der Schule und an der Universität gibt es unterschiedliche Ansätze. Im vorliegenden Beitrag wird ein solcher Ansatz präsentiert und diskutiert, der auf dem genannten Gebiet bislang wenig Beachtung gefunden hat: Die Arbeit mit konkreten Lösungsideen im Form von vorgegebenen Abbildungen bei Aufgaben mit mehreren Lösungsmöglichkeiten. Die vorgegebenen Abbildungen dienen als Anregung für heuristische Ideen, die weitergedacht und zu möglichen Lösungswegen ausgearbeitet werden sollen. Die Methode wird am Beispiel eines Problems aus der Geometrie vorgestellt und anhand der Ergebnisse und Erfahrungen einer Erprobung unter Studierenden diskutiert.*

Abstract: *Problem solving is an important part of mathematics teaching that is difficult to implement. Therefore, there are several approaches to foster the problem solving competencies of students and teachers. In this paper, another approach at fostering such competencies that so far has received little attention is presented and discussed: Working with multiple solution problems and concrete solution ideas in the form of figures given to the problem solvers. Those figures hint at solutions that need to be elaborated by the problem solvers, fostering the use of heuristics. The method is presented using a geometric problem; results and experiences of tests are discussed.*

1. Einleitung – Begriffsklärung: Probleme, Problemlösen, Problemlösekompetenz und ihre Rolle im MU

Problemlösen ist ein wichtiger Bestandteil der Mathematik und des Mathematikunterrichts überall auf der Welt (vgl. Törner et al., 2007; NCTM 2000). Allerdings wird übereinstimmend berichtet, dass Problemlösen für viele Lernende in Schulen und Hochschulen teilweise sehr schwierig ist (z. B. Schoenfeld, 1985; Hembree, 1992). Um Lernende beim Aufbau von Problemlösekompetenz zu unterstützen, werden unterschiedliche Ansätze wie Heurismentrainings verfolgt.

In diesem Artikel wird ein spezieller Ansatz eines Heurismentrainings zur Steigerung der Problemlösekompetenz präsentiert und diskutiert, der bislang wenig Beachtung gefunden hat: Die Arbeit mit konkreten Lösungsideen in der Form vorgegebener Abbildungen bei Aufgaben mit mehreren Lösungsmöglichkeiten (allerdings mit einem eindeutigen Ergebnis). Diese Idee wird in Abbildung 1 am Beispiel des Satzes des Pythagoras illustriert: Auf der Basis der Vorlagen sollen Lernende angeregt werden, unterschiedliche Aufgabenlösungen zu erarbeiten und zu reflektieren, in diesem Fall also verschiedene Beweise des Satzes zu formulieren. Es geht hier nicht um sog. anschauliche Beweise, in denen der Verlauf des Beweisens durch Abbildungen „erzählt“ wird. Stattdessen dienen hier die Abbildungen als Ideen, die weitergedacht und ausgearbeitet werden sollen.

Im vorliegenden Artikel geht es wohlgemerkt nicht um eine experimentelle Studie, in der die genannte Methode mit anderen Verfahren zur Steigerung der Problemlösekompetenz verglichen werden soll. Es geht um eine Vorstellung der Methode und ihre Diskussion anhand theoretischer Überlegungen und empirischer Beispiele.

2. Theoretischer Hintergrund

2.1 Grundlagen

Unter „Problemlösen“ verstehen wir die (nicht notwendigerweise erfolgreiche) Bearbeitung von Aufgaben, für die kein vollständiges Lösungsschema bekannt ist (Schoenfeld, 1985; Dörner, 1979). Eines der Ziele eines Lehrgangs zum Problemlösen – sei es in der Schule oder an der Universität – ist es, Lernende auf unbekannte Situationen vorzubereiten. Dass das Problemlösen für viele Schülerinnen und Schüler sowie Studierende schwierig ist, liegt schon in der Definition des Gegenstands, schließlich geht es um Aufgaben mit (teilweise) unbekannten Anforderungen.

Aus der Definition des Problembegriffs ergibt sich bereits, dass für den jeweiligen Problemlöser kein Lösungsweg vorbestimmt ist. Viele Probleme ermöglichen mehrere Lösungswege und bieten auf diese Weise unterschiedlichen Bearbeitern jeweils eigene Zugänge bzw. einem Problemlöser mehrere Herangehensweisen.

In der Forschung zum Problemlösen werden in der Regel vier Bereiche genannt, in denen Schwierigkeiten von Lernenden ausgemacht werden können und die bei der Untersuchung und dem Training von Problemlösekompetenzen berücksichtigt werden sollten (Schoenfeld, 1985): Vorwissen (resources), Problemlösestrategien (heuristics), metakognitive Fähigkeiten (control) sowie Überzeugungen und Einstellungen (beliefs).

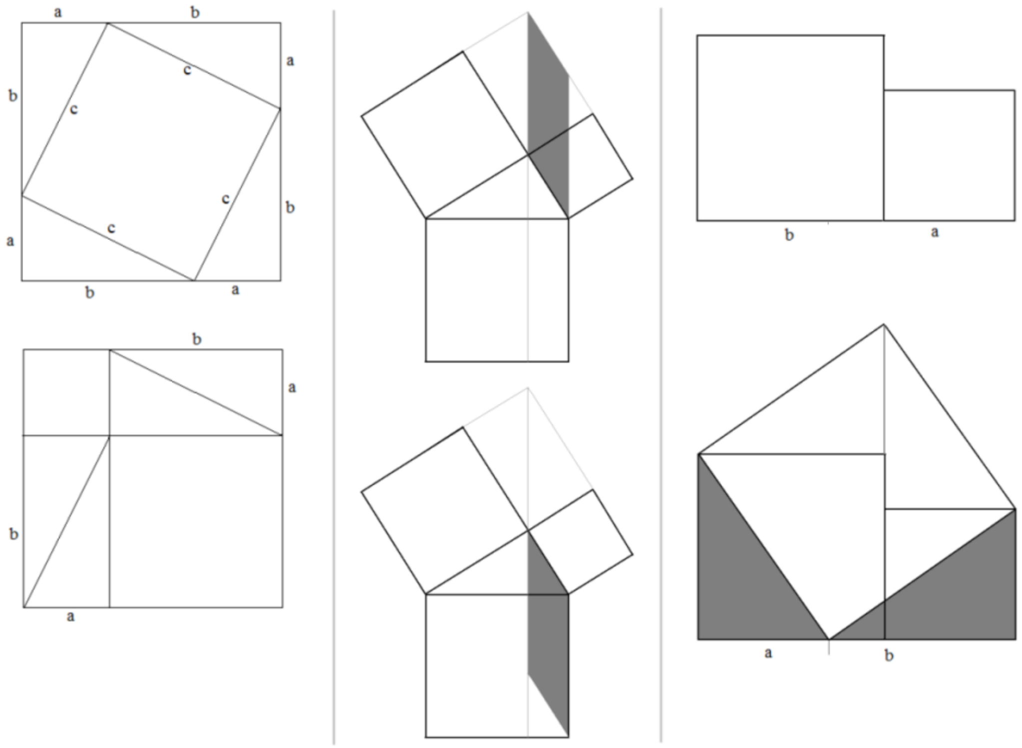


Abb. 1: visuelle Hilfen, um verschiedene Beweise des Satzes des Pythagoras zu finden

Das in diesem Artikel vorgestellte Konzept zum Problemlösenlernen – die Arbeit mit Problemen mit vielen möglichen Lösungswegen mittels entsprechender Hilfestellungen – fokussiert insbesondere auf das Arbeiten mit Problemlösestrategien bzw. Heurismen.

Unter Heurismen versteht man mathematische Tätigkeiten und Ideen wie das Betrachten von Spezialfällen, das Betrachten von Symmetrien oder das Einführen von Bezeichnungen und Hilfslinien. Sie können helfen, ein Problem besser zu verstehen und Fortschritte auf einem Weg zur Lösung ermöglichen. Im Gegensatz zu Algorithmen sind sie deutlich vielseitiger einsetzbar, liefern aber keine Lösungsgarantie (vgl. Rott, 2013, Kap. 4). Heurismen wurden durch Pólya (1945) im Bewusstsein der Mathematikdidaktik verankert, entsprechende Trainings wurden beispielsweise von Schoenfeld (1985, Kap. 6), Koichu, Berman und Moore (2007) sowie Collet (2009) entworfen und wissenschaftlich begleitet.

Beispiele für Heurismen (nach Bruder & Collet, 2011), die auch für die Bearbeitung des hier behandelten Problems hilfreich sind und in Kapitel 3 im Kontext dieses Problems erläutert werden, sind heuristische Hilfsmittel wie

- das Einführen von Bezeichnungen,
- das Einfügen von Hilfslinien
- das Veranschaulichen durch informative Figuren (Darstellung von Beziehungen und Informationen).

Hinzu kommen heuristische Prinzipien wie

- das Zerlegungs- und Ergänzungsprinzip (zueinander komplementäre Vorgehensweisen),
- das Extremalprinzip (dazu zählen wir auch die Suche nach Spezialfällen und Randbedingungen),
- das Symmetrieprinzip (Suche nach Symmetrien zwischen den Elementen der durch die Problemstellung gegebenen Informationsmenge, in unserem Problem bedeutet dies Suche nach Symmetrien in geometrischen Figuren)
- das Transformationsprinzip (bedeutet hier die Unterstützung des Aspektwechsels, z. B. die statische oder dynamische Betrachtung einer Abbildung)
- und das Rückführungsprinzip (Zurückführen auf etwas Bekanntes).

Langfristig wird durch das hier vorgestellte Konzept zum Problemlösenlernen aber nicht nur die Verwendung von Heurismen trainiert, sondern auch eine Änderung bzw. eine Verstärkung von Überzeugungen angestrebt. Unter Überzeugungen bzw. Beliefs versteht man Konstrukte für menschliche Kognitionen, mit denen man zu beschreiben versucht, welche (in der Regel) stabilen, subjektiven Annahmen Personen über sich und ihre Umwelt haben (vgl. Philipp, 2007). Beliefs filtern die Wahrnehmung und leiten Handlungen (vgl. ebd.). Schoenfeld fasst pointiert zusammen, inwiefern die bewusst oder unbewusst herrschenden Überzeugungen von Lernenden ihre Arbeit an Problemen beeinflussen:

"One's beliefs about mathematics can determine how one chooses to approach a problem, which techniques will be used or avoided, how long and how hard one will work on it, and so on. Beliefs establish the context within which resources, heuristics, and control operate." (Schoenfeld, 1985, S. 45).

Wer beispielsweise „gelernt" hat, dass Aufgaben im Mathematikunterricht immer mit der zuletzt behandelten Regel gelöst werden können, bricht die Bearbeitung eines Problems, das sich nicht (direkt) mit einem bekannten Verfahren lösen lässt, vermutlich relativ schnell ab (vgl. Schoenfeld, 1992). Wenn ein Lernender glaubt, dass Aufgaben immer genau eine richtige Lösung und einen korrekten Lösungsweg besitzen, wird er nie nach alternativen Lösungsmöglichkeiten suchen (ebd.), auch wenn man dabei viel lernen und interessante Zusammenhänge entdecken kann (vgl. Pólya, 1945).

Durch das hier beschriebene Problemlösetraining wird eine Beliefänderung angestrebt, indem betont wird, dass mathematische Probleme oft mit unterschiedlichen Ansätzen gelöst werden können. Der Einsatz von Problemen mit mehreren Lösungswegen kann verdeutlichen, dass es oft mehr als einen richtigen Ansatz für mathematische Aufgaben gibt (vgl. Schoenfeld, 1985) und dass das Wesen der Mathematik etwas anderes ist als Schemata zu erlernen und anzuwenden (vgl. Leuders, 2003). Durch die Suche nach (bzw. die Arbeit mit) verschiedenen Lösungswegen zu demselben Problem kann die Problemlösefähigkeit entwickelt werden. Dadurch kann sich auch die Überzeugung, dass Problemlösen nicht nur für mathematisch besonders Begabten erdacht wurde, entwickeln bzw. verstärken.

