Änderungsraten und Bestände von heute mit dem Infinitesimalkalkül von gestern?

Ein historisch inspirierter Beitrag zur Vermeidung vorschneller Fehlinterpretationen

von

Johanna Heitzer, Aachen

Kurzfassung: Lazare Carnot, Vater von Sadi Carnot und Kriegsminister unter Napoleon, schrieb Ende des 18. Jahrhunderts seine *Betrachtungen über die Theorie der Infinitesimalrechnung*. Darin akzeptiert er eine unvollkommene Form der Gleichheit, um zu einem praxistauglichen Umgang mit „dem Unendlichen und dem Nichts dazwischen“ anzuleiten. Dieser Beitrag widmet sich der Frage, ob Carnots Herangehensweise eine Hilfe für die schulische Differential- und Integralrechnung „auf der Basis eines propädeutischen Grenzwertbegriffs“ bieten kann, und zwar insbesondere im Zusammenhang mit „funktionalen Größen wie Änderungsraten und (re-)konstruierten Beständen“ (KMK Bildungsstandards Mathematik Sek II, 2012, 22 f.). Wie hier gezeigt wird, sind letztere nämlich weit einfacher ins Spiel gebracht als tatsächlich korrekt interpretiert. Ein von Carnot inspirierter, ingenieurmäßig geprägter und die Differenzialschreibweise ausreizender Zugang kann zum Verständnis der sinnstiftenden Kontexte beitragen.

Abstract: Lazare Carnot, Sadi's father and one of Napoleon's Ministers of War, wrote his *Reflexions on the Metaphysical Principles of the Infinitesimal Analysis* at the end of the 18th century. In it, he accepts an imperfect type of equality in order to handle "infinity and the nothing in between" without conflicts. This article discusses the question of whether Carnot's approach might help school calculus "based on a propaedeutic understanding of limits" particularly in the context of "functional quantities like rates of change and (re-)constructed stocks" (KMK Bildungsstandards Mathematik Sek II, 2012, 22 f.). As is shown, it is indeed much easier to bring up the latter than to interpret them correctly. An approach inspired by Carnot, orientated towards engineering and exhausting the differential notation, can support an understanding of these meaningful contexts.

1 Zur Genese des Themas

Als ich selbst Ende der 1990er Jahre in Analysis unterrichtet wurde, lernten wir die Ableitung fast ausschließlich im Kontext der Tangentensteigung von Funktionsgraphen, das Integral fast ausschließlich im Kontext des Flächeninhalts unterhalb von Funktionsgraphen kennen, anwenden und interpretieren. Wichtige und – sofern man auch Physik als Fach hatte – gründlich behandelte Anwendungen waren meiner Erinnerung nach ausschließlich die Zusammenhänge zwischen Zeit, Weg und Geschwindigkeit bzw. Zeit, Geschwindigkeit und Beschleunigung sowie Weg, Kraft und Arbeit.[1]

Auf die Interpretation und Nutzung von Ableitungen mit stärkerem Blick auf den Begriff der Änderungsrate wurde ich im schulischen Kontext erst wieder durch einen Kollegen während meiner ersten Unterrichtsjahre aufmerksam: Auch dieser hatte Physik als zweites Fach und stellte im Unterricht den Zusammenhang zur Fehlerfortpflanzungsrechnung in der Physik dar, beziehungsweise schuf für den Mathematikunterricht schon einmal den Nährboden. Er wählte insbesondere geometrische Beispiele und fragte zum Beispiel, wie stark sich bei einem Würfel abhängig vom bereits erreichten Volumen eine kleine Veränderung der Kantenlängen auf eben dieses Volumen auswirke. Ich füge hier zwei exemplarische Aufgaben mit Lösungsskizzen an, wie ich sie aufgrund dieser Berichte in meinem ersten Leistungskurs eingesetzt habe.

Kugelvolumen und -radius: Für ein Gourmet-Essen sollen Kartoffelklöße von 6 cm Durchmesser geformt werden, so dass man pro Kloß (bei einer End-Dichte von 0,5 g/cm³) etwa 56,5 g Rohmasse verwenden sollte. Bestimme die Abweichung für den Durchmesser, wenn man versehentlich 60 g verwendet, näherungsweise mittels der Änderungsrate des Durchmessers abhängig vom Volumen.

Lösung (Massen mittels der Dichte in Volumina umgerechnet): $d(V) = (6V/\pi)^{1/3}$, $d'(V) \approx 0{,}413 \cdot V^{-2/3}$, $d'(113) \approx 0{,}0177$, $\Delta d \approx d'(V) \cdot \Delta V$, hier: $0{,}0177\ \text{cm}^{-2} \cdot 7\ \text{cm}^3 \approx 0{,}124\ \text{cm}$

Kegelhöhe und -volumen: Das kegelförmige Innere eines Sektglases hat in 3 cm Höhe den Radius 1 cm. Es soll bis zu einer Höhe von 9 cm gefüllt werden, so dass es 8,482 cl Flüssigkeit enthält. Bestimme die Abweichung für das Flüssigkeitsvolumen, die sich bei fälschlicher Füllung bis 9,1 cm ergibt a) exakt und b) näherungsweise mittels der Änderungsrate des Volumens abhängig von der Höhe.

Lösung: a) 0,286 cl, b) $V(h) = \frac{\pi}{27} \cdot h^3$, $V'(h) = \frac{\pi}{9} \cdot h^2$, $V'(9) = 9\pi \approx 28{,}27$, $\Delta V \approx V'(h) \cdot \Delta h$, hier: $28{,}27\ \text{cm}^2 \cdot 0{,}1\ \text{cm} = 2{,}827\ \text{cm}^3 = 0{,}283\ \text{cl}$

---

[1] Die beiden Beispiele sind übrigens archetypisch für zwei grundsätzliche Klassen: diejenigen, wo nach der Zeit abgeleitet bzw. über die Zeit integriert wird, und diejenigen, wo beides nach einer anderen Größe geschieht. Die zweite Gruppe ist meines Erachtens in der Interpretation und korrekten Anwendung ungleich schwieriger als die erste; unter anderem aufgrund des dahinterliegenden Grenzwertbegriffs und der nicht immer einfachen Kovarianzen. Darauf werde ich im Laufe des Beitrags mehrfach zurückkommen.

Um 2007 (als ich von der Schule an die Hochschule wechselte) rückten die allgemeineren Sichtweisen – Ableitung ist Änderungsrate, Integral ist Bilanz – stärker in den Vordergrund der Lehrpläne, der Schulbücher und des Unterrichts. Meine ersten Studierenden hatten Kontexte mit diesen Interpretationen im Unterricht kaum oder gar nicht kennengelernt, waren aber in der didaktischen Auseinandersetzung mit aktuellen Schulbüchern an der Hochschule mit diesen Themen konfrontiert. Die jetzigen Lehramtsstudierenden kennen derartige Aufgaben meist schon aus dem eigenen Unterricht. In beiden Gruppen habe ich jedoch die Erfahrung gemacht, dass die tatsächliche korrekte Interpretation von Ableitungen und Integralen in vielen Kontexten alles andere als einfach ist.

Konkretes Beispiel ist der Vortrag eines Studenten über Änderungsraten und Bilanzen im fachdidaktischen Seminar, der eine Aufgabe mit Sachkontext vorstellte und dabei Ableitung bzw. Integral falsch interpretiert hatte. Es stellte sich heraus, dass die Idee aus [Danckwerts/Vogel, 2006] stammte. In der Vorlage selbst ist allerdings nichts unmittelbar falsch, denn dort wird die Frage nur gestellt und nicht beantwortet. Außerdem hatte sich der Student eigenständig an der umgekehrten Fragerichtung versucht. Er gab uns die Grafik in Abbildung 1 und fragte nach den Gesamtkosten eines Betonrohbaus von 5000 m³ umbautem Raum.

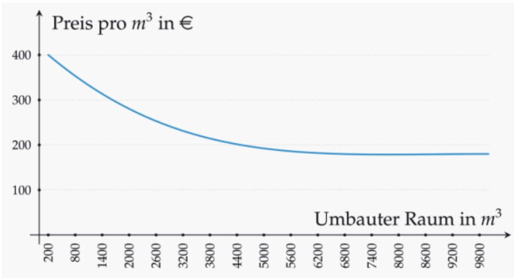

Abbildung 1: Durchschnittspreis für Betonrohbauten abhängig vom umbauten Raum

Dabei schwebte ihm als Lösung ein Ablesen an der Grafik aus Abbildung 2 vor, welche er durch näherungsweise Integration gewonnen und (bezüglich der Ordinate falsch!) beschriftet hatte. Der Irrtum kommt daher, dass bei einem größeren Rohbau ja bereits die „ersten“ Kubikmeter den neuen, niedrigeren Durchschnittspreis haben, und hat damit zu tun, dass die abhängige Variable bereits eine gemittelte Größe ist. Der Fehler ist verwandt mit einem weiteren häufigen Fehler bei der Interpretation von Ableitung und Integral: Es wird nicht bedacht, über welche Größe tatsächlich zu mitteln ist bzw. gemittelt wurde (vgl. Abschnitt 5.2). Bei der konkreten Fehlinterpretation im Seminar (die erst nach meiner Bitte um sehr genaues Hinschauen von den ersten Kommilitonen bemerkt wurde) zeigt sich, wie schwierig die Interpretation des Integrals hier tatsächlich ist, bzw., dass ihre Sinnhaftigkeit im Kontext grundsätzlich bezweifelt werden muss.[2]

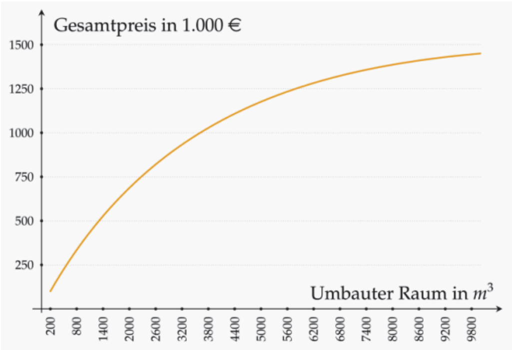

Abbildung 2: Studenten-Interpretation der zugehörigen Stammfunktion

2 Kernaussagen und Gesamtaufbau des Beitrags

2.1 Kernaussagen

Mein Fazit aus den entsprechenden Gesprächen mit Studierenden in den letzten Jahren lässt sich etwa wie folgt zusammenfassen: Die allgemeinere Sichtweise von Ableitungen als Änderungsraten und Integralen als Bilanzen ist ausgesprochen vermittelnswert und erschließt eine große Auswahl interessanter Fragestellungen. Tatsächlich leuchtet den meisten der Nutzen von Differential- und Integralrechnung bei solchen Kontexten stärker ein, als wenn es ausschließlich um Steigung und Fläche bei Funktionsgraphen geht. Allerdings sind, vor allem wenn das Differential bzw. der Integrand einmal nicht die Zeit ist, entsprechende Fragen sehr viel leichter ins Spiel gebracht als korrekt beantwortet.

Ich halte die Schreibweise mit sehr kleinen Differenzen $\Delta\square$ für jede Größe $\square$ – lange mit der Vorstellung „sehr klein, aber fest und von Null verschieden“ – für eine gute Schreibweise im didaktischen Sinne. Ihr suggestives Potential trägt über Differenzenquotienten hinaus bis zu den Ableitungs- und Integrationsregeln und unterstützt Grunderfahrungen mit den Konsequenzen kleiner Veränderungen bei voneinander abhängigen Größen, welche sich unter anderem in der naturwissenschaftlichen Fehlerrechnung niederschlagen. Es sollte ausgeschöpft werden.

