Wo Mathe draufsteht, ist auch Mathe drin.

Die Fachausbildung im Lehramt als Rekonstruktion des Faches aus der Schulmathematik

von

Guido Pinkernell, Heidelberg

Kurzfassung: Eine Lehrkraft sollte das Potential von Schülerbeiträgen für den Aufbau eines aspektreichen, vernetzten und deshalb verstandenen Wissens und Könnens aus fachlicher Sicht beurteilen können. Hierzu bedarf es spezifischer fachlicher Kompetenzen, die in solchen Lehrveranstaltungen ausgebildet werden können, in denen die Vernetzung von scheinbar unverbundenen schulischen Inhalten auf der Grundlage zentraler strukturmathematischer Begriffe verfolgt wird. Solche Lehrveranstaltungen werden unter Bezug auf das theoretische Konzept der Fundamentalen Idee als Beitrag zu einer fachmathematischen Ausbildung im Lehramt begriffen. Dies wird an mögliche Inhalten einer Lehrveranstaltung zum Thema „Proportionalität“ konkretisiert.

Abstract: A teacher should be able to assess the potential of student contributions from a mathematical point of view for developing rich and interconnected subject knowledge. This requires specific competencies that should be formed in such courses where seemingly unconnected areas of school mathematics are analyzed on the basis of central concepts of structural mathematics. Such courses will be understood, with reference to the theoretical concept of the fundamental idea, as a contribution to a professional mathematics education in the teaching profession. This is concretized by means of possible course contents on the topic of „proportionality“.

1 Anstelle einer Einleitung: „Darf der das?“

Der Student hatte eine Unterrichtsstunde zum Thema „Proportionale Zuordnungen“ vorbereitet. Die Einführung war erfolgt, insbesondere wurde die definierende Vervielfachungseigenschaft durch Pfeile in der Zuordnungstabelle kenntlich gemacht, und jetzt sollte eine erste Übung erfolgen. Das Aufgabenblatt enthielt unter anderem Tabellen mit Lücken, die aufzufüllen waren. Eine der Tabellen zeigte in der Spalte der Ausgangswerte die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 in der Spalte der Funktionswerte war nur die 6 als der der 2 zugeordnete Wert gegeben. Ein Schüler schrieb die fehlenden Werte flott hin, ohne die Vervielfachungspfeile zu verwenden. Der Student wurde neugierig und fragte den Schüler, wie das denn so schnell ginge. Er erhielt die Antwort, Pfeile bräuchte man nicht, man müsste ja einfach nur die Vielfachenreihe der 3 in die Lücken eintragen. Der Student stutzte, wandte sich an den Ausbilder und fragte überrascht: „Darf der das?!"

Man kann diese Frage als eine pädagogisch motivierte deuten: Darf ein Schüler die in der Lerngruppe eingeführte Argumentationsbasis ignorieren und einfach die eigene Lösungsidee unhinterfragt verfolgen? Natürlich darf er das, allerdings sollte der Student die Idee im Unterrichtsgespräch thematisieren und hinsichtlich ihrer Kompatibilität mit der eingeführten Definition diskutieren lassen. Man kann die Frage aber auch anders deuten, nämlich als Ausdruck eines fachlichen Defizits: Offenbar war es dem Studierenden nicht bewusst, dass die Folge der Vielfachen einer Zahl eine proportionale Progression darstellt. In der Tat ist sie das, denn sie erfüllt zusammen mit den Ordnungszahlen der Folge als Ausgangswerte die definierende Eigenschaft proportionaler Zuordnungen. Für einen Mathematiklehrer – auch für einen angehenden – wäre die Überprüfung dieses vom Schüler implizierten Sachverhalts Gegenstand erster Überlegungen. Die erste Frage wäre also nicht, ob der Schüler „das darf", sondern, ob der Schüler hier eine aus fachlicher Sicht interessante Beobachtung gemacht haben könnte, die es für den Aufbau eines aspektreichen Begriffs proportionaler Zusammenhänge aufzugreifen gilt.

Erfahrene Lehrkräfte wissen, dass gerade in Einführungsphasen überraschende Vernetzungen mit scheinbar irrelevanten Themengebieten entstehen können, die – sobald die bereichsspezifischen Definitionen und Verfahren eingeführt sind – schnell wieder verschwinden. Das ist zu beklagen, denn sie können zum Aufbau eines aspektreichen und vernetzten Wissens beitragen. Damit das geschehen kann, braucht es Lehrerinnen und Lehrer, die die Relevanz von Schüleräußerungen für ein solches Lernen einschätzen und für den Unterricht nutzen können. Eine wesentliche Voraussetzung hierfür ist ein fundiertes Wissen und Können im Fach, denn die Relevanz von Schüleräußerungen für ein aspektreiches und vernetztes Wissen zu erkennen heißt, Analogien zwischen den Entdeckungen der Lernenden und dem Unterrichtsstoff auf struktureller Ebene ziehen können. Das ist Theoriebildung im Kleinen, wofür die Fachmathematik Begriffe und Verfahren zur Verfügung stellt. Durch mehr fachwissenschaftliche Veranstaltungen in der Lehramtsausbildung ist es m. E. aber nicht getan. Spannend wäre es, ein Veranstaltungskonzept zentraler im Hochschulcurriculum für die Lehramtsausbildung zu etablieren, das mancherorts in Form von „Brückenveranstaltungen" zwischen fachwissenschaftlichen und fachdidaktischen Veranstaltungen realisiert wird (z. B. Beutelspacher, Danckwerts et al. 2011, Bauer 2013).