2.2 Probleme mit verschiedenen Lösungswegen (multiple solution tasks)

Vielfach wurde auf den didaktischen Nutzen des Suchens und Findens mehrerer Lösungswege für ein Problem hingewiesen (siehe auch Leikin & Lev, 2007), insbesondere betont Pólya dies in seiner vierschritten Anleitung zum Problemlösen (in der Phase der Rückschau fragt er „Könntest Du für die Lösung auch einen anderen Weg finden?"). Durch das Austauschen einzelner Schritte oder das Ändern des ganzen Lösungswegs könne man sehr viel für spätere Problemlöseversuche lernen (dies wird u. a. auch von Schoenfeld, 1985, Kap. 4, betont).

Der Einsatz von Problemen mit mehreren Lösungsmöglichkeiten kann daher auch für das Lernen von Mathematik in der Schule und der Hochschule sehr fruchtbar sein. Durch die Betrachtung eines Lerngegenstands aus verschiedenen Perspektiven können mehrere mentale Repräsentationen aufgebaut und verknüpft werden und auf diese Weise zu flexiblem, vielfältig einsetzbaren Wissen führen (Schukajlow, 2011). Ähnliche Überlegungen finden sich auch schon bei Winter (1989, Kap. 9). In diesem Zusammenhang kann die Arbeit mit solchen Aufgaben auch aus dem Grund sehr fruchtbar sein, dass unterschiedliche Lerntypen und Denkstile angesprochen werden (vgl. Borromeo Ferri, 2010; Rehlich, 2010; Riding, 2001; Schwank, 2003).

Generell konnte in verschiedenen Studien gezeigt werden, dass durch das Anfertigen verschiedener Lösungswege beim Problemlösen die Qualität der Mathematikstunden erhöht werden kann. Auf diese Weise bleiben die Ideen von Schülern nicht unbeachtet; generell könne eine entsprechend veränderte Diskurskultur zu besseren Lernergebnissen der Lernenden beitragen (Levav-Waynberg & Leikin, 2006; Guberman & Leikin, 2013).

Die Beschäftigung mit verschiedenen Lösungswegen von Problemen erlaubt nicht nur Vernetzung mathematischen Wissens und Könnens, sondern kann auch als diagnostisches Mittel dafür dienen (Levav-Waynberg & Leikin, 2009). Zusätzlich weist Krutetskii (1976) darauf hin, dass Probleme mit verschiedenen Lösungsansätzen auch dafür genutzt werden könnten, Flexibilität im mathematischen Denken zu erkennen.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Forschung in den letzten drei Jahrzehnten Fortschritte im Bereich des Erwerbs von Problemlösekompetenzen erreicht hat. Vieles bleibt aber noch zu tun, darunter auch die Erforschung des Themas „die Angabe von mehreren Lösungswegen zu einem Problem" (Silver et al., 2005). Hierzu soll mit der vorliegenden Studie ein Beitrag geleistet werden.

2.3 Gestufte Hilfestellungen für das Lösen von Problemen mit verschiedenen Lösungswegen

Wie gerade dargelegt wurde, gibt es viele Gründe, die dafür sprechen, im Unterricht Probleme mit verschiedenen Lösungswegen einzusetzen und mehrere Lösungen von den Lernenden einzufordern. Dies im Unterricht tatsächlich so umzusetzen, ist allerdings nicht immer einfach: Einerseits lässt bei vielen Lernenden die Neugier nach, sobald eine korrekte Lösung gefunden wurde, andererseits bleiben viele Problemlöser an ihren Ideen „hängen" und es bedarf großer Kreativität, (gänzlich) andere Lösungswege zu entdecken (vgl. Leikin & Lev, 2013). Letzteres gilt insbesondere für anspruchsvolle Probleme wie Wettbewerbsaufgaben. Bei einfacheren Problemen hingegen kann das Anfertigen verschiedener Lösungswege sogar in relativ kurzer Zeit erwartet werden, wie beispielsweise Levav-Waynberg und Leikin (2009) in einer Untersuchung mit einem geometrischen Problem zeigen konnten.

Da die Schwierigkeit von Problemen nicht objektiv feststellbar ist, sondern vom jeweiligen Problemlöser abhängt, bedarf es anderer Wege, Lernende an unterschiedliche Problemlösungen heranzuführen. Eine Möglichkeit hierzu sind gezielte Impulse und Hilfestellungen (die natürlich unterschiedlich konkret ausgeprägt sein können), wie sie im Folgenden diskutiert werden. Zunächst wird kurz erörtert, dass entsprechende Hilfestellungen prinzipiell an drei verschiedenen Stellen des Problemlöseprozesses gegeben werden können:

1) Nach einer ersten Bearbeitung können die Lösungsideen einer Klasse gesammelt und verglichen werden. Mit gezielten Impulsen und eventuell ergänzendem Input kann die Lehrkraft eine abstrahierende Reflexion der Lösungsansätze anleiten (z. B. Bruder, 2014, S. 37). Im Idealfall wird danach mit den neuen Impulsen weiter gearbeitet.
2) Während der Arbeit an einem Problem kann die Lehrperson den Lernenden mit Fragen und Bemerkungen helfen, ihre eigenen Ideen und Ansätze auszuarbeiten und eventuell zusätzliche Ansätze zu entwickeln.
3) Vor der Bearbeitung eines Problems können bereits entsprechende Hilfen gegeben werden. Durch (schriftlich) vorbereitete Impulse bis hin zur Präsentation von Musterlösungen können Lernende zum Entdecken bzw. Nachvollziehen unterschiedlicher Ansätze gebracht werden.

In den in diesem Artikel vorgestellten Überlegungen widmen wir uns der Möglichkeit (3), Impulse bereits vor dem Beginn der Arbeit an einem Problem zu präsentieren. Ergebnisse aus der Forschung zur Arbeit mit Hinweisen („prompts“) und Musterlösungen („worked-out examples“) zeigen eindeutige Ergebnisse (vgl. Bannert, 2009; Renkl, 2005; Atkinson et al., 2000): Die Arbeit mit Lösungshilfen und Musterlösungen ist dann am effektivsten, wenn sie durch aktives Partizipieren angereichert wird, beispielsweise die Arbeit an Problemen (Rott & Gawlick, 2014; Stark et al., 2000), die Bearbeitung zusätzlicher Begründungs-Prompts (Stark et al., 2008) oder das Anfertigen von Selbsterklärungen (Renkl, 2002). Reines Lernen mit Lösungsbeispielen ist im Gegensatz dazu wenig erfolgreich, aber zumindest erfolgreicher als gar kein Unterricht (Stark et al., 2000).

2.4 Forschungsintention

Das Ziel dieses Beitrags ist es, die Arbeit an Problemen mit mehreren angedeuteten Lösungswegen vorzustellen und zu diskutieren. Wir glauben, dass es sich hierbei um eine Methode handelt, die gut geeignet ist, Lernenden wichtige Erkenntnisse über das Problemlösen zu vermitteln: Hierbei geht es insbesondere um die Tatsache, dass es für Probleme in der Regel nicht nur einen Lösungsweg gibt, sondern dass verschiedene Ideen und Ansätze zielführend sein können. Zusätzlich lassen sich mithilfe dieser Methode auch heuristische Ideen vermitteln.

Zunächst soll die theoretische Diskussion zusammengefasst und zu einer Liste von Thesen zugespitzt werden. Diese Thesen werden anschließend mithilfe einer empirischen Erprobung zumindest ein Stück weit untersucht. Es geht hierbei – um das noch einmal zu betonen – nicht um einen Vergleich der Wirksamkeit der vorgestellten Methode mit anderen Heurismentrainings o. ä. Es geht lediglich um eine theoriegestützte Erprobung der Methode.

Die bisherigen Überlegungen zusammenfassend sehen wir folgende Vorteile der Vorgabe von mehr oder weniger konkreten Lösungsideen in der Form von Abbildungen. Bereits *kurzfristig* sollten sich folgende Beobachtungen einstellen:

- Das Finden von Lösungswegen wird erleichtert, insbesondere können durch die Vorgabe von Lösungsideen auch unerfahrene Problemlöser eher zu einer Lösung gelangen (Clark et al., 2006).
- Das Finden verschiedener Lösungswege wird erleichtert, auch solche Problemlöser, die ohne Hilfe eine Lösung finden können, aber dann keine weiteren Lösungsideen entwickeln, können durch angedeutete Lösungsideen weitere Ansätze finden und ausführen.
- Mehr Lernende fühlen sich angesprochen (interessiert), an der Problemlösearbeit teilzunehmen, da durch die Vorgabe von Lösungsideen – auf heuristischer, aber auch auf inhaltlicher Ebene – die Einstiegshürde gesenkt wird; insbesondere werden auch Lösungen auf verschiedenen Schwierigkeitsniveaus ermöglicht.

Eher *langfristig* sollten sich folgende Auswirkungen ergeben:

- Die Andeutung unterschiedlicher Lösungswege regt dazu an, diese (evtl. erst nach der Bearbeitung des Problems) im Sinne von Pólyas (1945) Rückschau zu vergleichen und zu reflektieren, was zur Schulung der Problemlösefähigkeit beitragen kann.

- Die Lernenden können durch das Nachvollziehen der Lösungsansätze verschiedene Heurismen kennenlernen und evtl. erlernen („Lernen am Modell“). In diesem Fall kann eine aktive Auseinandersetzung mit den Lösungsansätzen (also insbesondere das Erstellen eigener Lösungen), ergänzt durch die Verknüpfung mit den (vorgegebenen) Bildern, auch ein „Behalten“ und „Hervorrufen“ unterstützen (Clark & Paivio, 1991; Paivio, 2014).
- Die Lernenden werden bewusst dazu angeregt, verschiedene Lösungswegen zu einer Aufgabe zu suchen; das ist etwas, was im „normalen Unterricht“ nur selten vorkommt. Dies kann mittel- bis langfristig zu einer Änderung des Mathematikbildes bzw. der mathematikbezogenen Überzeugungen führen, die von Bildungsforschern als positiv eingeschätzt wird.

Eine solche Vorgabe von Ideen könnte sich – eher langfristig – allerdings auch nachteilig auswirken:

- Der Schwerpunkt der Problemlöseprozesse verlagert sich vom heuristischen zum mathematischen Arbeiten; der Anteil „eigener“ heuristischer Ideen an der Problemlösung wird (in Bezug auf Lösungen, die man ohne Hilfe gefunden hätte,) kleiner.
- Aufgrund des großen Angebots an möglichen Lösungswegen erhalten eigene Ideen vermutlich weniger Raum, als wenn keine Abbildungen vorgegeben werden. Dies könnte v. a. bei leistungsfähigeren Lernenden zu einem Aktivitätsrückgang führen.
- Wird diese Art von Hilfestellung zu oft verwendet, könnte Lernende ein falsches Bild vom mathematischen Problemlösen vermittelt werden.