---

2 Ein Student schlug zum Beispiel die Kosten eines Hauses vor, dessen angestrebte Gesamtgröße während des Bauens kontinuierlich größer wird.

Es ist ein vielzitierter (mindestens theoretischer) Konsens, dass der Grundkurs kein abgespeckter Leistungskurs, sondern von grundsätzlich anderem Wesen und zum Teil auch von anderen Paradigmen der Mathematik geprägt sein sollte. In der Analysis sehe ich den bedeutendsten solchen Wesensunterschied im Umgang mit dem Infinitesimalkalkül: Wird dessen Funktionieren bei „intuitiv richtiger Handhabung nach übermittelten Regeln“ zur Kenntnis genommen, ingenieurmäßig angewendet und gern auch ein wenig bestaunt (GK), oder wird den dahinter liegenden und eng mit dem Grenzwertbegriff verbundenen, exaktifizierbaren Unschärfen ein Stück weit auf den Grund gegangen (LK)?

In Grund- und Leistungskurs gleichermaßen wichtig ist die Erfahrung, dass die korrekte Interpretation von Änderungsrate und Bilanz häufig alles andere als trivial ist und entsprechende Fragestellungen nicht unüberlegt in den Raum geworfen werden sollten. Zwischen Aufgaben, bei denen es sich um eine echte, kleine aber nicht verschwindende Änderung handelt, und solchen, bei denen es tatsächlich um die momentane bzw. lokale (bekannte oder erhaltene und dann zu interpretierende) Änderungsrate geht, besteht ein essenzieller Unterschied.

Aufgaben des ersten Typs empfehle ich mehrfach auf eine Weise zu lösen, die ich „im Stil Carnots“ nenne, in Abschnitt 3.3 näher erläutere und hier nur grob umreißen möchte: Zunächst wird alles mit sehr kleinen, aber festen und von Null verschiedenen Größen $\Delta\,\square$ durchgerechnet. Dann werden potenzierte Winzigkeiten weggelassen; schlicht mit dem Argument, dass sich deren Wirkung erst viele Stellen weiter hinten niederschlägt, als es die Genauigkeit der jeweils eingehenden Größen im Kontext hergibt. Auf diese Weise gewöhnt man sich daran, Produkte des Typs $\Delta\,\square\cdot\Delta\,\square$, Potenzen des Typs $(\Delta\,\square)^n$ mit $n \geq 2$ und entsprechende gemischte Terme wegzulassen. Dann werden Ergebnisse abgelesen. Die erstaunliche Erkenntnis ist: Geht es um den momentanen bzw. lokalen, „unendlich kleinen“ Fall, stimmen diese mit „kontrolliertem Pfusch“ gewonnenen Ergebnisse wieder genau.

Geht man später – auch im Grundkurs – zur Nutzung solcher Ableitungs- und Stammfunktionen über, die man ohne Kenntnis von Potenzreihen nicht mehr im Carnotschen Stil herleiten kann (etwa von Wurzel- und Exponential- oder trigonometrischen Funktionen), ist das ein kühner und theoretisch nicht untermauerter Schritt. Er bewährt sich allerdings in überzeugender Weise bei Anwendungen, die messend überprüft werden können – in Schule und Hochschule.

2.2 Wichtige Bestandteile des Beitrags

Wie kann man den in 2.1 benannten potentiellen Schwierigkeiten begegnen und die formulierten Ziele erreichen? Zu diesen Fragen soll mit den folgenden Hauptabschnitten des Artikels beigetragen werden.

Abschnitt 3 kann als roter Faden einer Unterrichtsreihe gelesen werden, wie ich sie zur lebendigen und zügigen Behandlung des Wesentlichen mit Schülerinnen und Schülern vorschlage: Zunächst wird der Blick auf den Begriff der Änderungsraten und die Frage gelenkt, was genau diese eigentlich beschreiben. Das geschieht an möglichst eindrücklichen, enaktiv erfahrbaren und ikonisch darstellbaren Beispielen. Anschließend wird ein Stück Wissenschaftsgeschichte erzählt und in Kürze dargestellt, wie Lazare Carnot den von Leibniz und Newton entwickelten Kalkül interpretiert und zu vermitteln versucht hat. Schließlich wird in etwas modernerer Schreibweise vorgeführt, wie Carnots Lösung zu einer der anfangs motivierten Anwendungsfragen ausgesehen hätte. Dabei kann überzeugend auf die Anschauung rekurriert werden: Man sieht (!), was warum vernachlässigt werden darf und was als Änderungsrate übrig bleibt.

Hauptgegenstand von *Abschnitt 4* sind Beispiele aus der für die Naturwissenschaften bedeutsamen Fehlerrechnung, und zwar in erster Linie solche, bei denen sich das algebraische Vorgehen gut geometrisch veranschaulichen lässt. Die dortigen Schreibweisen und Schritte lassen sich als *moderne Variante des Carnotschen Umgangs mit Infinitesimalien* lesen und haben einen entscheidenden Vorteil: Das tolerierbare „Maß an Unvollkommenheit“ bei den vorkommenden Gleichungen ergibt sich sachlogisch aus der Genauigkeit der eingehenden und daraus abgeleiteten Größen. Zu entscheiden, was man gerade noch berücksichtigen muss und was man vernachlässigen darf, ist keine dubiose Kunst mehr, sondern klar erkenn- und ergo gut erlernbar. In Kombination mit den geometrischen Veranschaulichungen führt diese Tatsache dazu, dass ein an Carnot orientierter Umgang mit den Differenzialen auch Ableitungs- und Integrationsregeln verstehen und anwenden hilft. Beispiele hierzu finden sich, soweit nicht schon ein ‚Nebenergebnis‘ der Fehlerfortpflanzungsrechnung, in 4.2.

In *Abschnitt 5* werden die losen Fäden der Abschnitte 1 und 2.1 wieder aufgenommen und die persönlichen Überlegungen didaktisch eingeordnet. Eine stoffliche Analyse spürt den Ursachen der anfangs dargestellten Fehlinterpretationen nach und liefert zugleich Ideen zu deren Auflösung. In 5.2 werden Häufigkeit, Art und Darstellungsweise entsprechender Anwendungsaufgaben in aktuellen Oberstufenbüchern und didaktischen Veröffentlichungen dargestellt. Es zeigt sich, dass der Grat zwischen korrekter und fehlerhafter bzw. sinnfreier Interpretation hier oft schmal ist. In 5.3 zeigt ein Blick in die mehr als hundertjährige Geschichte der Infinitesimalrechnung an höheren Schulen, dass weder die konkurrierenden Zugangsweisen noch die zugehörigen Argumente gänzlich neu sind.

3 Infinitesimalrechnung nach Carnot im Unterricht[3]

Der nachfolgende Abschnitt kann als roter Faden einer Unterrichtsreihe zur Behandlung der Änderungsratenproblematik gelesen werden, wie ich sie für geeignet und lebendig halte. Grundidee ist die Orientierung an der Zugangsweise in Lazare Carnots *Betrachtungen über die Theorie der Infinitesimalrechnung*[4], einem hoch interessanten frühen Hochschullehrbuch zur von Newton und Leibniz nie systematisch weitergegebenen Methode. Während Carnots Beispiele überwiegend klassisch geometrisch sind (Tangente an den Halbkreis, Flächeninhaltsberechnung beim Kreis entsprechend der heutigen „Streifenmethode" im Koordinatensystem, zahlreiche weitere Beispiele im Übungs- und Aufgabenteil), wird hier nun allerdings der Blick stark auf die Bedeutung von Änderungsraten bei dynamischen Prozessen gelenkt. Auch die Schreibweise ist modernisiert.

3.1 Möglicher Einstieg in die Theorie der Änderungsraten

„Die Inflationsrate ist in diesem Monat weniger gestiegen als im letzten." Dies Zitat Richard Nixons im Wahlkampf 1972 eignet sich, Lernende kontextbezogen über Änderungsraten und ihre Bedeutung ins Gespräch zu bringen: Hier musste der amtierende Präsident auf eine höhere Ableitung zurückgreifen, um eine positiv klingende Aussage zu treffen! Die Inflationsrate ist selbst schon eine Ableitung, nämlich die (betragsmäßig, ergo positiv angegebene) des sinkenden Geldgegenwertes nach der Zeit. Sie steigt auch noch, nur jetzt weniger als zuletzt. Der Graph der Inflationsrate läuft also mit leichter Rechtskrümmung, also Hoffnung auf ein nicht mehr allzu weit entferntes Maximum, aufwärts. Der Graph des Geldgegenwertes läuft – ebenfalls rechtsgekrümmt – abwärts; das heißt er fällt auch noch immer steiler, nur gibt es erste Anzeichen des Zulaufens auf einen Wendepunkt.

Das Beispiel ist interessant, aber noch vergleichsweise einfach zu interpretieren, weil es sich durchweg um Änderungen mit der Zeit handelt: Die Inflationsrate könnte man auch als Geldwertänderungsgeschwindigkeit, ihre Ableitung als -beschleunigung bezeichnen. Schwieriger wird es mit der Bedeutung von Ableitungen und Integralen, wenn keine der beteiligten Größen die Zeit ist: Pustet man einen Luftballon auf, so wird man diesem pro Atemzug etwa die gleiche Volumenzufuhr ΔV erteilen. Der Radius des Luftballons wird dann von Zug zu Zug nicht

---

3 Dieser Abschnitt ist eine detailliertere Ausarbeitung von [Heitzer, 2013] und daher in Struktur und Formulierungen stark daran angelehnt.

4 *Réflexions sur la métaphysique du calcule infinitésimale* wurde schon drei Jahre nach Erscheinen von J. K. F. Hauff ins Deutsche übersetzt. Mit dieser Version habe ich gearbeitet und auch die dortige Wortwahl übernommen – gestoßen bin ich auf das Werk eher zufällig aus Interesse an der Geschichte der Mathematik im Allgemeinen und auf der Suche nach interessanten französischen Mathematikern anlässlich einer Staatsarbeit im Besonderen.

linear, sondern (von der Elastizitätsänderung der Ballonhaut und der damit abnehmenden Luftkompression abgesehen) nur mit der dritten Wurzel des Volumens wachsen. In welcher Weise müsste man die Luftportionen vergrößern, damit der Radius linear wüchse?