Die Vernetzung unverbundener Phänomene in der Schulmathematik und Fachmathematik auf struktureller Ebene braucht ein übergreifendes Konzept, das die Suche nach strukturanalogen Beispielen führt, gewissermaßen eine „interesseleitende Idee". Danckwerts hat dies 1988 in einem Aufsatz am Beispiel der „Leitidee Linearität" ausführlich konkretisiert und das hierbei verfolgte veranstaltungsdidaktische Ziel wie folgt beschrieben: „Um den Leitbegriff Linearität […] lassen sich zahlreiche Standardinhalte des schulmathematischen Curriculums gruppieren, die oft als Stoffbrocken isoliert gesehen unterrichtet und gelernt werden. Die einigende Kraft dieses Konzepts für die Stofforganisation hat, so glaube ich, besondere Bedeutung für den Lehrer, der im Bewusstsein einer solchen Meta-Idee seinen Unterricht anders strukturieren kann (wird?)“ (Danckwerts 1988). Er präzisiert den Begriff der „Leitidee“ als Fundamentale Idee und greift so ein mathematikdidaktisches Konstrukt auf, das seit Bruner die strukturmathematischen Bemühungen um schulmathematische Inhalte theoretisch begleitet. Zuvor hatte Freudenthal mit seiner „Didactical Phenomenology“ (1983) eine Methode für eine didaktisch motivierte Analyse strukturmathematischer Begriffe veröffentlicht. „Phenomenology of a mathematical concept, structure, or idea means describing it in its relation to the phenomena for which it was created, and to which it has been extended in the learning process of mankind, and, as far as this description is concerned with the learning process of the young generation, it is didactical phenomenology.“ (Freudenthal 1983, ix). Erscheinungen in der Lebenswelt und menschlichem Denken bieten Anknüpfungspunkte für Untersuchungen der Frage, wie hieraus strukturmathematisch belastbare Begriffe entstehen können. Unter anderem demonstriert Freudenthal dies am Beispiel des Verhältnisbegriffs („ratio“). Explizite Bezüge zu Fundamentalen Ideen findet man dort nicht, aber der Verweis auf die geschichtlichen und anthropologischen Dimensionen eines geeigneten Gegenstands für eine solche „didaktische Sachanalyse“ (Vollrath 1987) lassen durchaus Parallelen zum Konzept der Fundamentalen Ideen erkennen.

In inhaltlicher und theoretischer Hinsicht ist dieser Beitrag gegenüber Danckwerts und Freudenthals Ansatz also nicht wirklich neu. Er unterscheidet sich aber hinsichtlich der Ziele: Danckwerts begreift seine Analyse als handlungsleitende Grundlage für die Unterrichtsplanung. Freudenthal sieht seine Untersuchungen als Voraussetzung für eine fachbasierte Analyse mathematischer Lernprozesse. In diesem Artikel hingegen zielt die Identifikation struktureller Analogien in Phänomenen der Schulmathematik auf eine Begründung eines Veranstaltungskonzepts für die fachwissenschaftliche Lehramtsausbildung.

2 Vernetzung von Fachwissen durch Orientierung an Fundamentalen Ideen

Das Konstrukt der Fundamentalen Ideen ist seit Jahrzehnten Gegenstand mathematikdidaktischer Forschung. Es ist für uns deshalb interessant, weil es Kriterien für die Identifikation umfassender mathematischer Konzepte bereitstellt, die sich als zentral für Mathematik und wesentlich für menschliches Denken erweisen und daher als bedeutsam für Schule erachtet werden können. Solchermaßen definiert eignet es sich für die theoretische Begründung eines Veranstaltungskonzepts, das sich als Klammer zwischen Wissenschaft, Schule und Alltag versteht.

Dass es sinnvoll ist, von Fundamentalen Ideen in der Mathematik zu sprechen, wird angesichts solcher zentraler Konzepte wie dem der Funktion oder der Approximation in verschiedenen Gebieten der Mathematik schnell klar. Welche Konzepte aber eine Fundamentale Idee im Einzelnen konstituieren entscheidet sich dadurch, welche Kriterien man einer solchen Entscheidung zugrundelegt. Hierzu gibt es eine Reihe an Vorschlägen, die in verschiedenen Modellen formuliert wurden, vgl. hierzu Schweiger 1992, Vohns 2010, von der Bank 2013. An dieser Stelle fehlt der Platz für eine Übersicht. Stattdessen wird im Folgenden ein Kondensat der wichtigsten Kriterien vorgestellt, das sich für die Begründung des eingangs skizzierten Veranstaltungskonzepts eignen soll. Wichtig bei der Zusammenstellung der Kriterien ist die in allen Modellen mitgedachte curriculare Wirksamkeit Fundamentaler Ideen. Sie begründet den inhaltlichen Ausgangspunkt der Veranstaltung: Die in den Jahrgangsstufen und Teilgebieten der Schulmathematik verteilten Phänomene bilden das erste Material, das auf Analogien struktureller Art überprüft wird. Diese Analogien werden anschließend mithilfe strukturmathematischer Methoden formalisiert und sind in dieser Form neue Argumentationsgrundlagen für die weitere, jetzt wissenschaftliche Analyse der Phänomene bzw. selbst Ausgangspunkt für weitere strukturmathematische Untersuchungen.

Das für diese Unternehmung reduzierte Modell der Fundamentalen Idee enthält drei Kriterien. Es soll im Folgenden am Beispiel „Funktionale Zusammenhänge“ erläutert werden (Abb. 1).

- Das erste Kriterium der *Transversalität in der Mathematik* hebt die zentrale Bedeutung der eine Fundamentale Idee konstituierenden mathematischen Konzepte im Fach hervor: Zum einen wird sie durch eine systemische Präsenz (auch „Horizontalkriterium“, vgl. Schwill 1993) deutlich: Der Begriff der Funktion bzw. der Abbildung wird in den vielen Bereichen der Mathematik auf unterschiedlichen Ebenen verwendet. Im Beispiel (Abb. 1) werden sowohl geometrische Symmetrien in Form von Deckabbildungen sowie algebraische Verknüpfungen als Funktionen beschrieben als auch die strukturelle Analogie zwischen diesen beiden algebraischen Gebilden in Form eines Isomorphismus erfasst. Zum anderen wird die transversale Bedeutung in einer geschichtlichen Dimension deutlich (auch „Zeitkriterium“ oder „Historizität“, vgl. Schwill 1993 und Hischer 2012): Im Beispiel ist eine Graphik aus dem 10. oder 11. Jahrhundert zu sehen, die die Abweichungen mehrerer Planetenbahnen vom Tierkreis als Funktionen der Zeit zeigt. Hischer (2002a) führt sie neben zahlreichen anderen Beispielen als Beleg für die historische Verankerung des Funktionsbegriffs aus der Geschichte von Naturwissenschaften und Mathematik auf.