Diese Thesen verdeutlichen, dass die Auswirkungen des Arbeitens mit Lösungsideen in Form von Bildern auf verschiedenen Ebenen unterschiedlich ausfallen können: Sie können positiv oder negativ sein und sie können kurzfristig oder langfristig wirken. Langfristige, nachhaltige Auswirkungen der vorgestellten Methode auf die Problemlösekompetenz und die Überzeugungen von Lernenden können sicherlich nur dann eintreten, wenn Lernende über einen langen Zeitraum hinweg immer wieder mit Problemen und zugehörigen Lösungshilfen konfrontiert werden. Eine entsprechende Untersuchung ist nicht das Ziel der vorliegenden Studie. Untersucht werden sollen stattdessen kurzfristige Auswirkungen, die sich direkt beim Einsatz der Methode beobachten bzw. anschließend erfragen lassen; aber auch über die oben erwähnten potentiellen langfristigen Auswirkungen lässt sich nach einer Erprobung spekulieren – beides wird im Diskussionsteil aufgegriffen. Beispielsweise die folgenden Fragen lassen sich hierzu formulieren: *Bietet die Methode leistungsschwachen Problemlösern angemessene Hilfestellungen? Werden Lernende wirklich zum Finden mehrerer Lösungswege angeregt? Lässt sich eine gesteigerte Motivation der Problemlösenden feststellen? Werden aber evtl. auch eigene Lösungsansätze der Lernenden unterdrückt und insbesondere leistungsstarke Problemlöser eingeschränkt?*

3. Das Problem und einige mögliche Lösungswege – mit Kommentaren

Die zu überprüfende Annahme, die der vorliegenden Studie zugrunde liegt, lautet also, dass Lösungsbeispiele, die bereits vor Beginn des Prozesses gegeben werden, hilfreich beim Problemlösenlernen sein können. Die Lösungen sollten allerdings nicht (fast) vollständig gegeben werden – die Vorgaben scheinen dann besonders lernförderlich zu sein, wenn die Lernenden selbst aktiv werden und sich Inhalte selbst erarbeiten müssen. Daher präsentieren wir Lösungsansätze in Form von Abbildungen, die das Finden von Lösungen erleichtern, ohne diese Lösungen komplett vorzugeben. Solche Ansätze und Ideen können auch unerfahrenen Problemlösern zu Lösungen verhelfen (Clark et al., 2006) und ermöglichen das Kennenlernen von Heurismen („Lernen am Modell“).

Für die Analyse wurde ein bekanntes geometrisches Problem gewählt, das unter anderen beim Wettbewerb Tamás Varga in Ungarn 1992 für Schülerinnen und Schüler der 7. Klasse gestellt wurde (Pogáts, 1995, S.99, vgl. auch Schoenfeld 1985, S. 77-81). Die Aufgabe lautet:

> Der Mittelpunkt eines Quadrats mit der Seitenlänge 2 cm sei ein Eckpunkt eines anderen Quadrats mit der gleichen Seitenlänge.
>
> Wie groß ist der gemeinsame Teil beider Quadrate?

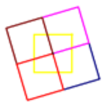
Das komplette Arbeitsblatt für die Erprobung ist in Abb. 2 dargestellt.

Für die Erstellung des Arbeitsblattes mit seinen sechs Bildern wurden Ideen aus vorher gesammelten bzw. angefertigten Lösungsansätzen genutzt (Ambrus, 2006, 2007a, 2007b). Es gibt außerdem weitere Lösungsmöglichkeiten, siehe z. B. bei Ambrus (2007b, Lösung 3) oder Rott (2013, Kap. 9). Die Bilder wurden so gestaltet, dass sie im besten Fall Ideen für mehrere Ansätze liefern können.

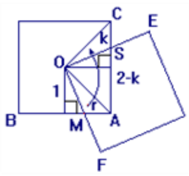
Die Aufgabe:
Der Mittelpunkt eines Quadrats mit der Seitenlänge 2cm sei ein Eckpunkt eines anderen Quadrats mit der gleichen Seitenlänge.
Wie groß ist der gemeinsame Teil beider Quadrate?

Ergänze die folgenden Abbildungen mit relevanten Lösungswegen:

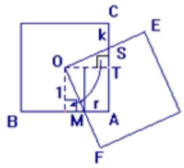
1.



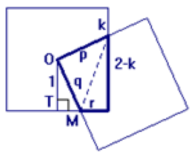
2.



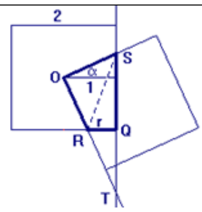
3.



4.

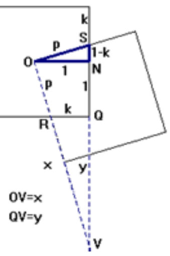


5.



$$RQ:1 = QT:ctg\alpha$$

6.



Mit Ähnlichkeit ergibt sich:

$x = \dfrac{2kp + p^3 - k^2 p}{p^2 - k^2}$, $y = \dfrac{kp^2 - k^3 + 2k^2}{p^2 - k^2}$ und

so ist der gemeinsame Teil:

$$T = \frac{px}{2} - \frac{ky}{2} = *\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$* \quad = \frac{p^2 - (k-1)^2 + 1}{2} = \ldots\ldots = 1$$

Abb. 2: Das Arbeitsblatt für die Studierenden

Im Weiteren werden die Lösungswege zu den sechs Bildern auf dem Arbeitsblatt aufgezeigt bzw. aus Platzgründen teilweise auch nur angedeutet. Dazu werden die jeweils benötigten Vorkenntnisse und die zugehörigen Schulstufen aufgezeigt, in denen dieses Wissen vorhanden sein sollte. Zusätzlich werden zu jedem Lösungsweg diejenigen Heurismen (vgl. Bruder & Collet, 2011, S. 37 ff.) kurz erläutert, die bei dem konkreten Ansatz unseres Erachtens am hilfreichsten sind. Der Heurismus „Veranschaulichung durch informative Figuren" ist dabei natürlich bei allen sechs Ansätzen von großer Bedeutung, durch das Arbeitsblatt größtenteils aber bereits vorgegeben und nur noch teilweise von den Problemlösern auszuführen.

In zusätzlichen Kommentaren werden neben den hilfreichen Heurismen auch didaktische Anmerkungen zu den Lösungswegen angegeben.

Diese Diskussion der Lösungswege basiert auf eigenen Lösungen des Problems sowie auf entsprechenden Abhandlungen aus der Literatur. Beispielsweise werden bei Pogáts (1995) zwei Lösungsmöglichkeiten erwähnt, die beide die Drehsymmetrie (vierten Grades) des Quadrats verwenden. Schoenfeld (1985) erwähnt die Aufgabe im Zusammenhang mit einer Diskussion über Heurismen bzw. konkret bei der Betrachtung von Spezialfällen.

Lösung 1

Lösungsskizze: Abbildungsgeometrisch lässt sich die abgebildete Konfiguration als vierfache Rotation der Ursprungsfigur um den Mittelpunkt des ersten Quadrats auffassen. Wegen der vierfachen Drehsymmetrie des (stehenden) Quadrates ergeben sich im ersten (stehenden) Quadrat vier zueinander kongruente, also insbesondere flächengleiche Vierecke. Die gesuchte Fläche ist damit ein Viertel des Quadrates, also 1 cm^2.

Vorkenntnisse: vierfache Drehsymmetrie des Quadrates, Erfahrungen mit Zerlegungen.

Stufe: 12 – 13 Jahre (7. Jahrgang)

Kommentar: Die Figur richtet die Aufmerksamkeit auf die vierfache Drehsymmetrie von Quadraten und macht es bereits jungen Schülerinnen und Schülern (ab Jahrgang 5) – natürlich auf einem altersmäßigen Niveau – möglich, einen Beweis für das Problem zu erstellen. Mögliche Heurismen in diesem Ansatz sind das Symmetrieprinzip und das Ergänzungsprinzip.

Lösung 2

Lösungsskizze: Man zeigt, dass die Dreiecke *OSC* und *OMA* nach dem Kongruenzsatz „SWW“ kongruent sind. Die Fläche des gemeinsamen Teils (F_{OMAS}) ist die Summe der Flächeninhalte von zwei Dreiecken (*ASO* und *OMA*):

$$F_{OMAS} = F_{ASO} + F_{OMA} = \frac{(2-k)\cdot 1}{2} + \frac{k\cdot 1}{2}$$
$$= \frac{2\cdot 1}{2} - \frac{k\cdot 1}{2} + \frac{k\cdot 1}{2} = 1$$

Alternativ kann die gesuchte Fläche durch Wegnehmen und Ergänzen der erwähnten kongruenten Dreiecke auf einen Spezialfall zurückgeführt werden (die Kongruenz folgt wie vorher aber auch direkt aus der vierfachen Drehsymmetrie des ersten Quadrates):

$$F_{OMA} + F_{ASO} = F_{OMA} + F_{OSC} = F_{OAC}.$$

und der Flächeninhalt von F_{OAC} ist ein Viertel des Flächeninhalts des Quadrates.

Vorkenntnisse: Kongruenz von Dreiecken, Erfahrungen mit Zerlegungen, Dreiecksfläche (Drehsymmetrie des Quadrates um den Mittelpunkt der kompletten Konfiguration um 90°, insb. dass die Strecken *OM* und *OS* gleich lang sind). Aufschreiben und Umformen von algebraischen Termen.

Stufe: 12 – 13 Jahre (7. Jahrgang)

Kommentar: Das Bild deutet (mindestens) die beiden angesprochenen Ansätze an, lässt aber auch weitere Ideen zu. Als Heurismen sind hier das Zerlegungsprinzip (Betrachtung von Teilflächen in der Konfiguration) und das Extremalprinzip (Rückführung auf einen Spezialfall) bzw. das Transformationsprinzip (algebraische Bearbeitung eines geometrischen Problems) sowie das Rückführungsprinzip (z. B. auf die Drehsymmetrie der Konfiguration, wenn sie schon im ersten Lösungsansatz erkannt wurde) naheliegend.

Lösung 3

Lösungsskizze: Die gesuchte Fläche kann zerlegt werden in zwei rechtwinklige Dreiecke und ein Rechteck mit den Seitenlängen *r* und 1. Die beiden Dreiecke sind (nach dem Kongruenzsatz „SWW“) kongruent zueinander, ihr Flächeninhalt beträgt:

$$F_{OTS} = \frac{(1-k)\cdot 1}{2}$$

Der Flächeninhalt des gemeinsamen Teils beträgt damit:

$$F = 2\cdot\frac{(1-k)\cdot 1}{2} + k\cdot 1 = 1$$

Alternativ kann durch ein „Umlegen“ des Dreiecks *OTS* (angedeutet durch den Pfeil) der gesuchte Flächeninhalt auf einen (im Vergleich zu Lösung 2 anderen) Spezialfall des gemeinsamen Teils zurückgeführt werden. Auch hier sieht man, dass der gesuchte Flächeninhalt wieder ein Viertel der Fläche des ersten Quadrates ist.

Die Kongruenz der erwähnten Dreiecke und auch das Umlegen des Dreiecks *OST* lassen sich wieder direkt mithilfe der vierfachen Drehsymmetrie des Quadrates begründen.

Vorkenntnisse: Kongruenz von Dreiecken, Erfahrungen mit Zerlegungen, Fläche von Dreiecken (Drehsymmetrie des Quadrates), Aufschreiben und Umformen von algebraischen Termen.

Stufe: 12 – 13 Jahre (7. Jahrgang)

Kommentar: Als Heurismen sind hier, wie bei der Lösung 2, das Zerlegungsprinzip, das Extremalprinzip, das Transformationsprinzip und das Rückführungsprinzip naheliegend.

Lösung 4

Lösungsskizze: Durch das Einfügen der gestrichelten Hilfslinie wird der gemeinsame Teil beider Quadrate in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt.

$k = r$ kann mithilfe der Dreiecke *OSC* und *OMA* (siehe Lösung 2) bewiesen werden.

Die Länge der Strecke *q* bzw. *p* lässt sich mithilfe des rechtwinkligen Dreiecks *OTM* mit dem Satz des Pythagoras ermitteln:

$$q = \sqrt{1^2 + (1-r)^2} = \sqrt{1^2 + (1-k)^2} = p$$

($k = r$ und $p = q$ gilt auch aufgrund der vierfachen Drehsymmetrie der Konfiguration)

Für die Fläche des gemeinsamen Teils gilt dann (nach Umformungen):

$$F = \frac{(2-k)\cdot k}{2} + \frac{p\cdot q}{2} = \frac{(2-k)\cdot k}{2} + \frac{p^2}{2}$$

$$= \frac{(2k-k^2)+(2-2k+k^2)}{2} = 1$$

Vorkenntnisse: Kongruenz von Dreiecken, Erfahrungen mit Zerlegungen, Fläche von Dreiecken (Drehsymmetrie des Quadrates), Satz des Pythagoras, algebraisches Umformen.

