

Kontextspezifität von Wissen im Mathematikunterricht der Grundschule im Umgang mit neuen Medien. Beobachtungen am Beispiel des Einsatzes der 3D-Druck-Technologie im Geometrieunterricht.

FELICITAS PIELSTICKER, SIEGEN; EVA HOFFART, SIEGEN; INGO WITZKE, SIEGEN

Zusammenfassung: Am Beispiel des elementargeometrischen Begriffs des Würfels wird beobachtet und diskutiert wie Schüler*innen Begriffe innerhalb einer mathematischen Lernumgebung, die wesentlich von dem Einsatz eines neuen Mediums bestimmt ist, verwenden. Als Beschreibungsrahmen werden das deskriptive Konzept der subjektiven Erfahrungsbereiche und normative Grundvorstellungen wechselseitig in Beziehung gesetzt. Es wird exemplarisch dargestellt, wie dieser Ansatz auch für die Beschreibung weiterer begrifflicher Entwicklungsprozesse nützlich sein kann.

Abstract: Using the example of the geometric concept of the cube, we will illustrate how conceptual developmental processes within a mathematical learning environment using 3D printing technology can influence students' learning and learning processes. As the basis of description, the descriptive concept Subjective Domains of Experiences and the idea of the so-called Basic Mental Models, which is intended as a normative guideline, are mutually related. Paradigmatic examples show that this approach may also be useful for further research of conceptual development.

1. Einleitung

Im vorliegenden Artikel beschäftigen wir uns mit Begriffsentwicklungsprozessen von Schüler*innen im Kontext der Nutzung neuer Medien im Mathematikunterricht. Im Fokus steht der Einsatz der 3D-Druck-Technologie im Inhaltsbereich der Geometrie.

Eine wichtige Rolle in unseren empirischen Untersuchungen spielen dabei die Möglichkeiten, die der Einsatz neuer Medien bietet. Gesellschaft und Politik fordern mit wachsender Vehemenz den Einsatz neuer Medien im Schulunterricht – häufig motiviert durch eher pragmatische und lebensweltliche Aspekte. Neue Medien, so häufig die allgemeine Argumentationslinie, nehmen für unser Leben und insbesondere die Berufswelt eine immer wichtigere Rolle ein. Deshalb sollen Kinder so früh wie möglich Kompetenzen für den Umgang mit diesen erwerben (vgl. beispielsweise BASAR-Berufswelt im Wandel, Ausgabe 29/2018). Im Rahmen des „DigitalPakt Schule“ (BMBF, 2020) sieht sich auch insbesondere der Ma-

thematikunterricht als einziges durchgehend unterrichtetes MINT-Fach dieser aus gesellschaftlicher Sicht berechtigten Forderung ausgesetzt.

Für die Mathematikdidaktik ergibt sich daraus die Konsequenz, den Einsatz neuer Medien systematisch zu erforschen, wobei hier nicht

nur der (im Sinne von ‚Medienmethodik‘) unterrichtsmethodisch begründete Einsatz von neuen Medien zwecks Verbesserung oder Erleichterung des Erreichens bestimmter Unterrichtsziele im Fokus [stehen sollte], sondern die Aufmerksamkeit gilt dem vertiefen bzw. vertiefenden Verständnis der neuen Medien und einem pragmatischen Umgang mit ihnen. (Hischer, 2016, S. 71)

Aufgrund der Aktualität dieses Anspruchs ergibt sich jedoch ein Forschungsdesiderat. Recherchen bis zum Sommer 2017 ergaben, dass zum Umgang von Schüler*innen mit der 3D-Druck-Technologie im Kontext des Mathematikunterrichts insbesondere im deutschsprachigen Raum wenige Untersuchungen oder Publikationen existieren.

Mittlerweile gewinnt die 3D-Druck-Technologie zunehmend an Aufmerksamkeit, auch im Mathematikunterricht. In vielfältiger Weise wird dieses neue Medium international diskutiert (Ng, 2017; Ng & Sinclair, 2018; Ng, Sinclair & Davis, 2018; Panorkou & Pratt, 2016). Aber auch bei uns erhält die 3D-Druck-Technologie immer mehr Aufmerksamkeit und der Einfluss dieses neuen Mediums auf (mathematische) Wissensentwicklungsprozesse von Schüler*innen wird in unterschiedlichen Studien untersucht (Witzke & Hoffart, 2018; Dilling, 2019; Dilling & Witzke, 2020; Pielsticker, 2020a; Pielsticker, 2020b) und Möglichkeiten zum Einsatz im Schulunterricht aufgezeigt (Witzke & Heitzer, 2019; Dilling et al., 2020).

Um erste empirische Daten zum Umgang mit einer mathematischen Lernumgebung unter Einsatz von 3D-Druck-Technologie zu erhalten, wurde eine Lernumgebung an der Universität Siegen konzipiert und mit Kindern einer vierten Jahrgangsstufe erprobt. Die Lerneinheit stellt thematisch die mathematische Begriffsentwicklung in der Geometrie an einem ausgewählten geometrischen Körper in den Mittelpunkt. Die Kinder werden aufgefordert, Kantenmodelle von Würfeln zu erstellen, wobei stets eine begriffliche Diskussion angeregt und beobachtet wird. Neben

dem Angebot, Kantenmodelle im klassischen Sinne aus Knete und Strohhalmen zu erstellen, arbeitet jedes Kind zudem in einer 3D-Druck-Umgebung.

Der vorliegende Artikel hat dabei ein vornehmlich deskriptives Ansinnen. Ziel ist es zu beschreiben, wie der Einsatz von 3D-Druck-Technologie im Mathematikunterricht, vor dem Hintergrund spezifischer geometrischer Grundvorstellungen, die Verwendung von Begriffen von Schüler*innen beeinflusst.

Der Terminus 3D-Druck-Technologie bezieht sich dabei auf die Hardware (3D-Drucker) und die Software (Tinkercad™): Beim 3D-Druckprozess wird das sogenannte Filament, erhitzter Kunststoff, durch einen Druckkopf Schicht für Schicht aufgetragen, wodurch die Erstellung dreidimensionaler Körper ermöglicht wird (Fastermann, 2016). Als Software werden Computer Aided Design-Programme (CAD) zur Entwicklung einer Vorlage, in unserem Beispiel Tinkercad™, verwendet.

Die erprobte Lernumgebung berücksichtigt beide Komponenten, um authentische Daten für den Umgang von Schüler*innen in einem mathematischen Kontext mit der 3D-Druck-Technologie erhalten zu können. Eine detaillierte Darstellung der Lernumgebung erfolgt in Kapitel 3.

Aus den empirischen Daten, speziell den durchgeführten halbstandardisierten Interviews, erfolgen Rekonstruktionen des Schülerwissens, wobei wir bewusst verschiedene theoretische Zugänge verwenden. Aufgrund des Forschungsdesiderats ist eine zunächst individuell orientierte Betrachtungsweise der einzelnen Kinder nützlich. Hier ist insbesondere das Konzept der Subjektiven Erfahrungsbereiche (kurz auch: SEBe) nach Bauersfeld (1983; 1985) angemessen. Das Konzept bietet einen sehr klaren analytischen Beschreibungsrahmen, der insbesondere den wichtigen Aspekt der Bereichsspezifität in der Entwicklung von Wissen im Umgang mit verschiedenen Anschauungsmitteln berücksichtigt.

Die aus den Interviews mit Hilfe des SEBe-Konzepts gewonnenen Rekonstruktionen sollen dann mit Bezügen zu dem Konzept der Grundvorstellungen nach vom Hofe (1995) betrachtet werden. Die Grundvorstellungen helfen nach unserer Einschätzung die mit der durchgeführten Lernumgebung verbundenen Intentionen zu beschreiben und geben darüber hinaus auch Hinweise für die spätere Ableitung didaktischer Implikationen für die Schulpraxis an einem geeigneten Fallbeispiel.

Ziel ist es dabei, möglichst solche Aspekte zu identifizieren, die unabhängig von einem speziellen neuen Medium sind, in unserem Fall, von der 3D-Druck-Technologie. Es geht also um solche, die „epistemological obstacles“ (Sierpinska, 1990) begründen, d. h.

als Hürde in Lehr-Lern-Prozessen innerhalb der Natur des Zuganges liegen. Nun gilt mit Blick auf die Schulgeometrie (Rembowski, 2015, S. 152), dass

geometrisierbare Relationsbegriffe insbesondere die Anknüpfung an bekannte Sach- und Handlungszusammenhänge sowie den Aufbau visueller Repräsentationen ermöglichen.

Daher verwundert es, dass, wie Rembowski (2015, S. 152) im Weiteren ausführt, „Grundvorstellungen rein geometrischer Begriffe [...] bisher kaum erforscht [sind].“

Dazu ist der vorliegende Artikel in sechs Kapitel gegliedert. Nach dieser Einführung folgen in Kapitel 2 die theoretische Einbettung des Forschungsprojektes, bevor im dritten Kapitel die Forschungsintention sowie die Lernumgebung im Detail vorgestellt werden. Im Kapitel 4, dem Hauptteil des Artikels, rekonstruieren und analysieren wir auf Grundlage des theoretischen Hintergrundes – insbesondere des Konzepts der Subjektiven Erfahrungsbereiche – die im Projekt dokumentierten begrifflichen Entwicklungsprozesse. Eine Zusammenfassung, eine Beschreibung allgemeinerer lerntheoretischer Konsequenzen sowie ein Ausblick auf weiterführende Forschungsfragen folgen dann schließlich im fünften Kapitel, bevor ein Fazit den Artikel abschließt.

2. Theoretische Rahmung

2.1 Subjektive Erfahrungsbereiche

Dass Wissen und Vorstellungen stets an einen konkreten Kontext gebunden sind, beschreibt Bauersfeld in seinem Konzept der Subjektiven Erfahrungsbereiche (Bauersfeld, 1983; 1985). Diese sind vereinfacht gesprochen als Wissensschubladen charakterisierbar, die anhand situationsspezifischer Objekte, Handlungen und Emotionen für Individuen beschrieben werden können. Die Gesamtheit der SEBe ist nicht-hierarchisch angeordnet, wobei die SEBe konkurrierend aktiviert werden. Nach Bauersfeld wird Wissen zunächst in deutlich getrennten Bereichen, die verfügbares Wissen, Handlungsmöglichkeiten, Sprachverstehen sowie Sinnzuschreibungen beinhalten (Bauersfeld, 1983), abgelegt. Die Vernetzung von SEBen bedarf bewusster aktiver Sinnkonstruktionsprozesse und damit der Etablierung überkontextueller, sogenannter „vermittelnder SEB[e]“ (Bauersfeld, 1985, S. 16), welche die Bereichsspezifität des Wissens hinter sich lassen. Diese Sinnkonstruktionsprozesse können beispielsweise durch kognitive Konflikte oder durch Analogiebildung angeregt werden. Hierdurch können sich die einzelnen SEBe durch die Entstehung neuer SEBe miteinander verknüpfen. In der Theorie der Subjektiven Erfahrungsbereiche sind für jeden SEB spezifische Elemente verfügbar, so dass

eine Rekonstruktion von individuellem Schülerwissen möglich und im Rahmen kontextspezifischer Situationen beschreibbar wird.

Nach Bauersfeld sind also vereinfacht gesagt Handlungen, Interessen und Gefühle eines Individuums zunächst deutlich an Situationen gebunden. Strukturelle Ähnlichkeiten zwischen verschiedenen SEBen und selbst die Verwendung gleicher Begriffe führen nicht automatisch zu Vernetzungsprozessen bzw. übergeordneten vermittelnden SEBen. Bauerfeld zitiert hierzu folgende Fallgeschichte von Ginsburg (1977, zit. nach Bauersfeld, 1983, S. 3):

Als Achtjährige konnte Alexandria keine halbschriftlichen Divisionsaufgaben lösen, wie etwa die Rechnung $8:4 = ?$, als Antwort vermutete sie 1 oder 0. Der Interviewer gab ihr eine vergleichbare Textaufgabe: ‚Nimm an, du hast acht Dollar und du hast vier Kinder, und du willst das Geld gleichmäßig an sie verteilen. Wieviel gibst du jedem Kind?‘ Alexandria wiederholt die Aufgabe, sagte dabei aber fälschlicherweise: ‚Angenommen du hast fünf Dollar ...‘ und löst diese Aufgabe richtig mit ‚ein Dollar und fünfundzwanzig Cents‘.

Alexandria sieht offensichtlich keine strukturellen Ähnlichkeiten zwischen dem halbschriftlichen Rechnen, und dem (rechnerischen) Umgang mit Geld. Das mathematische Wissen in beiden Situationen ist in verschiedenen Kontexten (SEBen) voneinander isoliert verfügbar – nur so lässt sich erklären, dass Alexandria in der Geldwelt in der Lage ist mit $5:4$ eine schwierige Divisionsaufgabe zu lösen, in der sogenannten „Papiersummenwelt“ aber letztlich völlig hilflos erscheint (Bauersfeld, 1983). Die symbolische Aufgabe und die in den Sachkontext Geld eingebettete Aufgabe scheinen für das Kind zwei völlig unterschiedliche Situationen darzustellen. Sie sieht keine Analogien oder strukturelle (kontextunabhängige) Übereinstimmungen, d. h. Alexandria hat (noch) keinen vermittelnden SEB entwickelt.

Mit Bezug auf verschiedene Veröffentlichungen anderer Wissenschaftler bietet Bauersfeld (1983; 1985) zahlreiche ähnliche Fallgeschichten an, mit denen er die Bedeutung der Bereichsspezifität für das Lernen verdeutlicht. Möchten wir also Kinder in ihrem Lernprozess unterstützen, sollten durch gezielte Impulse Beziehungen und Verknüpfungen zwischen den SEBen im Mathematikunterricht angeregt werden.

Mit Blick auf eine für den Forscher oder die Forscherin mögliche Beschreibungsperspektive betont Bauersfeld, dass trotz

aller Verschiedenheit der aus Fallstudien und anderen Dokumenten rekonstruierbaren ‚Subjektiven Erfahrungsbereiche [Herv. i. Original] (SEB)‘ und ihrer biographisch bedingten individuellen Besonderheiten (Bauersfeld, 1983, S. 33)

gewisse Ähnlichkeiten und Übereinstimmungen zwischen den SEBen angenommen werden können. Dies führt er unter anderem auf die Prägung durch den Alltag und die kulturelle Tradition zurück, wodurch die Identität der bestehenden Gesellschaft erzeugt wird. Hierin sieht er eine wichtige Voraussetzung für das Funktionieren von Schule und Unterricht in den vorhandenen Formen (Bauerfeld, 1983).