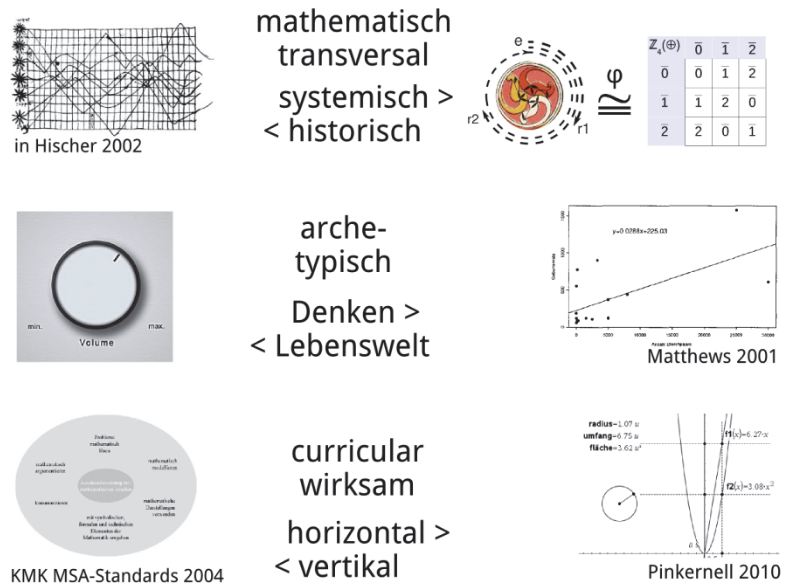

Abbildung 1: Drei Kriterien für eine Fundamentale Idee als Gegenstand in der fachlichen Lehramtsausbildung am Beispiel „Funktionale Zusammenhänge“

Obwohl sie kaum den Standards der Koordinatendarstellung seit Descartes entspricht, ist sie doch, wie Hischer ausführt, die erste historisch belegte graphische Darstellung einer zeitabhängigen Funktion.

- Die *archetypische Bedeutung* verweist auf die Präsenz des Begriffs im Denken und Leben des Menschen (vgl. „Archetypizität“ bei Schweiger 1992 und Hischer 2012): Es scheint dem menschlichen Denken inhärent, Korrelationen als Kausalitäten deuten zu wollen. Zum Beispiel veranlasst das bekannte statistische Phänomen einer kleinen, aber hochsignifikanten Korrelation zwischen der Anzahl brütender Storchenpaare in europäischen Ländern und der jeweiligen Geburtenrate (Matthews 2001) unwillkürlich dazu, einen direkten kausalen Zusammenhang zu vermuten, obwohl ein solcher ganz offensichtlich nicht existiert. Und in der Lebenswelt – das hier angenommene zweite Merkmal der Archetypizität einer Fundamentalen Idee – sind Phänomene omnipräsent, die das Prinzip der Funktion gewissermaßen physisch repräsentieren. Im Beispiel ist die Intensität des akustischen Signals eine Funktion des Drehwinkels beim Lautstärkeregler.
- Die *curriculare Bedeutung*, unser drittes Kriterium, bezieht sich auf die Wirksamkeit einer Idee für die Gestaltung von Lehrplänen insbesondere in Form einer Vernetzung von Inhalten. Auch diese Bedeutung ist durch zwei Merkmale

charakterisiert: Die horizontale Wirkung beschreibt eine Vernetzung zwischen verschiedenen Gebieten der Schulmathematik. Damit ist sie der systemischen Bedeutung in Mathematik vergleichbar. Im Beispiel lassen sich Zusammenhänge geometrischer Größen auch aus einer funktionalen Perspektive beschreiben, beispielsweise in Form solcher Darstellungsformen, die üblicherweise zur Repräsentation analytischer Funktionen verwendet werden (Pinkernell 2010a). Zum anderen meint die vertikale Wirkung (auch „Vertikalkriterium" bei Schweiger 1992 oder „Durchgängigkeit" bei Hischer 2012) eine Vernetzung durch die Jahrgangsstufen hindurch. Beide Merkmale zeigen sich in den aktuellen Lehrplänen in Form von „Leitideen" verankert, die konzeptionell auf die Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss der KMK (2004) zurückgehen.

Das letztgenannte Kriterium verdeutlicht die Rolle einer Fundamentalen Idee, die sie als orientierender Leitgedanke für curriculare Entscheidungen spielen. Ob mathematisch zentrale Konzepte nun eine Fundamentale Idee konstituieren, entscheidet sich eben auch daran, ob sie für die Gestaltung von Lehrplänen gewinnbringend genutzt werden kann. Dabei geht dieses dritte Kriterium anders als die anderen beiden nicht von existierenden Phänomenen in Mathematik, Geschichte, Denken und Lebenswelt aus, sondern prüft die Fundamentale Idee hinsichtlich ihres Potentials für das Lernen von Mathematik. Demnach ist Hischers (2002a) Unterscheidung zwischen deskriptiven und normativen Kriterien nur konsequent.

Mit der normativen Bedeutung Fundamentaler Ideen ist auch immer die Erwartung verbunden, dass eine Vernetzung von Inhalten auf curricularer Ebene auch eine kognitive Vernetzung des Wissens bei den Lernenden bewirkt. Mittlerweile wird dies eher kritisch bewertet und stattdessen das Potential Fundamentaler Ideen für die Lehrerausbildung betont (z. B. Schweiger 2006, Vohns 2010). Der Gedanke liegt ja nicht fern: Weil sich bestimmte Inhaltsfelder als Leitideen in Schulcurricula etabliert haben (Curriculare Wirksamkeit) und sich diese Inhalte auch im menschlichen Denken und in der Lebenswelt als bedeutsam erwiesen haben (Archetypische Bedeutsamkeit), beschreiben diese Fundamentalen Ideen offensichtlich auch Vorerfahrungen der Studierenden aus Alltag und Schule, die es für die Entwicklung fachmathematischer Kompetenzen der angehenden Lehrerinnern und Lehrer (Transversale Bedeutsamkeit) aufzugreifen gilt. Fundamentale Ideen können so Veranstaltungskonzepte in der fachmathematischen Ausbildung im Lehramt begründen, in denen schulmathematische Phänomene auf ihren fachmathematischen Kern reduziert werden und dieser in formalisierter Form zum Gegenstand weiterer Analysen gemacht wird. Im Folgenden soll dies am Beispiel der Proportionalität (als einem Sonderfall Funktionaler Zusammenhänge) erläutert werden.