Stufe: 14 – 15 Jahre (8., 9. Jahrgang)

Kommentar: Der gemeinsame Teil der zwei Quadrate wird in diesem Fall noch einmal anders aufgeteilt als in den beiden zuvor betrachteten Lösungsansätzen. Das Transformationsprinzip und das Zerlegungsprinzip führen damit zu einem weiteren Lösungsweg; dasselbe gilt für das Rückführungsprinzip (z. B. auf die Drehsymmetrie oder auf kongruente Dreiecke aus vorangegangenen Lösungsansätzen).

Lösung 5

Lösungsskizze: Sei *T* der Schnittpunkt der Geraden durch *OR* und *SQ*. Sei *P* der angedeutete Punkt zwischen *S* und *Q*, so dass der Winkel *OPT* = 90° ist. Außerdem sei $\alpha \coloneqq$ Winkel *SOP*.

Die angegebene Formel $RQ: 1 = QT: \cot\alpha$ lässt sich in die Form $\frac{RQ}{QT} = \frac{1}{\cot\alpha}$ umformen und folgt aus dem rechtwinkligen Dreieck *TQR*, was ähnlich zum Dreieck *OPS* ist (Winkel *RTQ* ist auch gleich α). Damit folgt auch, dass *TQR* und *TOS* ähnliche Dreiecke sind.

Mithilfe von Winkelbetrachtungen lässt sich zeigen, dass $F_{\Delta OTS} = \frac{OS\cdot OT}{2} = \frac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha}$ und dass $F_{\Delta RTQ} = \frac{QT\cdot RQ}{2} = \frac{1-2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}$ gilt. Der gesuchte Flächeninhalt lässt sich damit bestimmen: $F = F_{\Delta OTS} - F_{\Delta RTQ} = \frac{1-(1-2\sin\alpha\cos\alpha)}{2\sin\alpha\cos\alpha} = 1$.

Vorkenntnisse: Satz über die Winkelsumme in Dreiecken, Ähnlichkeit von Dreiecken, Winkelfunktionen (Sinus, Kosinus, Tangens, Kotangens) und Flächeninhalt von rechtwinkligen Dreiecken, trigonometrische Umformungen, algebraisches Umformen.

Stufe: 16 – 17 Jahre (10., 11. Jahrgang)

Kommentar: Die gesuchte Fläche wird hier als Differenz von zwei Flächen bestimmt und die Angabe $RQ: 1 = QT: \cot\alpha$ auf dem Arbeitsblatt richtet die Aufmerksamkeit auf die Verwendung von Winkelfunktionen. Diese Lösung mit Winkelfunktionen sieht auf den ersten Blick komplizierter aus als die vorigen Lösungen, braucht aber nur elementare Kenntnisse von Winkelfunktionen und trigonometrischen Umformungen.

Diese Lösung hat ein Experte in Geometrie angefertigt, der zeigen wollte, dass diese Aufgabe auch mit diesem – hier ungewöhnlichen – Mittel (Verwendung von trigonometrischen Zusammenhängen) lösbar ist. Neuer Grundgedanke ist auch die angegebene Ergänzung des gemeinsamen Teils (Ergänzungsprinzip) und damit das Aufschreiben des gesuchten Flächeninhalts als Differenz von Flächeninhalten zweier Dreiecken; dies stellt zugleich einen Aspektwechsel dar, und damit eine Anwendung des Transformationsprinzips.

Lösung 6

Lösungsskizze: Die beiden Dreiecke *QRV* und *OSV* sind ähnlich (rechter Winkel sowie Winkel *SON* = Winkel *OVS*). Mit $x = |OV|$, $y = |QV|$ und $k = |RQ|$, $p = |OS| = |OR|$ (Drehsymmetrie) folgt, dass $\frac{|RQ|}{|OS|} = \frac{|RV|}{|SV|}$, also (1) $\frac{k}{p} = \frac{x-p}{y+2-k}$

sowie $\frac{|QV|}{|OV|} = \frac{|RQ|}{|OS|}$, also (2) $\frac{y}{x} = \frac{k}{p}$

Durch Einsetzen und Umformen erhält man: $x = \frac{2kp+p^3-k^2p}{p^2-k^2}$ sowie: $y = \frac{kp^2-k^3+2k^2}{p^2-k^2}$.

Damit folgt für den gesuchten Flächeninhalt *F*:

$$F = F_{OVS} - F_{QRV} = \frac{px}{2} - \frac{ky}{2} = \cdots = \frac{p^2-(k-1)^2+1}{2}$$

Im rechtwinkligen Dreieck SON gilt mit dem Satz des Pythagoras: $1^2 + (1-k)^2 = p^2$ und damit $p^2 - (k-1)^2 = 1$. Es folgt insgesamt: $F = \frac{p^2-(k-1)^2+1}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$.

Vorkenntnisse: Ähnlichkeit von Dreiecken (evtl. Strahlensätze), Flächeninhalt von rechtwinkligen Dreiecken, Pythagoras, algebraisches Umformen.

Stufe: 15 – 16 Jahre (9., 10. Jahrgang)

Kommentar: Der gemeinsame Teil wird hier auch als Differenz von den rechtwinkligen Dreiecken *OVS* und *QRV* bestimmt, aber dabei werden andere mathematische Kenntnisse verwendet als bei Lösung 5.

Das bereits zuvor verwendete Ergänzungsprinzip kann auch hier zu weiteren Lösungswegen führen. Das Erkennen der Ähnlichkeit der entsprechenden Dreiecke und/oder das Verwenden des Strahlensatzes kann hier aus heuristischer Sicht als Aspektwechsel

(Transformationsprinzip) interpretiert werden. Es ist natürlich auch möglich unter Verwenden von der Ähnlichkeit von anderen Dreieckspaaren am Bild weitere (ähnliche) Lösungen zu erarbeiten.

Zusammenfassung: Die sechs angedeuteten Lösungswege wurden so ausgewählt, dass mit ihnen eine möglichst breite Auswahl an Herangehensweisen und Problemlösestrategien abgedeckt ist. In Lösung 1 spielt die Drehsymmetrie die entscheidende Rolle, die auch in den weiteren Lösungsansätzen verwendet werden kann. In den anderen fünf Lösungen geht es um das Zerlegen und Berechnen von Teilflächen, wobei es in den Lösungen 2 – 4 um die Addition von Flächen geht, während es in den Lösungswegen 5 und 6 um die Differenz von Flächen geht. Die Lösungen 2 und 3 lassen zudem eine Zurückführung auf unterschiedliche Spezialfälle zu, in den Lösungen 4 – 6 werden zur Bestimmung der Flächeninhalte zusätzlich der Satz des Pythagoras, trigonometrische Funktionen und/oder Ähnlichkeit bzw. Strahlensätze benötigt.

4. Methode

Im vorliegenden Artikel wird das Arbeiten an Problemen mit mehreren angedeuteten Lösungswegen am Beispiel einer Aufgabe aus der Geometrie erprobt. Die Geometrie bietet sich hierfür an, da sich in diesem Bereich sehr viele geeignete Probleme finden lassen: „Geometry is a goldmine for multiple solution tasks.“ (Levav-Waynberg & Leikin, 2009. S. 776) Des Weiteren ist die Geometrie besonders geeignet, um Hilfestellungen in Form von Abbildungen anzubieten.

4.1 Die Erprobung (Teilnehmer, Umstände)

Die im Theorieteil diskutierte Methode, mithilfe von Bildern angedeutete Lösungswege als Impulse zur Anregung von Problemlöseprozessen zu nutzen und so verschiedene Lösungswege anzuregen, wurde von der Erstautorin mit Gruppen von Lehramtsstudierenden aus Ungarn und Deutschland durchgeführt. Zu drei Zeitpunkten wurde das oben vorgestellte Arbeitsblatt mit dem Quadrat-Problem und den sechs Lösungshilfen (s. Abb. 2) verwendet. Neben einer empirischen Überprüfung der oben aufgestellten Thesen ging es um die Frage, inwieweit die angedeuteten Lösungswege tatsächlich zum Erstellen verschiedener Lösungswege führen und wie diese Arbeitsform von den Studierenden aufgenommen und reflektiert wird.

Bei den drei Gruppen handelt es sich um (I) 19 ungarische Studierende im 9. Semester (letztes Studienseminar), die das Seminar „Mathematikdidaktik 3“ (mathematikdidaktische Forschung) besuchten; um (II) neun ungarische Studierende, ebenfalls im 9. Semester, im gleichen Kurs; sowie um (III) zwölf deutsche Studierende im 4. Semester, die das Seminar „Begabtenförderung“ besucht haben. Die Studierenden aller drei Gruppen haben für die Teilnahme Bonuspunkte für die Bewertung ihrer Seminararbeit sammeln können. Die Vorkenntnisse der Studierenden können sich aufgrund verschiedener Studienziele (Studium in unterschiedlichen Ländern, Lehramt für unterschiedliche Schulstufen etc.) unterscheiden. Die mathematischen Voraussetzungen zu den oben skizzierten Lösungen des Problems sollten allerdings bei allen Personen vorhanden sein, die eine Studienberechtigung erworben haben. Da es in der vorliegenden Studie nicht um einen Vergleich der Studierenden aus verschiedenen Ländern oder unter verschiedenen Studienbedingungen geht, werden die Gruppen im Folgenden nicht weiter unterschieden. Alle Studierenden erhielten gleiche Vorgaben: Der Arbeitsauftrag lautete, möglichst viele Lösungswege des Quadratproblems anhand der Abbildungen nachzuvollziehen und zu vervollständigen. Dabei wurden sie aufgefordert, für mindestens drei Abbildungen korrekte Lösungen anzugeben. Hierfür hatten sie zwei Wochen Zeit, es handelte sich um eine langfristige Hausaufgabe, die schriftlich abgegeben werden sollte. Zusätzliche Lösungen, die nicht zu den Bildern passen, wurden nicht eingefordert, da die Studierenden mit den vorhandenen Lösungshilfen arbeiten sollten.

4.2 Auswertung

Die Arbeitsblätter und alle zusätzlichen Aufzeichnungen auf anderen Zetteln wurden für die Auswertung eingesammelt und gescannt. Für jeden Studierenden wurde gezählt (a) zu wie vielen der sechs Bildern auf dem Arbeitsblatt er/sie Lösungsversuche unternommen hat und (b) wie viele Lösungsversuche er insgesamt unternommen hat (zu einem Bild konnten mehrere unterschiedliche Lösungsversuche abgegeben werden). Des Weiteren wurden (c) diese Lösungsversuche auf einer Skala von (1) bis (4) bewertet, inwiefern sie mathematisch korrekt und vollständig waren (siehe Tabelle 1). Um einen besseren Überblick über Bearbeitungserfolge zu erhalten, können die Kategorien (1) und (2) sowie (3) und (4) zu den Oberkategorien „kaum erfolgreich“ bzw. „erfolgreich“ zusammengefasst werden (vgl. Rott, 2013, S. 304).

Nach der Bearbeitung des Arbeitsblattes wurden die Lösungen besprochen. Abschließend wurde die Arbeit mit den angedeuteten Lösungen in allen drei Gruppen mündlich und/oder schriftlich reflektiert. Diese Reflexionen wurden gesammelt und werden im Folgenden analysiert.