Der konzeptionelle Rahmen der SEBe bietet – als eine deskriptive Perspektive – insbesondere eine Möglichkeit, die für die betrachteten Schüler*innen (potenziell) unterschiedlichen Kontexte (z. B. Knete, CAD-Programm, 3D-Druck-Objekt) detailliert beschreiben zu können. Vor allem vor dem Hintergrund der Nutzung einer für den Unterricht recht neuen Technologie erscheint eine gegenstandsbezogene tiefgehende Diskussion der beobachteten Begriffsverwendung der Schüler*innen mithilfe des Beschreibungswerkzeuges der SEBe gewinnbringend. Für uns ist interessant, welche (mathematischen) Begriffe durch den Einsatz des CAD-Programmes für Schüler*innen in den Vordergrund rücken, z. B. inwieweit sich der Begriff des *Würfels* oder damit zusammenhängende Begriffe wie *Kanten* oder *Ecken* (weiter)entwickeln.

2.2 Grundvorstellungen

An dieser Stelle ist es für die Analyse hilfreich, das Konzept der Grundvorstellungen nach vom Hofe einfließen zu lassen. Grundvorstellungen werden von ihm als

Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten und dem Phänomen der individuellen Begriffsbildung (vom Hofe, 1995, S. 97)

beschrieben und sollen auf im Mathematikunterricht zu vermittelnden Denk- und Handlungsweisen beruhen. Im vorliegenden Artikel werden Grundvorstellungen vor allem im Sinne von normativen Leitlinien aufgefasst (vgl. für die Geometrie insbesondere Bender 1991), denn die *deskriptive sowie konstruktive Dimension* kann adäquat mit Hilfe Subjektiver Erfahrungsbereiche erfasst werden, auf die im Übrigen vom Hofe in diesem Zusammenhang verweist (vom Hofe, 1995).

Dabei existieren nach vom Hofe zu einem mathematischen Begriff üblicherweise verschiedene Grundvorstellungen. Die Vernetzung dieser Grundvorstellungen kann mit Bender als Grundverständnis eines Begriffs bezeichnet werden (Bender, 1991). Ein mathematischer Begriff kann damit durch die Vernetzung mehrerer in Beziehung zueinanderstehender Grundvorstellungen charakterisiert werden. Als ein langfristiges Ziel des Mathematikunterrichts wird dabei die Ausbildung eines Netzwerks beschrieben,

das[s] sich durch Erweiterung von alten und Zugewinn von neuen Vorstellungen zu einem immer leistungsfähigeren System (...) entwickelt. (vom Hofe et al., 2005, S. 276)

Vom Hofe (1995) legt neben einem deskriptiven und einem konstruktiven auch einen normativen Grundvorstellungsbegriff an. In ersterem werden (u. a. mit Bezug zum SEBe-Konzept nach Bauersfeld) Grundvorstellungen als flexible Gruppierung kognitiver Strukturen, die sich ständig verändern und reorganisieren beschrieben (vom Hofe et al., 2005). Im Fokus steht dabei ein dynamischer Charakter von Grundvorstellungen, der hilft, einen Übergang zwischen der Welt der formalen Mathematik und der individuellen Begriffswelt der Lernenden beschreiben zu können. Normative Grundvorstellungen können dabei als Anlass auf Seiten der Lehrpersonen dienen, individuelle Begriffsentwicklungsprozesse der Schüler*innen innerhalb entsprechender Lernumgebungen durch Impulse anzustoßen. Im amerikanischen Sprachraum entwickelte Simon (2006) vergleichbar dazu das Konzept

of a key developmental understanding (KDU) in mathematics as a way to think about understandings that are powerful springboards for learning, and hence are useful goals of mathematics instruction. (zit. nach Silverman & Thompson, 2008, S. 7)

Lehrpersonen sollen demnach KDUs kennen und nutzen und werden zum grundständigen mathematical knowledge for teaching (MTK) gezählt. Damit ist

[...] an understanding of: (1) how this key developmental understanding could empower their students' learning of related ideas; and (2) actions a teacher might take to support students' development of it and reasons why those actions might work (Silverman & Thompson, 2008, S. 8)

gemeint.

Grundlage des Designs der im Folgenden dargestellten Lerneinheit war eine (normative) Grundvorstellung über charakteristische Eigenschaften des Begriffes Würfel.

Ein Würfel ist ein Körper mit acht Ecken, sechs Flächen und zwölf Kanten. Alle Flächen bestehen aus gleich großen („deckungsgleichen“) Quadraten. Mit diesen Kriterien sind folgende Eigenschaften verbunden:

- Die Kanten des Würfels sind gleich lang.
- An jeder Kante stoßen zwei Flächen aneinander.
- An jeder Kante liegen zwei Ecken.
- An jeder Ecke stoßen drei Flächen und drei Kanten zusammen.

- Rollt man einen Würfel ab, so entsteht ein Würfelnetz, das aus sechs [gleich großen], zusammenhängenden Quadraten besteht. (Franke & Reinhold, 2016, S. 174)

Dabei wurde in der Lerneinheit ein besonderer Fokus auf die den Körper des Würfels charakterisierenden Anzahlen der Ecken, Kanten und Flächen, sowie auf die Eigenschaft, dass alle Flächen gleichgroße deckungsgleichen Quadrate sind, gelegt. Später verschob sich der Fokus insbesondere auf die Betrachtung der Ecken und Kanten. Wir wollen diese im Weiteren bezogen auf den Würfel abkürzend *Grundvorstellung: Anzahlen und Form charakterisierender geometrischer Elemente* nennen.

2.3 Zusammendenken von Subjektiven Erfahrungsbereichen und Grundvorstellungen

Als Analyseinstrument wird das Konzept der Subjektiven Erfahrungsbereiche (Bauersfeld, 1983; 1985) verwendet, dabei werden Bezüge zu Grundvorstellungen (vom Hofe, 1995) hergestellt. Dabei ist uns für die Rekonstruktion der Schülertheorien im Sinne des SEBe-Ansatzes bewusst, dass diese in ihrer theoretischen Anlage subjektiv bzw. individuell eigentlich für jede einzelne Schülerin und jeden einzelnen Schüler nachgezeichnet werden müssen. Auf der anderen Seite sind die im Sinne von Lawlers „Mikrowelten“, auf dessen theoretische Überlegungen und empirischen Beobachtungen Bauersfelds Ansatz aufbaut, von mehreren Individuen geteilten Elemente im Sinne der didaktischen Diskussion besonders interessant. Lawler identifiziert z. B. in seinen Rekonstruktionen von Schülerwissen zum Zahlbegriff eine „Papiersummenwelt“ oder eine „Geldwelt“. Ohne die Individualität der gemachten Erfahrungen bzw. des daraus konstruierten Wissens verneinen zu wollen, suchen wir im Weiteren insbesondere Aspekte, die das Potential haben, von anderen Schüler*innen ähnlich aufgefasst zu werden (Lawler, 1981). Auch vom Hofe (1995) nennt in seinen Arbeiten in Anlehnung an Bauersfeld (1983; 1985) Erfahrungsbereiche, die sich auf das geteilte Wissen ganzer Lerngruppen beziehen. Bei Bauersfeld findet sich zu diesem Aspekt folgendes:

Bei aller Verschiedenheit der aus Fallstudien und anderen Dokumenten rekonstruierbaren ‚Subjektiven Erfahrungsbereiche (SEBe)‘ und ihrer biographisch bedingten individuellen Besonderheiten lassen sich viele Ähnlichkeiten und Übereinstimmungen zwischen ihnen wie überindividuelle, gesellschaftlich-historische Wirklichkeiten behandeln. Aus soziologischer Sicht sind sie Kernstücke der gesellschaftlichen Wirklichkeit. Die weitreichende Normierung unseres Alltags, [...]. Sie ist eine wichtige Voraussetzung für das Funktionieren von Schule und Unterricht in den vorhandenen Formen. Diese gesellschaftlich-historische

Identität ermöglicht es dem Lehrer, von einer hinreichenden Übereinstimmung zwischen SEBen auszugehen, die je auf denselben Ausschnitt der objektiven Welt oder der gesellschaftlichen Wirklichkeit bezogen sind. [...] Eine Vorurteile vermeidende Rekonstruktion derartiger intersubjektiv geteilter Erfahrungsbereiche scheint mir nur über die vergleichende Analyse von SEBen möglich zu sein. (Bauersfeld, 1983, S. 33)

Wir entscheiden uns im Folgenden den Begriff der SEBe zu verwenden, um die individuelle Ausprägung von Wissen im Blick zu behalten.

In Bezug auf Mathematikunterricht ist nach Bauersfeld das Ausbilden vermittelnder SEBe wesentliches Lernziel. Das Konzept normativer Grundvorstellungen (vom Hofe, 1995; Bender, 1991) wurde für das Design der Lernumgebung genutzt. Diese bilden zudem in unserer Lesart einen Beschreibungsrahmen für mögliche didaktische Handlungskategorien der Lehrpersonen, um konkrete Impulse zur Entwicklung sogenannter vermittelnder SEBe bei Schüler*innen im Unterricht zu setzen.

Die Lehrperson orientiert sich zur Gestaltung des Unterrichts in unserer Interpretation an Grundvorstellungen, die an als tragfähig angesehenen Elementen mathematischer Inhalte orientiert sind. Diese werden in einem bestimmten Sachzusammenhang umgesetzt und regen bei Schüler*innen die Konstruktion individueller subjektiver Erfahrungsbereiche an, verbunden mit der Absicht, dass diese wiederum eine den handlungsleitenden Kategorien der Lehrperson entsprechende Strukturgleichheit aufweisen. Somit sollen sich die Grundvorstellungen der Lehrpersonen in Gemeinsamkeiten von SEBen abbilden bzw. Schüler*innen vermittelnde SEBe konstruieren.

In unserer Studie wollen wir dazu beobachten, inwiefern diese vermittelnden SEBe und das darin von Schüler*innen entwickelte überkontextuelle Wissen auf neue Situationen, wie wir sie durch die 3D-Druck-Technologie in den Unterricht eingebracht haben, angewendet werden kann. Damit ist die übergeordnete Frage verbunden, inwiefern kontextspezifisch aufgebautes Wissen *allgemein* verfügbar ist.

3. Die Lernumgebung „Kantenmodelle mal anders“

3.1 Forschungsanliegen

Nach der Vorstellung der Lernumgebung werden im nächsten Teil des Artikels die dokumentierten geometrischen Begriffsentwicklungsprozesse mit Bezug auf die zuvor ausgeführte theoretische Rahmung rekonstruiert und analysiert. Für die konzipierte Lernumgebung zum Thema Kantenmodelle mit klassischem und mit neuem Zugang soll dazu die fol-

gende Forschungsfrage handlungsleitend sein: *Inwiefern sind Schüler*innen in der Lage, ihr im Unterricht erworbenes Wissen über geometrische Körper auf weitere Situationen (kontextspezifisch) anzuwenden und zu übertragen?*

Die Lernumgebung „Kantenmodelle mal anders“ wurde zur Untersuchung der angeführten Forschungsfrage konzipiert und an drei aufeinanderfolgenden Montagen kurz vor Ende des Schuljahres 2017/18 mit Kindern einer vierten Jahrgangsstufe einer Partnergrundschule aus der Region umgesetzt. Es handelte sich dabei um Kinder, die auch schon zuvor an geometrischen Angeboten in der Mathe-Werkstatt teilgenommen hatten. Zum Vorwissen der Schüler*innen können wir sagen, dass diese bereits in der Vergangenheit in der Mathe-Werkstatt Kantenmodelle aus Knete, Zahnstochern und Strohhalmen angefertigt hatten. Dabei wurden die geometrischen Körper Würfel, Quader und Pyramide gebaut und hinsichtlich charakteristischer Anzahlen von Ecken, Kanten und Seitenflächen, sowie der Form der Seitenflächen beschrieben und voneinander unterschieden. Der Umgang mit der 3D-Druck-Technologie (Designsoftware wie Hardware) war für die Schüler*innen hingegen neu und eignete sich somit für Beobachtungen im Sinne der Forschungsfrage.

Die Lernumgebung begann zunächst mit einer Erinnerung an dieses Wissen zum geometrischen Körper des Würfels. Danach wurde die Schulklasse in zwei Gruppen aufgeteilt. Während die eine Gruppe zunächst auf Grundlage eines klassischen Zuganges erneut Knet-Kantenmodelle erstellte, wurde die andere Gruppe in das rechnergestützte Design und die Erstellung von 3D-Modellen eingeführt. In der Folge wechselten die beiden Schülergruppen die Stationen und schließlich folgte eine gemeinsame Plenums- und Diskussionsphase über das Gelernte.

Der Fokus der Lernumgebung „Kantenmodelle mal anders“ war auf den Würfel gelegt, da dieser im Geometrieunterricht der Primarstufe von zentraler Bedeutung ist. Er kann beispielsweise im Sinne des Spiralprinzips nach Bruner (1973) auf verschiedenen Entwicklungsstufen immer wieder aufgegriffen werden (Lauter, 1994). Im Laufe der Grundschulzeit werden und Schüler*innen im Mathematikunterricht vielfältige Möglichkeiten zu einer aktiven Auseinandersetzung mit dem geometrischen Körper des Würfels angeboten. Hierzu gehören das Bauen mit Würfeln, die Arbeit mit Würfelmehrungen, Würfelnetzen und Bauplänen sowie das Herstellen von und Arbeiten mit Würfelmodellen (Franke & Reinhold, 2016). Damit verbindet sich der Anspruch, dass die Kinder am Ende der Primarstufe folgende Beschreibung eines Würfels kennen:

Ein Würfel ist ein Körper mit acht Ecken, sechs Flächen und zwölf Kanten. Alle Flächen bestehen aus gleich großen („deckungsgleichen“) Quadraten. (Franke & Reinhold, 2016, S. 174)

Diese Kriterien implizieren auf mathematischer Ebene weitere Eigenschaften eines Würfels, wie beispielsweise seine gleichlangen Kanten oder das Aneinanderstoßen von zwei Flächen an einer Kante (Franke & Reinhold, 2016). Als didaktische Leitlinie im Sinne einer normativ ausgerichteten Grundvorstellung nach vom Hofe (1995) wird der elementargeometrische Begriff des Würfels hier definiert als geometrischer Körper mit 8 Ecken, 6 deckungsgleichen quadratischen Seitenflächen und 12 Kanten festgehalten.