3 Rekonstruktion des mathematischen Kerns schulmathematischer Phänomene der Proportionalität

Andelfinger (1982) macht in seiner Schrift „Thema: Proportion“ aus der Reihe „Didaktischer Informationsdienst Mathematik“ keinen expliziten Bezug zum Konzept der Fundamentalen Ideen, allerdings ist der Vernetzungsgedanke Grundlage seiner systematischen Analyse schulischer Inhalte und mathematischer Bereiche auf Proportionalität. Die dort konstatierte Omnipräsenz der Proportionalität im Mathematikunterricht und in der Fachmathematik ist allein schon Grund genug, hierbei von einer Fundamentalen Idee zu sprechen, wobei ein Nachweis der Historizität und Archetypizität streng genommen fehlt. Andelfinger äußert sich auch zur Erwartung, die Vernetzung entsprechender schulmathematischer Inhalte auch im Unterricht zu thematisieren, er zeigt sich allerdings mit Bezug auf empirische Befunde seiner Zeit skeptisch. Insbesondere plädiert er dafür, die „Schlussrechnung“ mit Blick auf ihre Bedeutung für Alltag und Beruf von einer funktionalen und proportionalen Betrachtung deutlich zu trennen und sich zunächst auf die in der Dreisatztabelle operationalisierte Isomorphie zweier Skalen zu beschränken. Eine Vernetzung der Schlussrechnung mit anderen Phänomenen der Proportionalität könne man, so Andelfinger, allenfalls später „versuchen“.

Wenn also eine kognitive Vernetzung unterschiedlicher Phänomene auf Basis struktureller Analogien nicht bei allen Lernenden zu erwarten ist – Andelfinger hat hier insbesondere Schülerinnen und Schüler der nichtgymnasialen Schulformen im Blick –, sollte man diese Vernetzung doch zumindest bei der Lehrkraft erwarten wollen. Und zwar als eine stoffdidaktisch motivierte fachmathematische Grundlage für das Bewerten von Lösungsideen, die Schüler mit Erfahrungen aus ihrer Lebenswelt oder ihrem Mathematikunterricht assoziieren.

3.1 Phänomene der Proportionalität: Kontexte und Lösungshandlungen

Proportionalität begegnet uns in verschiedenen Kontexten der Schulmathematik, zuvorderst natürlich im Zusammenhang mit der Schlussrechnung (wobei die Proportionalität der beiden abhängigen Größen als unmittelbar im Kontext ersichtlich vorausgesetzt wird, vgl. auch Kirsch 1969), zum Beispiel als Zahlen- oder Größenverhältnis (wobei dieses Verhältnis die Gleichwertigkeit zweier situativ zu unterscheidenden Größenpaare entscheidet, vgl. Führer 2004), beispielsweise auch im Zusammenhang mit Brüchen (als die Gleichwertigkeit aller Brüche einer Äquivalenzklasse, die durch Erweitern bzw. Kürzen entsteht), in der Geometrie als Ähnlichkeitsabbildung (unter der die „Proportionen“ einer Figur Invariante sind) und nicht zuletzt als die Polynomfunktionen der Form $x \rightarrow p \cdot x$ (die mit p die Quotientengleichheit eines proportionalen Zusammenhangs funktional modellieren).

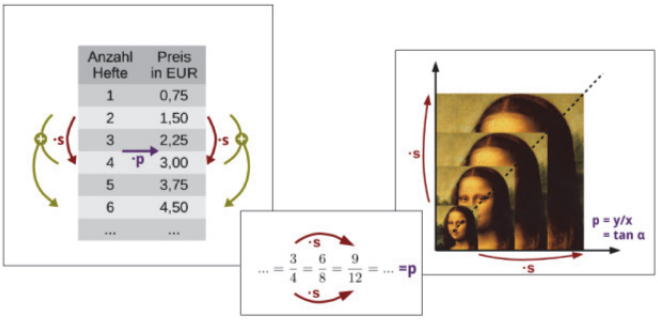

Abbildung 2: Rechenverfahren in proportionalen Kontexten

Bei der Suche nach der gemeinsamen Struktur in den Phänomenen folgen wir der weithin akzeptierten Auffassung Schweigers, der eine Fundamentale Idee als ein „Bündel von Handlungen, Strategien und Techniken“ beschreibt (Schweiger 1992). Wir konzentrieren uns also auf die in den Kontexten beobachtbaren Lösungsverfahren, die bei genauerem Hinsehen in der Tat einige Analogien aufweisen können. Abb. 2 zeigt einige schulübliche Kontexte: Man erhält einen neuen Eintrag in einer Preistabelle, indem man die zwei Werte eines gegebenen Größenpaares mit demselben Faktor s multipliziert. Beim Erweitern eines Bruches werden ebenfalls zwei zueinander gehörige Werte, nämlich Zähler und Nenner des gegebenen Bruches, mit demselben Faktor s multipliziert, wobei der Quotient aus Zähler und Nenner – so soll es ja sein – gleich bleibt. Der Quotient *p* aus Preis und Anzahl im Kontext der Preistabelle wiederum ist – ohne Rabattierung o. Ä. – immer gleich und kann genutzt werden, um schnell eine Vielzahl von Tabelleneinträgen zu bestimmen. Im Kontext der Bildvergrößerung ist die Beibehaltung des Seitenverhältnisses p eines rechteckförmigen Portraits Garant dafür, dass es nicht verzerrt wird. Das wird erreicht, indem die beiden Seitenlängen mit demselben Faktor s multipliziert werden. Das Summieren der Einzelpreise zweier Anzahlen zur Bestimmung des Preises der beiden Anzahlen zusammen ist ein Verfahren, das im Kontext der Preistabelle berechtigt erscheint, in den anderen beiden Kontexte aber eher selten zu beobachten sein dürfte. Aber es funktioniert auch dort.