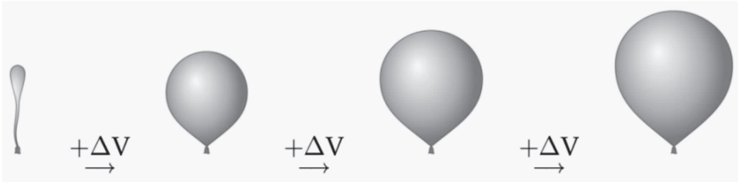

Abbildung 3: Luftballon mit linear zunehmendem Volumen

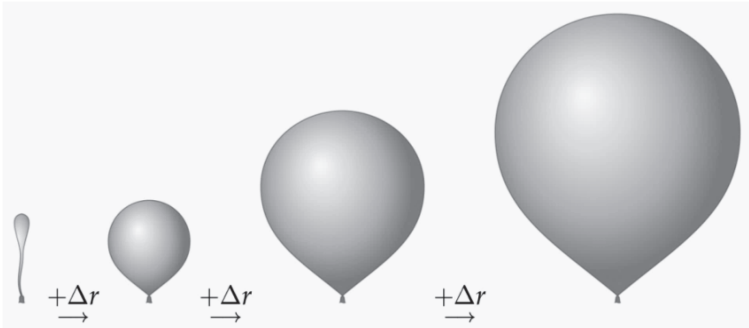

Abbildung 4: Luftballon mit linear zunehmendem Radius

Abbildung 5: Sintflut – früher (linear) und heute (quadratisch)

Oder stetiger: Als die Erde noch eine Scheibe mit Käseglockenhaube war, hatte der enttäuschte Schöpfer es leicht mit der Sintflut. Für einen gleichförmig steigenden Wasserspiegel brauchte er es auch nur etwa gleichförmig regnen zu lassen. Jetzt, wo die Erde eine Kugel ist, hätte er es schwerer: Mit steigendem Wasserspiegel wüchsen der Radius und damit (quadratisch) die Oberfläche der Kugel. Um trotzdem gleichförmig steigenden Wasserspiegel zu erreichen, müsste er es immer heftiger regnen lassen. Nach welcher Gesetzmäßigkeit?[5]

3.2 Ein interessantes Stück Wissenschaftsgeschichte

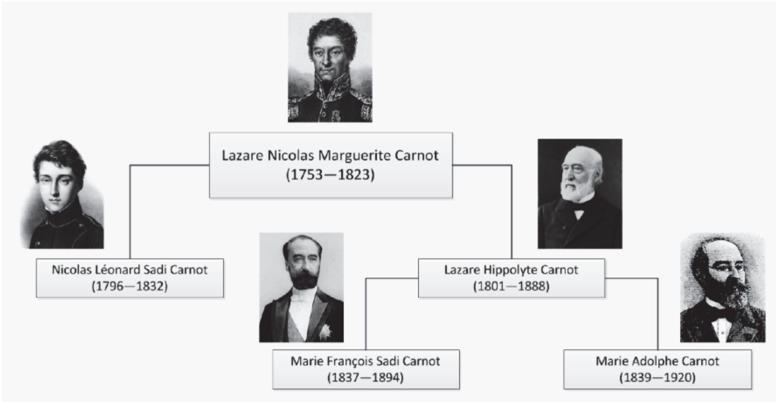

Abbildung 6: Stammbaumausschnitt der französischen Familie Carnot

Von der Zeit der Begründung der Infinitesimalrechnung bis ins 20. Jahrhundert lebte ein erwähnenswerter Teil der französischen Familie Carnot. Einige Carnots waren offenbar ebenso einflussreich wie begabt und zumeist sowohl politisch als auch natur- bzw. ingenieurwissenschaftlich interessiert. Nach Marie Adolphe ist das Mineral Carnotit benannt. Marie François Sadi war französischer Staatspräsident, bis er von einem Anarchisten erstochen wurde. Ihr Onkel Nicolas Léonard Sadi gilt als Begründer der Thermodynamik. Er soll nach seinem frühen Choleratod mitsamt seinem Notizbuch begraben worden sein, was die Weiterentwicklung der theoretischen Physik erheblich verzögert haben mag. Zuvor jedoch fand er den Wirkungsgrad der idealen Wärmekraftmaschine. Dies soll hier nicht im Einzelnen nachvollzogen werden.[6] Fest steht allerdings, dass die Herleitung einen souveränen Umgang mit diversen kovarianten Größen und deren voneinander ab-

5 Walther Lietzmann beginnt sein wiederholt aufgelegtes Buch "Lustiges und Merkwürdiges von Zahlen und Formen“ mit einem auch hier passenden Zitat von Michael Stifel aus dem Jahre 1553: „Sölliche spöttliche Exempla wöllen oft mehr Wort haben denn die nützliche" (vgl. [Lambert 2007, 78]).

6 Eine an Sadis Denk- und Schreibweise angelehnte Herleitung des Carnot-Wirkungsgrades findet sich in [Hochstrat, 2012]. Sie wird auf Anfrage gerne zur Verfügung gestellt.

hängigem Änderungsverhalten erfordert (vergleiche die Abbildungen zum Carnotprozess). Sadi hatte an der von seinem Vater Lazare mitbegründeten Ècole Polytechnique unter anderem bei Poisson und Ampère studiert. Wie gleich ersichtlich wird, mag er den Umgang mit Änderungsraten allerdings auch direkt von seinem Vater gelernt haben.

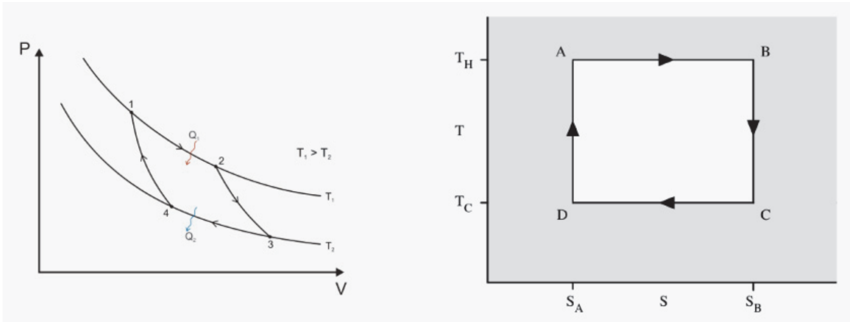

Abbildung 7: Carnot-Prozess: Kovariante Größen *Volumen* und *Druck*, *Entropie* und *Temperatur*

Lazare Nicolas Marguerite Carnot war Militärstratege und Kriegsminister unter Napoleon. Um die Jahrhundertwende zog er sich aus dem politischen Leben zurück, gründete eine Familie und wandte sich verstärkt seiner wissenschaftlichen Arbeit zu. Carnot war erfolgreicher Mathematiker. Lange Zeit sprach man zum Beispiel vom Kosinussatz als „Satz von Carnot“, da dieser in dessen *Geometrie der Lage* von 1803 formuliert ist. Grundlage dieses Beitrags ist sein schon 1797 verfasstes Werk zur Infinitesimalrechnung, in dem er auf didaktisch interessante Weise zum Umgang mit Leibniz’ und Newtons Kalkül anleitet.

3.3 Infinitesimalrechnung nach Carnot …

Carnots Theorie lautet in sehr groben Zügen: Zur Lösung mathematisch erfasster Probleme führe man neben „vom Ausdruck der Aufgabe selbst gegebenen“ *Hauptgrößen* so genannte *Hilfsgrößen* ein, die den Vergleich der Hauptgrößen erleichtern und Grenzen haben, „von denen sie sich nur um unendlich kleine Größen unterscheiden“. Man erhält dann „*unvollkommene Gleichungen*“, auf deren Seiten zwar nicht exakt, aber „*im letztem Verhältnis*“ gleiche Ausdrücke stehen. Im letzten Verhältnis gleich (Schreibweise hier: $\overset{ilV}{=}$) sind Ausdrücke, deren Quotient „der Einheit beliebig nahe kommt“. Es gelten folgende Sätze:

1. Eine unvollkommene Gleichung wird durch Ergänzen oder Abziehen einer unendlich kleinen Größe entweder richtig oder bleibt unvollkommen; sie wird aber nicht falsch.

2. Gleichungen, die nur Hauptgrößen enthalten, können nicht unvollkommen sein, sondern nur richtig oder falsch.
3. Eliminiert man aus einer unvollkommenen Gleichung durch Ergänzen oder Abziehen unendlich kleiner Größen alle Hilfsgrößen, so ist die resultierende Gleichung richtig.

3.4 … am Beispiel der Volumen-Änderungsrate

Hauptgrößen im Ballon/Sintflut-Beispiel sind: der Kugelradius r, das Kugelvolumen V und die vom jeweils aktuellen Kugelradius abhängige Änderungsrate V' des Volumens, also die Volumenzufuhr, die zu linearer Radiusänderung führt. Da das Krumme schon unverändert schwer zu berechnen ist, gehen wir zunächst zu Eckigem über: einem Würfel mit der Kantenlänge x, dem Volumen V und der von der jeweils aktuellen Kantenlänge abhängigen Änderungsrate V' des Volumens. Als Hilfsgrößen führen wir eine um beliebig wenig vergrößerte Kantenlänge $\tilde{x}$ und das zugehörige Volumen $\tilde{V}$ ein.

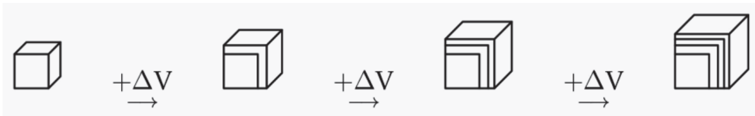

Abbildung 8: Würfel mit linear zunehmendem Volumen

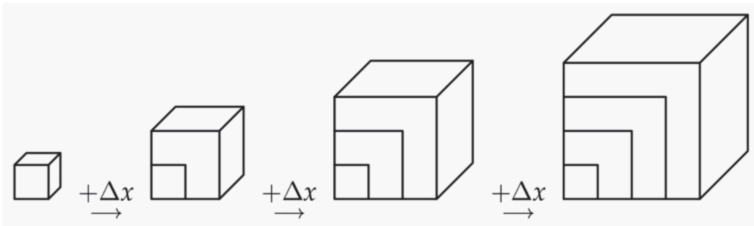

Abbildung 9: Würfel mit linear zunehmender Kantenlänge

Dann gilt:

$$\begin{aligned}\tilde{V}-V &= \tilde{x}^3 - x^3\\ &= \left[x+(\tilde{x}-x)\right]^3 - x^3\\ &= x^3 + 3x^2\cdot(\tilde{x}-x) + 3x\cdot(\tilde{x}-x)^2 + (\tilde{x}-x)^3 - x^3\\ &= 3x^2\cdot(\tilde{x}-x) + 3x\cdot(\tilde{x}-x)^2 + (\tilde{x}-x)^3\end{aligned}$$

$$\tilde{V} - V \overset{\text{ilV}}{=} 3x^2 \cdot (\tilde{x} - x)$$

$$\frac{\tilde{V} - V}{3x^2 \cdot (\tilde{x} - x)} \to 1$$

Im vorletzten Schritt wurden die Potenzen der „beliebig kleinen" Differenz $(\tilde{x} - x)$ weggelassen, weshalb es sich ab hier um eine Näherung handelt und nur noch Gleichheit im letzten Verhältnis vorliegt. Dann aber gelingt durch das Betrachten zweierlei Gleichheiten im letzten Verhältnis die Elimination der Hilfsgrößen und $V' = 3x^2$ gilt wieder exakt. Kurz:

$$V' \overset{\text{ilV}}{=} \frac{\tilde{V} - V}{\tilde{x} - x} \overset{\text{ilV}}{=} 3x^2 \quad \Rightarrow \quad V' = 3x^2$$

In etwas vertrauterer Schreibweise, nämlich mit Differenzialen für die kleinen Veränderungen, lautet dieselbe Rechnung:

$$\begin{aligned}\Delta V &= [x + (\Delta x)]^3 - x^3 = x^3 + 3x^2 \cdot (\Delta x) + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3 \\ &= 3x^2 \cdot (\Delta x) + 3 \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3\end{aligned}$$

$$\Delta V \overset{\text{ilV}}{=} 3x^2 \cdot (\Delta x)$$

$$\frac{\Delta V}{3x^2 \cdot (\Delta x)} \to 1$$

$$V' \overset{\text{ilV}}{=} \frac{\Delta V}{\Delta x} \overset{\text{ilV}}{=} 3x^2$$

Die rechte Gleichheit in der letzten Zeile kann man anhand derselben Würfelzerlegung begreifen, die von Lehrmittelfirmen zur Visualisierung der binomischen Formel für $(a + b)^3$ angeboten wird: Ist Δx relativ zu x hinreichend klein, kann man die „Stäbchen" und den „Würfelwinzling" vernachlässigen. Die Volumenänderung entspricht den drei quadratischen „Scheiben", folglich gilt $\Delta V \approx 3x^2\Delta x$ und $\mathrm{d}V = 3x^2\mathrm{d}x$ oder auch $V' = dV / dx = 3x^2$ dann wieder exakt.