Er ist konkretisiert in dreidimensionalen Objekten sowohl in Vollkörpern und Hohlkörpern als auch in Kantengerüsten. (Rembowski, 2015, S. 131)

Diese Grundvorstellung nennen wir im Folgenden *Anzahlen und Form charakterisierender geometrischer Elemente*. Hierbei handelt es sich natürlich nur um eine mögliche Grundvorstellung zum Kantenmodell des Würfels.

Grundvorstellungen die nicht nur implizit, sondern explizit auf Wissen um Parallelität, der gleichen Länge sowie der Orthogonalität der Kanten hinweisen sind genauso als angemessen zu bezeichnen.

Bewusst haben wir den Schwerpunkt der Lernumgebung auf die Erstellung von und die Arbeit zu Kantenmodellen eines Würfels gelegt. Diese sind besonders geeignet,

um gezielt Untersuchungen zur Anzahl und Anordnung von Kanten und Flächen bzw. zur Länge von Kanten vorzunehmen. (Franke & Reinhold, 2016, S. 185)

In unserem Fall wollten wir beobachten, wie Schüler*innen bereits im Kontext von Knetmodellen gefestigtes Wissen auf neue Kontexte übertragen können und das Wissen damit in einem generellen Sinne verfügbar ist. Mit Blick auf den in Kapitel 2 angeführten Aspekt der Bereichsspezifität haben wir das Kantenmodell eines Würfels also bewusst in zwei unterschiedliche Kontexte eingebettet. Das ermöglicht es uns, Informationen zu verfügbarem Wissen, Handlungsmöglichkeiten, Sprachverwendung und Sinnzuschreibungen in dem jeweiligen spezifischen Kontext zu erhalten. Weiterhin sollen aufgrund der Anlage der Untersuchung ebenfalls Informationen zu der angestrebten Generalisierung verschiedener SEBe identifizierbar sein.

Somit beinhaltet die Lernumgebung zwei konkrete Arbeitsimpulse in unterschiedlichen Kontexten zu den Kantenmodellen eines Würfels. Während ein Arbeitsimpuls auf die Herstellung von Kantenmodellen

auf bewährte Weise mit bekanntem Material abzielte, wurden in einem zweiten Arbeitsimpuls mithilfe des CAD-Programms Tinkercad™ Kantenmodelle konstruiert und anschließend mit 3D-Druckern ‚materialisiert‘, womit sie real erfahrbar wurden. Somit wurden beide in der Einführung angesprochenen Aspekte der 3D-Druck-Technologie, Hardware und Software, bewusst in die Lernumgebung eingebunden. Hier sei mit Bezug zur Theorie der Subjektiven Erfahrungsbereiche nach Bauersfeld (1983; 1985) auf die Kontextspezifität der Knet-Kantenmodelle, als auch der 3D-Druck-Modelle verwiesen. Mit der Entscheidung zur Erstellung von Knet-Kantenmodellen intendierten die Lehrpersonen einen Fokus auf die Anzahlen von Ecken und Kanten des Würfels. Für die Knet-Kantenmodelle können Knet-Kugeln gerollt werden und mit entsprechend zugeschnittenen Halmen oder Holzspießen verbunden werden. Die Ecken sind hier also dargestellt durch Kugeln und die Kanten durch einen weiteren geometrischen Körper, den Zylinder (Halme oder Holzspieße). Auch bei den 3D-Druck-Modellen werden die gedruckten Kanten durch Zylinder realisiert. Die Ecken werden hier als Würfel mit entsprechender Aussparung für die zylinderförmigen Kanten konstruiert und gedruckt (Abb. 1).

Diese beiden Zugänge unterscheiden sich, so unsere Annahme, nicht nur hinsichtlich der Darstellungs- und Materialebene, sondern auch hinsichtlich implizierter heuristischer Problemlösestrategien (Schoenfeld, 1985). Die Knet-Umgebung regt insbesondere in Bezug auf die würfelspezifischen Anzahlen von Ecken und Kanten zum „Vorwärtsarbeiten“ an; also dem stückweisen Aufbauen des Kantenmodells.

Die 3D-Druck-Umgebung hingegen, so unsere These, erfordert zunächst ein Wissen um die Beschaffenheit des gesamten Kantenmodells. Diese regt damit nach unserer Einschätzung eher ein „Rückwärtsarbeiten“ an – d. h. es wird zunächst das Gesamtmodell (als mentale Repräsentation) und daran die würfelspezifischen Anzahlen aktiviert. Dieses Wissen ermöglicht schließlich einen vollständigen Bausatz für ein Würfel-Kantenmodell dem 3D-Druck zuzuführen.

3.2 Vorstellung der Lernumgebung

Nach Klärung der Forschungsintention mit Bezug zur in Kapitel 2 erläuterten theoretischen Rahmung erfolgt in diesem Abschnitt eine chronologische Vorstellung der Lernumgebung „Kantenmodelle mal anders“.

Der erste Vormittag begann mit einem Einstieg in die Thematik, um an das bereits vorhandene Vorwissen zu geometrischen Körpern anzuknüpfen. Hier wurden zunächst die Vollmodelle einiger geometrischer Körper (Würfel, Quader, Kugel, Zylinder, Kegel) als

stummer Impuls präsentiert, was die Schüler*innen dazu aufforderte, ihre Assoziationen zu kommunizieren. Im Anschluss wurden weitere Gegenstände (Ball, Klebestift, Verpackungen etc.) vor die Schüler*innen gelegt. Hier wurde die Klasse ohne weitere Vorgabe zum Sortieren der Gegenstände aufgefordert. Weiterhin wurde der geometrische Körper Würfel und dessen geometrische Eigenschaften genauer in den Blick genommen und besprochen. Die jeweiligen Anzahlen von Ecken, Flächen und Kanten sowie die Form der Flächen wurden gemeinsam für einen Steckbrief erarbeitet. Anschließend wurde die Klasse in zwei gleich große Gruppen aufgeteilt. Die erste Gruppe arbeitete zunächst mit den Knet-Kantenmodellen. Für die klassische Herstellung der Kantenmodelle standen Knete, Trinkhalme, Zahnstocher und Holzspieße zur Verfügung. Die andere Gruppe arbeitete in der Umgebung zur 3D-Druck-Technologie, wobei der Auftrag hier konkret in der *Erstellung eines Bausatzes für ein Kantenmodell eines Würfels* bestand. Ein solcher Bausatz im Sinne eines Steckmodells kann im Kontext der zuvor beschriebenen Knet-Kantenmodelle aus acht gerollten Kugeln als Ecken sowie zwölf Halmen, Holzspießen oder Streichhölzern als Kanten bestehen. Die Anforderung ändert sich im Kontext der 3D-Druck-Technologie, da hier, für die Erstellung eines Bausatzes, zuvor über Planung und Beachtung verschiedener Aspekte nachgedacht werden muss: So ist die Anzahl der benötigten Ecken und Kanten im Vorfeld festzuhalten, auch sollte – im Sinne des späteren Drucks – über praktikable Formen nachgedacht werden, um beispielsweise quadratische Seitenflächen erzeugen zu können. Gemeinsam mit den Schüler*innen wurde dafür zunächst über den in der Aufgabenstellung verwendeten Begriff Bausatz nachgedacht. Dabei wurden die Schüler*innen zum Beispiel an Erfahrungen mit LEGO® oder LEGO TECHNIK® erinnert. In der Gruppe einigte man sich dann darauf, als Ecke des Steckmodells den geometrischen Körper Würfel und als Kanten, Zylinder für das Steckmodell zu konstruieren. Letzteres erscheint ein wenig verwunderlich,

ist aber wohl damit zu erklären, dass die Schüler*innen durch die zuvor genutzten Lernangebote der Mathe-Werkstatt bereits Erfahrungen zu Knet-Kantenmodellen gesammelt hatten, in denen Trinkhalme als Kanten verwendet wurden.

Der in Tinkercad™ zu erstellende Bausatz bestand also aus acht Würfeln mit Aussparungen, in welche später die Kanten gesteckt werden sollten, sowie zwölf Zylindern als Kanten des Steckmodells (Abb. 1).

Am darauffolgenden Montag wurden dann die Arbeitskontexte (Knete und 3D-Druck-Technologie) getauscht. Im Anschluss erhielten die Viertklässler wieder die Möglichkeit, ihre Ergebnisse und die im Konstruktionsprozess erfahrenen Herausforderungen, in einem Plakatspaziergang gegenseitig zu präsentieren.

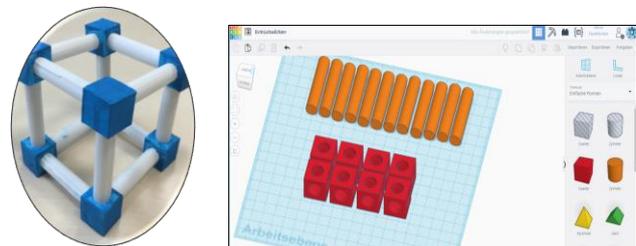


Abb. 1: Bausatz in Tinkercad™ und als gedrucktes Material

Der dritte Vormittag diente der Zusammenführung der Ergebnisse sowie der Reflexion der Erfahrungen der Schüler*innen. Abbildung 2 visualisiert den strukturellen Aufbau der Lernumgebung „Kantenmodelle mal anders“ sowie die für eine Auswertung zur Verfügung stehenden Daten.

Die Lerneinheit wurde systematisch mit Hilfe von Videokameras dokumentiert. Zudem liegen den Autorinnen und dem Autor die in der Einheit entstandenen Schülerdokumente vor. Basis für diesen Artikel bilden aber insb. die im Anschluss an die Arbeit im Kontext der 3D-Druck-Technologie durchgeführten

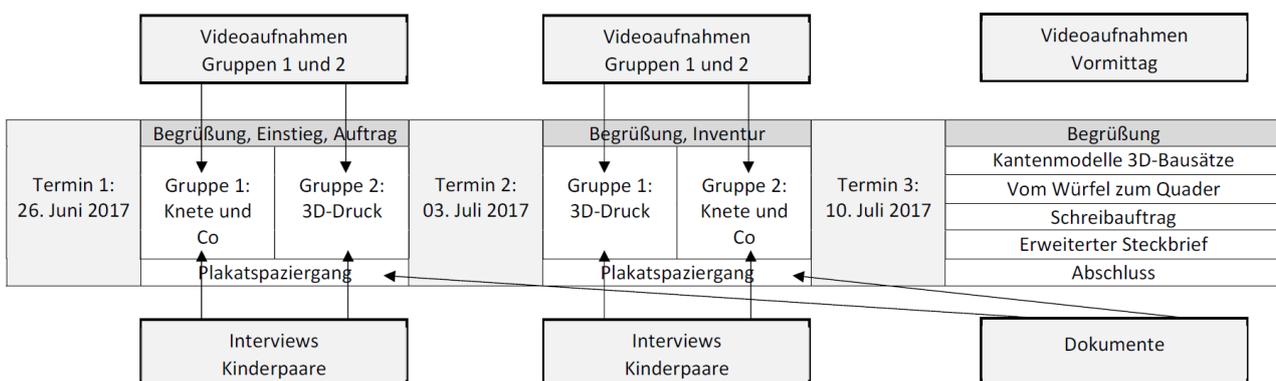


Abb. 2: Aufbau der Lernumgebung inklusive Dokumentationen

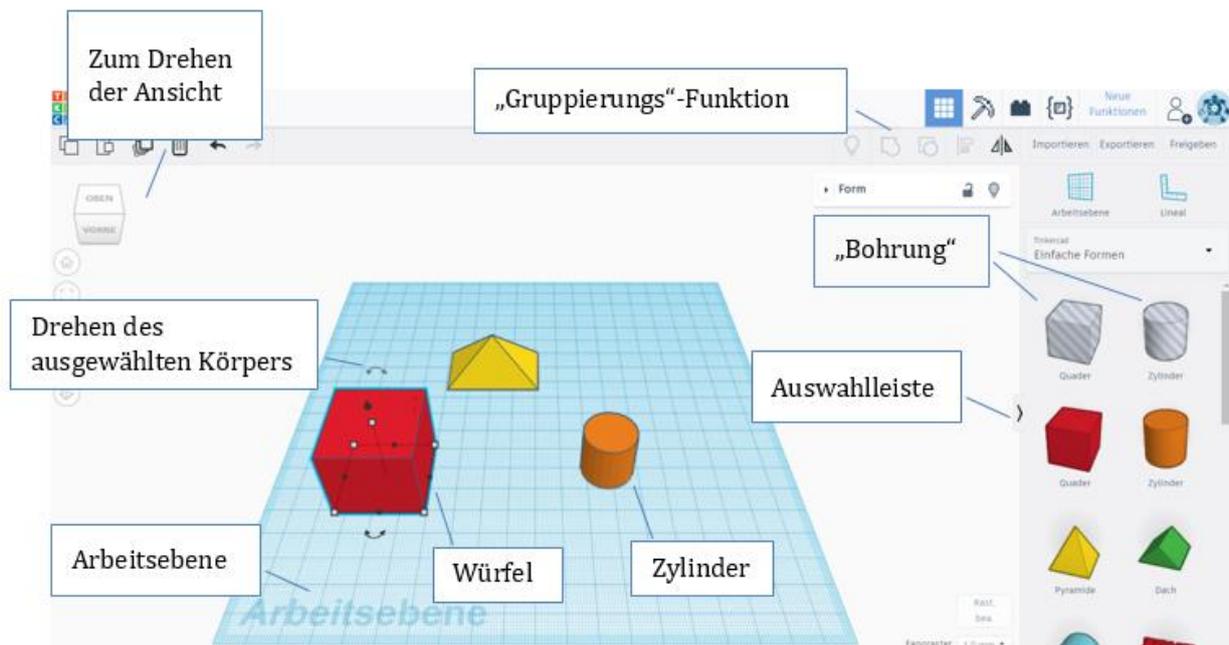


Abb. 3: Arbeitsebene des CAD-Programmes Tinkercad™

Interviews, die in Transkriptform vorliegen. Diese zeigen nach unserer Einschätzung sehr interessante Aspekte hinsichtlich der begrifflichen Entwicklung geometrischer Begriffe in der Verbindung eines klassischen und eines neuen Zugangs mit Arbeitsmitteln.