Mit dem Vervielfachen, Quotientenbilden und Summieren sind hier drei Verfahren beschrieben, die in verschiedenen Kontexten erscheinen bzw. dort anwendbar sind. Die offensichtliche strukturelle Analogie zwischen den situativen Ausprägungen der Verfahren wird in dekontextualisierter, also formaler Form noch deutlicher. Das soll im Folgenden in Form von Funktionalgleichungen geschehen.

3.2 Rekonstruktion des strukturellen Kerns durch Formalisieren der Lösungsverfahren

Eine erste vom Kontext abstrahierende Definition erfolgt während der Erstbegegnung mit proportionalen Zusammenhängen im Unterricht. Sie greift das soeben beschriebene Vervielfachungsverfahren auf, das jahrgangsangemessen wie folgt in einem Schulbuch formuliert wird.

Bei einer **proportionalen Zuordnung** gilt:
Dem **Doppelten** der einen Größe entspricht das **Doppelte** der anderen Größe.
Dem **Dreifachen** der einen Größe entspricht das **Dreifache** der anderen Größe.
…
Der **Hälfte** der einen Größe entspricht die **Hälfte** der anderen Größe.
Dem **dritten Teil** der einen Größe entspricht der **dritte Teil** der anderen Größe.

Abbildung 3: Die Vervielfachungseigenschaft definiert einen proportionalen Zusammenhang in adressatengerechter Formulierung (Schnittpunkt 2 Baden-Württemberg, 2006)

Man kann sich entsprechende Formulierungen für die beiden anderen Verfahren überlegen, allerdings ist eine algebraische Formalisierung mit Blick auf die nachher zur Verfügung stehende Syntax für die weitere Analyse vorteilhafter. Hierzu wird die operative Charakterisierung der drei Verfahren als ein Vervielfachen, Quotientenbilden bzw. Summieren in Funktionalgleichungen umgesetzt, wobei die Funktion f den jeweils zugrundeliegenden Zusammenhang zwischen den in den Kontexten betrachteten Größenbereichen G_1 und G_2 bezeichnet (vgl. Fricke 1987). Dabei sei schon an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die Formulierung der Vervielfachungseigenschaft im Schulbuchauszug offensichtlich nur proportionale Zusammenhänge zwischen kommensurablen Größenbereichen beschreibt. Längen und andere Größenbereiche in der euklidischen Geometrie wären damit nicht hinreichend berücksichtigt – eine zentrische Streckung um den Faktor $s=\sqrt{2}$ wäre in dieser eingeschränkten Formulierung nicht als proportionale Veränderung identifizierbar. Wir kommen hierauf zurück.

- Vervielfachungseigenschaft: $\forall x \in G_1 : f(s \cdot x) = s \cdot f(x),\ s \in \mathbb{Q}$ (V)
  oder: „Man erhält den Preis für die s-fache Menge als s-fachen Preis der 1-fachen Menge."
- Quotienteneigenschaft: $\forall x_1, x_2 \in G_1 : \dfrac{f(x_1)}{x_1} = \dfrac{f(x_2)}{x_2}$ (Q)
  oder: „Das Verhältnis von Preis und Menge ist für alle Mengen gleich."
- Summeneigenschaft: $\forall x_1, x_2 \in G_1 : f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ (S)
  oder: „Man erhält den Preis für zwei Mengen zusammen als Summe der beiden Mengenpreise."

Die Funktionalgleichungen sind bis hierher Formalisierungen der in den Kontexten begründeten Lösungsverfahren. Gleichzeitig wird jede auch als Definition einer Funktionenklasse verwendet. Die Gleichung (V) erscheint wie oben erwähnt (Abb. 3) im Mathematikunterricht schon früh in altersangemessener Wortform und dient dort als erste Argumentationsbasis für die Identifikation proportionaler Zusammenhänge. Die Entdeckung der in (Q) beschriebenen Quotientenkonstanz ist etwas später Grundlage für die Formulierung der funktionalen Darstellung $x \to p \cdot x$. In dieser Form dient sie der funktionalen Modellierung proportionaler Zusammenhänge. Die Funktionalgleichung (S) wird in der Schule eher selten explizit mit proportionalen Zusammenhängen in Verbindung gebracht. In der Mathematik ist sie dagegen insofern von umfassender systemischer und historischer Bedeutung, als sie Homomorphismen zwischen algebraischen Gebilden beschreibt.

Alle drei Eigenschaften definieren proportionale Zusammenhänge. Aber sind die jeweils definierten Proportionalitäten auch dieselben? Oder anders gesagt: Sind die drei Funktionalgleichungen äquivalent? Mittels eines Ringschlusses lässt sich dieswie folgt schnell nachweisen, wenn G_1 wieder als Größenbereich über $\mathbb{Q}$ vorausgesetzt wird:

(V) ⇒ (Q): Für alle $x_1, x_2 \in G_1$ existiert ein $s \in \mathbb{Q}$ mit $x_1 = s \cdot x_2$. Mit (V) folgt hieraus $f(x_1) = f(s \cdot x_2) = s \cdot f(x_2)$. Durch Quotientenbildung und Auskürzen von s ergibt sich schließlich wie gefordert

$$\frac{f(x_1)}{x_1} = \frac{f(x_2)}{x_2}.$$

(Q) ⇒ (S): Für alle $x_1, x_2 \in G_1$ existiert laut (Q) ein $p \in \mathbb{Q}$ mit

$$\frac{f(x_1)}{x_1} = \frac{f(x_2)}{x_2} = p.$$

Hieraus ergibt sich durch Addition der beiden Teilgleichungen $f(x_1) + f(x_2) = p \cdot (x_1 + x_2)$. Weil wegen der Abgeschlossenheit von $(G_{1,} +)$ auch $x_1 + x_2 \in G_1$ ist, ist auch

$$\frac{f(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2} = p,$$

und hiermit folgt schließlich $f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2)$, wie gefordert.

(S) ⇒ (V): Für den Fall, dass $s \in \mathbb{Z}$ ist, folgt (V) unmittelbar aus (S). Falls $s \in \mathbb{Q}$, so existieren $p, q \in \mathbb{Z}$ mit

$$s = \frac{p}{q},$$

so dass für alle $x \in G_1 q \cdot s \cdot x = p \cdot x$ gilt. Hieraus folgt $f(q \cdot s \cdot x) = f(p \cdot x)$, worauf wegen $p, q \in \mathbb{Z}$ sich (V) schon anwenden lässt: Es gilt dann

$q \cdot f(s \cdot x) = p \cdot f(x)$ und somit $f(s \cdot x) = s \cdot f(x)$ auch für rationale s, wie gefordert.