Kategorie	Allgemeine Beschreibung	Aufgabenspezifische Operationalisierung
(0) Keine Bearbeitung	Der entsprechende Lösungsansatz wurde gar nicht bearbeitet	Der entsprechende Teil des Arbeitsblattes bleibt leer oder enthält nur Durchgestrichenes.
(1) Kein Ansatz	Der Lösungsansatz wurde zumindest in Teilen bearbeitet, wobei jedoch kein sinnvoller Ansatz zu erkennen ist.	Keine sinnvolle Bearbeitung [wenn z.B. die Aufgabe nicht verstanden wurde]; evtl. Verwendung falscher Formeln, Missverständnisse.
(2) Einfacher Ansatz	Das Problem wurde zu Teilen korrekt bearbeitet, dabei zeigen sich aber deutliche Mängel; wenn die Lösung Erklärungen erfordert, fehlen diese.	Äußern der Vermutung „ein Viertel (in speziellen Fällen)“; Skizzieren eines oder beider Spezialfälle.
(3) Erweiterter Ansatz	Das Problem wurde zu großen Teilen korrekt bearbeitet; wenn die Lösung Erklärungen erfordert, sind zumindest Ansätze dazu vorhanden.	Explizites Äußern der allgemeinen Vermutung „immer ein Viertel (egal wie die Quadrate zueinander liegen)“ mit einer lückenhaften oder teilweise fehlerhaften Begründung.
(4) Korrekter Ansatz	Das Problem wurde korrekt gelöst und diese Lösung angemessen begründet.	Äußern der allgemeinen Vermutung und (Ansätze zur) Begründung, beispielsweise Argumentation mithilfe von Drehsymmetrie oder kongruenten Dreiecken.

Tab. 1: Die Skala zur Bewertung der Lösungsversuche (nach Rott, 2013)

Lösung Nr.	1.		2.		3.		4.		5.		6.	
	n	%	n	%	n	%	n	%	n	%	n	%
(0) Keine Bearbeitung	7	18,9	1	2,7	1	2,7	5	13,5	17	45,9	12	32,4
(1) Kein Ansatz (2) Einfacher Ansatz	5 1	16,2	1 4	13,5	1 5	16,2	2 4	16,2	3 7	27,0	1 6	18,9
(3) Erweiterter Ansatz (4) Korrekter Ansatz	13 11	64,9	15 16	83,8	12 18	81,1	6 20	70,3	1 9	27,0	1 17	48,6

Tab. 2: Übersicht über 37 Bearbeitungen des Arbeitsblattes; von 100% abweichende Spaltenwerte beruhen auf Rundungsfehlern

5 Ergebnisse und Diskussion der Ergebnisse

5.1 Auswertung der Arbeitsergebnisse

An dieser Stelle werden die Arbeitsergebnisse der drei Erprobungen gruppenübergreifend vorgestellt und anschließend diskutiert.

Der Übersicht in Tabelle 2 kann entnommen werden, dass die Studierenden insgesamt sehr intensiv mit dem Arbeitsblatt gearbeitet haben. Insbesondere die Lösungen 2 und 3 wurden gruppenübergreifend sehr erfolgreich bearbeitet. Bei den ersten vier Lösungen liegt der Anteil der Problemlöser, die eine gute Leistung (Kategorie (3), (4)) geschafft haben, beträchtlich höher als der Anteil der weniger erfolgreichen Studierenden. Dass die Bearbeitungen der Lösungen 5 und 6 am schlechtesten ausgefallen sind, könnte ein Reihenfolgeeffekt sein. Allerdings hatten die Studierenden für die Bearbeitung des Arbeitsblatts zwei Wochen Zeit. Und auch die Tatsache, dass zu Lösung 6 mehr Lösungen abgegeben wurden als zu Lösung 5 spricht – wie die Sachanalyse in Kapitel 3 – eher für inhaltliche Schwierigkeiten (wie z. B. fehlende Kenntnisse und die Tatsache, dass Flächenanteile subtrahiert werden müssen) bei der Bearbeitung dieser Lösungsansätze.

Bei einigen (insbesondere deutschen) Studierenden ist aufgefallen, dass sie nur beschrieben haben, was auf den Bildern zu sehen ist, ohne zugehörige Aussagen auch nur ansatzweise zu begründen. Aus den abgegebenen Dokumenten wird leider nicht ersichtlich, ob die Problemlöser solche Stellen als trivial betrachtet und darum nicht weiter ausgeführt haben, oder ob sie an den entsprechenden Stellen nicht wussten, dass etwas zu begründen ist bzw. wie sie dies tun können.

Die meisten Bilder wurden so bearbeitet, wie es von den Autoren antizipiert worden ist (siehe Kapitel 3). Bei Lösung 5 haben einige Studierende einen zusätzlichen Lösungsweg gefunden: unter Nutzung der Ähnlichkeit von Dreiecken wird die gesuchte Fläche in ein Trapez und ein rechtwinkliges Dreieck aufgeteilt und das Flächenverhältnis korrekt bestimmt. Bei Lösung 6 haben relativ viele der eher erfolgreichen Studierenden nicht die intendierte Lösung mithilfe des Satzes des Pythagoras abgegeben, sondern mithilfe der Ähnlichkeit von (anderen) Dreiecken argumentiert, für x und y andere Formel gesucht und auf diese Weise den gemeinsamen Teil als Differenz der zwei entsprechenden Dreiecke bestimmt.

5.2 Reflexion der Arbeitsergebnisse

Im Folgenden reflektieren wir kurz die Arbeitsergebnisse, um einzuschätzen, wie die Hilfestellungen gewirkt haben und wie konkret solche Hilfen sein sollten.

Unsere bisherige Erfahrung mit dem „Quadrat“-Problem ist folgende: Wenn Studierende – ohne Vorgabe von Abbildungen – den Arbeitsauftrag hatten, möglichst viele Lösungsansätze zu finden, wurden in der Regel ein bis zwei Lösungen erstellt. Nur hoch interessierte und leistungsfähige Lernende fanden teilweise drei, höchstens vier Lösungsideen. Solche Erfahrungen gab es auch mit anderen geometrischen Problemen unter vergleichbaren Bedingungen (z. B. Ambrus, 2011).

Bei der hier diskutierten Arbeit mit Bildern haben die Studierenden mehr Lösungsansätze gefunden: In allen drei Gruppen hat ein Großteil der Studierenden zu mindestens drei Bildern korrekte oder fast korrekte Lösungsansätze angefertigt – einige Studierende haben sogar mehrere Lösungen zu einem Bild erstellt. Diese Beobachtung spricht für die Arbeit mit Lösungshinweisen, wenn man eine Vielfalt von Lösungen erzeugen möchte.

Die Lösungen 5 und 6 wurden über alle drei Gruppen hinweg relativ schlecht bearbeitet. Bei dem 5. Bild war die Lösungshilfe – im Gegensatz zu den vorigen Bildern – weniger direkt und ermöglichte den Studierenden so, kreativer zu sein; ähnliches gilt für Lösung 6. In beiden Fällen sollte der gesuchte Flächeninhalt nicht als Summe, sondern als Differenz von Flächen ausgedrückt werden – dies war anscheinend ungewohnt und hat zur niedrigen Lösungsquote beigetragen.

5.3 Einschätzung der Arbeitsform durch die Studierenden

Um die hier vorgestellte Methode, die Arbeit mit angedeuteten Lösungen, besser einschätzen und fortentwickeln zu können, reicht eine Analyse der schriftlichen Arbeiten der Studierenden nicht aus. Aus diesem Grund werden im Folgenden die (teilweise schriftlichen) Reflexionen der Studierenden zur Arbeit mit angedeuteten Lösungswegen ausgewertet.

Als erstes fällt auf, dass es den Studierenden schwer fiel, die Methode an sich zu reflektieren. Hauptsächlich bezogen sich die Rückmeldungen auf das Arbeitsblatt bzw. auf konkrete Bilder. Beispielsweise wurde von einigen Studierenden vorgeschlagen, bei Bild 5 die gestrichelte Strecke zu entfernen, da sie irreführend gewesen sei. Einige Studierende gaben an, dass es „irreführend“ sei, wenn zu einer Abbildung mehrere Lösungswege möglich wären. Auch hätten sie sich teilweise konkretere Hilfen gewünscht, beispielsweise dass gleichlange Strecken (z. B. p und q in Bild 4 auf dem Arbeitsblatt) direkt mit demselben Buchstaben bezeichnet würden.

Insgesamt wurde die Arbeit an dem Arbeitsblatt positiv aufgenommen: Einige Studierenden haben angegeben, dass sie durch die Abbildungen zu verschiedenen Lösungswegen bzw. Lösungen inspiriert wurden. Auch wurde in einigen Texten betont, dass sie so viele verschiedene Lösungsansätze ohne die Hilfestellungen gewiss nicht hätten erarbeiten können. Eine Studentin, die für alle Bilder korrekte Lösungen anfertigen konnte, schrieb: „Ich selbst – ohne Hilfe – hätte nur an die Ansätze gedacht, die in den Bildern 2 und 3 angedeutet wurden.“ Eine andere – weniger erfolgreiche – Studentin, schrieb in der Einleitung ihrer Reflexion, dass es gut gewesen sei, die Lösungsansätze nicht „aus dem nichts“ ausdenken zu müssen, da ihre Arbeit ansonsten gewiss dreimal so lange gedauert hätte. Weiter schrieb sie: „Ich habe auch darüber nachgedacht, dass es sich lohnt, evtl. eine Aufgabe mit mehreren Lösungswegen auch in der Schule auszuprobieren. Ich fand spannend zu bedenken, dass sogar dieselbe Aufgabe in verschiedenen Jahrgängen – mit immer höheren ‚Werkzeugen‘ und immer komplexer – gelöst werden kann. Mir haben die Bilder viel geholfen, vielleicht habe ich eine ähnliche Denkweise wie der ‚Ersteller‘ der Bilder.“ Mehrere Studierende haben angemerkt, dass es „interessant war, andere Denkweisen kennenzulernen“, und dass diese Arbeit ihnen Spaß gemacht hätte, auch wenn sie nicht zu jedem Bild eine Lösung gefunden hätten.

Vereinzelt gab es aber auch negative Rückmeldungen: Ein sehr guter Problemlöser fand das Problem überhaupt nicht interessant. Er hat anscheinend wenig Zeit mit der Arbeit verbracht und nur Skizzen der Lösungen angegeben. Zu Bild 6 schrieb er am Rand des Blattes die Bemerkung, dass es zu lang und uninteressant sei, nach den vorangehenden Lösungen noch an weiteren Lösungsansätzen zu arbeiten.

Insgesamt zeigen die Bemerkungen der Studierenden aus allen drei Gruppen, dass sie die auf dem Arbeitsblatt vorgestellte Problemlöse-Methode mit Abbildungen größtenteils als hilfreich, inspirierend und interessant empfanden – auch wenn sich die Mehrheit konkretere und eindeutigere Hilfen bzw. Andeutungen von Lösungswegen gewünscht hätte.

Weitere Äußerungen der Studierenden lauteten wie folgt:

- „Es war interessant zu erleben dass man aus derselben Abbildung auch auf verschiedene Lösungsansätze zu kommen kann. Es ist gar nicht leicht sogar aus konkret angegebene ‚Lösungsanfangen' die ganze Lösung anzugeben." (Studierende mit schlechterem Resultat)
- „Ich habe viel gelernt daraus, wie wichtig eine entsprechende (gute) Abbildung ist." (guter Problemlöser)
- „Ich arbeitete gern mit den Bildern aber die Reflexionen waren zu viel." (guter Problemlöser)
- „Die Aufgabe mit den Abbildungen wurde mir sehr lieb, aber Vorsicht mit den vielen Abbildungen – die können diese Methode auch unbeliebt machen. In meinem Schulpraktikum habe ich diese Aufgabe mit zwei Abbildungen erprobt (alternative Aufgabe für eine Woche + Besprechung nachher). Die Schüler waren aktiv aber etwas weniger begeistert wie ich." (guter Problemlöser)

Wenn man die Reflexionen der Studierenden aller drei Gruppen nach dem Erfolg ihrer Problembearbeitung sortiert, ergibt sich das folgende Bild: Die erfolgreichen Studierenden, die mehrere korrekte Lösungen angegeben haben, konnten deutlicher reflektieren, inwiefern das Arbeitsblatt ihnen geholfen hat, auf Ideen für bestimmte Lösungswege zu kommen. Die weniger erfolgreichen Studierenden, die höchstens zwei korrekte Lösungen angegeben haben, haben in der Regel nur ihre individuellen Schwierigkeiten gesehen und sich stärkere Hilfestellungen gewünscht.