3.3 Exkurs zur technischen Umsetzung

Um die Bearbeitungs- und Vorgehensweisen der Viertklässler in den Arbeitsgruppen unter Einsatz der 3D-Druck-Technologie sowie die damit verbundenen Untersuchungen nachvollziehen zu können, folgen an dieser Stelle einige grundlegende Informationen zur technischen Umsetzung. Im Rahmen der Lernumgebung arbeiteten die Kinder mit dem CAD-Programm Tinkercad™, das webbasiert (zurzeit kostenfrei) erhältlich ist und im Browser bedient wird.

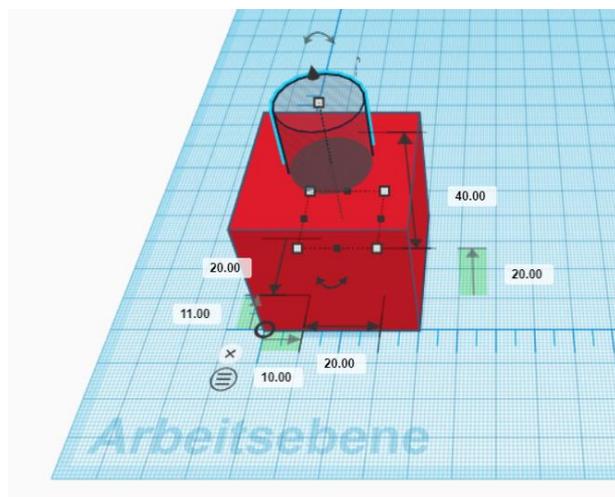


Abb. 4: Befehl „Bohrung“ im Programm Tinkercad™

Abb. 3 gibt einen Überblick über Oberfläche und Standardfunktionen des Programms. Für die Erstellung der Ecken des Kantenmodells in Tinkercad™ wurde, wie zuvor beschrieben, ein Würfel ausgewählt. In dessen Seitenflächen wurden dann Aussparungen erstellt, um hier später die Kanten einstecken zu können.

In Abb. 4 ist der Vorgang des dafür notwendigen Befehls „Bohrung“ auf der Oberfläche von Tinkercad™ dargestellt. Die Schüler*innen zentrierten die Aussparung mit Hilfe der Programmfunktion „Lineal“ wie folgt (Abb. 4):

Man wählt zunächst die Programmfunktion „Lineal“ (rechts oben in Abb. 4) aus, platziert das „Lineal“ auf der Arbeitsebene. Dazu werden, wie in Abbildung 4 erkennbar der Würfel und der transparente Zylinder zur Erstellung der Aussparung entlang des „Lineals“ platziert. Anschließend wird der Abstand zwischen der angenommenen „Bohrung“ (transparenter Zylinder) und den Außenseiten des Würfels durch das „Lineal“ angezeigt. Auf diese Weise kann ermittelt werden, wann sich der Zylinder in der Mitte des Würfels befindet.

In unserer konkreten Lernumgebung war zu beobachten, dass die Schüler*innen das Zentrum der Würfelfecke mit Hilfe der Maße der Linealfunktion nicht berechneten, sondern freihändig den Cursor so lange verschoben, bis die Abstände zu den Außenseiten als gleich angezeigt wurden.

Die Länge der Zylinder zur Erstellung der Aussparungen wurde von manchen Gruppen frei Hand ge-

wählt, beispielsweise ohne Rücksicht darauf zuzunehmen, ob der Würfel komplett durchbohrt wurde. Andere nutzten wiederum die Linealfunktion, um genau dies zu vermeiden.

Um im Programm solche Würfel mit Aussparungen des Bausatzes (Ecken des späteren 3D-Druck-Kantenmodells) für den Druck vorzubereiten, müssen durch den Programmbefehl „Gruppierung“ Würfel und Aussparungszylinder dann verbunden und anschließend, mengentheoretisch gesprochen durch Komplementbildung, durch den Befehl „Bohrung“ zum Schnitt gebracht werden.

Dadurch entsteht ein Würfel mit einer zylinderförmigen Aussparung, also dem gewünschten Loch, in das später zylinderförmige Kanten des Steckmodells eingesetzt werden können. Anschließend kann der Würfel gedreht werden, um weitere Aussparungen zu erstellen bzw. zu „bohren“. Des Weiteren können Zylinder (vgl. orange gefärbte Volumenkörper in der rechten Befehlsleiste in Abb. 3 und Abb. 4) auf die Arbeitsebene gezogen werden und durch Anklicken sowie Ziehen verlängert werden. Mit Hilfe der möglichen Eingabe von Maßen kann zusätzlich der Kreisdurchmesser der Grundfläche des Zylinders variiert werden.

In diesem Zusammenhang konnte bei der Durchführung der Lernumgebung beobachtet werden, dass einige Schüler*innenpaare diesen Kreisdurchmesser nach Bemessung der Kantenlängen des Würfels bewusst berechneten und so einstellten, dass er vollständig innerhalb des Würfels liegen musste. Andere führten diese Operation nach ihrer Anschauung frei Hand aus.

Insgesamt betrachtet waren die Schüler*innengruppen nach einer kurzen Einarbeitungszeit mit dem CAD-Programm in der Lage, die zuvor vereinbarten Kantenmodelle für den 3D-Druckbausatz vorzubereiten und den Druck durchzuführen.

4. Aus der empirischen Untersuchung

4.1 Zum methodischen Vorgehen

Aus dem gewonnenen Datenmaterial, d. h. Schülerdokumenten (Plakate, Schreibaufträge, Steckbriefe und handschriftliche Aufzeichnungen während der Interviews) sowie Interviews (videografiert und transkribiert) wurde für diesen Artikel eine Auswahl mit Bezug auf das Forschungsansinnen zur Verwendung von Begriffen getroffen. Für unsere Analyse wurden die Videoaufnahmen nach den Hinweisen und Regeln von Dresing und Pehl (2015) transkribiert und für eine anschließende Auswertung aufbereitet.

Die vorliegenden Interviews wurden im Sinne von leitfadengestützten Experteninterviews (Helfferich, 2014) mit Schüler*enteams nach den Arbeitsphasen geführt. Die gewählte Umsetzung der Schülerinterviews entsprach bewusst dem sprachlich-reflektierenden Handeln, auf das im Prozess der Begriffsentwicklung ein besonderer Akzent zu setzen ist (Franke & Reinhold, 2016). In der Interviewsituation selbst standen den Schüler*innen jeweils ein Notebook mit dem CAD-Programm Tinkercad™ sowie Papier (blanko) und Stifte zur Verfügung. Die Interviews dauerten zwischen 15 und 20 Minuten und wurden in einem separaten Raum neben dem Gruppenraum im Anschluss an die Arbeitsphase durchgeführt.

Innerhalb unseres Fallstudiendesigns und der damit verbundenen Analyse ist uns eine detaillierte Beschreibung – im Sinne eines ganzheitlich-deskriptiven Prozesses, wie auch im SEBe-Konzept in Abschnitt 2.1. aufgeführt – besonders wichtig.

Für eine genauere Analyse im Sinne der zuvor formulierten Forschungsfrage (vgl. 3.1) beschreiben wir das beobachtete und aufgezeichnete Verhalten der Schüler*innen in Subjektiven Erfahrungsbereichen. Dazu haben wir die empirischen Daten bzw. die in Transkripten aufbereiteten Daten unserer Fallstudie zunächst mithilfe des Verfahrens der strukturierenden qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring (2010) kategorisiert und dadurch systematisch dargestellt. Dabei verläuft die Inhaltsanalyse im Sinne Mayrings nach vier Schritten. Zunächst haben wir unser zu analysierendes empirisches Datenmaterial detailliert beschrieben. Dabei wurden die erstellten Transkripte der Interviews und weitere gewonnene empirische Daten (Schülerdokumente wie z. B. Skizzen aus den Interviews) zugrunde gelegt. Als Analyseeinheit galt dabei jede sinnvolle Texteinheit. Im Anschluss daran wurden die auf solche Weise gewonnenen Texteinheiten paraphrasiert und in einem nächsten Schritt auf einer definierten Abstraktionsebene generalisiert. An dieser Stelle nutzten wir auch Aspekte unserer theoretischen Festlegungen, um die aufbereiteten Texteinheiten durch einen erhöhten Abstraktionsgrad zu reduzieren. Damit erreichen wir eine Zusammenfassung der Texteinheiten in einem Kategoriensystem, welches schließlich mithilfe des empirischen Datenmaterials überprüft wird (Mayring, 2010). Dieser Analysevorgang wurde gemeinsam von allen drei Autoren des Artikels durchgeführt.

Durch das gebildete Kategoriensystem und den Abgleich mit dem empirischen Datenmaterial konnten wir Indikatoren für vier Subjektive Erfahrungsbereiche ausmachen. Diese lassen sich wie folgt charakterisieren:

Kategorie 1:*Subjektiver Erfahrungsbereich „Knete“*

In dem SEB „Knete“ agieren die Viertklässler mit den Objekten Knete, Trinkhalmen und Spießen. Sie rollen und formen Knete, stecken die Knetfiguren mit festen Objekten zusammen. Sie halten diese fest und drehen diese. Sie verwenden zumeist empirische Begriffe wie Knetkugel oder Trinkhalme, eher selten die allgemeineren Begriffe Ecken und Kanten.

Kategorie 2:*Subjektiver Erfahrungsbereich „geometrische Körper“*

Mit Blick auf unsere Daten können wir einen SEB beschreiben, den wir als „geometrische Körper“ bezeichnen wollen, und der hauptsächlich in den Interviews aktiviert wurde. In den Interviews sprechen die Kinder von „Körpern“ und verwenden die Standardbezeichnungen für geometrische Körper. Diese Begriffsverwendung ist häufig an das Erstellen oder Beschreiben von Zeichnungen auf einem Zeichenblatt gekoppelt. Sie verwenden zudem die Begriffe Ecken und Kanten durchgängig.

Kategorie 3:*Subjektiver Erfahrungsbereich „Tinkercad™“*

Einen weiteren SEB konnten wir für die Arbeit bzw. Begriffsverwendung der Schüler*innen auf virtueller Ebene mit dem Programm Tinkercad™ beschreiben.

Es wurde beobachtet, dass die Kinder bei der Umsetzung der Aufgabenstellung auf der virtuellen Ebene zumeist die sehr spezifischen Begrifflichkeiten der Programmoberfläche wie Skalieren, Bohren, Verkleinern und Gruppieren verwendeten.

Sie benutzen zudem die Begriffe Würfel und Zylinder, nicht aber die Begriffe Ecken und Kanten.

Kategorie 4:*Subjektiver Erfahrungsbereich „3D-Druck“*

Einen weiteren SEB, den wir „3D-Druck“ nennen, können wir für den Umgang der Schüler*innen mit den vom 3D-Drucker erzeugten Objekten beschreiben. Die Schüler*innen zeigten vielfältige Handlungen wie beispielsweise das taktile Zusammenstecken des Bausatzes oder kleinere Nacharbeiten wie zum Beispiel das Abschleifen von Unebenheiten, um Objekte wie gewünscht zusammenstecken zu können. In diesem Zusammenhang beschrieben die Schüler*innen die vorliegenden Objekte des Bausatzes zumeist als „Stäbchen“ und „Würfel(-chen).“ Erst in den zusammenführenden Abschlussinterviewsituationen konnten wir beobachten, dass sie diese Begriffe unter die Kategorien Kanten und Ecken subsumierten.

Tab. 1: Induktiv gebildetes Kategoriensystem zur Analyse der Aussagen der Schüler*innen

Es sei schon an dieser Stelle angemerkt, dass Zeichnen und Sprechen während der Interviewsituationen als eine Art Kommunikations- und Visualisierungstool dienen. Mit Bezug auf Bauersfeld wird in verschiedenen Situationen die Sprache als „mächtiges symbolisches Repräsentationsmittel“ (Bauersfeld, 1983, S. 33) deutlich. Sie ermöglicht den Schüler*innen nicht nur eine Verdeutlichung und Veranschaulichung ihrer Vorstellung, sondern zeigt auch die spezifische Verwendung von Sprache in verschiedenen Situationen sowie Kontexten.

4.2 Fallbeispiele

Nachfolgend soll an drei ausgewählten Schülerinterviews beispielhaft nachgezeichnet werden, wie die begrifflichen Aushandlungsprozesse mit den Schüler*innen in den Interviewsituationen erfolgt sind. Ein besonderes Augenmerk liegt dabei auf der Bereichsgebundenheit und Situationspezifität von geometrischem Wissen bei Schüler*innen, das zunächst gebunden an die Kontexte vorzuliegen scheint, in denen dieses Wissen konstruiert wird (vgl. 2.1).

4.2.1 Schülerinnenpaar 1: Sabine und Rita¹ – Erkennen von strukturellen Gemeinsamkeiten in unterschiedlichen Kontexten

Sabine und Rita sind Schülerinnen der 4. Klasse und nahmen an allen drei Vormittagen der Lernumgebung „Kantenmodelle mal anders“ teil. Erhebungszeitpunkt des Interviews ist Tag 2 der Einheit in der Mathe-Werkstatt (Abb. 2). Hier handelt es sich um Schülerinnen, die zunächst an dem ersten Vormittag mit Knet-Kantenmodellen und dann an dem darauffolgenden Montag mit 3D-Druck-Technologie gearbeitet haben.

Die folgende Episode ist besonders interessant, da wir für Sabine eine spontane Sinnkonstruktion im Verlauf der Interviewsequenz vermuten können. Zudem wird deutlich, wie verschiedene SEBe aktiviert und in Verbindung gebracht werden. Die beiden betrachteten Schülerinnen verhalten sich so, als würden sie eine Strukturgleichheit in dem Kontext „Knete“ (SEB 1) und in dem Kontext „Tinkercad™“ (SEB 3) erkennen. Als Auslöser der Verbindung erscheint uns dabei die Erstellung und Verwendung von Skizzen auf einem Zeichenblatt bzw. ein (zeichnerischer) Impuls, der von der Schülerin Sabine ausgeht.