Der obige Hinweis auf die Einschränkung auf $\mathbb{Q}$ bzw. auf kommensurable Größenbereiche veranlasst an dieser Stelle, genauer hinzuschauen. Inwiefern muss sie sein? Und ist sie auch unproblematisch für eine Analyse der Lösungsverfahren aus 3.1 aus strukturmathematischer Sicht?

Man betrachte den Beweis von (S) ⇒ (V) genauer. Er funktioniert nur mit der Einschränkung auf $\mathbb{Q}$, denn die Gültigkeit von (V) für rationale s wird auf die offensichtliche Gültigkeit für $s \in \mathbb{Z}$ zurückgeführt. Für reelle s ist dieser Beweis nicht geeignet. In der Tat hätte (S), wenn über reelle Funktionen formuliert, mehr Lösungen als von der Form $f(x) = p \cdot x$ (vgl. Danckwerts 1988, der auf die bekannten Resultate von Cauchy 1821 und Hamel 1905 verweist). Nur unter der zusätzlichen Bedingung, dass die reelle Funktion f stetig oder monoton ist, wäre die Lösungsmenge auf die Funktionen der Form $f(x) = p \cdot x$ beschränkt (Ilse 1971). Betrachtet man aber Funktionen $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, dann folgt die Monotonie von f aus der Monotonie der Ordnungsrelation >, und somit wären alle Lösungen von (S) wieder von der bekannten Form $f(x) = p \cdot x$. Damit hätte man die inkommensurablen Größenbereichen wie Längen und Flächen der euklidischen Geometrie wieder „im Boot". Die Randbedingung, f müsse hierzu monoton sein, kann man sich hier zwar sparen, aber die einfach nachzuvollziehende Argumentation für rationale s im Teilschluss (Q) => (S) muss durch ein Intervallschachtelungsargument ersetzt werden (vgl. Danckwerts 1988).

Die drei Funktionalgleichungen sind äquivalent und definieren (über $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}^+$ und mit Zusatzbedingungen auch über $\mathbb{R}$) dieselbe Funktionenklasse. Lösungsverfahren, die sich durch eine dieser Funktionalgleichungen formal erfassen lassen, erweisen sich so als nicht nur gleichermaßen berechtigt, sondern liefern jeweils eine hinreichende Argumentationsgrundlage für das Identifizieren und Charakterisieren proportionaler Zusammenhänge im Ganzen, d. h. auch in solchen Kontexten, in denen diese Verfahren nicht „nativ" erscheinen. Das soll im Folgenden demonstriert werden.

3.2.1 Vervielfachungseigenschaft

Im Kontext der Schlussrechnung legt die Vervielfachungseigenschaft das übliche Lösungsverfahren in der Dreisatztabelle fest. In Form der „Schulbuchdefinition" (Abb. 3) erscheint sie gewissermaßen extrapoliert für funktionale Zusammenhänge zwischen den Größenbereichen, die im Rahmen einer Dreisatzaufgabe betrachtet werden. Danach wird die Vervielfachungseigenschaft bald durch die Quotienteneigenschaft in Form der funktionalen Darstellung $x \to p \cdot x$ abgelöst.

Ähnlichkeitsabbildungen und zentrische Streckungen im Speziellen werden häufig als Beispiele für Proportionalitäten in geometrischen Kontexten erwähnt. Das dritte

Beispiel aus Abb. 2 – die „Mona Lisa“ – umfasst aber mehrere zentrische Streckungen mit unterschiedlichen Streckfaktoren s. Die Invariante ist hier also nicht der eine Streckfaktor einer gegebenen zentrischen Streckung, sondern das immer gleiche Seitenverhältnis der unverzerrten Vergrößerungen des Originalbildes. Das Vervielfachen beider Seitenlängen des rechteckigen Bildes gewährleistet aufgrund der Äquivalenz von (V) und (Q) die „personale Identität“ der abgebildeten Frau.

3.2.2 Quotienteneigenschaft

Die Quotienteneigenschaft erscheint im Kontext der Schlussrechnung ebenfalls gut begründet: Der aus einem Größenpaar gebildete, immer gleiche Quotient p gibt insbesondere den Einzelpreis an. Hieraus lassen sich zum Zwecke einer tabellarischen Übersicht schnell die Preise für verschiedenen Mengen durch Multiplikation mit p schnell berechnen.

Im Kontext der „Mona Lisa“ waren die zentrischen Streckungen schon angesprochen. Dort waren es in einem Kontext mehrere zentrische Streckungen jeweils mit einem Streckfaktor s. Betrachtet man eine einzelne zentrische Streckung f der euklidischen Ebene Γ mit dem Zentrum Z und dem Streckfaktor p, so lässt sich diese anhand ihrer Definition

$$f:\Gamma \to \Gamma \text{ mit } f(A) \to A' \text{ so, dass } \frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}} = p$$

unter Verweis auf (Q) schnell als Proportionalität zwischen den Längen der Bild- und Urbildstrecken in Γ identifizieren. Unter f sind Streckenverhältnisse per definitionem invariant, ebenso Winkelgrößen, die über Streckenverhältnisse definiert werden. Das ist eine quantitative Beschreibung dessen, was gemeinhin unter einer proportionserhaltenden Änderung verstanden wird.

In der funktionalen Darstellung proportionaler Funktionen f ist der gleiche Quotient p aller Wertepaare $(x; f(x))$ Teil der Definition in Form der Zuordnungsvorschrift $x \to p \cdot x$. In ihrer geometrischen Darstellung als Punktmenge im kartesischen Koordinatensystem erscheint p zunächst als Kathetenverhältnis des aus dem Achsenabschnitt x und der darauf abgetragenen Höhe $f(x)$ gebildeten rechtwinkligen Dreiecks. Insbesondere ist der Abweichungswinkel der Hypotenusen von der x-Achse im Ursprung α wegen

$$\tan(\alpha) = \frac{f(x)}{x}$$

immer gleich. Alle Hypotenusen liegen also auf derselben Geraden durch den Ursprung und damit auch die Punkte $(x; f(x))$ als Endpunkte dieser Hypotenusen. Bei $\{(x; f(x))\}$ handelt es sich also um eine Ursprungsgerade mit der Steigung

$$p = \frac{f(x)}{x} = \tan(\alpha).$$

Die Quotienteneigenschaft ist also Grundlage für den Nachweis der typischen Form der geometrischen Repräsentation einer proportionalen Funktion f .