6. Diskussion

Ziel des vorliegenden Artikels ist es, eine bislang wenig verbreitete Methode zum Problemlösenlernen, die Arbeit mit konkreten Lösungsideen in Form von Bildern, vorzustellen, zu diskutieren und empirisch zu erproben. Lernende werden mithilfe dieser Methode dazu aufgefordert, verschiedene Lösungen zu einem (im vorliegenden Fall geometrischen) Problem zu finden. Wir erhoffen uns dadurch, eine Lerngelegenheit für die Anwendung und für das Erkennen von Heurismen zu schaffen, sowie die Lernenden zu einer vertieften Auseinandersetzung mit Problemen und dadurch mit ihren diesbezüglichen Beliefs anzuregen.

6.1 Diskussion der Thesen zum Einsatz von Lösungshilfen

Im Folgenden reflektieren wir die Methode anhand der Zusammenfassung des Literaturteils und der daraus abgeleiteten Thesen in Abschnitt 2.4, wobei insbesondere die von uns als „kurzfristig wirkend" bezeichneten Thesen von Interesse sind:

- Das Finden von Lösungswegen wird erleichtert, insbesondere können durch die Vorgabe von Lösungsideen auch unerfahrene Problemlöser eher zu einer Lösung gelangen (Clark et al., 2006).

Soweit wir das einschätzen können, handelt es sich bei den meisten Studierenden, die an der Erprobung teilgenommen haben, nicht um erfahrene Problemlöser. Geometrische Probleme, die vor dem hier beschriebenen Arbeitsblatt (und ohne entsprechende Hilfen) eingesetzt wurden, haben ihnen teilweise große Schwierigkeiten bereitet. Die Ergebnisse der Erprobung zeigen, dass die Methode der Lösungshilfen in der Form von Abbildungen für solche Studierenden eine gute Unterstützung beim Problemlösen sein kann. Rein quantitativ wird aus Tabelle 2 ersichtlich, dass zu allen sechs Bildern mehrere korrekte Lösungen angefertigt werden konnten. Schaut man auf die Studierendenebene, zeigt sich, dass fast alle Teilnehmenden mindestens drei (fast) korrekte Ansätze abgeben konnten.

Aus einer eher qualitativen Betrachtung heraus zeigen die Kommentare und Reflexionen der Studierenden, dass die Abbildungen beim Finden von Lösungswegen als hilfreich wahrgenommen wurden und die Arbeit mit dem Arbeitsblatt insgesamt positiv aufgenommen wurde. Letzteres könnte langfristig eine positive Einstellung der Studierenden gegenüber solchen Arbeitsaufträgen im Speziellen und dem Problemlösen im Allgemeinen fördern.

Es gibt Studierende, die sich andere, mehr oder sogar konkretere Bilder und Lösungshilfen gewünscht haben, hierzu ist aber Folgendes zu sagen: Es war nicht unser Ziel, den Teilnehmenden die problemlösende Tätigkeit komplett abzunehmen, das Problemlösen sollte nur erleichtert und um zusätzliche Lösungsansätze erweitert werden. Es bleibt aber festzuhalten, dass es auch unter der (hochselektierten) Gruppe der Mathematikstudierenden solche gibt, die anscheinend noch intensivere Hilfestellungen beim Problemlösen benötigen, um (eine) Lösung(en) zu finden.

- Das Finden verschiedener Lösungswege wird erleichtert, auch solche Problemlöser, die ohne Hilfe eine Lösung finden können, aber dann keine weiteren Lösungsideen entwickeln, können durch angedeutete Lösungsideen weitere Ansätze finden und ausführen.

Die Rückmeldungen der Studierenden zeigen recht deutlich, dass die Abbildungen dazu beigetragen haben, dass die Studierenden verschiedene Lösungen gefunden bzw. Lösungswege eingeschlagen haben. Ohne die Abbildungen hätten die Studierenden nicht so viele Lösungsansätze gefunden und (zumindest in Ansätzen) durchdacht.

Die erhöhte Anzahl von Lösungen gilt auch nicht ausschließlich für leistungsschwache Problemlösende: Beispielsweise betonte eine Studentin, die zu allen sechs Bildern korrekte Lösungen anfertigen konnte (für ein Bild sogar mehrere Lösungen), dass sie ohne die Hilfestellungen auf dem Arbeitsblatt nur die Lösungswege, die in den Bildern 2 und 3 angedeutet werden, gefunden hätte. Dass gerade diese beiden Lösungsansätze häufig gefunden werden, bestätigen unsere vielfältigen Erfahrungen mit dem Problem (vgl. Ambrus, 2013; Rott, 2013).

- Mehr Lernende fühlen sich angesprochen (interessiert), an der Problemlösearbeit teilzunehmen, da durch die Vorgabe von Lösungsideen – auf heuristischer, aber auch auf inhaltlicher Ebene – die Einstiegshürde gesenkt wird; insbesondere werden auch Lösungen auf verschiedenen Schwierigkeitsniveaus ermöglicht.

Aus den von uns angegebenen Lösungswegen und dem jeweils benötigten Vorwissen (siehe Kap. 3) wird sichtbar, dass es bei diesem Problem Möglichkeiten für Lösungsansätze auf unterschiedlichem Niveau bzw. von unterschiedlicher Komplexität gibt. Die Arbeit auf unterschiedlichem Niveau wurde auf dem Arbeitsblatt mit den Bildern bewusst ermöglicht; beispielsweise in den „einfacheren“ Lösungen zu den Bildern 2 und 3 und bei den anspruchsvolleren Erwartungen der möglichen Lösungen zu Bild. 5. Die Ergebnisse der Erprobung zeigen, dass diese Einschätzung im Allgemeinen richtig war: die von uns als „einfacher“ eingeschätzten und eher für untere Schulstufen geeigneten Lösungswege wurden insgesamt häufiger korrekt bearbeitet. Dies bedeutet aber nicht dass die Arbeit am Blatt im Allgemeinen für die nicht leistungsstarken Studierenden nicht interessant war.

Die meisten Studierenden zeigten sich neugierig und interessiert – und das nicht nur während der Bearbeitung, sondern auch bei der Besprechung: sie haben bei den problemhaften Teilen nachgefragt und waren sichtbar froh, endlich auch in diesen Fällen Ansätze kennenzulernen, auch wenn sie bei der eigenen Arbeit dabei Schwierigkeiten hatten – wie auch die mündliche Äußerungen zeigten. Eine weniger leistungsstarke Studentin hat später – nach der Besprechung – sogar freiwillig die Methode – mit drei Abbildungen – im Rahmen ihres Schulpraktikums mit Schülerinnen und Schülern ausprobiert und darüber in der Gruppe berichtet.

Einige Studierende (mit unterschiedlichen Leistungen) fanden aber diese Arbeit mit den Abbildungen etwas langweilig – sie waren der Meinung dass es überflüssig ist, so viele Lösungswege zum demselben Problem kennenzulernen. Nach den Rückmeldungen (schriftlich oder mündlich) waren diese Studierenden mit ihrer Meinung in der Minderheit. Wir deuten diese Beobachtung so, dass die Vorgabe der Hilfe mit Abbildungen zum Erstellen von Ansätzen auf unterschiedlichem Niveau eine eher intensivere Auseinandersetzung mit dem Problem bedeutete.

- Die Andeutung unterschiedlicher Lösungswege regt dazu an, diese (evtl. erst nach der Bearbeitung des Problems) im Sinne von Pólyas (1945) Rückschau zu vergleichen und zu reflektieren, was zur Schulung der Problemlösefähigkeit beitragen kann.

Die Qualität der angegebenen Lösungen zeigt, dass viele Studierende grundsätzliche Schwierigkeiten haben zu entscheiden, was als korrekte Lösung akzeptabel ist. Unabhängig von möglichen Gründen für diese Schwierigkeiten, die hier nicht diskutiert werden soll, wäre die Etablierung einer reflektierenden Rückschau im Sinne Pólyas also etwas sehr Wünschenswertes, um Fehler und Missverständnisse zu thematisieren. Die Erprobungen konnten zeigen, dass die Studierenden verschiedene Lösungswege erstellen und diese bezüglich der verwendeten mathematischen Methoden und ihres Schwierigkeitsgrads vernünftig miteinander vergleichen können.

Die potentiellen langfristigen Auswirkungen (siehe Abschnitt 2.4) können anhand unserer Studie nur sehr begrenzt diskutiert werden, da keine langfristige Erprobung stattgefunden hat. Hierzu ist also weitere Forschung nötig. Zusammenfassend kann gesagt werden, dass die Studierenden sich definitiv aktiv mit dem Problemlösen auseinander gesetzt hatten, sie haben Lösungswege (vollständig oder in Teilen) nachvollzogen und dabei (mehr oder weniger erfolgreich) Heurismen angewendet. Unsere Erfahrungen mit Lehramtsstudierenden zeigen aber deutlich, dass diese nicht genügend auf das Problemlösen vorbereitet sind. Einerseits werden etwas anspruchsvollere Aufgaben von ihnen oft gar nicht bearbeitet, da sie keine Idee haben wie sie anfangen könnten. Andererseits werden in der Regel höchstens zwei Lösungswege angegeben (nur ganz selten mehr), wenn überhaupt mehr als ein Lösungsweg angefertigt wird – selbst wenn dies direkt gefordert ist und/oder die Probleme nicht besonders anspruchsvoll sind.

Bei den Studierendenlösungen der vorliegenden Erprobung ist einerseits sichtbar, dass auch mit Hilfestellungen das Lösen von Problemen weiterhin „zeitaufwändig“ und kognitiv anspruchsvoll bleibt, da es nicht leicht ist, die Ansätze in den Bildern schnell zu rekonstruieren bzw. zwischen den Lösungsansätzen zu wechseln. Andererseits versuchten die meisten Studierenden mehrere Lösungswege zu rekonstruieren bzw. zu vervollständigen, und haben damit Ideen für mindestens drei bis vier Lösungswege generiert und teilweise ausgearbeitet, was (wie gesagt) ohne Hilfestellungen nur selten vorkommt. Ihr Bild über mathematischen Problemlösen ist verschieden, ihre Äußerungen zeigen aber, dass das Arbeiten mit unserer Methode viele Studierende von der Wichtigkeit geeigneter Strategien (z. B. richtige Abbildungen erstellen) überzeugte.

Beim intensiven Arbeiten mit solchen Hilfestellungen bei Problemlösen stellt sich die Frage, ob sich die Befürchtung einer Verlagerung vom heuristischen zum mathematischen Arbeiten bewahrheitet.

Nach den vorhandenen Erfahrungen lässt sich Folgendes feststellen: Die Lösungsvielfalt – aber auch die Schwierigkeiten, die sich in den verschiedenen Ansätzen und den Reflexionen offenbart haben – zeigt deutlich, dass die Studierenden problemlösend tätig waren und heuristisch gearbeitet haben. Es wurden keine algorithmischen Programme „abgearbeitet“, sondern es wurde probiert und nach Lösungsansätzen gesucht. Beispielsweise haben ein paar der leistungsstarken Studierenden sogar mehrere Lösungsansätze zu einzelnen Abbildungen angefertigt, was für heuristisches Arbeiten und dafür spricht, dass solche (evtl. besonders kreative) Lernende durch die Vorgabe von Lösungsideen nicht gehemmt wurden. Insbesondere zeigt sich auch bei den weniger erfolgreichen Studierenden, die sich konkretere Hinweise erhofft haben, dass sie eben nicht einfach auf bekannte Verfahren zur Lösung der Aufgabe zurückgreifen konnten, sondern problemlösend tätig werden mussten.