Zur Situation: Kurz vor dem Interview haben die beiden Schülerinnen die Ecken und Kanten ihres späteren Kantenmodells in Tinkercad™ konstruiert. Wie in Abschnitt 3.2 erläutert, fungieren Würfel als Ecken des Steckmodells und Zylinder als Kanten. Die Daten wurden als STL-Datei an den 3D-Drucker übermittelt

und der Druck gestartet. Während des Interviews druckte also einer der zur Verfügung stehenden 3D-Drucker die acht Ecken (Würfel mit zylinderförmigen Aussparungen) in der Mathe-Werkstatt. Nach dem Interview war geplant, dass die Mädchen auch noch die 12 Kanten (Zylinder) ihres Modells ausdrucken.

Der folgende Transkriptausschnitt (TA. 1) gibt den Einstieg in das Interview zwischen Sabine, Rita und dem Interviewer (im Folgenden kurz: S, T bzw. I) wieder. Um sich auf die zuvor im Rahmen der Lernumgebung gemachten Erfahrungen zu fokussieren, werden die Schülerinnen gebeten, einem (fiktiven) Mitschüler den Arbeitsauftrag sowie das Vorgehen in eigenen Worten zu erläutern.

- 1 R Ehm, wir haben mit dem 3D-Drucker gearbeitet.
- 2 S Und wir mussten, mit dem PC erstmal alles vormachen.
- 3 I Wollt ihr auch mal was zeigen?
- 4 S (*S beugt sich nach vorne zum Notebook hin und zieht einen Würfel aus der Taskleiste mit dem Cursor auf die Arbeitsebene von Tinkercad™.*)
- 5 I Also, was habt ihr, was habt ihr so erstellt?
- 6 S Hm, wir haben erstmal einen normalen Würfel erstellt. Und danach haben wir Löcher reingeböhrt, also mit dem, Zylinder. (*R deutet mit dem Finger auf den Zylinder, der in der Auswahl am rechten Bildschirmrand zu sehen ist. S zieht mit dem Cursor einen durchsichtigen Würfel in das Bearbeitungsfeld.*) Hm. (*S löscht den durchsichtigen Würfel wieder und zieht mit dem Cursor einen Zylinder von der Auswahl in den Bearbeitungsbereich. S klickt einige Male auf den liegenden Zylinder.*)
- 7 S (*R steht auf und bewegt die Hand Richtung Tastatur.*) Du musst das wegmachen, ne. (*R und S bewegen den Mauscursor, um Veränderungen am Würfel in Tinkercad™ vorzunehmen und tippen danach auf der Tastatur auf „Entf“*) Das ist doch schon.
- 8 R (*leise*) Warte, warte. (*Nickt und gibt Werte für die Maße des Zylinders ein.*) (*Die Höhe des Zylinders ändert sich.*)

TA. 1: Schülerinnenpaar 1, Sabine und Rita im Interview
Sabine beschreibt in diesem Transkriptausschnitt (TA. 1) die Konstruktion einer der Eckwürfel in Bezugnahme auf einzelne Handlungsschritte im Programm und verwendet hierzu die Benutzeroberfläche von Tinkercad™ auf dem Notebook. Sie nutzt dabei Umschreibungen wie „Würfel erstellt“, „Löcher reingeböhrt“ oder „mit dem Zylinder“ (TA. 1, Zeile 6), die sich auf das Programm Tinkercad™ beziehen oder terminologisch, wie bei dem Verb „gebohrt“ (TA. 1, Zeile 6), sogar diesem entspringen. Hier erscheint das Wissen, zumindest auf sprachlicher und handlungsebene eng an den Kontext der Benutzeroberfläche des verwendeten CAD-Programmes gebunden zu sein. Dies ist für uns ein erster Anhaltspunkt zur Beschreibung eines möglichen SEBes „Tinkercad™“.

Im vorliegenden Transkriptausschnitt (TA. 1) stellen die Schülerinnen ihre (mathematischen) Handlungen im Kontext von Bedienungsroutrinen des Programms dar (TA. 1, Zeile 6). Im weiteren Interview fällt zudem auf, dass die beiden Schülerinnen immer wieder die perspektivischen Darstellungen des Würfels drehen, verschieben, vergrößern und verkleinern. Diese Handlungen und die vorgenommenen Beschreibungen der Schüler*innen erscheinen uns charakteristisch für die Konstituierung ihres Wissens in einem SEB „Tinkercad™“.

Eine besondere Stellung nimmt, wie oben schon angedeutet, dabei die CAD-spezifische Handlung des „Bohrens“ ein. In unserem konkreten Fall werden, u. a. im Sinne einer mengentheoretischen Komplettbildung Aussparungen in Zylinderform erstellt. Bemerkenswert ist dabei, dass der Vorgang des „Bohrens“ im Programm referenziert wird durch transparente Körper. Dabei zeigt der untenstehende Transkriptausschnitt (TA. 2, eines weiteren Interviews mit zwei anderen Schülerinnen), welche begrifflichen Schwierigkeiten die Schüler*innen (in TA. 2 ist es Pia) mit der „Bohrung“ haben.

- 1 P Mhm (*räuspert sich*) (17 sec). Wieso, (*räuspert sich*) muss man denn 'en Zylinder in den Würfel tun, um ein Loch zu bekommen?

TA. 2: Weiteres Interview mit der Schülerin Pia

Für die Ausführung einer „Bohrung“ (Abb. 4) wird ein sozusagen „negativer“ schraffierter geometrischer Körper in Tinkercad™ verwendet. Im Sinne des Konzeptes von empirischen Schülertheorien (Burscheid & Struve, 2020) ist es wenig überraschend, dass dies bei Pia (TA. 2) einen kognitiven Konflikt auslöst. Hier kann auf eine sogenannte Theoretizität des Begriffs (Stegmüller, 1978), d. h., dass dieser nur in einem spezifischen theoretischen Rahmen, hier Tinkercad™ verstanden werden kann, verwiesen werden. Da der Begriff der „Bohrung“ offensichtlich die Gültigkeit einer sehr speziellen Tinkercad™-Theorie voraussetzt und nicht der unmittelbaren Beobachtungssprache entspringt, kann man diesen als theoretischen Begriff in einem empirischen SEB beschreiben (Struve, 1990).

Im Anschluss an die obige Sequenz (TA. 1) fertigt Rita eine Zeichnung (Abb. 5) zur Verdeutlichung des „Bohrprozesses“ an und wird während des Zeichnens von Sabine auf zunächst noch fehlende Aussparungen für die Kanten (in Zylinderform) aufmerksam gemacht. Diese zeichnet Rita dann auch in Form von Kreisen ein (Abb. 5).

Die Schülerinnen wechseln selbstständig die Darstellungsebene und versuchen ihr Vorgehen mit einer Zeichnung zu verdeutlichen.

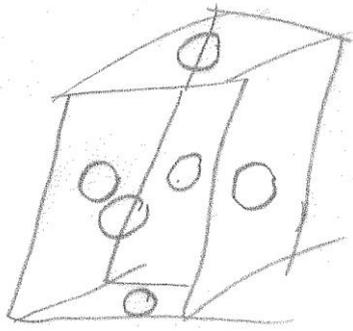
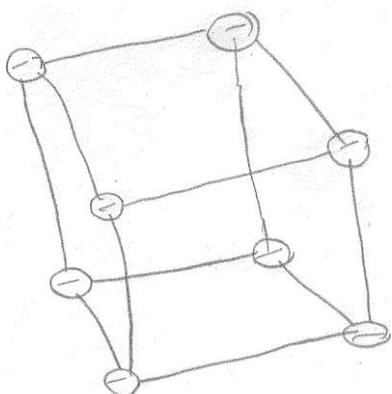


Abb. 5: Zeichnung eines „Eckwürfels“ von Rita, die Kreise kennzeichnen Aussparungen für Kanten, die Rita nach einem Impuls von Sabine einzeichnet

Im weiteren Verlauf des Interviews zeichnet Sabine dann auch ein „Knet-Kantenmodell“ (Abb. 6) und nutzt auf diese Art und Weise die Zeichenblattebene, um eine Verbindung zwischen den Kontexten CAD-Programm und Knete zur Verdeutlichung ihrer Argumentation zu erzeugen.

Ist auf der ersten Zeichnung (Abb. 5) mit der Darstellung einer Ecke als Würfel mit Kreisen als angedeutete Aussparungen deutlich der Kontext „CAD-Programm“ zu erkennen, versuchen die beiden in der zweiten Zeichnung (Abb. 6) zu verdeutlichen, wie das fertige Kantenmodell aussehen würde. Dabei spricht Sabine von Stäbchen, zeichnet aber bemerkenswerterweise die Skizze eines Knet-Kantenmodells, was z. B. an den gezeichneten Kreisen (symbolisieren Knetkugeln) als Ecken zu erkennen ist.

Sabines Ausdruck „Stäbchen“ (Transkript nicht abgedruckt) könnte darauf hinweisen, dass sie eine Bezeichnung für die gedruckten Kanten (Zylinder) sucht, die sie zu diesem Zeitpunkt aber noch nicht gesehen hat. Sabine nutzt die Zeichenblattebene, aktiviert also zum SEB „Knete“ zusätzlich den SEB „geometrische Körper“, um darin ihre Argumente zu verdeutlichen.



Sabine bezeichnet die Kanten in der Skizze als „Stäbchen“.

Abb. 6: Zeichnung eines fertigen Kantenmodells von Sabine

Die gleichzeitige Aktivierung beider SEBe spiegelt auch der folgende, sich auf die Zeichnung (Abb. 6) beziehende Transkriptausschnitt (TA. 3) wider.

- | | | |
|---|---|---|
| 1 | S | Man sollte den Zylinder nehmen, um Löcher reinzumachen, so. |
| 2 | R | Es gibt nämlich (<i>bedient das Notebook</i>). |
| 3 | S | Damit man. |
| 4 | R | Es ungefähr wie Knete machen kann. |
| 5 | I | Ah genau. Zeig nochmal darauf wo, man das dann zusammensteckt! |
| 6 | S | (<i>Zeigt mit dem Bleistift auf die Ecken des aufgezeichneten Kantenmodells und zeichnet Striche in die Ecken.</i>) Hier. |

TA. 3: Weiterer Auszug aus dem Interview mit dem Schülerinnenpaar 1, Sabine und Rita

Der folgende Transkriptauszug (TA. 4) zeigt, wie Sabine den SEB „Knete“ und den SEB „3D-Druck“ aufeinander bezieht. „Das sind nämlich auch acht.“ (TA. 4, Zeile 10) ist dabei aus unserer Sicht ein Indiz dafür, dass Sabine eine kontextunabhängige Strukturgleichheit im Sinne der Grundvorstellung *Anzahlen und Form charakterisierender geometrischer Elemente*, erkennt:

- | | | |
|----|---|--|
| 1 | I | Genau.. Ok.. Mm ja, erinnert euch denn das, was wir jetzt hier gemacht haben an das, was ihr schon mal gemacht habt? |
| 2 | S | Mh, ja irgendwie schon. |
| 3 | I | Ja, was- also? |
| 4 | R | Mit der Knete (<i>Handbewegung: Zusammenstecken von Kante und Ecke</i>). |
| 5 | I | Ah, ok ihr erinnert euch daran, ne? |
| 6 | S | Jetzt weiß ich ungefähr, was es werden könnte. |
| 7 | I | Aha, was? |
| 8 | S | Man kann das mit genau den auch zusammenstecken, wie mit Knete. |
| 9 | I | Ah, ok. |
| 10 | S | Das sind nämlich auch acht. |

TA. 4: Auszug aus dem Interview von Sabine und Rita

Die Frage des Interviewers (TA. 4, Zeile 1) ist relativ unspezifisch und ließe von Schülerinnenseite aus verschiedene Deutungsmöglichkeiten zu. Sie könnten in ihrer Antwort beispielsweise räumliche, zeitliche oder inhaltliche Aspekte ansprechen. Ritas Ausführungen deuten in Richtung des SEBes „Knete“, indem sie sagt (TA. 4, Zeile 4): „Mit der Knete. (*Handbewegung ‚zusammenstecken‘*)“. Vermutlich erinnert sie sich in dieser Situation an den vorangegangenen Projektvormittag zu Knet-Kantenmodellen. Für Sabine zeigt die Sequenz interessanter Weise einen Aha-Effekt bzw. eine „spontane Sinnkonstruktion“ (Bauersfeld, 1983, S. 53). Sie realisiert strukturelle Gemeinsamkeiten zwischen ihren Wissensbereichen zur Knete und zu den 3D-Druck-Modellen im Sinne der intendierten Grundvorstellung (TA. 4, Zeile 8), trotz aller (nicht zu unterschätzenden) kontextuellen Unterschiede. Ausgelöst wird dies wohl durch einen äußeren Impuls, der hier durch die Ausführungen Ritas deutlich wird.

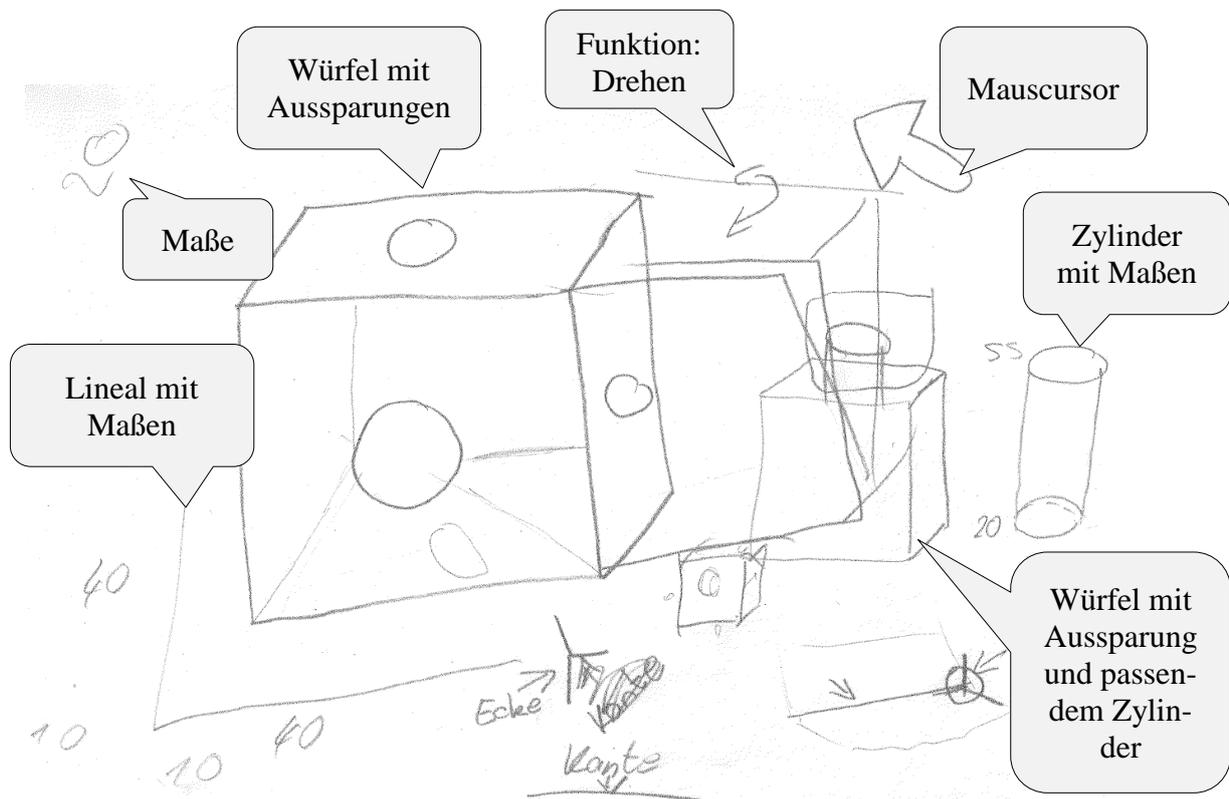


Abb. 7: Zeichnung der Tinkercad™-Oberfläche von Sarah und Pia (graue Sprechblasen sind Interpretationen der Autorinnen und des Autors)

4.2.2 Schülerpaar 2: Sarah und Pia – Wissensgenese im Rahmen kontextueller Bindung

Zur Situation: Im Gegensatz zu Sabine und Rita arbeitete das Schülerinnenpaar Sarah und Pia an dem ersten Vormittag mit 3D-Druck-Technologie und erst im Anschluss (eine Woche später) mit den Knet-Kantenmodellen.