3.2.3 Summeneigenschaft

Im Kontext der Schlussrechnung ist die Gültigkeit der Summeneigenschaft (S) intuitiv klar: Der Preis zweier Mengen zusammen ist gleich der Summe der Mengenpreise. Im Kontext von Zahlen- bzw. Größenverhältnissen dagegen erscheint die „Anwendung" von (S) häufig als klassischer Schülerfehler der Bruchaddition:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$$

Das Verhältnis aus Zähler- und Nennersumme ist als *Chuquet-Mittel* durchaus sinnvoll interpretierbar (Hischer 2002b). Es gilt nämlich

$$\frac{a}{b}<\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d},$$

und bei erfüllter Voraussetzung der Summeneigenschaft (S)

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{c}{d}.$$

Die Erfahrung bestätigt: Wenn ich zwei Mengen „gespritzten" Apfelsafts zusammengebe, in denen der Anteil an Wasser gleich ist, dann ändert sich am Geschmack nichts, auch wenn die Mengen unterschiedlich waren.

In Danckwerts (1988) findet sich eine funktionale Interpretation der Aussage des ersten Strahlensatzes. Dabei beschreibt eine Funktion f den Zusammenhang zwischen den Strahlenabschnitten x und den zugehörigen Parallelenabschnitten $f(x)$ (Abb. 4 links). Der erste Strahlensatz besagt nun, dass für jede zwei Strahlenabschnitte x_1, x_2

$$\frac{f(x_1)}{x_1}=\frac{f(x_2)}{x_2}$$

ist. Offensichtlich ist f mit Verweis auf (Q) proportional. Die Äquivalenz von (Q) und (S) legt es umgekehrt nahe, aus dem Nachweis der Additivität von f die Gültigkeit des ersten Strahlensatzes zu folgern (Abb. 4 rechts): Für alle x_1, x_2 ist $f(x_1)+f(x_2)=f(x_1+x_2)$. Die Funktion f ist also proportional, damit gilt (Q) (Danckwerts 1988).

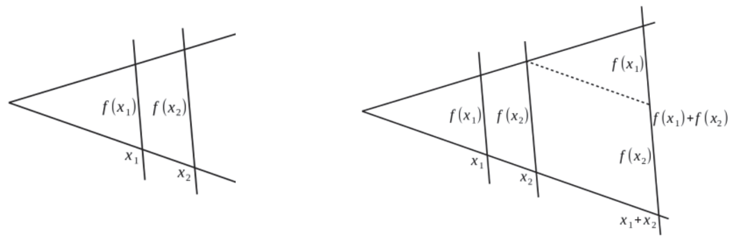

Abbildung 4: Der Zusammenhang zwischen Strahlen- und Parallelenabschnitten in der Figur des Strahlensatzes als Funktion *f* beschrieben (links). *f* erfüllt die Summeneigenschaft und ist daher proportional, der erste Strahlensatz folgt (rechts).

3.3 Extrapolationen

3.3.1 Funktional- und Differentialgleichungen

Die Funktionalgleichungen (V), (Q) und (S) beschreiben Lösungsverfahren, die in proportionalen Kontexten sinnvoll begründet erscheinen. Ein weiteres Verfahren ist ebenfalls in diesen Kontexten beobachtbar: Wenn ich sehe, dass der sich Preis bei Änderung der Anzahl von 3 auf 5 um 1,50 EUR erhöht, dann muss sich auch der Preis bei Änderung der Anzahl von 5 auf 7 um denselben Betrag erhöhen. Als Funktionalgleichung lässt sich diese Überlegung wie folgt beschreiben (Fricke 1987):

- Abstandseigenschaft:

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in G_1 : x_3 - x_2 = x_2 - x_1 \Rightarrow f(x_3) - f(x_2) = f(x_2) - f(x_1) \qquad \text{(A)}$$

Im Kontext beschreibt (A) ein sinnvolles Verfahren, allerdings ist sie als Definition für proportionale Zusammenhänge ungeeignet. Ihre Lösungsmenge umfasst genau die Funktionen der Form $x \to p \cdot x + c$, darunter zwar auch die proportionalen Funktionen, aber eben nicht nur. Strehl nennt zwei weitere zu (A) äquivalente Eigenschaften linearer Funktionen:

- Mittelwertseigenschaft:

$$\forall x_1, x_2 \in G_1 : \frac{f(x_1 + x_2)}{2} = \frac{f(x_2) + f(x_1)}{2} \qquad \text{(M)}$$

- Differenzenquotienteneigenschaft:

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in G_1 : \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \qquad \text{(D)}$$

Auch (D) ist zwar eine Eigenschaft proportionaler Zusammenhänge, definiert diese aber nicht. In der Schule werden die Differenzenquotienten in Form von Steigungsdreiecken visualisiert. Sie begründen zwar die Geradenform als geometrische

Repräsentation einer linearen Funktion f, aber eben nicht ihren Verlauf durch den Ursprung. Hierzu braucht es (Q) als Voraussetzung, die sich bei genauem Hinsehen als eine einschränkende Modifikation von (D) erweist.