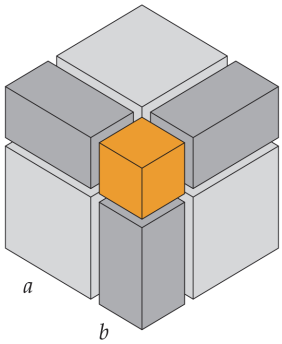

Abbildung 10: Visualisierung zur binomischen Formel $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

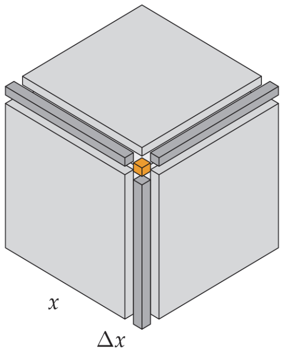

Abbildung 11: Visualisierung zu einer kleinen Änderung des Würfelvolumens $V = x^3$

Mit Differenzialen formuliert lautet die Argumentation:

$$(x+\Delta x)^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$
$$(x+\Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 \approx 3x^2\Delta x\,.$$

Übrigens sieht die Rechnung für eine Kugel mit Radius- und zugehöriger Volumenänderung bis auf den Faktor $4/3\cdot\pi$ nicht wirklich anders aus. Die zugehörige Herleitung erklärt auch, was gelegentlich einem Schüler auffällt: Warum die Formel für die Oberfläche einer Kugel durch Ableiten derjenigen für das Volumen nach dem Radius entsteht – und analog die Formel für den Umfang eines Kreises durch Ableiten derjenigen für den Flächeninhalt nach dem Radius (vgl. etwa [Stein, 1988] und [Winter, 1989]).

4 Zum didaktischen Potential der Sicht- und Schreibweise

Neben den meistgewählten Einstiegen in die Differentialrechnung (über Änderungsraten, das Tangentenproblem oder die Verlaufseigenschaften aus Anwendungen gewonnener Kurven) werden zum Beispiel in [Tietze u.a., 2000] auch das Newton-Verfahren und die Fehlerrechnung genannt. Der erste, über die Suche nach Nullstellen motivierte Weg wird in [Tietze u.a., 2000] selbst ausführlicher dargestellt. Hier soll es um den zweiten, außermathematisch motivierten gehen, weil er eng mit der Differenzialschreibweise zusammenhängt, sich gut anschaulich stützen lässt und die konkrete Bedeutung von Änderungsraten und Bilanzen bei vielen kovarianten Größenpaaren verstehen hilft.

Die geometrischen Deutungen der vorkommenden Größen und Zusammenhänge in den folgenden Beispielen ähneln solchen, wie sie schon Ende des ersten Jahrtausends nach Christi Geburt für algebraische Zusammenhänge genutzt wurden (vgl. etwa [Hairer/Wanner, 2011, S. 2 ff.]), nur dass einige der geometrischen Größen Differenziale sind. Die Schreib- und Vorgehensweise entspricht außerdem der, die in Abschnitt 3 als „im Stile Carnots“ vorgestellt wurde. Den Ansatz, in der Fehlerrechnung geringfügig an einzelnen Variablen zu „wackeln“ und zu schauen, wie sich die von dieser Variablen abhängige Größe dabei verändert, findet man auch bei Fermat und Hudde (siehe etwa [Sonar, 2011]).

4.1 Angewandt und anschaulich: Beispiele aus der Fehlerfortpflanzung

Wird die elektrische Spannung U (in Volt) als Produkt vom Widerstand R (in Ohm) und der Stromstärke I (in Ampère) bestimmt, und sind die Angabe beim Ohmschen Widerstand sowie die Messung der elektrischen Stromstärke jeweils mit relativen Ungenauigkeiten behaftet, so ergibt sich der relative Folgefehler ΔU für die Spannung aus der Produktregel wie unten angegeben und veranschaulicht. Dabei wird das doppelt-kleine Glied $\Delta R \cdot \Delta I$ vernachlässigt. Dies lässt sich von naturwissenschaftlichen Standpunkt im angegebenen Größenbeispiel leicht erklären: Weiß man, dass der echte Wert des Ohmschen Widerstandes um höchstens $\pm 1\%$ vom angegebenen, und der echte Wert der Stromstärke um höchstens $\pm 5\%$ von der gemessenen abweichen, so läge der dem kleinen Rechteck entsprechende doppelt-infinitesimale Fehler bei $0{,}0005 \cdot R \cdot I$, also zwei Nachkommastellen hinter den hier als naturwissenschaftlich sinnvoll angegebenen. Kennt man die relativen Fehler der eingehenden Größen R und I nur im Prozentbereich genau, so wird man sinnvollerweise auch den relativen Folgefehler für die abhängige Größe U nur im Prozentbereich und nicht plötzlich auf Hundertstelprozent genau angeben.

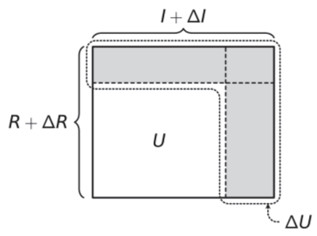

Abbildung 12: Geometrische Deutung einer Änderung des Produkts $R \cdot I$

So zeigt die Rechnung: 1% Fehler bei R und 5% Fehler bei I führen zu 6% Fehler bei dem aus den Eingabegrößen resultierenden Produkt U .

Gesetzmäßiger Zusammenhang: $U = R \cdot I$

Relative Fehler: $\Delta R = 0{,}01 \cdot R$

$\Delta I = 0{,}05 \cdot I$

Fortgepflanzter Fehler:
$$\begin{aligned} \Delta U &\approx I \cdot \Delta R + R \cdot \Delta I \\ &= 0{,}01 \cdot R \cdot I + 0{,}05 \cdot I \cdot R \\ &= 0{,}06 \cdot I \cdot R = 0{,}06 \cdot U \end{aligned}$$

Ein weiteres Beispiel, bei dem jedoch die Eingabegrößen unterschiedlich stark in das Resultat eingehen, liefert die Vorhersage der Fallstrecke beim freien Fall der Dauer t . Ist t die Zeit in Sekunden und g die Erdbeschleunigung in m/s^2, so folgt daraus nach der angegebenen Gesetzmäßigkeit die Fallstrecke s in m. Angenommen man kennt die (wegen der Erdabflachung leicht vom Ort sowie vom Untergrundmaterial abhängige) Gravitationskonstante g nur auf 5‰ genau und kann die Zeit nur auf ± 2% genau messen, dann ist der Vorhersagefehler für die doppelte Fallstrecke $\Delta(2s)$ entsprechend der Abbildung im Wesentlichen durch die drei „Platten“ gegeben, von denen eine das Volumen $t^2 \Delta g$ und zwei das Volumen $t \cdot g \cdot \Delta t$ haben. Einsetzen, Vereinfachen und Nutzen der Linearität des Änderungs- oder Differentialoperators liefern das Ergebnis: Für 2 % Fehler bei der Zeitmessung und 5 ‰ Unsicherheit bei der Gravitationskonstantenangabe kann man die Fallstrecke nur auf ± 4,5 % genau vorhersagen.

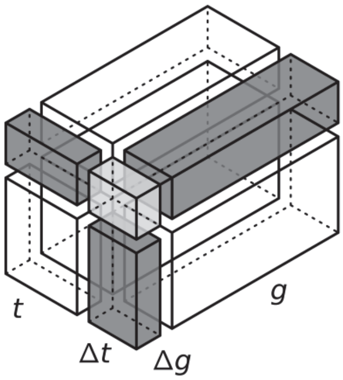

Abbildung 13: Geometrische Deutung einer Änderung des Produkts $g{\cdot}t^2$

Gesetzmäßiger Zusammenhang:	s	$= \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$
Relative Fehler:	Δg	$= 0{,}005 \cdot g$
	Δt	$= 0{,}02 \cdot t$
Fortgepflanzter Fehler:	$\Delta(2s)$	$= t^2 \cdot \Delta g + 2t \cdot g \cdot \Delta t$
		$= 0{,}005 \cdot g \cdot t^2 + 0{,}04 \cdot g \cdot t^2$
		$= 0{,}045 \cdot g \cdot t^2$
		$= 0{,}045 \cdot (2s)$
	Δs	$= 0{,}045 \cdot s$

Etwas schwieriger zu veranschaulichen ist der Folgefehler für eine Größe, die dem Quotienten zweier selbst mit Fehlern behafteter Größen entspricht. Einfachstes Beispiel ist die Durchschnittsgeschwindigkeit v in m/s, wenn s den Weg in m und t die Zeit in s angeben. In einer passenden Grafik müssen s als Flächeninhalt eines Rechtecks mit einer Kantenlänge t und Δs als Gesamtvergrößerung dieses Flächeninhalts bei kleiner Veränderung Δt gedeutet werden. Zusätzlich ist zu berücksichtigen, dass der Folgefehler am größten ist (o.B.d.A. positiv), wenn bei der Größe im Zähler die maximale Abweichung nach oben und bei der im Nenner die maximale Abweichung nach unten vorliegen. Die Rechnung zeigt für das angegebene Beispiel: Können der zurückgelegte Weg auf 1 % und die dafür benötigte Zeit auf 2 % genau bestimmt werden, so ist die daraus errechnete Durchschnittsgeschwindigkeit v mit einem Fehler von $\pm$ 1,5 % behaftet.

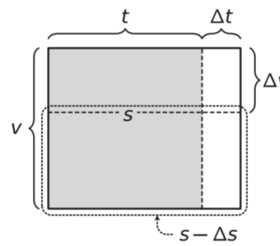

Abbildung 14: Geometrische Deutung einer kleinen Änderung des Quotienten *s*/*t*

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{Gesetzmäßiger Zusammenhang:} & v & = & \dfrac{s}{t} \\
\text{Relative Fehler:} & \Delta s & = & 0{,}01 \cdot s \\
 & \Delta t & = & 0{,}02 \cdot t \\
\text{Fortgepflanzte Fehler:} & -\Delta s & = & \left(v - \Delta v\right) \cdot \ \Delta t - \Delta v \cdot t \\
 & & \approx & v \cdot \Delta t - \Delta v \cdot t \\
\text{(daraus durch Umstellung:)} & \Delta v & \approx & \dfrac{v \cdot \Delta t + \Delta s}{t} \\
 & & = & \dfrac{s \cdot \Delta t + t \cdot \Delta s}{t^2} \\
 & & = & \dfrac{0{,}02 \cdot s \cdot t + 0{,}01 \cdot s \cdot t}{t^2} \\
 & & = & 0{,}03 \cdot \dfrac{s}{t} \\
 & & = & 0{,}03 \cdot v
\end{array}
$$

Bei folgendem Beispiel können wir die Ableitungsregel nicht mehr ohne Weiteres geometrisch ablesen, sondern benutzen umgekehrt unsere Kenntnis der Ableitungen von Exponential- bzw. Logarithmusfunktion, um die Fehlerfortpflanzung von einfachen Beispielen etwa auf die Altersbestimmung mit der C^{14}-Methode zu übertragen.[7]

Eine Möglichkeit die hier einfach benutzte Ableitung von Exponentialfunktionen zu gewinnen, besteht im Betrachten von deren Potenzreihen und den Teilableitun-