Wie beim Schülerpaar 1, gibt der folgende Transkriptausschnitt (TA. 5) den Einstieg in das Interview wieder. Auch die Schülerinnen Sarah und Pia werden gebeten, ihre in der Lernumgebung gemachten Erfahrungen einem (fiktiven) Mitschüler zu beschreiben und den Arbeitsauftrag sowie das Vorgehen in eigenen Worten zu erläutern.

Dabei fällt auf, Sarah und Pia referenzieren im Verlauf der Abschlussinterviewsituation ihr Wissen auf eine fast fotografisch memorierte Repräsentation der Benutzeroberfläche des Programms Tinkercad™, einschließlich der durch das Programm ermöglichten Handlungsroutinen. Der Transkriptausschnitt (TA. 5) zeigt dies sehr deutlich:

- 1 P Also als erstes haben wir 'n Würfel genommen und wollten da, wollten Löcher rein- machen. Dafür brau-, aber dafür haben wir 'n Zylinder genommen.
- 2 S Wir haben den größer gemacht, weil das ganz klein war. (P zeichnet einen Zylinder, der etwas höher ist als der Würfel.)

- 3 P Also, wir haben Zylinder (zeigt mit dem Stift auf den Zylinder), haben wir da reingesteckt (zeigt auf den Würfel), (S nimmt P den Stift aus der Hand.)
- 4 P Und dann. Wir haben den da reingesteckt und dann, ha-, gab's da so 'ne Taste. Also dann mussten wir lange draufhalten. Dann kamen (zeichnet ein Quadrat um den eingesetzten Zylinder und die obere Seitenfläche des Würfels.)
- 5 S So.
- 6 P Kam so was, so'n Strich, also dann kamen Striche.
- 7 S (Versucht den Stift von P zu nehmen.) Und dann haben wir auf Bohren gedrückt und dann mussten wir auf so'n (nimmt P den Stift aus der Hand und zeichnet einen Pfeil), so'n Pfeil, irgendwie so, drücken.
- 8 S Und dann ha', ehm, war schon so'n Loch. (Zeigt auf den Kreis auf der Oberseite des ersten Würfels.)
- 9 P War da so'n Loch.
- 10 S Und hier unten auch 'n Loch. (Zeichnet einen Kreis auf die untere Seitenfläche des ersten Würfels.)
- 11 S Und noch oben. (Legt den Stift weg.) Und dann mussten wir das drehen und dann wieder das Gleiche machen.
- 12 P Da waren so welche, (nimmt den Stift),
- 13 S Bis,
- 14 P Pfeile (zeichnet einen kurvigen Pfeil mit einer Pfeilspitze an jedem Ende),
- 15 S bis man a- hier ganz Loch hat. Hier und hier. (Zeigt auf alle Seiten des Würfels.)

TA. 5: Auszug aus dem Interview von Sarah und Pia

Sarah und Pia benutzen Wendungen wie „n Würfel genommen“, „n Zylinder genommen“ (TA. 5, Zeile 1), „größer gemacht“ (TA. 5, Zeile 2) oder „lange draufhalten“ (TA. 5, Zeile 4) und „wir auf Bohren gedrückt“ (TA. 5, Zeile 7), die eindeutig auf spezifische Handlungsroutinen der verwendeten CAD-Software verweisen. Sie argumentieren so, dass sie ihre kurz zuvor im Rahmen der Lernumgebung ausgeprägten individuellen SEBe im Kontext des Programmes Tinkercad™ aktivierten.

Auch im Verlauf des Interviews beschreiben die Schülerinnen ihr Vorgehen im Kontext der Handlungsroutinen des Programmes Tinkercad™ sowie an Hand einer ausführlichen Zeichnung. Wie Abb. 7 zeigt, bilden sie dabei sehr originalgetreu die Benutzeroberfläche von Tinkercad™ nach. Bemerkenswert hier ist die Detailtreue. So zeichnen die beiden Schülerinnen sogar den Mauscursor oder das programmeigene Bemaßungslineal ein (Abb. 7). Bei ihren verbalen Beschreibungen benutzen die Schülerinnen zudem Wörter („bohren“, „Lineal“, Pfeile, Loch, 40, Abb. 7), die auf ihren Erfahrungsbereich „Tinkercad™“ hindeuten. Mit Angabe der Zahl „40“ (Abb. 7) beziehen sich die Schülerinnen dabei beispielsweise auf die Bemaßungen der einzelnen Elemente des betrachteten geometrischen Körpers. Diese können an dem in der Arbeitsebene des Programmes eingefügten „Lineals“ abgelesen werden. Ein weiteres Beispiel ist auch die Bemaßung des gezeichneten Zylinders mit „20“ und „55“ (Abb. 7), wobei diese Bemaßungen an ähnlichen Positionen angeordnet werden, wie sie im Programm Tinkercad™ dargestellt sind.

Parallel scheinen Sarah und Pia den SEB „geometrische Körper“ zu aktivieren. Die beiden Mädchen werden im Gespräch vom Interviewer (Transkript nicht abgedruckt) gefragt, was zu ihren „Eck-Würfeln“, die sich bereits im 3D-Druck befanden, noch fehlt. Daraufhin beginnen Sarah und Pia grundsätzlich über Ecken und Kanten zu sprechen (TA. 6) und verdeutlichen ihr grundsätzliches Verständnis darüber, wie Kanten und Ecken zueinander liegen in zuzusätzlichen Skizzen am unteren Bildrand (Abb. 8).

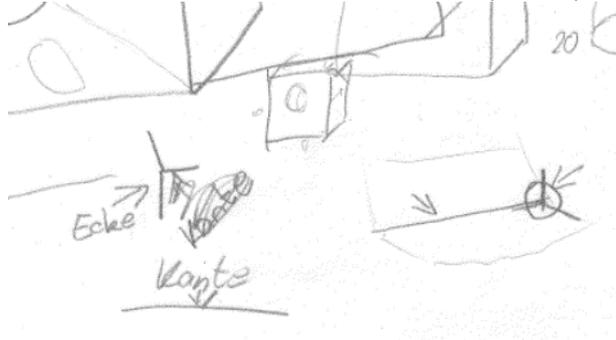


Abb. 8: Vergrößerter Auszug aus Abb. 7 unterer Bildrand – Verdeutlichung der Lagebeziehung Kanten und Ecken durch die beiden Schülerinnen

- | | | |
|----|---|--|
| 53 | I | Eure Würfel sind im Druck. Super, was fehlt uns denn jetzt noch? |
| 54 | S | Mmh. |
| 55 | I | Zu den Würfeln dazu? |
| 56 | S | Ja. Hmm. |
| 57 | P | Die Flächen brauchen wir noch, die Decke die Kanten. |
| 58 | I | Genau. |
| 59 | S | Ja. |
| 60 | P | Und die Kanten sind das hier. Wo die Flächen sich gegeneinander. |
| 61 | I | Mmh. |
| 62 | P | Wo die Flächen, die, wo die sich zusammen treffen an einer Linie (zeichnet drei sich in einem Punkt treffende Linien, Abb. 8). |
| 63 | I | Genau. Genau. |
| 64 | S | Das sind hier eigentlich- (4sec.). Das sind die Kanten (zeigt auf eine der Linien die vorher gezeichnet wurden, Abb. 8). |
| 65 | I | Ja, genau. Willst du mal 'n Pfeil dranzichnen? Wo sind die Kanten genau? |

TA. 6: Auszug aus dem Interview von Sarah und Pia zu Ecken und Kanten

Obwohl sich in der Zeichnung Referenzen auf den SEB „Tinkercad™“ und den SEB „geometrische Körper“ befinden, haben wir den Eindruck, dass diese unverbunden bleiben. So wird die Tinkercad™-Arbeitsebene im Prinzip abgezeichnet, aber einerseits beispielsweise keine Beziehung zwischen den Zylindern und Eckwürfel im oberen Bildabschnitt (Abb. 7) und den allgemeinen Ausführungen zur Lagebeziehung von Ecken und Kanten im unteren Bildabschnitt (Abb. 8) andererseits hergestellt. Dieser Eindruck bestätigt sich in Transkriptauszug 6, wo Sarah und Pia ausschließlich im SEB „geometrische Körper“ argumentieren, obwohl der Interviewer in seiner Anfangsfrage explizit den SEB „3D-Druck“ (TA. 6, Z. 53) anspricht.

Die Zeichnungen von und Interviews mit Sarah und Pia geben, im Gegensatz zu Sabine und Rita (Schülerinnenpaar 1), keinen Anlass dazu, zu folgern, dass die beiden Schülerinnen einen vermittelnden SEB aktivieren. Die in der Lernumgebung angelegte Strukturgleichheit auf Grundlage der Grundvorstellung *Anzahlen und Form charakterisierender geometrischer Elemente* bedingt also keine logische Notwendigkeit diese in verschiedenen SEBen zu sehen bzw. diese darüber zu verbinden.

4.2.3 Schülerpaar 3: Maren und Laura – Der „Kantenwürfel“. Andere Bezeichnungen in einem neuen Kontext

Zur Situation: Im Folgenden beschreiben wir Beobachtungen für ein weiteres Schülerinnenpaar (Maren und Laura, Namen geändert), das an der Lernumgebung „Kantenmodelle mal anders“ teilgenommen hat. Wie Sarah und Pia arbeiten sie bereits am ersten Vormittag in der Gruppe zur 3D-Druck-Technologie.

Der folgende Transkriptauszug (TA. 7) gibt den Einstieg in das Interview wieder. Die Schülerinnen Maren und Laura werden gebeten, ihre in der Lernumgebung gemachten Erfahrungen einem (fiktiven) Mitschüler zu beschreiben und den Arbeitsauftrag sowie das Vorgehen in eigenen Worten zu erläutern.

Wie bei Sarah und Pia erscheint das zuvor in der Lerneinheit konstruierte Wissen in hohem Maße bereichsspezifisch verfügbar, es wird im Gespräch gebunden an den Kontext (bzw. die Handlungsroutinen) des verwendeten CAD-Programmes Tinkercad™ bzw. der 3D-Druck-Technologie aktiviert:

- 1 I (*Setzt sich auf den Schreibtischstuhl und rückt zum Schreibtisch.*) Was ihr gemacht habt, okay und zwar, stellt euch jetzt mal vor, ihr würdet – ihr könnt ruhig noch was näher hier dranrücken (*Die Kinder rutschen auf ihren Stühlen näher zum Schreibtisch.*) – stellt euch mal vor, ihr würdet jetzt einem Klassenkameraden, der jetzt nicht mitmachen konnte, erzählen was ihr gemacht habt. Was würdet ihr dem sagen?
(*L dreht mit dem Stuhl durchgängig von Seite zu Seite.*)
- 2 M Also wir haben mit 3D-Druckern gearbeitet. Mussten dabei ein so'n Programm so'n Würfel herstellen mit so Löchern d'rin. Ich fand das ziemlich schwierig. Und, joa (*guckt zu L.*)
- 3 L Ja, also wir haben ja. Also wir haben mit n'em 3D-Drucker gearbeitet mit n'em, ehm mit dem Computer haben wir dann, ehm, ein ehm, ein Würfel genommen. (*L hört auf, sich mit dem Stuhl von Seite zu Seite zu drehen.*) Haben dann halt ehm den, den Zylinder haben wir dann auf (*zeigt mit der Hand eine Waagerechte in der Luft*) die Fläche gemacht. Haben dann ehm (*geflüstert*). Was haben wir danach gemacht? (*Wieder in normaler Lautstärke.*) Ehm dann haben wir halt, ehm (*L dreht mit dem Stuhl durchgängig von Seite zu Seite.*) Den haben wir dann da ein Loch reingemacht. Und dann war, und dann haben wir das bei den anderen Seiten genauso gemacht. Und ich fand's auch sehr schwer.