Dazu gehört auch die Frage, inwieweit die Hilfestellungen „eindeutig“ waren, (Wurden nur die von den Forschern intendierten Lösungswege beschritten?). Besonders bei den Lösungen 5 und 6 wurde klar, wie sehr die vorangehenden Gedanken die weiteren beeinflussen (z. B. wollten die Studierenden wieder den gemeinsamen Teil zerlegen, anstatt die Änderung des Bildes zu betrachten und nach neuen Ansätzen zu suchen) und die Kreativität einschränken können. Dies könnte auch bei einem selbständigen Problemlösen, ohne vorgegebene Ansätze, bei der Suche nach weiteren Lösungsansätzen der Fall sein und könnte auch das Erstellen weiterer Ansätze behindern – aber natürlich sind auch andere Ursachen hierfür möglich. Es ist aber wichtig anzumerken, dass dieses Phänomen erst nach drei bis vier Lösungswegen erschien (siehe z. B. Zerlegung statt Differenz von Flächen usw.) und nicht alle Problemlöser betraf.

6.2 Zum Einsatz der Methode in der Ausbildung von Lehrpersonen

Die Erprobung der hier vorgestellten Methode hat gezeigt, dass sie beim Problemlösen-lernen grundsätzlich eine gute Ergänzung bestehender Methoden sein kann. Im Folgenden wollen wir diskutieren, warum wir denken, dass unsere Methode insbesondere in der Phase der Ausbildung von Lehrpersonen geeignet sein könnte.

Aus der entsprechenden Forschung wissen wir, dass der Einsatz problemhaltiger Aufgaben im Mathematikunterricht der Schule stark mit dem entsprechenden Wissen und Können von Lehrpersonen korreliert ist (z. B. Guberman & Leikin, 2013). Lehrpersonen, die wenig eigene Erfahrung mit dem Problemlösen besitzen, können Problemlöseprozesse ihrer Schülerinnen und Schüler nicht gut analysieren und diagnostizieren und die Lernenden entsprechend nicht adäquat fördern. Zudem ist empirisch mehrfach gezeigt worden, dass eine gewisse Form des reflektierten Arbeitens mit Problemen eine „unabdingbare Voraussetzung“ und sogar ein „erklärtes Ziel allgemeinbildenden Unterricht ist“ (Leuders, 2003, 132 – 133). Lehrpersonen mit wenig Erfahrung im Problemlösen setzen aber weniger Probleme in ihrem Unterricht ein – alleine schon weil sie weniger geeignete Aufgaben und deren Lösungen bzw. Bearbeitungsmöglichkeiten kennen und beim Problemlösen selbst unsicher sind.

Insbesondere sollte (zukünftigen) Lehrpersonen vermittelt werden, dass die meisten Probleme unterschiedliche Herangehensweisen und Lösungswege ermöglichen. Wenn Lehrpersonen davon überzeugt sind, dass (Schul-) Aufgaben in der Regel nur einen korrekten Lösungsweg besitzen oder dass mehrere Lösungen unnötig sind, werden entsprechende Ansätze und Bemühungen von Schülerinnen und Schülern nicht gewürdigt; evtl. kann es sogar zu sachunangemessenen Rückmeldungen oder unfairen Bewertungen kommen. Entsprechende Beliefs bei (angehenden) Lehrpersonen zu ändern bzw. aufzubauen ist ein langwieriger Prozess, wobei eine grundlegende Änderung davon abhängt, wie stark entsprechende Vorstellungen in die jeweilige kognitive Struktur eingebunden sind (siehe z. B. Grigutsch et al., 1998, S. 10), und wie problematisch die jeweilige Vorstellung für die Schulpraxis erscheint (Thompson, 1992). Überzeugungen zum Problemlösen sind in der Regel stark vernetzt, daher sind intensive mathematische Tätigkeiten nötig, um solche Überzeugungen zu ändern – beispielsweise das Lösen von Problemen, das Lesen relevanter Fachliteratur oder eigene Forschungsarbeiten, die über einen längeren Zeitraum selbsttätig durchgeführt werden (z. B. Bernack et al., 2011). Mit dem Einsatz der von uns vorgestellten Methode wollen wir hierzu (insbesondere) in der 1. Phase der Lehrerausbildung einen Beitrag leisten wobei die (künftigen) Lehrpersonen sich nicht nur selbst mit Problemen reflektierend beschäftigen sollten, sondern auch eine weitere Möglichkeit für das Bearbeiten von (geometrischen) Probleme kennenlernen sollten. Solche Erfahrungen sind mehr als eine herkömmliche Hilfestellung beim Problemlösen, da sie das fachdidaktische Wissen der Studierenden erweitern.

6.3 Zum Einsatz der Methode in der Schule

Auch wenn sich die hier dargestellten Überlegungen auf Studierende beziehen, lässt die Methode auch einen Einsatz in der Schule zu. Und tatsächlich haben wir ein vergleichbares Aufgabenformat in einem Schulbuch finden können. Das folgende Beispiel (Abbildung 3) aus einem ungarischen Arbeitsheft für die Klassenstufe 5 illustriert recht gut, wie wir uns konkrete Hilfestellungen und Lösungsansätze vorstellen, die bereits vor dem eigentlichen Problemlöseprozess zur Verfügung gestellt werden. Die Schülerinnen und Schüler werden angeregt, drei verschiedene Lösungswege einer geometrischen Aufgabe nachzuvollziehen und die leeren Stellen zu ergänzen. In Abb. 3 ist zugleich eine Schülerlösung zu sehen.

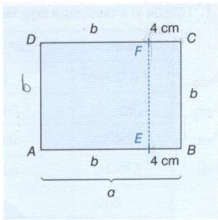
Auf dieser Seite des Arbeitshefts bekommen die Schülerinnen und Schüler viele Hilfen; die verschiedenen Lösungsansätze können damit leicht und relativ schnell erstellt werden. Das didaktische Ziel ist das Erkennen und Vergleichen verschiedener Ansätze für dieselbe Aufgabe. (In dem zitierten Arbeitsbuch gibt es übrigens insgesamt zwölf solcher Aufgaben mit direkten Hilfen zum Problemlösen; darunter ist die zitierte die einzige, in der auch mehrere Lösungswege angeboten werden.)

Im ersten Ansatz wird das ursprüngliche Rechteck durch eine Hilfslinie in ein Quadrat und ein schmales Rechteck aufgeteilt. Im zweiten Ansatz wird das ursprüngliche Rechteck zu einem Quadrat ergänzt.

Beide Ansätze, die einander in gewissem Sinne ähnlich sind, lassen sich zu allgemeinen Strategien für geometrisches Problemlösen verallgemeinern. Der dritte Ansatz führt eher auf eine algebraische Lösung.

Die Aufgabe:
Pisti faltet einen Papierhut. Er faltet ein Blatt Papier, dessen eine Seitenlänge um 4 cm größer ist als die andere und dessen Umfang 144 cm beträgt. Wie groß sind die Seitenlängen des Blattes?

1. Lösung:

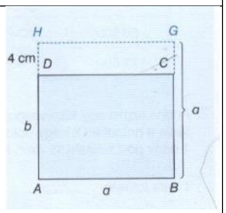


Wenn von der längeren Seite die 4 cm (die diese Seite länger ist) weggenommen würden, hätte das so entstandene Rechteck AEFD einen Umfang von ……………. .

144-8 (cm) = 136 (cm).
Die 136 cm ist die 4 - fache der Länge der Seite b.
So gilt b = 136:4 (cm).
b= 34 cm; a = 38 cm.

Überprüfung: K = 2·(a+b). K = 2·72 = 144 cm.

2. Lösung:

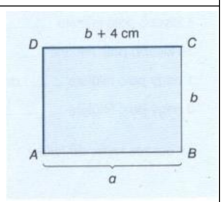


Wenn die kürzeren Seiten um 4 cm verlängert würden, erhalten wir ……….. .
144+8(cm) = 152 (cm).

Diese Zahl ist das 4 -fache der Länge der längeren Seite.
Dann ist die längere Seite = 152:4 (cm) lang.

a= 38 cm; b = 34 cm.

3. Lösung:



Wenn der Umfang des Blattes durch 2 dividiert wird, erhalten wir die Hälfte des Umfanges:

144 cm:2 = 72 cm
a + b = 72 cm.
Da a > b ist, ergibt sich 4 cm
72 cm – 4 cm = 68 cm,
und es ist das 2 -fache der Seite b.
So ergibt sich b = 68 cm:2, b = 34 cm.
a = b+4 cm, a = 38 cm.

Wir haben bei den drei Lösungen dasselbe Resultat bekommen. Die Seiten des Blattes von Pisti sind 34 cm und 38 cm lang.

Abb. 3: Übersetztes Beispiel aus einem ungarischem Arbeitsheft (Kl. 5), (Csordás et al., 2014, S. 65)

Insgesamt sind die Vorgaben dieses Materials allerdings schon sehr konkret und bieten den Schülern nur wenige Möglichkeiten für eigene Entdeckungen. Es sind durchaus weniger konkrete Vorgaben und Hilfestellungen denkbar: Hätte man nur die Abbildungen, würden diese vermutlich nicht nur zum Verständnis der Aufgabe beitragen, sondern auch Impulse für die verschiedenen Lösungsansätze geben.

6.4 Grenzen der Studie

Die Einschränkungen, denen die vorliegende Studie unterliegt, wurden in den einzelnen Diskussionspunkten bereits angesprochen und sollen hier zusammenfassend reflektiert werden: Die Anzahl der Probanden unserer Studie ist nicht sonderlich groß und insbesondere wurde nur eine Aufgabe mit Lösungsansätzen in Bildform getestet. Auch wurden die Beliefs der Studierenden und mögliche Änderungen der Beliefs – sofern das in einer Kurzzeit-Studie überhaupt möglich ist – nicht systematisch erfasst.

Das Ziel der vorliegenden Studie war allerdings, die Methode der Arbeit mit bildlichen Lösungshilfen beim Problemlösen vorzustellen, theoretisch zu diskutieren und ihre generelle Eignung zu untersuchen. Diesen Zweck können der vorliegende Artikel und die zugehörige empirische Untersuchung erfüllen. Zusätzlich sollte angemerkt werden, dass nicht alle theoretisch diskutierten Punkte mit der hier beschriebenen Erhebung untersucht werden konnten – gerade mögliche Effekt eines häufigen und/oder langzeitigen Einsatzes der vorgestellten Methode bleiben momentan zwangsläufig unbeantwortet.

6.5 Ausblick

Geplant sind weitergehende Erprobungen der vorgestellten Methode, wobei zunächst das Blatt mit den Abbildungen auf der Basis der bisher gewonnenen Erfahrungen modifiziert werden soll: Eine lokale Optimierung wären beispielsweise das Entfernen der Strecke RS in Abb. 5, die oft als „ablenkend“ oder „irreführend“ kritisiert wurde. Der Hinweis zu Abb. 6 könnte weniger konkret sein, anstelle der vorgegebenen Formeln könnte „Suche nach ähnlichen Dreiecken“ als Hilfestellung ausreichen bzw. mehr eigene Lösungsideen ermöglichen.

Möglich wäre auch, die Abbildungsserie auf mehrere Blätter zu verteilen und die Hilfen gestaffelt herauszugeben bzw. nur einen Teil der Abbildungen einzusetzen. Mit letzterem könnte man überprüfen, ob Lernende (Studierende, aber auch Schülerinnen und Schüler) nach einer solchen Anregung weitere eigene Lösungsansätze entdecken.