---

7 Bei ihr wird der relative Anteil des radioaktiven C^{14} im Kohlenstoff eines organischen, aber leblosen Materials gemessen, um durch Vergleich mit dem durch Atmungs- und Stoffwechselprozesse konstant gehaltenen C^{14}-Anteil im lebenden organischen Material die seit dem Tod vergangene Zeit (mit anderen Worten das Alter des Objekts) zu bestimmen.

gen der Potenzterme in deren Summanden, wobei von den noch veranschaulichbaren Fällen x, x^2 und x^3 auf die Form der Ableitungen höherer Potenzen geschlossen wird (Permanenzprinzip). In der unten angegebenen Formel stehe n für den C^{14}-Anteil zu einer Zeit t. Darin steht $\square$ für den Anfangsanteil zum Zeitpunkt des Ablebens; $\blacksquare$ hängt wie angegeben mit der Halbwertszeit zusammen und beschreibt die Schnelligkeit des Zerfalls. Bei C^{14} beträgt die Halbwertszeit etwa 5730 Jahre (auch diese Angabe ist mit einer empirischen Schwankung versehen, die wir hier jedoch vernachlässigen). Das führt zu $\blacksquare = 1{,}21 \cdot 10^{-4}\, a^{-1}$ und der Anfangsanteil beträgt ziemlich genau $\square = 10^{-12}$. Kann man den C^{14}-Anteil im toten organischen Material auf ± 3 % genau eingrenzen, so zeigt die Rechnung, dass der relative Folgefehler für das berechnete Alter gar kein relativer ist, sondern fest, und ausschließlich von dem Prozentsatz der Schwankung und der Halbwertszeit des Materials abhängt. Dies liegt gerade an der Besonderheit der Exponentialfunktion, bei der ein geometrisch wachsendes Argument zu arithmetisch wachsendem bzw. hier fallendem Wert führt (vgl. Abbildung 15).

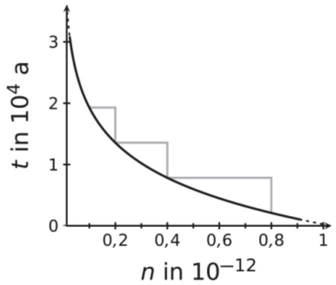

Abbildung 15: Absolute Änderungen bei exponentiellem Zerfall:
Bei wiederholter Intervallverdopplung gleichbleibend

Gesetzmäßiger Zusammenhang: $n = \square \cdot e^{-\blacksquare t}$ mit $\blacksquare = \dfrac{\ln 2}{T_{1/2}}$

$$t = \frac{1}{\blacksquare} \cdot \ln\left(\frac{\square}{n}\right) = \frac{1}{\blacksquare}\left(\ln \square - \ln n\right)$$

Relativer Fehler: $\Delta n = 0{,}03n$

Fortgepflanzter Fehler: $\Delta t = -\dfrac{1}{\blacksquare \cdot n}\Delta n = -\dfrac{0{,}03}{\blacksquare}$ unabhängig von t (!)

4.2 In dieser Schreibweise plausibel: Ableitungs- und Integrationsregeln

Im Abschnitt über die Kernaussagen des Beitrags wurde auf das suggestive Potential der Schreibweise mit sehr kleinen Differenzen $\Delta\,\square$ für jede Größe $\square$ hingewiesen. Es wird in anwendungsorientierten Lehrwerken kühn und sorglos auf Differentiale d□ übertragen und hilft dort unter anderem, die Ableitungs- und Integrationsregeln zu plausibilisieren und sicher anzuwenden, vgl. etwa [Kindt u. a., 2002]. Die Beispiele 1 und 3 aus der Fehlerfortpflanzung zeigen bei etwas allgemeinerer Betrachtung zugleich die Herleitung von Produkt- und Quotientenregel für Ableitungen.[8]

Das folgende Beispiel zeigt die Ableitung einer zusammengesetzten Funktion und damit ein Beispiel der Kettenregel: Sei $h(t)=3t+2$ die innere und $g(h)=h^2$ die äußere Funktion.

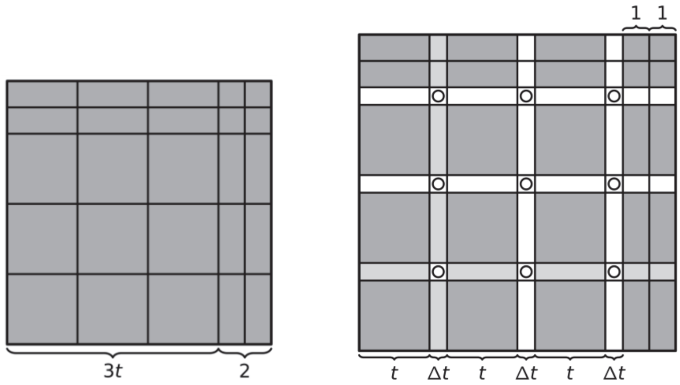

Abbildung 16: Geometrische Deutung einer kleinen Änderung von $(3t + 2)^2$

Die Grafiken veranschaulichen hier, was eine kleine Veränderung Δt direkt für die Änderung Δh und indirekt für die Änderung Δg für Folgen hat. Die Veränderung der zusammengesetzten Funktion besteht bei Vernachlässigung der neun doppelt kleinen Quadrate $(\Delta t)^2$ aus 18 Streifen der Fläche $t\cdot\Delta t$ und 12 Stücken der Fläche $1\cdot\Delta t$.

$$\begin{aligned}\Delta\left[(3t+2)^2\right] &= 2\cdot(3t+2)\cdot 3\cdot\Delta t+3\cdot 3\cdot(\Delta t)^2\\ &\approx 2\cdot(3t+2)\cdot 3\cdot\Delta t=18t\cdot\Delta t+12\cdot\Delta t\end{aligned}$$

Benutzt man andererseits die Ableitungen der inneren bzw. äußeren Funktion und setzt dies nach Kettenregel zusammen, ergibt sich die vorletzte Zeile unten, welche

8 Analoge, schultaugliche Darstellungen finden sich auch in [Hairer/Wanner, 2011].

in der mit Quotienten aus winzigen Veränderungen geschriebenen Form die Suggestivkraft der Differenzialschreibweise deutlich macht („Kürzen“ von Δh).

$$
\begin{array}{ll}
g(h)=h^2 & g'(h)=2h \\
h(t)=3t+2 & h'(t)=3 \\
g(h(t))=(3t+2)^2 & \Delta\big(g(h(t))\big)\approx 2\cdot\underbrace{(3t+2)}_{h(t)}\cdot\underbrace{3}_{h'(t)}\cdot\Delta t
\end{array}
$$

$$\frac{\Delta g}{\Delta t}=\frac{\Delta g}{\Delta h}\cdot\frac{\Delta h}{\Delta t}$$

Auch die Regel zur Integration durch Substitution lässt sich – wenn nicht unmittelbar aus der Kettenregel für Ableitungen gefolgert – mit einer Differentialschreibweise einsehen und fällt vielen Lernenden in der Schreibweise mit expliziten Integranden leichter.

Das sei hier an noch einem relevanten Beispiel illustriert: Es gilt (für Integrationsintervalle ohne 2)

$$
\begin{aligned}
\int (x-2)\cdot\cos\left(x^2-4x\right)\mathrm{d}x &= \int \frac{x-2}{2x-4}\cdot\cos(u)\,\mathrm{d}u = \\
&= \frac{1}{2}\cdot\sin(u)+c=\frac{1}{2}\cdot\sin\left(x^2-4x\right)+c
\end{aligned}
$$

mit $u=x^2-4x$ und folglich $\mathrm{d}u=(2x-4)\mathrm{d}x$ oder $\mathrm{d}x=\mathrm{d}u/(2x-4)$.

5 Blick in den Schulalltag – didaktisch analysiert

5.1 Aufgaben aus aktuellen Schul- und Fachdidaktikbüchern

Ein systematischer Blick in die gängigen Oberstufen-Analysis-Bücher ergibt, dass Anwendungsaufgaben zu Änderungsraten inzwischen sehr verbreitet sind, wobei sich allerdings höchstens ein Fünftel der Aufgaben nicht auf zeitliche Veränderungen beziehen – eine detaillierte Auflistung der Beispiele findet sich in [Cichon, 2014].

Bei den Beispielen, in denen die Eingabegröße die Zeit ist, geht es bei der Änderungsrate stets um eine Geschwindigkeit im direkt kinematischen oder übertragenen Sinne. Die Vorstellung vom Zusammenhang zwischen Veränderungen und deren Wirkungen ist dann meiner Erfahrung nach für Lernende vergleichsweise einfach. Recht interessant sind allerdings bisweilen die Wortschöpfungen in diesem Zusammenhang. Vereinzelt wird kühn mit Größen, deren Einheiten und den zugehörigen Kürzungsmöglichkeiten sowie dem Übergang vom Differenzenquotienten zur echten Ableitung umgegangen. Ich zitiere aus [Bigalke/Köhler, 2011, S. 256], in dem sich insgesamt viele und eindrücklich illustrierte Beispiele finden:

> *Berechnung der Manntage aus der Beschäftigtenzahl*: Beim Bau eines Staudamms kann die Anzahl der eingesetzten Männer durch die Funktion $m(t) = 800 - 2t$ beschrieben werden (t in Tagen, m in Personen), $0 \le t \le 400$ [...] Wie lautet die Gleichung der Funktion $M(t)$, welche die Anzahl der Manntage angibt, die bis zum Zeitpunkt t zustande kamen?
>
> Manntage = Mann · Tage $\qquad \Delta M = m \cdot \Delta t$
>
> Mann = Manntage / Tage $\qquad \Rightarrow m = \dfrac{\Delta M}{\Delta t} \Rightarrow m = M'$

Nicht zeitabhängige Beispiele, die sich in Schulbüchern befinden, betreffen den Luftdruck in Abhängigkeit von der Höhe, den Flüssigkeitsstand in Abhängigkeit von der Temperatur bei Flüssigkeitsthermometern, die Masse in Abhängigkeit vom Füllvolumen bei Ölgefäßen (Öl ist kompressibel), das durchschnittlich erforderliche Kraftstoffvolumen in Abhängigkeit von der mit einem Kraftfahrzeug zurückgelegten Strecke, die Bohrkosten pro Meter bei einer Erdwärmebohrung in Abhängigkeit von der bereits erreichten Bohrtiefe oder klassisch die bei einer Bewegung erforderliche Kraft in Abhängigkeit vom Weg. Eine ideenreiche Beispielliste findet sich außerdem in [Büchter/Henn, 2010]: Kosten eines Rohbaus abhängig vom Volumen des umbauten Raums[9], Förderkosten bei Kupfer abhängig von der geförderten Masse, Höhe des Rheins über NN abhängig von der Quell-Entfernung, absolute Steuer in Deutschland abhängig vom Einkommen, verkaufbare Stückzahl einer Ware abhängig von deren Verkaufspreis.

Mit Blick auf den Sinn und die korrekte Interpretation von Integrationen lassen sich all diese Beispiele in zwei Typen einteilen, von denen der eine wiederum in drei Untertypen zerfällt. Diese Typen werden hier beschrieben und an Beispielen konkretisiert, um innerhalb der didaktischen Analyse auf die jeweiligen Fehlerquellen und mögliche Lernhilfen zurückzukommen:

Typ I: Zwischen eingehender und abhängiger Größe *ist mit Blick auf Integrationen nur der Zuordnungsaspekt, nicht aber der Kovarianzaspekt relevant*, weil im Anwendungskontext gar kein Prozess denkbar ist, bei dem die eingehende Größe eine Folge möglicher Werte sukzessive durchläuft. Zu diesem Typ zählen von oben (jeweils so, wie sie dort gegeben sind) der Kraftstoffverbrauch, die Betonrohbauten, die Kupferförderung, die Steuer und die Verkaufsstückzahl.