TA. 7: Transkriptauszug aus dem Einstieg in das Interview mit Maren und Laura

Mit Blick auf Transkriptausschnitt 7 ist auffällig, dass Maren und Laura im Interview zunächst davon berichten, dass sie mit 3D-Druckern gearbeitet haben, obwohl sie zum Interviewzeitpunkt ausschließlich mit dem Programm Tinkercad™ gearbeitet hatten. Hier scheint der motivationale Aspekt des Ziels später mit den Druckern zu arbeiten sehr bedeutend zu sein. Ansonsten ist zu beobachten, dass die Schülerinnen die geometrischen Begriffe Würfel, Zylinder und Fläche verwenden und umgangssprachlich von einem Loch für die „Bohrung“ in Tinkercad™ sprechen. Gesten und Beschreibungsrahmen lassen dabei erkennen, dass sie ihre Konstruktionsschritte im CAD-Programm beschreiben. Direkt daran schließt sich folgende Sequenz (TA. 8) an:

- 1 L (*L malt einen 3-dimensionalen Würfel, dessen hintere linke Ecke zu weit nach hinten ragt.*) (*Leise.*) Sieht jetzt zwar nicht so gut aus aber egal und dann haben wir ehm, Zylinder genommen und haben den halt hier reingetan. (*L malt einen ausgemalten Kreis auf die obere Seitenfläche des Würfels.*) Und dann haben wir das ehm, dann haben wir so ehm Computer, da gabs so ehm, da musste man was so drum machen. (*L zeichnet ein Quadrat um den Würfel.*) Und dann muss- stand da oben kopieren und dann sind wir da darauf gegangen, haben das hier dann hin getan und dann war'n Loch da drin.
- 2 Kopieren (*gruppiert ist gemeint, Anm. der Autoren.*)
- 3 Und dann haben wir ehm da drauf gedrückt.
- 4 Haben das, und dann war hier (*zeigt auf den Kreis auf der oberen Seitenfläche des Würfels*) ein Loch.
- 5 M Und dann haben wir den Würfel gedreht.
- 6 Und haben da wieder so ein Loch reingemacht.
- 7 L Auf der Seite (*zeichnet einen Kreis auf die rechte Seitenfläche des Würfels*) und dann hier (*zeichnet einen Kreis auf die vordere Seitenfläche des Würfels*) und dann auf der anderen Seite.
- 8 M Ja da unten.
- 9 L Genau.
- 10 I Also, wie viele Löcher habt ihr (*L dreht den Bleistift in ihrer Hand.*) insgesamt gemacht?'
- 11 M Ehm... sechs glaube ich.
- 12 L (*Leise*) oder sieben. Ja, warte.
- 13 M Sechs. Doch sechs Flächen.

TA. 8: Transkriptauszug des weiteren Verlaufs des Interviews mit Maren und Laura

Laura bezieht die Einstiegsfrage, anders als beispielweise zuvor Rita, (vgl. Schülerinnenpaar 1) nicht auf den Umgang mit Knet-Kantenmodellen, sondern beschreibt wie schon zuvor allgemeiner, was darauf zurückgeführt werden könnte, dass im Unterricht schon mit geometrischen Körpern gearbeitet wurde. So wurde beispielsweise in der 3. Klasse bereits, zur Ausprägung von Grundvorstellungen über Charakteristika von einfachen regelmäßigen geometrischen Körpern gearbeitet. Es erscheint daher angemessen, Lauras Beschreibungen im Sinne des SEBes „geometrische Körper“ zu deuten. Anders als bei Sabine und Rita (Schülerinnenpaar 1) wird hier nicht der Kontext Knet-Kantenmodelle aktiviert.

Interessanterweise aktivieren die beiden dann im Anschluss Wissen aus der Schule und vergangenen Workshops in der Mathe-Werkstatt, wie der folgende Transkriptauszug 9 zeigen kann.

An dieser Stelle bezieht sich auch Maren zunächst auf Erfahrungen, die bereits in der Schule gemacht wurden (TA. 9, Zeile 21). Maren's örtliche Assoziation „Ja, wir waren ja letztes Jahr auch schon hier.“ (TA. 9, Zeile 19) scheint für Laura einen Erinnerungsimpuls an den zuvor teilgenommenen Projektvormittag in der Mathe-Werkstatt zu initiieren. Laura

beschreibt dann prozesshaft eine Abfolge von Handlungen, die damals zu einem Knet-Kantenmodell geführt hatten.

- 18 I Mhh, okay. Gut und woran erinnert, fällt euch noch irgendwas ein, woran das euch, euch das erinnert hat?
- 19 M Ja, wir waren ja letztes Jahr auch schon hier mit.
- 20 I Ahh so.
- 21 M In der Schule, da haben wir mit geometrischen Formen
- 22 L mit dieser Knete, mit Knete, mit dem Strohalm
- 23 I Was habt ihr denn da hergestellt?
- 34 L Da haben wir ehm, auch 'n Würfel glaub gemacht. Da haben wir nämlich so ehm, Strohhalme genommen, haben die dann in die (*versucht das Zusammenstecken der Strohhalme mit den Händen darzustellen*), dann ham wir so Knete genommen und haben die im Kreis² gemacht (*dreht die Hände aufeinander, als ob sie Knete in eine Kugel formen möchte*). Und dann haben wir daraus einen Würfel gemacht (*zeigt mit den Händen, wie sie die Strohhalme in die Knete gesteckt haben, um einen Würfel zu erstellen*). Also reingesteckt, an die andere Seite wieder Knete und (*L dreht mit dem Stuhl durchgängig von Seite zu Seite, M knibbelt an der Handinnenfläche*). Dann wieder reingesteckt.

TA. 9: Transkriptauszug des Interviews mit Maren und Laura – Aktivierung von Wissen aus dem Schulunterricht

Die angedeuteten Gesten „dreht die Hände aufeinander, als ob sie Knete in eine Kugel formen möchte“, „zeigt mit den Händen, wie sie die Strohhalme in die Knete gesteckt haben“ (TA. 9, Zeile 34) weisen darauf hin, dass das Wissen in ihrem SEB „Knete“ nicht nur sprachlich, sondern auch enaktiv repräsentiert ist (Bruner, 1971). Laura scheint mit Gesten ihre mentalen Repräsentationen verdeutlichen zu wollen. Im Vergleich zu den anderen beiden genannten Schülerinnenpaaren referenzieren Laura und Maren neben einer symbolisch (-sprachlichen) Ebene („verbal“, Tall, 2002) deutlich weniger eine ikonisch und vielmehr eine enaktive Ebene (Bruner, 1971).

Dazu möchten wir mit Blick auf die oben angeführten drei Transkriptionsauszüge (TA. 7, 8 & 9) mit Laura und Maren darauf hinweisen, dass sich Bezüge finden lassen, die auf mindestens drei der von uns in Abschnitt 4.1 beschriebenen SEBe hinweisen.

Denn neben Referenzen zum SEB „Knete“ (TA. 9, Zeilen 22-24), finden sich Hinweise auf die Aktivierung des SEBes „Tinkercad™“ (Gesten in TA. 8, Zeilen 2 ff.) in Verbindung mit dem SEB „geometrische Körper“ (Begriffe in TA. 8, Zeile 2 ff.).

Hier erscheint erneut, mit Blick auf die Bereichsspezifität des jeweils individuell konstruierten Wissens, der Ansatz Bauersfelds geeignet, um die Komplexität

von Lernprozessen eines mathematischen Inhaltes in verschiedenen Kontexten abzubilden.

Sogar der allgemeinere Begriff *Kantenmodell* (SEB „geometrische Körper“) wird in dieser Sequenz genannt.

- 25 I Ah okay, wie nennt man das, was ihr da gemacht habt?
- 26 M Ehm, ich glaub-
- 27 L 'en Würfel
- 28 I ja, auch. (*L dreht nicht mehr mit dem Stuhl von Seite zu Seite, schaut jetzt zu M*) Fällt euch das noch ein, wie wir das genannt haben?
- 29 M Flächen (*leise*) ne ehm
- 30 L ne, warte.
- 31 M Kanten-mo-dell (*Bindestriche eingefügt durch Autoren zur Verdeutlichung der Betonung.*)

TA. 10: Transkriptauszug des weiteren Interviews mit Maren und Laura – Nennung des Begriffs „Kantenmodell“

Interessanterweise nutzen Maren und Laura (ähnlich wie Sarah und Pia) in diesem Zusammenhang Zeichnungen, um ihr Vorgehen in der CAD-Programmebene zu verdeutlichen. Dies war für uns insofern bemerkenswert, als in der Interviewsituation Notebook und Programm zur Verfügung standen. In den Zeichnungen finden sich dann ebenfalls deutliche Bezüge zur Programmoberfläche von Tinkercad™. So wird beispielsweise (vergleichbar zu Abb. 7 und 8) in einer Skizze eines Eckwürfels während des Interviews eine mit der Maus vorgenommene Markierung auf der Benutzeroberfläche von Tinkercad™ mitübertragen, d. h. salopp gesprochen: „the context matters“. Eine wichtige Anschlussfrage, die daran anknüpft, wäre, inwiefern sich damit die Qualität des mathematischen Wissens verändert. Fließen, wie in Hölzls (1994) Beschreibungen zu Schülerwissen im Zusammenhang mit dynamischer Geometriesoftware medienspezifische Aspekte in die mathematische Begriffsbildung mit ein? Unsere Beobachtungen hinsichtlich Sprache und Gesten der Schülerinnen scheinen zumindest darauf hinzuweisen.

Weiterhin lassen Bemerkungen wie „Ehm, sechs glaube ich“, „oder sieben“ und „Ja, warte. Sechs. Doch sechs Flächen.“ (TA. 8, Zeilen 11-13) vermuten, dass Maren auf sprachlicher Ebene im Sinne der für die Lernumgebung intendierten Grundvorstellung mit Bezug auf die charakteristischen Anzahlen von Ecken, Kanten und Flächen zwischen verschiedenen SEBen zu wechseln vermag. Dies kann auch durch den folgenden Transkriptauszug (TA. 11) gestützt werden, wo Maren in Zeile 67 selbstständig einen Vergleich zum Knetmodell bemüht:

- 64 I Ja was könnte man mit dem, was ihr da erstellt habt machen?
 65 M Einen großen Würfel (*zeigt mit den Händen einen Würfel in Schulterbreite*). Also, dass das so zu sagen die Ecken sind (*L dreht nicht mehr mit dem Stuhl von Seite zu Seite*). Dann eben wieder was reinstecken (*stellt mit den Händen das Zusammenstecken des Würfels in Tinkercad™ dar, danach kratzt sie an ihren Handinnenflächen*).
 66 L Zum Beispiel.
 67 M So wie bei der Knete.

TA. 11: Transkriptauszug des weiteren Interviews mit Maren und Laura – Bezug zum Knetmodell

Die Zeichnung (Abb. 9) vermittelt zudem auf ikonischer Ebene den Eindruck, dass auch an die (deckungsgleiche) quadratische Form der Seitenflächen gedacht wird.

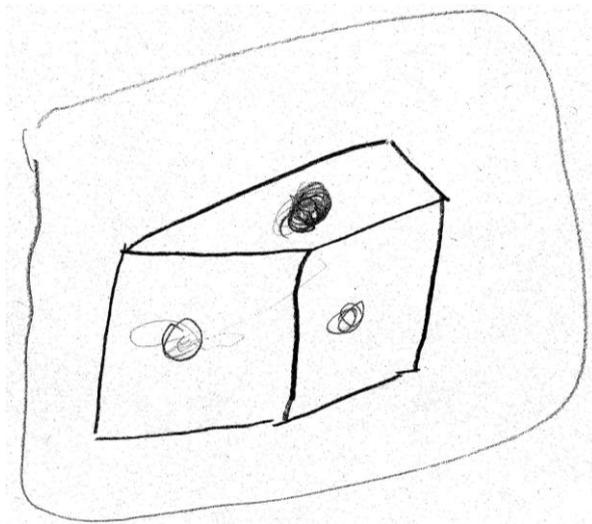


Abb. 9: Zeichnung von Maren und Laura

Interessanterweise nennen Laura und Maren schließlich das mit dem 3D-Druck erstellte Modell nicht Kantenmodell (wie in der Lernumgebung intendiert und zu Beginn der Lerneinheit verwendet), sondern nutzen den Begriff, „Kantenwürfel“ (TA. 12, Zeile 91):

- 81 I Dann überlegt mal, welches Wort, (*M knibbelt kurz an der Handinnenfläche*) also wenn ihr, di- das was ihr hergestellt habt mit einem Wort beschreiben würdet, welches Wort würdet ihr dann nehmen? (*14 sec*), (*L hört auf mit dem Stuhl von Seite zu Seite zu drehen.*), (*14 sec*)
 82 L Keine Ahnung.
 83 M Mm (*schüttelt den Kopf und zieht die Schultern hoch*).
 84 I Überlegt nochmal.
 85 L Wie wir das nennen würden? (*M knibbelt kurz an der Handinnenfläche und Fingernägeln*).
 86 I Ja (*4 sec*).
 87 L (*Flüstert*) Hm, wie wir das nennen, oder. Irgendwas mit Ecken- (*L spielt an den Haaren, dreht sich dann zu M und flüstert zwei mal etwas*), (*34 sec*)

- 88 I Und (*L dreht mit dem Stuhl durchgängig von Seite zu Seite, M knibbelt kurz an der Handinnenfläche*), (*3 sec*)
 89 L Das haben wir doch mit Eck- Kanten gemacht, ne.
 90 I Ja.
 91 L Kantenwürfel.

TA. 12: Transkriptauszug des weiteren Interviews mit Maren und Laura – „Kantenwürfel“

Laura scheint damit auf herausragende Bedeutung der Ecken und Kanten, sowie den einzigen in der Lernumgebung thematisierten geometrischen Körper, zu verweisen.

5. Zusammenfassung und Ausblick

Das Diagramm (Abb. 10) soll noch einmal einen schematischen Überblick über die beschriebenen SEBe geben, die genutzt wurden, um die vorliegenden empirischen Daten zu beschreiben und zu ordnen. Diese stehen in Wechselwirkung zueinander und sind wie die Transkripte (TA. 1 – TA. 12) zeigen (sprachlich) eng miteinander verwoben. Das innere Rechteck steht für die Verbindung der SEBe, mit Blick auf das Erkennen kontextunabhängiger Gemeinsamkeiten (vgl. intendierte Grundvorstellung in 2.2).

Es zeigt sich in unseren Untersuchungen, dass das aus der dritten Klasse eigentliche Vorhandensein eines allgemeinen vermittelnden SEBs „geometrische Körper“, an den mit dem zu Anfang der Lerneinheit angefertigten Steckbrief erinnert werden sollte, zunächst keine logische Notwendigkeit für die Schüler*innen bedeutet, diese auch in weiteren SEBen zu erkennen.