Auch soll der Einsatz des Arbeitsblattes bei kürzeren Bearbeitungszeiten erprobt werden. In der vorliegenden Variante hatten die Studierenden zwei Wochen Zeit, Lösungen zu den auf dem Arbeitsblatt präsentierten Ideen zu finden und auszuarbeiten. In einem Testlauf an einer deutschen Universität gab es einen Testlauf, in dem zwölf Studierende während einer Seminarsitzung 60 Minuten Zeit zu Verfügung hatten. Abgesehen davon, dass die Zeit für die meisten Studierenden zu kurz war, um zu allen Bildern Lösungsideen auszuarbeiten, hat sich auch dieser Einsatz der Methode in Bezug auf die oben genannten Thesen bewährt: Bis auf eine Studentin, die eine Lösung sehr ausführlich ausgearbeitet hat, haben alle Teilnehmenden am Ende des Seminars mehrere Lösungsansätze abgegeben (Mittelwert 3,25 Ansätze).

Angedacht ist auch eine experimentelle Studie, in der das Verfahren im Vergleich zu einer Kontrollgruppe auf seine Wirksamkeit untersucht wird (als klassische Wirkungsstudie mit Pre-, Post- und Follow-Up-Test) – was im vorliegenden Artikel nicht zur Debatte stand. Theoretisch bietet sich auch der Vergleich dieses Verfahrens mit anderen Interventionen zum Problemlösen an, was eine entsprechende Wirkungsstudie um weitere Experimentalgruppen erweitern würde.

Besonders interessant sind im Zuge weitergehender Untersuchungen – unabhängig von einem Vergleich mit anderen Methoden zum Problemlösenlernen – vor allem auch die Beliefs der Probanden und der mögliche Einfluss der vorgestellten Methode auf diese Beliefs: Dies betrifft einerseits ganz allgemeine Beliefs zur Mathematik sowie zu mathematischen Denk- und Arbeitsweisen (Mathematik als Prozess oder als Produkt, mathematische Verfahren als „Tool-Box“, vgl. Grigutsch et al., 1998). Andererseits könnten auch konkrete Einstellungen zur mathematischen Arbeit (im Studium) untersucht werden. Warum wurden insbesondere von den ungarischen Studierenden hauptsächlich (fast) vollständig korrekte, aber keine halbfertigen Lösungen abgegeben? Werden Aufgaben nicht bearbeitet, wenn keine Lösungsidee vorhanden ist? Oder trauen sich diese Studierenden aufgrund der Aufgabenstellung (vgl. Abschnitt 3.2) nicht, unfertige Lösungen abzugeben? Oder, etwas allgemeiner: Inwiefern wirkt sich das Arbeiten mit Abbildungen, auf denen Lösungen angedeutet werden, auf die Verhaltensweisen von Lernenden aus?

Danksagung

Wir danken den Reviewern und insbesondere Andreas Eichler für die hilfreichen und konstruktiven Rückmeldungen.

Literatur

Ambrus, G. (2006). Analyse eines geometrischen Problems für die Klassen 7-11. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2006* (S. 103–107). Osnabrück: Franzbecker Verlag.

Ambrus, G. (2007a). Weiterdenken und Verallgemeinerungsmöglichkeiten eines Problems für Klassen 7–11. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007* (S. 103–107). Osnabrück: Franzbecker Verlag.

Ambrus, G. (2007b). Analyse von Lösungswegen und Erweiterungsmöglichkeiten eines Problems für die Klassen 7. *Teaching Mathematics and Computer Science, 5*(1), 231-249.

Ambrus, G. (2011). Hidden Treasures in the Problem Solving Teaching. In K. Szűcs (Hrsg.), *Problem Solving in Mathematics Education – Proceedings of the 12th ProMath Conference, 2010*, Jena, 20-31.

Ambrus, G. (2013). A középpontban egy sokoldalú feladat [Eine vielseitige Aufgabe im Mittelpunkt], Vortrag, Fachdidaktische Tage „Varga Tamás", Budapest, ELTE Univ., 2013 November.

Atkinson, R. K.; Derry, S. J.; Renkl, A., & Wortham, D. (2000). Learning from Examples: Instructional Principles from the Worked Examples Research. *Review of Educational Research, 70*(2), 181–214.

Bannert, M. (2009). Promoting Self-Regulated Learning Through Prompts. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie, 23*(2), 139–145.

Bernack, C.; Holzäpfel, L.; Leuders, T.; & Renkl, A. (2011). Veränderung des Mathematikbildes in der Lehrerausbildung? Erste Ergebnisse des BMBF-Projektes „Forschende MathematiklehrerInnen" (FORMAT), In R. Haug & L. Holzäpfel (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011* (S. 99-102). Münster: WTM-Verlag.

Borromeo Ferri, R. (2010). On the Influence of Mathematical Thinking Styles on Learners' Modeling Behavior. *Journal für Mathematikdidaktik, 31*(1), 99-118.

Bruder, R. (2008). Wider das Vergessen. Fit bleiben durch vermischte Kopfübungen. *mathematik lehren, 147*, 12-14.

Bruder, R. & Collet, Ch. (2011). *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Bruder, R. (2014). Fachdidaktisch und lerntheoretisch begründete Modelle zum Lehren und Erlernen von Heurismen im Mathematikunterricht. In. F. Heinrich & S. Juskowiak (Hrsg.), *Mathematische Probleme lösen lernen* (S. 31-46). Münster: WTM- Verlag.

Clark, R. E.; Kirschner, P. A. & Sweller, J. (2006). Why minimal guidance during instruction does not work. *Educational Psychologist, 41*(2), 75–86.

Clark, J. M., & Paivio, A. (1991). Dual coding theory and education. *Educational Psychology Review, 3*(3), 149–210.

Collet, C. (2009). *Förderung von Problemlösekompetenzen in Verbindung mit Selbstregulation – Wirkungsanalysen von Lehrerfortbildungen*. Münster: Waxmann.

Csordás, M.; Konfár L.; Kothencz J.; Kozmáné, J. Á.; Pintér K. & Vincze I. (2014). *Sokszínű Matematika 5*. (Arbeitsheft) Mozaik, Szeged.

Dörner, D. (1979). *Problemlösen als Informationsverarbeitung*. Stuttgart: Kohlhammer, 2., überarbeitete Auflage.

Fritzlar, T. (2004). *Zur Sensibilität von Studierenden für die Komplexität Problemorientierten Mathematikunterrichts*. Hamburg: Verlag Dr. Kovac.

Green, T. (1971). *The Activities of Teaching*. New York, NY: McGraw-Hill.

Grigutsch, S.; Raatz U. & Törner, G. (1998). Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrer. *Journal für Mathematik-Didaktik, 19*, 3–45.

Guberman, R. & Leikin, R. (2013). Interesting and difficult mathematical problems: changing teachers' views by employing multiple-solution tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*(1), 33–56.

Heinrich, F. (2004). *Strategische Flexibilität beim Lösen mathematischer Probleme – Theoretische Analysen und empirische Erkundungen über das Wechseln von Lösungsanläufen*. Hamburg: Verlag Dr. Kovac.

Hembree, R. (1992). Experiments and Relational Studies in Problem Solving: a Meta-Analysis. *Journal for Research in Mathematics Education, 23*(3), 242–273.

Koichu, B.; Berman, A, & Moore, M. (2007). Heuristic literacy development and its relation to mathematical achievements of middle school students. Instructional Science, 35, 99 – 139.

Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. (Übersetzt von J. Teller; herausgegeben von J. Kilpatrick und I. Wirszup). Chicago, IL: The University of Chicago Press.

Leikin, R. & Lev, M. (2007). Multiple solution tasks as a magnifying glass for observation of mathematical creativity. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park, & D. Y. Seo (Hrsg.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3* (pp. 161 – 169). Seoul: PME.

Leikin, R. & Lev, M. (2013). Mathematical creativity in generally gifted and mathematically excelling adolescents: what makes the differences? *ZDM – Mathematics Education, 45*, 183–197.

Leuders, T. (2003). Problemlösen. In T. Leuders (Hrsg.), *Mathematik Didaktik – Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II* (S. 120-135). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Levav-Waynberg, A. & Leikin, R. (2006). Solving Problems in different Ways: teachers' knowledge situated in Practice. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Hrsg.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4* (S. 57-64). Prague: PME.

Levav-Waynberg, A. & Leikin, R. (2009). Multiple Solution for a Problem: A Tool for Evaluation of Mathematical Thinking in Geometry. In *Proceedings of CERME 6*. Lyon, France.

Mevarech, Z. & Kramarski, B. (1997). IMPROVE: A Multidimensional Method for Teaching Mathematics in Heterogeneous Classrooms. *American Educational Research Journal, 92*(4), 365–394.

NCTM (2000). National Council of Teachers of Mathematics (Ed.), *Principles and Standards of School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Paivio, A. (2014). Intelligence, dual coding theory, and the brain. *Intelligence, 47*, 141–158.

Philipp, R. A. (2007). Mathematics Teachers' Beliefs and Affect (Chapter 7). In F. K. Lester (Hrsg.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (S. 257 – 315). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Pogáts, F. (1995). V*arga Tamás matematikai versenyek, Typotex*, Budapest, 96, 99-100.

Pólya, G. (1945). *How to Solve it*. Princeton, University Press.

Rehlich, H. (2010). Rechendreiecke – Problemlösen und verschiedene Denkstile. *Der Mathematikunterricht, 56*(3), 14-31.

Renkl, A. (2002). Worked-out examples: instructional explanations support learning by self-explanations. *Learning and Instruction, 12*, 529–556.

Renkl, A. (2005). The Worked-Out Examples Principle in Multimedia Learning. In R. E. Mayer (Hrsg.), *The Cambridge Handbook of Multimedia Learning* (S. 229–245). Cambridge: University Press.

Riding, R. (2001). The Nature and Effects of Cognitive Style. In R. Sternberg & L.-F. Zhang (Hrsg.), *Perspectives on Thinking, Learning and Cognitive Styles* (S. 42-72). London: Erlbaum.

Rott, B. (2013). *Mathematisches Problemlösen – Ergebnisse einer empirischen Studie*. Münster: WTM.

Rott, B. & Gawlick, T. (2014). Explizites oder implizites Heurismentraining – was ist besser? *mathematica didactica, 37*, 191–212.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. A. Grouws (Hrsg.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (S. 334–370). New York: MacMillan.

Schukajlow, S. (2011). Multiple Lösungen in einem selbständigkeitsorientierten Mathematikunterricht. In R. Haug & L. Holzäpfel (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011* (S. 779–781). Münster: WTM Verlag.

Schwank, I. (2003). Einführung in funktionales und prädikatives Denken. In I. Schwank (Hrsg.), *ZDM – Themenheft „Zur Kognitiven Mathematik“*, 70-78.

Silver, E. A.; Ghousseini, H.; Gosen, D.; Charalambous, C. & Strawhun, B. T. (2005). Moving from rhetoric to praxis: Issues faced by teachers in having students consider multiple solutions for problems in the mathematics classroom. *Journal of Mathematical Behavior, 24*(3–4), 287–301.

Stark, R.; Gruber, H.; Renkl, A. & Mandl, H. (2000). Instruktionale Effekte einer kombinierten Lernmethode – Zahlt sich die Kombination von Lösungsbeispielen und Problemlöseaufgaben aus? *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie, 14*(4), 206–218.

Stark, R.; Tyroller, M.; Krause, U.-M. & Mandl, H. (2008). Effekte einer metakognitiven Promptingmaßnahme beim situierten, beispielbasierten Lernen im Bereich Korrelationsrechnung. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie, 22*(1), 59–71.

Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: a synthesis of the research. In D. A. Grouws (Hrsg.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 127-146). New York: MacMillan.

Törner, G.; Schoenfeld, A. H. & Reiss, K. M. (2007). Problem solving around the world: summing up the state of the art. *ZDM – Mathematics Education, 39*, 353.

Winter, H. (1989). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht – Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik*. Braunschweig: Vieweg.

Anschrift der Verfasser

Gabriella Ambrus
Universität Eötvös Loránd
Mathematisches Institut
Pázmány P. sétány 1/c
1117 Budapest
ambrusg@cs.elte.hu

Benjamin Rott
Universität zu Köln
Institut für Mathematikdidaktik
Gronewaldstr. 2
50931 Köln
benjamin.rott@uni-koeln.de