---

9 Diese Anregung war es, die meinen eingangs erwähnten Studenten zur genannten Fehlinterpretation inspirierte. Er ging allerdings von dem aus, was bei [Büchter/Henn 2010] die Änderungsrate wäre – weil er dazu aktuelle Daten fand – und interpretierte das Integral (falsch).

Typ II: Die eingehende Größe durchläuft dem Anwendungskontext nach durchaus häufig sukzessive eine Folge möglicher Werte. Zum Typ II gehören neben Luftballon- und Sintflutbeispiel alle in I nicht genannten Beispiele der obigen Aufzählung: Luftdruck von Höhe, Quecksilbersäulenstand von Temperatur, Ölmasse von Füllvolumen in gegebenem Tank, Bohrkosten pro Meter von aktueller Bohrtiefe, Rhein-Höhe von Quellentfernung und erforderliche Kraft von Weg. Bei diesen Beispielen macht unser – jedenfalls mein – eng an reale Erfahrungen gekoppeltes Vorstellungsvermögen es praktisch unmöglich, sich die Veränderung der Eingangsgröße anders als *mit der Zeit* vorzustellen. Folgendes Beispiel entstammt aus [Bigalke/Köhler, 2011, S. 255]:

> *Berechnung der Arbeit W aus der Kraft F*: Ein Bagger hebt eine Ladung Kies aus dem Fluss auf einen 9 m hohen Kahn. Beim Heben fließt Wasser ab, so dass sich die benötigte Kraft stetig verringert, und zwar nach der Formel unten. Wie lautet die Arbeitsfunktion *W*?
>
> $F(s) = 50000 - 9000 \cdot \sqrt{s}$, wobei *s*: Hubweg in m; *F*: Kraft in N
>
> Arbeit = Kraft · Weg, $\Delta W = F \cdot \Delta s$
>
> Kraft = Arbeit / Weg $\Rightarrow F = \frac{\Delta W}{\Delta s} \Rightarrow F = W'$

Mit Blick auf potentielle Fehlinterpretationen ist für diesen Typ folgende Unterscheidung hilfreich:

a) Für die im Kontext relevanten Größen und gestellten Fragen spielt es keine Rolle, in welcher Zeit die Veränderung stattfindet. Dies gilt je nach Fragestellung bei Luftballon, Quecksilbersäulenstand, Ölmasse und Kraft in Abhängigkeit von Weg (siehe etwa die Schulbuchaufgabe auf der vorigen Seite).

b) Es spielt eine Rolle, in welcher Zeit der Prozess abläuft, aber die Eingangsgröße ändert sich proportional zur verstreichenden Zeit. Dies gilt für das Sintflutbeispiel, wie oben beschrieben.

c) Der zeitliche Verlauf spielt erneut eine Rolle, aber die Eingangsgröße ändert sich nicht proportional zur verstreichenden Zeit oder wir wissen das jedenfalls nicht genau. Dies gilt je nach Fragestellung für die Beispiele Luftdruck von Höhe, Rheinhöhe über NN von Quellentfernung und Bohrkosten von erreichter Bohrtiefe, wie hier im Hinführungsteil zur Integralrechnung bei [Schmidt, 2011, S. 140]:

> *Erdwärmebohrungen*: Bei der Nutzung von Erdwärme werden häufig bis zu 3 km tiefe Bohrungen durchgeführt. Experten können die Kosten für eine Bohrung pro Meter in Abhängigkeit von der erreichten Tiefe abschätzen. Damit wollen Sie die Funktion ermitteln, die der Tiefe der Bohrung deren Gesamtkosten zuordnet.

Zur einführenden Auseinandersetzung mit Änderungsraten und Bilanzen werden in Schulbüchern häufiger Beispiele herangezogen, bei denen die Eingangsgröße nicht stetig, sondern diskret ist: Zahl von Zuschauern, die pro Zeiteinheit in ein Fußballstadion strömen, Zahl von Elektronen, die eine Stelle im Stromkreis passieren, Kosten in Euro oder Cent in Abhängigkeit von einer Produktionsmenge etc. Das Aufgreifen solcher Beispiele wird von fachlicher Seite oft kritisch gesehen, da ja gerade dann keine Differenzierbarkeit vorliegt. Reflektierend praktizierende Lehrkräfte empfinden diese Beispiele jedoch meiner Erfahrung nach oft als sehr hilfreich beim Aufbau des Begriffs- und Vorgangsverständnisses. Den vereinfachenden Modellierungsschritt beim Benutzen von Ableitungs- oder Integralfunktionen könne man ja zusätzlich klar machen. Auch in [Danckwerts/Vogel, 2006] werden solche Beispiele explizit als didaktisch wertvoll angesehen. Dabei wird hervorgehoben, dass zum Beispiel Ingenieure und Wirtschaftswissenschaftler diesen etwas gewaltsamen Modellierungsschritt gerne und erfolgreich gehen.

Für die im Mittelpunkt dieses Beitrags stehende Fähigkeit zu entscheiden, ob Ableitung und Integral in gegebenem Sachkontext eine sinnvolle Bedeutung haben und gegebenenfalls welche genau, sind Aufgaben dieses Typs definitiv kein Problem, sondern im Gegenteil oft verständnisfördernd.

5.2 Didaktische Analyse: Häufige Ursachen der Fehlinterpretationen

Die Fehlinterpretationen in Bezug auf Sinn und Bedeutung von Integralen in Anwendungskontexten haben von der theoretischen Existenzfrage unabhängige Gründe. Mindestens zwei von ihnen haben mit der Tatsache zu tun, dass Integrieren neben Bilanzieren – bei Division durch die Intervallbreite – auch Mitteln bedeutet. Schwierig wird es, wenn die eingehende Größe selbst eine gemittelte ist oder nur in Form kleiner Mittelwerte vorliegt.

Die Laufvariable: Wirklich durchlaufen?

Bei den oben als Typ I gekennzeichneten Anwendungskontexten ist der Fehler sehr grundlegend: Bei Betonrohbauten, Kraftstoffverbrauch und Kupfer-Förderpreisen hängen die Werte der gegebenen Funktion vom Gesamtmaß (Gebäudegröße, Fahrtlänge, Fördermenge) ab. Letzteres steht jedoch von Anfang an fest und die abhängige Größe hat vom ersten Kubikmeter, Kilometer bzw. Kilogramm an den gegebenen Wert. Demnach liefern Integrationen hier keine im Kontext sinnvollen Informationen.[10]

---

[10] Ableitungen dagegen liefern Antwort auf Fragen des Typs: „Wie stark schwankt bei diesem Gesamtmaß der zugeordnete Durchschnittswert bei geringfügigen Änderungen? Wie sehr ‚lohnt' es sich demnach bei diesem Gesamtmaß, doch ein wenig größer zu bauen, weiter zu fahren oder mehr zu fördern?"

Allerdings sind die Unterschiede zwischen Aufgaben, bei denen Integration keinen, und solchen, bei denen sie einen Sinn ergibt, zum Teil so klein, dass man sehr genau hingucken muss: Die Erdbohrungs-Aufgabe aus [Schmidt u. a., 2011] am Ende von Abschnitt 5.1 ähnelt der mit den Betonbauten auf den ersten Blick sehr: Preis pro Meter abhängig von Tiefe, Preis pro Kubikmeter abhängig von Größe. Nur ändert sich der Bohrpreis pro Meter tatsächlich während des Bohrprozesses: Der erste Meter *ist* deutlich billiger als der hundertste, auch wenn ich von Anfang an weiß, dass ich hundert oder mehr Meter tief bohren werde.

Integrieren ist Mitteln. Aber über was?

Im Fall des oben beschriebenen Typs II hängt die Schwierigkeit mit der Interpretation von Integralen, bei denen die Eingabegröße nicht mehr die Zeit ist, mit einer bekannten Verständnishürde beim Mitteln zusammen:

> *Die Durchschnittsgeschwindigkeit, Teil I:* Ein Transporter fährt den Hinweg einer Lieferung wegen der schweren Ware mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von nur 60 km/h. Auf dem Rückweg kann er eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 90 km/h halten. Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit wurde die Gesamtstrecke zurückgelegt?

Auf diese Frage ist die mit Abstand häufigste Antwort „75 km/h“, welcher ein naheliegendes, aber unüberlegtes arithmetisches Mitteln zugrundeliegt. Die „Falle“ steckt darin, dass zwischen Durchschnittsgeschwindigkeiten gemittelt werden soll, und damit zwischen Größen, die selbst schon Mittel sind; allerdings über die Zeit, während die Frage das Mitteln über Strecken nahe legt. Auf den Fehler kann mit dem Tipp aufmerksam gemacht werden, man möge von einer selbst gewählten Streckenlänge ausgehen und die benötigten Zeiten betrachten.[11] Ebenfalls erhellend kann das Betrachten eines Extremfalles sein. Es nutzt das Ad-Absurdum-Führen einer falschen Annahme durch eine scheinbare Paradoxie nach [Winter, 1989]:

> *Die Durchschnittsgeschwindigkeit, Teil II*: Ein Fahrer eines Transporters, der auf Hin- und Rückweg einer Lieferung eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 80 km/h erreichen soll, hat auf dem Hinweg aus verschiedenen Gründen nur durchschnittlich 40 Kilometer pro Stunde zurückgelegt. Wie schnell muss er zurückfahren, um das Soll noch zu erreichen?

Hier lautet die korrekte Antwort: Es ist unmöglich. Bei halber Soll-Geschwindigkeit auf der halben Strecke hat der Fahrer die gesamte zur Verfügung stehende Zeit

[11] Etwa: Die Strecke sei 90 km lang. Dann werden für den Hinweg 1,5 Stunden benötigt und für den Rückweg eine Stunde, insgesamt also 2,5 Stunden für 180 km, was einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 72 km/h entspricht. Warum weniger als 75 km/h? Nun, der LKW ist länger 60 als 90 km/h gefahren.

schon verbraucht und müsste zurück gebeamt werden. Wer nicht lange nachdenkt, antwortet aber vermutlich „120 km/h".

Man muss nicht dumm sein, um in diese Falle zu tappen: Wie ein erhaltenes Konzeptpapier beweist, ist der Fehler Galilei höchstselbst beim Auswerten seiner Daten an der schiefen Ebene zunächst unterlaufen (vgl. [Heitzer, 1996] und [Mudry, 1987]). Erst als er diesbezüglich klar sah, konnte er die widerstreitenden Annahmen $v \sim s$ und $v \sim t$ wirklich trennen. In den *Discorsi* legt Galilei ihn in Zusammenhang mit dem freien Fall dem *Salviati* in den Mund, wenn dieser „folgert", wäre bei doppelter Fallstrecke die Endgeschwindigkeit doppelt so groß wie bei einfacher, dann gälte dies Verhältnis auch für die zugehörigen Durchschnittsgeschwindigkeiten.

Der Fehler wurde noch Ende des 20. Jahrhunderts von Langensiepen wiederholt, und zwar just in dem Bemühen, den Zugang über direkte diskrete Messwerte didaktisch auszugestalten (vgl. [Langensiepen, 1995]).