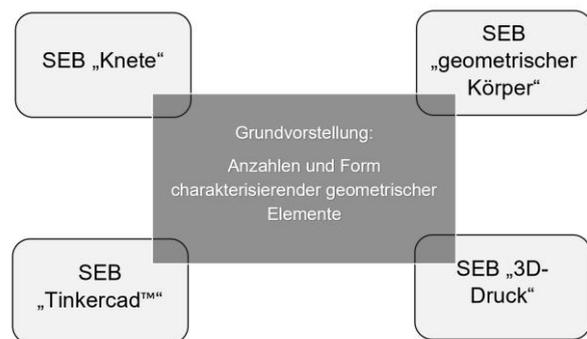


Abb. 10: Überblick der in der Analyse beschriebenen Subjektiven Erfahrungsbereiche

Ganz im Gegenteil zeigt die Studie, dass dies z. B. Sarah und Pia nicht gelingt und es bei Sabine einer von außen angeregten Sinnkonstruktion nach Erzeugung eines kognitiven Konfliktes bedarf. Im Prinzip legt unsere Untersuchung damit nahe, was Bauersfeld (1985, S. 17) als These wie folgt formuliert:

Es gibt keine allgemeinen Begriffe, Strategien und Prozeduren. Man (das Subjekt) kann sie allgemein denken,

aber sie sind nicht allgemein verfügbar, d. h. nicht reichsunabhängig aktivierbar.

Man kann Begriffe, Strategien und Prozeduren vielleicht allgemein denken, diese müssen aber für jeden neuen Kontext, wie den von uns durch die 3D-Druck-Technologie angelegten, in Aushandlungsprozessen neu eingebunden und konstituiert werden. Unser vorsichtiger Hinweis an Lehrpersonen wäre es, in neuen Kontexten nicht automatisch von der Aktivierung von in anderen Zusammenhängen vermeintlich bereits gesichertem allgemeinem Wissen auszugehen.

Ob und wie dieses in spezifischen Situationen angewendet werden kann, bleibt eine weitere didaktische Herausforderung. Und dieses wird durch die vielfältigen Möglichkeiten mit neuen Medien mathematische Inhalte auch auf neue Weisen darzustellen zumindest nicht geringer.

Die Handlungen des *Zeichnens* und *Sprechens* ermöglichen das SEB-spezifische Wissen in andere SEBe (z. B. mit der Intention einer Veranschaulichung bzw. Erklärung) zu übertragen. Sie ermöglichen Aushandlungsprozesse und stellen damit eine Art Vermittlungsebene für die Schüler*innen dar, um ihr Wissen zu erklären und zu übertragen.

6. Fazit

Ziel des Beitrages war es Begriffsentwicklungsprozesse, mit Bezug auf die Darbietung unterschiedlicher Kontexte, exemplarisch für den elementargeometrischen Begriff *Würfel* zu beschreiben. Dabei sind wir der Frage nachgegangen, inwiefern Schüler*innen in der Lage sind, ihr im Unterricht erworbenes Wissen über geometrische Körper auf weitere Situationen (jeweils kontextspezifisch) anzuwenden und zu übertragen. Eine wichtige Rolle bei unseren empirischen Untersuchungen spielten dabei die Möglichkeiten, die der Einsatz von neuen Medien im Schulunterricht bietet, spezieller, wie der Umgang mit einer mathematischen Lernumgebung unter Einsatz der 3D-Druck-Technologie die begrifflichen Lehr-Lern-Prozesse von Schüler*innen beeinflussen kann. Eine entscheidende Rolle spielte in unserer Beschreibung das (potentielle) Konstituieren sogenannter vermittelnder SEBe, welche das Wissen um die Strukturgleichheit im Sinne der intendierten Grundvorstellung *Anzahlen und Form charakterisierender geometrischer Elemente* beinhalten (vgl. 2.2). Unsere Studie zeigt dabei ganz deutlich, dass dieser vermittelnde (vermeintlich bereits verfügbare) allgemeinere SEB (beispielsweise SEB „geometrische Körper“) aber keinesfalls garantiert, dass das Wissen bzw. die Grundvorstellung auf neue ähnliche Situationen – wie wir sie neu durch die 3D-Druck-Technologie in den Unterricht eingebracht haben – angewendet werden kann. Hier bedarf es, in Abhängigkeit der neuen

Kontexte, eines erneuten konstituierenden Begriffsentwicklungsprozesses, der durch Impulse der Lehrperson begleitet werden muss und beispielsweise durch die Erzeugung eines kognitiven Konfliktes oder explizite Hinweise auf kontextunabhängige strukturgleiche Merkmale angeregt werden kann. Mit Blick auf die durchgeführte Analyse erscheinen uns folgende Punkte bemerkenswert und eröffnen Anknüpfungspotential für weitere Forschungsarbeit in diesem Bereich:

- Durch den Einsatz der 3D-Druck-Technologie konnten neue Begriffsbildungsprozesse angeregt werden. Die Schüler*innen reicherten ihr Wissen z. B. mit Handlungen und Begriffen aus der verwendeten CAD-Software an. Es wäre nun im Weiteren zu klären, inwieweit dies einer begrifflichen Entwicklung in einem allgemeineren Sinn eher zuträglich oder hinderlich ist (Hölzl, 1994).
- Das Fallbeispiel konnte zeigen, wie stark die individuelle Wissensentwicklung durch die Bereichsspezifität von Wissen an die Situation des Wissenserwerbs geprägt ist. Grundvorstellungen, die eigentlich, mit Blick auf den thematisierten Steckbrief zu Beginn der Lerneinheit, allgemein zur Verfügung zu stehen scheinen, ermöglichen keine sichere Prognose darüber, ob es Schüler*innen gelingt, diese auf neue bisher unbekannte Kontexte zu übertragen. Mit Bauersfeld (1985, S. 17), kann man sie vielleicht „allgemein denken, aber sie sind nicht allgemein verfügbar.“

Anmerkungen

¹ Namen (auch der folgenden Schülerinnen) geändert.

² Es ist bemerkenswert, dass an dieser Stelle nicht der Begriff „Kugel“ genutzt wird.

Literatur

- Bauersfeld, H. (1983). Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In H. Bauersfeld, H. Bussmann & G. Krummheuer (Hrsg.), *Lernen und Lehren von Mathematik. Analysen zum Unterrichtshandeln II* (S. 1-56). Köln: Aulis.
- Bauersfeld, H. (1985). Ergebnisse und Probleme von Mikroanalysen mathematischen Unterrichts. In W. Dörfler & R. Fischer (Hrsg.), *Empirische Untersuchungen zum Lehren und Lernen von Mathematik* (S. 7-25). Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.
- Bender, P. (1991). Ausbildung von Grundvorstellungen und Grundverständnissen – ein tragendes didaktisches Konzept für den Mathematikunterricht – erläutert an Beispielen aus den Sekundarstufen. Abgerufen von <http://digital.ub.uni-paderborn.de/hsx/content/tit-leinfo/43287>.
- BMBF (2020, 26. Oktober). Das sollten Sie jetzt wissen. <https://www.bmbf.de/de/wissenswertes-zum-digital-pakt-schule-6496.php>

- Bruner, J. S. (1971). Über kognitive Entwicklung. In J. S. Bruner, R. R. Olver & P. M. Greenfield (Hrsg.), *Studien zur kognitiven Entwicklung* (S. 21-53). Stuttgart: Klett.
- Bruner, J. S. (1973). *Der Prozeß der Erziehung*. Berlin: Berlin Verlag.
- Burscheid, H. J. & Struve, H. (2020). *Mathematikdidaktik in Rekonstruktionen. Grundlegung von Unterrichtsinhalten*. Wiesbaden: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-29454-0>
- Dilling, F. (2019). Der Einsatz der 3D-Druck-Technologie im Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen und exemplarische Anwendungen für die Analysis. Wiesbaden: Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-24986-1>
- Dilling, F. & Witzke, I. (2020). The Use of 3D-printing Technology in Calculus Education – Concept formation processes of the concept of derivative with printed graphs of functions. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 6, 320-339. <https://link.springer.com/article/10.1007/s40751-020-00062-8>
- Dilling, F., Marx, B., Pielsticker, F., Vogler, A. & Witzke, I. (2020). Praxisbuch 3D-Druck im Mathematikunterricht. Einführung und Unterrichtsentwürfe für die Sekundarstufen I und II. Münster, New York: Waxmann.
- Dresing, T. & Pehl, T. (2015). Praxisbuch Interview, Transkription & Analyse. Anleitungen und Regelsysteme für qualitative Forschung. Marburg: Eigenverlag.
- Franke, M. & Reinhold, R. (2016). *Didaktik der Geometrie*. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.
- Fastermann, P. (2016). *3D-Drucken. Wie die generative Fertigungstechnik funktioniert*. Berlin, Heidelberg: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-40964-6>
- Integrative Existenzgründung in der Region Hannover (2018). *Basar – Zeitung für Bildung, Arbeit und Selbstständigkeit in der Region, Ausgabe 29, Berufswelt im Wandel*. Abgerufen von https://www.basar-zeitung.de/ausgaben/BASAR_Ausgabe29.pdf.
- Helfferich, C. (2014). Leitfaden- und Experteninterviews. In N. Baur & J. Blasius (Hrsg.), *Handbuch Methoden der empirischen Sozialforschung* (S. 559-574). Wiesbaden: Springer Fachmedien.
- Hischer, H. (2016). *Mathematik – Medien – Bildung. Medialitätsbewusstsein als Bildungsziel: Theorie und Beispiele*. Wiesbaden: Springer Fachmedien. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-14167-7>
- Hözl, R. (1994). *Im Zugmodus der Cabri-Geometrie. Interaktionsstudie und Analysen zum Mathematiklernen mit dem Computer*. Abgerufen von <ftp://ftp.math.ethz.ch/hg/EMIS/journals/ZDM/zdm971r2.pdf>.
- Lauter, J. (1997). Fundament der Grundschulmathematik. Pädagogisch -didaktische Aspekte des Mathematikunterrichts in der Grundschule. Donauwörth: Auer.
- Lawler, R. W. (1981). The Progressive Construction of Mind. *Cognitive Science*, 5(1), 1-30.
- Mayring, P. (2010). Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken. Weinheim, Basel: Beltz.
- Ng, O.-L. (2017). Exploring the use of 3D computer-aided design and 3D printing for STEAM learning in mathematics. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 3(3), 257–263. <https://doi.org/10.1007/s40751-017-0036-x>
- Ng, O.-L. & Sinclair, N. (2018). Drawing in space: Doing mathematics with 3D pens. In L. Ball, P. Drijvers, S. Ladel, H.-S. Siller, M. Tabach & C. Vale. (Hrsg.), *Uses of technology in primary and secondary mathematics education: Tools, topics and trends* (S. 301-313). Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-76575-4_16
- Ng, O.-L., Sinclair, N. & Davis, B. (2018). Drawing off the page: How new 3D technologies provide insight into cognitive and pedagogical assumptions about mathematics. *The Mathematics Enthusiast*, 15(3), 563-577.
- Panorkou, N. & Pratt, D. (2016). Using Google SketchUp to develop students' experiences of dimension in geometry. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 2(3), 199-227. <https://doi.org/10.1007/s40751-016-0021-9>
- Pielsticker, F. (2020a). *Mathematische Wissensentwicklungsprozesse von Schülerinnen und Schülern. Fallstudien zu empirisch-orientiertem Mathematikunterricht mit 3D-Druck*. Wiesbaden: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-29949-1>
- Pielsticker, F. (2020b). Flächenberechnung von Dreiecken – Begriffsbildung als charakteristische mathematische Tätigkeit. In H.-S. Siller, W. Weigel & J. F. Wörler (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020* (S. 717-720). Münster: WTM. https://eldorado.tu-dortmund.de/bitstream/2003/39600/1/BzMu2020_PIEL-STICKERid449.pdf
- Rembowski, V. (2015). Begriffsbilder und -konventionen in Begriffsfeldern: Was ist ein Würfel? In M. Ludwig, A. Filler & A. Lambert (Hrsg.), *Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen* (S. 129-154). Wiesbaden: Springer Fachmedien.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando, FL: Academic Press.
- Sierpiska, A. (1990). Some Remarks on Understanding in Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 10 (3), 24-36.
- Silverman, J. & Thompson, P. W. (2008). *Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching*. Abgerufen von https://www.researchgate.net/publication/225141432_Toward_a_framework_for_the_development_of_mathematical_knowledge_for_teaching.
- Simon, M. A. (2006). Key Developmental Understandings in Mathematics: A Direction for Investigating and Establishing Learning Goals. *Mathematical thinking and learning*, 8(4), 359-371.
- Tall, D. (2002). *Using Technology to Support an Embodied Approach to Learning Concepts in Mathematics*. Abgerufen von <https://pdfs.semanticscholar.org/dc2d/37325e0c12f05c253737db7815c2a35fd9ee.pdf>.
- Stegmüller, W. (1978). *Hauptströmungen der Gegenwartsphilosophie*. Stuttgart: Alfred Kröner Verlag.
- Struve, H. (1990). *Grundlagen einer Geometriedidaktik*. Mannheim: BI-Wiss. -Verlag.
- vom Hofe, R. (1995). Vorschläge zur Öffnung normativer Grundvorstellungskonzepte für deskriptive Arbeitsweisen in der Mathematikdidaktik. In H.-G. Steiner & H.-J. Vollrath (Hrsg.), *Neue problem- und praxisbezogene Forschungsansätze* (S. 42-49). Köln: Aulis.
- vom Hofe, R., Kleine, M., Blum, W. & Pekrun, R. (2005). Zur Entwicklung mathematischer Grundbildung in der Sekundarstufe I - theoretische, empirische und diagnostische Aspekte. In M. Hasselhorn, H. Marx & W.

Schneider (Hrsg.), *Diagnostik von Mathematikleistungen – Jahrbuch der pädagogisch-psychologischen Diagnostik* (S. 263-292). Göttingen: Hogrefe.

Witzke, I. & Hoffart, E. (2018). 3D-Drucker: Eine Idee für den Mathematikunterricht? *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018* (S. 2015–2018). Münster: WTM-Verlag.

Witzke, I. & Heitzer, J. (Hrsg.) (2019). 3D-Druck. *Mathematik Lehren 217*.

Felicitas Pielsticker
Universität Siegen
Didaktik der Mathematik
Adolf-Reichwein-Str. 2
57076 Siegen
pielsticker@mathematik.uni-siegen.de

Eva Hoffart
Universität Siegen
Didaktik der Mathematik
Adolf-Reichwein-Str. 2
57076 Siegen
hoffart@mathematik.uni-siegen.de

Ingo Witzke
Universität Siegen
Didaktik der Mathematik
Adolf-Reichwein-Str. 2
57076 Siegen
witzke@mathematik.uni-siegen.de

Name