Das Problem ist: Solange der Zusammenhang zweier kovarianter Größen unbekannt und ergo interessant ist, *können* nur Durchschnittswerte ermittelt werden, nämlich Wertepaare und Differenzenquotienten. Wenn man dann darin irrt, wie die Durchschnittswerte miteinander zu verrechnen sind, verfehlt man den gesuchten Zusammenhang zwangsläufig und gelangt zu falschen Schlüssen über das Integral.

Richtigstellung: Vom Mitteln über Mittelwerte

Um das Problem zu durchdringen noch ein direkter Vergleich anhand Abbildung 17.

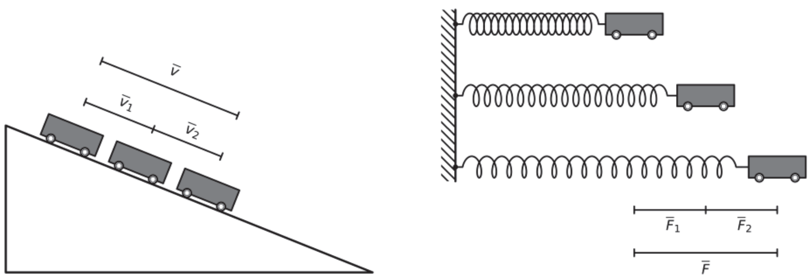

Abbildung 17: Zum Mitteln von Mittelwerten

Langensiepen und im ersten Anlauf Galilei mitteln bei der Bewegung längs der schiefen Ebene aus ihren Messwerten „naiv" nach

$$\bar{v} = \frac{\bar{v}_1 + \bar{v}_2}{2}.$$

Es gilt jedoch

$$\bar{v} \neq \frac{\bar{v}_1 + \bar{v}_2}{2} \text{ für } \bar{v}_1 \neq \bar{v}_2 ,$$

denn v ändert sich nicht linear mit s (sondern linear mit t, ergo mit $\sqrt{s}$). Korrekt ist:

$$\bar{v}_1 = \frac{s}{t_1},\ \bar{v}_2 = \frac{s}{t_2} \text{ und } \bar{v} = \frac{2s}{t_1 + t_2} = \frac{2s}{\frac{s}{\bar{v}_1} + \frac{s}{\bar{v}_2}} = \frac{2\bar{v}_1\bar{v}_2}{\bar{v}_1 + \bar{v}_2} \neq \frac{\bar{v}_1 + \bar{v}_2}{2} \text{ für } \bar{v}_1 \neq \bar{v}_2 .$$

In diesem Fall mitteln sich die Geschwindigkeiten also harmonisch. Bei der Spannarbeit an einer Feder (und der Hubarbeit des Kiesbaggers aus der Schulbuchaufgabe) ist es dagegen korrekt, die Durchschnittskräfte „naiv“ arithmetisch zu mitteln, weil sie tatsächlich linear mit dem Weg wachsen: Es gilt

$$\bar{F} = \frac{\bar{F}_1 + \bar{F}_2}{2},$$

denn F ändert sich linear mit s. Demnach gilt:

$$\bar{F}_1 = \frac{0 + D \cdot s}{2} = \frac{1}{2}Ds,\ \bar{F}_2 = \frac{D \cdot s + D \cdot (2s)}{2} = \frac{3}{2}Ds$$

$$\text{und } \bar{F} = \frac{0 + D \cdot (2s)}{2} = Ds = \frac{\bar{F}_1 + \bar{F}_2}{2} .$$

Mit Blick auf die korrekte Interpretation von Integralen im Sachkontext lässt sich zusammenfassend sagen: Nur wenn die gegebene Größe diejenige ist, in Bezug auf die man mittelt, wenn man bei der abhängigen Größe vom Durchschnitt spricht, ist die Bilanzgröße eine im Anwendungszusammenhang sinnvolle. Mit anderen Worten: Die Bilanzgröße ist immer diejenige, die im Fall konstanter abhängiger Größe dem Produkt aus abhängiger und gegebener Größe entspricht.

Wie viel helfen die Einheiten?

Aus den oben genannten Gründen können die Einheiten Fehlinterpretationen entlarven oder die richtigen Interpretationen finden helfen: Wenn die Einheiten nicht stimmen, kann die Interpretation nicht richtig sein. Zum Beispiel kann man natürlich zu einer Bewegung das Integral der Geschwindigkeit längs des Weges bilden, aber das Ergebnis (mit den Einheiten m²/s, also statt „Weg mal Geschwindigkeit“ etwa auch „Fläche pro Zeit“) ist keine in Bezug auf den physikalischen Vorgang hilfreiche Größe. Man kann den Flächeninhalt unter dem Zeit-Kraft-Graphen eines mechanischen Prozesses ermitteln, aber das Ergebnis ist dann nicht die verrichtete Arbeit, sondern (mit den Einheiten kg · m/s also auch „Masse mal Geschwindigkeit“) gegebenenfalls der am Ende vorliegende Impuls. Dies gilt jedoch nur, wenn die Kraft beschleunigend gewirkt hat; und man müsste dann bei diskreten Rechnungen auch entsprechend anders mit dem Mitteln der mittleren Kräfte umgehen.

Umgekehrt sind allerdings stimmende Einheiten kein Beweis für die Richtigkeit der Interpretation. Sie bleibt nämlich dann falsch, wenn man den ersten Typ Fehler gemacht und über Durchschnittswerte gemittelt hat, die de facto in keinem Prozess tatsächlich nacheinander durchlaufen werden (vergleiche den Fall der Rohbaupreise oben).

5.3 Blick in die Unterrichtsgeschichte

Was das heutige Für und Wider der Frage nach der Behandlung der Infinitesimalrechnung in der Schule angeht, lohnt sich ein Blick auf die Diskussionen zu der Zeit, als diese erstmals vorgeschlagen wurde. Diesbezüglich liefern die Arbeiten von [Krüger, 2012] in Kombination mit denen von [Jahnke, 1990] bzw. [Zeimetz, 2009] einen sehr guten Überblick. Hier erfolgt nur eine sehr grobe Zusammenfassung.

Nach Kleins Vorstoß und im Zuge der Meraner Reformen wurde um 1900 mit Argumenten diskutiert, die zu großen Teilen bis heute Gültigkeit haben.

Pro: Die Bedeutung der Infinitesimalrechnung sei so groß, dass das „Kulturleben der Gegenwart" ihre Kenntnis erfordere, sie sei Grundlage für verschiedene Studiengänge und entspräche einer echten Wissenschaftsorientierung anstelle eines zaubertrickartig vermittelten Kalküls – Letzteres bezog sich vor allem auf die so genannte Schellbachsche Methode, von der unten noch kurz die Rede sein wird und die zum Teil als Umgehung des „Infinitesimalrechnungs-Verbots" gesehen wurde.

Contra: Die Zeit sei zu knapp, der Gegenstand sei prinzipiell oder jedenfalls für selbsttätiges Lernen zu anspruchsvoll und fiele deshalb zwangsläufig auf reinen Kalkül zusammen, die Lernenden würden eher verunsichert als gebildet.[12]

Als nachahmenswert könnte allerdings die Tatsache betrachtet werden, dass es eine Erprobungsphase gab, während der das Ob und Wie den einzelnen Schulen und Schulbuchautoren überlassen blieb. Die Darstellung in Schulbüchern ab 1925 erfolgte entweder sorgsam auf geometrische Anschauung gestützt mit viel „graphischem Differenzieren" oder kalkülhaft in Form von Regeln zum „unfallfreien" Umgang mit Differenzialen. Dazwischen muss man sich bis heute ebenso entscheiden, wie zwischen Tangentensteigungen (speziell, aber vertraut) und Änderungsraten (allgemeiner anwendbar, aber reichlich neu) als Zugang. Natürlich besteht in beiden Fragen auch die Möglichkeit, sich gerade nicht zu entscheiden, sondern die Zugänge zu kombinieren und den damit verbundenen Zeit- und Vergleichsaufwand in Kauf nehmen.

---

[12] Natürlich lagen hinter der inhaltlichen Diskussion auch ganz andere Motive, die etwa mit der Manifestation sozialer Schichten mittels Bildungszugang oder der höheren Bezahlung bestimmter Lehrkräfte zusammenhingen und eventuell ebenfalls nicht vollständig der Vergangenheit angehören.

Die „Schellbachsche Methode“ geht auf [Schellbach, 1860] zurück. Sie wurde ganz ähnlich schon 1630 von Fermat angewandt und verbreitete sich in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts an Schulen, nachdem die in den preußischen Lehrplänen ab 1810 (d.h. etwa zur Zeit von Carnots Lehrbuch!) schon einmal verankerten „Anfangsgründe der Analysis“ wieder zurückgenommen worden waren (vgl. [Schumann, 2002]). Es handelt sich um eine rein algebraische Methode zur Bestimmung von Extremwerten. Sie kommt ohne Differenzenquotienten und Grenzwertprozesse aus und wird von Schellbach ‚elementar‘ genannt. Von abweichenden Sprech- und Bezeichnungsweisen abgesehen kann sie als Spezialfall der Carnotmethode für den Fall verschwindender Änderungsrate gesehen werden. Sie hat mit dieser das Benutzen sehr kleiner Veränderungsgrößen d und vor allem das Weglassen von deren Potenzen als entscheidenden Schritt gemeinsam: Ausgehend von Argumenten $x-d$ und $x+d$, bei denen die Funktionswerte gleich sind (also links und rechts von der gesuchten Extremstelle), werden bei Vereinfachung der Differenz $f(x+d)-f(x-d)$ Potenzen von d ausgeklammert, um dann den „wesentlichen Term“ gleich Null zu setzen. Letzterer ist nichts anderes als das, was auch bei Carnot nach Elimination der Potenzen des sehr Kleinen übrig bliebe.

6 Fazit

Die folgenden Abschlussbemerkungen dienen der Zusammenfassung und Einordnung. Sie zerfallen in zwei Teile, von denen sich der erste im engeren Sinne auf das Beitragsthema bezieht, der zweite auf Aspekte der Rolle von Mathematik in der Mathematikdidaktik, wie sie meines Erachtens an diesem Beispiel deutlich werden.

Änderungsraten, Bestände und ein historisch inspirierter Infinitesimalkalkül

Interessanter Weise beginnt Carnot selbst sein Buch mit einer didaktischen Analyse. Auf die Frage, was an der Infinitesimalrechnung eigentlich schwierig für die Lernenden sei, findet er zwei Antworten, die bis heute nichts von ihrer Richtigkeit und weitgehenden Vollständigkeit eingebüßt haben: erstens die Vorstellung von und der Umgang mit „dem Unendlichen und dem Nichts dazwischen“, zweitens das Ausdrücken der Bedingungen einer Aufgabe durch Gleichungen und das Lösen dieser Gleichungen. Weiterhin charakteristisch ist für Carnots Werk eine gewisse pragmatische Ingenieursicht, die für mich von drei Tatsachen geprägt ist: dass die lokalen Änderungsraten (wie Momentangeschwindigkeit oder Volumenänderung pro Radiusänderung) ohne viel Kopfzerbrechen als Hauptgrößen gesehen werden, dass das Weglassen der Potenzen des sehr Kleinen keinerlei Zweifel weckt und dass das Funktionieren des Kalküls eher dankbar hingenommen (und zwischen den Zeilen durchaus bestaunt) wird, als tiefer hinterfragt.

Natürlich ist besonders Carnots erster Satz über unvollkommene Gleichungen ausgesprochen windig. Aber ist er windiger als das, was Lernenden heute als sogenannte h -Methode begegnet? Immerhin weist Carnots Sprache einen Weg, sich (in von Neumanns Sinn, s. u.) an die Dinge zu gewöhnen, die man nicht restlos versteht. Sie bringt zugleich eine pragmatische Anwenderhaltung und ein Staunen über das Potenzial der Mathematik zum Ausdruck. Insofern enthält Carnots Herangehensweise für mich wertvolle Anregungen für die Umsetzung der curricularen Vorgabe vom propädeutischen Grenzwertbegriff. Die Unterschiede zwischen Grundkurs- und Leistungskurs-Paradigmen (vgl. auch [Ableitinger/Heitzer, 2013]) spiegeln sich dann etwa in den nachfolgenden beiden Zitaten wider:

> In der Mathematik versteht man die Dinge nicht. Man gewöhnt sich nur an sie.
> (John von Neumann, um 1940, zugeschrieben)

> Das bloße Wissen in der Mathematik, auf Anwendung berechnet, die Bekanntschaft mit dazu dienenden Sätzen und Formeln, selbst mit dem Mechanismus, der zu solchen Sätzen führt, ist zu richtigen Anwendungen noch nicht hinreichend, sondern der mathematische Geist, oder die mathematische Art zu denken, muß der Leitfaden sein.
> (A. L. Crelle, 1845, zitiert nach [Jahnke, 1990])

Ich persönlich messe dem Kalkülhaften durchaus einen didaktischen Wert bei und befürworte die Behandlung von Änderungsraten und Bilanzen; allerdings nur, sofern – gar nicht einfach – deren jeweilige konkrete Bedeutung tatsächlich durchdrungen wird. Es erscheint mir sinnvoll, den Blick für die Nicht-Trivialität der Interpretation von Ableitungen und Integralen in Sachkontexten zu schärfen und die korrekte Interpretation an möglichst unterschiedlichen Beispielen zu schulen. Denn besonders, wenn die Eingabegröße nicht die Zeit ist, ist die Gefahr von Über- und Fehlinterpretationen groß, und schon Nuancen von Unterschieden können die eine Bilanz-Aufgabe richtig, die andere gründlich falsch machen. Es wird schwierig, wenn die bilanzierten Werte selbst schon Mittelwerte sind. Manchmal ist gar kein Prozess denkbar, in dem die Eingabegröße tatsächlich sukzessive durchlaufen wird. Manchmal wird nicht längs der Größe bilanziert, längs der zuvor gemittelt wurde.

Mathematik in der Mathematikdidaktik

Am hier dargelegten Beispiel wird über die Rolle hinreichend intensiv berücksichtigter Mathematik in der Mathematikdidaktik meines Erachtens folgendes deutlich: Sie kann als Korrektiv dienen, wenn der tatsächliche Schwierigkeitsgrad eines für die Schule vorgesehenen Gegenstandes unterschätzt wird; sei es von Anfang an, im Laufe der Zeit, infolge der (scheinbaren) Einfachheit des Formalismus oder im Zuge verständlicher Begeisterung für die Modellierungsmöglichkeiten. Sie kann darauf aufmerksam machen, was hinter einem Satz oder einem Verfahren in der Tiefe wirklich an Voraussetzungen, Erfahrungen und Überzeugungen steckt und sein Durchdringen demnach bedingt. Sie kann Zugänge, Schreib- und Sprechweisen, Veranschaulichungen und Gedankenführungen nahelegen, die gute Chancen haben, bei der Vermittlung hilfreich zu sein. Dabei ist unter anderem der historische Blick vielversprechend – sowohl auf die ersten Entdeckungen und Entwicklungen als auch auf die ersten Vermittlungsversuche, und auch auf die Fehler.

Die Analyse des fachlichen Hintergrunds kann deshalb für Curricula, Unterricht und Fachdidaktik u. a. folgende praktische Wirkungen haben:

- Einseitige Ausrichtungen des Unterrichts durch Überbetonungen einzelner Aspekte der Mathematik (etwa die der Struktur in den 60er und 70er Jahren – oder der Modellierung heute) werden erkannt und neu ausgelotet.
- Fragen der konkreten Ausgestaltung der unterschiedlichen Paradigmen für Grund- und Leistungskurse, unterschiedliche Schulformen oder Bildungsziele erhalten Antworthilfen (vergleiche Abschnitt 2.1).
- Zu Verständnisschwierigkeiten, Fehlvorstellungen und handfesten Fehlern werden Ursachen in der tatsächlichen Komplexität oder auch in unglücklichen Vermittlungsweisen erkannt.

Wenn in Schul- und Didaktikbüchern oder gar zentralen Prüfungen beim kreativen Entwurf von Anwendungskontexten „über das Ziel hinaus geschossen" wird, kann dies korrigiert werden. Umgekehrt können Beispiele und Schreibweisen aus der (gegebenenfalls historischen) Mathematik der Ingenieure und Naturwissenschaftler intellektuell ehrliche Modellierungsaufgaben konzipieren helfen (vergleiche Abschnitt 4.1). Eine Auseinandersetzung mit dem fachlichen Hintergrund wie in Abschnitt 5.2 zeigt eindrücklich, dass grobe Abrisse oder „hingeworfene Modellierungsideen" nicht immer reichen, dass man Fehler manchmal erst bei genauerer und detaillierter Ausarbeitung aufspüren und von korrekten Lösungswegen unterscheiden kann.

Insofern ist die Analyse der fachimmanenten Systematik zwar sicher kein hinreichender, aber ein notwendiger Bestandteil mathematikdidaktischer Investitionen.

Literatur

Ableitinger, C./Heitzer, J. (2013): Grenzwerte unterrichten – Propädeutische Erfahrungen und Präzisierungen. mathematik lehren 180, S. 2–11.

Amson, D. (1992): Carnot. Paris: Perrin.

Bigalke, A./Köhler, N. (Hrsg.) (2011): Mathematik NRW, QF LK, Band 1: Analysis. Berlin: Cornelsen.

Büchter, A./Henn, H.-W. (2010): Elementare Analysis: Von der Anschauung zur Theorie. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Carnot, L., in der Übersetzung von Hauff, J. (1800): Betrachtungen über die Theorie der Infinitesimalrechnung. Frankfurt/Main: Jäger.

Carnot, L. (1803): Geometrie der Stellung oder Über die Anwendung der Analysis auf die Geometrie. Altona: Hammerich.

Cichon, D. (2014): Didaktische Hintergründe und Konzeption eines mathematischen Lehrfilms zum Thema „Änderungsraten". Schriftliche Hausarbeit im Rahmen der Ersten Staatsprüfung, RWTH Aachen.

Cramer, F. (1989): Lazare Nicolas Marguérite Carnot. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaft.

Danckwerts, R./Vogel, D. (2006): Analysis verständlich unterrichten. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Galilei, G. (1985): Unterredungen und mathematische Demonstrationen über zwei neue Wissenszweige, die Mechanik und die Fallgesetz betreffend. Herausgegeben von A. v. Oettingen. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Gillispie, C./Pisano, R. (2014): Lazare and Sadi Carnot: A Scientific and Filial Relationship. New York: Springer.

Hairer, E./Wanner, G. (2011): Analysis in historischer Entwicklung. Berlin: Springer.

Heitzer, J. (1996): Die Experimente Galileis zum Fallgesetz, eine physikgeschichtliche Arbeitsgemeinschaft für Schüler der Jahrgangsstufen 11 bis 13. Schriftliche Hausarbeit im Rahmen der zweiten Staatsprüfung. Studienseminar Aachen.

Heitzer, J. (2013): Infinitesimalrechnung nach Lazare Carnot im heutigen Analysisunterricht. Beiträge zum Mathematikunterricht 2013, S. 452–455.

Hochstrat, L. (2012): Die Familie Carnot und ihre Beiträge zur Mathematik. Schriftliche Hausarbeit im Rahmen der Ersten Staatsprüfung. RWTH Aachen.

Jahnke, H. N. (1990): Die algebraische Analysis im Mathematikunterricht des 19. Jahrhunderts. Der Mathematikunterricht 36(3), S. 61-74.

Kindt, M./Drijvers, P./Doorman, M. (Hrsg.) (2002): Differenzieren – do it yourself. Zürich: Orell Füssli.

KMK (2012): Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012.

Krüger, K. (2012): 100 Jahre Analysisunterricht am Gymnasium – ein Rückblick auf die Meraner Reform. Saarbrücken: Vortrag auf der DMV-Tagung.

Lambert, A. (2007): Ein Einstieg in die reflektierende Modellbildung mit Produktiven Aufgaben. In: W. Herget u. a. (Hrsg.), Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht. Schriftenreihe der ISTRON-Gruppe. Band 10. Hildesheim: Franzbecker. S. 75–90.

Langensiepen, F. (1995): Erarbeitung des Fallgesetzes nach der Methode Galileis, in: Praxis der Naturwissenschaften 7|44, S. 10–16.

Lergenmüller, A./Schmidt, G. (Hrsg.) (2010): Mathematik Neue Wege SII – Ausgabe 2010 für Nordrhein-Westfalen. Arbeitsbuch Einführungsphase mit CD-Rom passend zum Kernlehrplan G8 2007. Kapitel 5. Braunschweig: Schroedel.

Lergenmüller, A./Schmidt, G. (2010): Mathematik Neue Wege 10. Einführungsphase. Braunschweig: Schroedel.

Mudry, A. (Hrsg.) (1987): Galileo Galilei. Schriften, Briefe, Dokumente. München, Beck.

Schellbach, K. H. (1860): Mathematische Lehrstunden, Aufgaben aus der Lehre vom Größten und Kleinsten. Bearbeitet und herausgegeben von A. Bode und E. Fischer. Berlin: Reimer.

Schmid, A./Weidig, I. (Hrsg.) (2010): Lambacher Schweizer. Mathematik für Gymnasien. Oberstufe Einführungsphase. Ausgabe Nordrhein-Westfalen. Stuttgart: Klett.

Schmidt, G., u. a. (Hrsg., 2011): Mathematik Neue Wege, Arbeitsbuch für Gymnasien: Analysis II. Braunschweig: Schroedel.

Schumann, H. (2002): Zur Geschichte präformaler Extremwertbestimmung. Gefunden im Februar 2015 unter: www.mathe-schumann.de/veroeffentlichungen/extrem

Sonar, T. (2011): 3000 Jahre Analysis. Berlin: Springer.

Stein, M. (1988): Umfang – Ableitung der Fläche. Die Kreisformel in der Sekundarstufe I, in: mathematik lehren 31, S. 37–38.

Tietze, U.-P./Klika, M./Wolpers, H. (Hrsg.) (2000): Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II, Band 1, Didaktik der Analysis. Braunschweig: Vieweg.

Wilson, S. (1990): Sadi Carnot. Technik und Theorie der Dampfmaschine, in: Neuser, W. (Hrsg.): Newtons Universum. Materialien zur Geschichte des Kraftbegriffes. Heidelberg: Spektrum der Wissenschaft.

Winter, H. (1989): Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Braunschweig: Vieweg.

Zeimetz, A. (2009): Als die Differential- und Integralrechnung verboten wurde. Soest: Vortrag auf der Herbsttagung des Arbeitskreises AK MUI der GDM.

Anschrift der Verfasserin

Univ.-Prof. Dr. rer.nat. Johanna Heitzer
RWTH Aachen, Lehr- und Forschungsgebiet Didaktik der Mathematik
52056 Aachen
e-Mail: johanna.heitzer@matha.rwth-aachen.de

Eingang Manuskript 19.01.2015
Eingang überarbeitetes Manuskript 27.02.2015
Online verfügbar: 09.03.2016