Die Abstandseigenschaft (A) dient bei der Untersuchung von Wachstumsprozessen im Unterricht als Kriterium für eine lineare Modellierung. In diesem thematischen Zusammenhang gilt ein ähnliches Kriterium als Voraussetzung für eine exponentielle Modellierung:

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in G_1 : x_3 - x_2 = x_2 - x_1 \Rightarrow \frac{f(x_3)}{f(x_2)} = \frac{f(x_2)}{f(x_1)}$$

Funktionalgleichungen erweisen sich geeignet als kontextfreie Beschreibungen von kontextgebundenen Lösungsverfahren, die in dieser Form strukturelle Analogien zwischen den Verfahren offenlegen. Umgekehrt ist es auch möglich, Funktionalgleichungen selbst zum Gegenstand von Untersuchungen zu machen und diese als Ausgangspunkt für die Rekonstruktion geeigneter Kontexte zu machen. Zum Beispiel, indem man den additiv formulierten Homomorphismus (S) variiert: Man untersuche neben $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ auch Funktionalgleichungen der Form

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2),\ f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2) \text{ und}$$
$$f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2),$$

die zu den linearen Funktionen, den Potenz-, Exponential- und Logarithmusfunktionen führen. Hier sind auch mathematikgeschichtliche Bezüge zu der in 3.2 erwähnten Untersuchung von Cauchy möglich (vgl. Danckwerts 1988). Oder man untersuche in Form einfachster Differentialgleichungen auch Zusammenhänge zwischen f und f', welche in Wachstumskontexten als augenblickliche Bestände und deren momentane Änderungsraten interpretierbar wären (vgl. Körner 2005, Pinkernell 2010b).

3.3.2 Funktionen als Relationen

Die Funktionalgleichung (V) bildet das Vervielfachen beider Größen im operativen Sinne nicht unmittelbar ab. Deutlicher wird das in beiden Größenbereichen G_1 und G_2 analoge Vervielfachen, wenn man f als Relation, d. h. als Menge von Paaren zweier zugeordneter Größen betrachtet und dann eine proportionale Funktion wie folgt festlegt:

Eine Funktion $f = \{(x, y) \mid (x, y) \in G_1 \times G_2\}$ heißt proportional,
wenn mit $(x_1, y_1) \in f, x_1 \neq 0$ und einem $s \in \mathbb{Q}$ auch $(s \cdot x_1, s \cdot y_1) \in f$ gilt. (2)

Funktionen werden in der Mathematik als Sonderfall zweistelliger Relationen definiert. In der Schulmathematik ist dieser Sachverhalt in Wertetabellen erkennbar, wenn auch nicht explizit benannt. Der strukturmathematische Zugang zum Funktionsbegriff erweist sich in (2) als nützlich, weil er das zugrundeliegende Lösungsverfahren unmittelbar sichtbar macht. Gleiches gilt für die Summeneigenschaft, die ebenso wie die Vervielfachungseigenschaft eine in beiden Größenbereichen gleichermaßen anzuwendende Operation beschreibt. Dagegen gewinnt die Quotienteneigenschaft durch eine relationale Darstellung der Funktion kaum. Diese ist auch grundsätzlich anderer Natur als die anderen beiden Eigenschaften: In der Definition (2) zeigt sich die Vorstellung eines proportionalen Zusammenhangs zwischen zwei Größenbereichen G_1 und G_2 als eine durch eine dritte Größe s gleichmäßig gesteuerte Kovariation der Größen $x \in G_1$ und $y \in G_2$ (vgl. Appell 1994), dagegen beschreibt die funktionale Form $x \to p \cdot x$ eine direkte Abhängigkeit zwischen x und y. Dieser Unterschied begegnet uns auch als Kovarianzaspekt bzw. Zuordnungsaspekt z. B. bei Malle (1993), ebenso ist Baireuthers (2003) Vorschlag zu werten, einen proportionalen Zusammenhang besser in Form zweier nebeneinander abgebildeter strukturell angeglichener Skalen zu visualisieren anstatt ein kartesisches Koordinatensystem zu verwenden. Die strukturmathematische Definition des Funktionsbegriffs als eine besondere zweistellige Relation zeigt sich auf diese Weise auch in einem schulmathematischen Zugang zur Proportionalität und hat so ebenfalls Platz in einer Veranstaltung, die die Rekonstruktion des mathematischen Kerns strukturell analoger Phänomene der Schulmathematik betreibt.

4 Zusammenfassung

Dass Fachkompetenzen eine wichtige Voraussetzung für einen im Fach fundierten aktivierenden Unterricht ist, wurde wiederholt empirisch bestätigt, z. B. in der COACTIV-Studie (Krauss et al. 2008). Dabei hatte man in dieser Studie nicht primär die rein universitären Inhalte im Blick, deren Bedeutung für das Unterrichten man nur schwer einschätzen konnte, sondern die Fachkompetenz sollte sich in einem „tieferen Verständnis der Fachinhalte des Curriculums der Sekundarstufe" zeigen. Den dort gezogenen Verweis auf die „Mathematik von einem höheren Standpunkte aus" Felix Kleins können wir nur allzu gerne folgen, zumal sich eine ganze Reihe von Brückenveranstaltungen zwischen Fachmathematik und Didaktik in dieser Tradition sehen. Vielleicht aber geht das hier vorgestellte Konzept noch einen Schritt weiter, wenn es dieses „tiefere Verständnis" in einer Rekonstruktion des mathematischen Kerns schulmathematischer Phänomene begründet sieht. Für das Lehramt könnten solche Veranstaltungen vielleicht sogar als besondere Fachveranstaltungen begriffen werden, denn die Stoßrichtung ist eine dezidiert fachmathematische – getragen von der Überzeugung, dass auch in der Schule Mathematik unterrichtet wird.

Denn wo Mathe draufsteht, ist auch Mathe drin.

Literatur

Andelfinger, B. (1982). Proportion (Didaktischer Informationsdienst Mathematik, Band 22). Soest: Landesinstitut für Curriculumentwicklung, Lehrerfortbildung und Weiterbildung.

Appell, K. (1994). Überlegungen zum Begriff der Proportionalität. Der Mathematikunterricht 40(5), 26–42.

Baireuther, P. (2003). Gleiche Skalen. Eine Hilfe zur Vorstellung proportionaler Zusammenhänge. mathematik lehren 118, 9–12.

Bauer, T. (2013). Analysis – Arbeitsbuch. Bezüge zwischen Schul- und Hochschulmathematik – sichtbar gemacht in Aufgaben mit kommentierten Lösungen. Wiesbaden: Springer.

Beutelspacher, A., Danckwerts, R., Nickel, G., Spies, S., & Wickel, G. (2011). Mathematik Neu Denken: Impulse für die Gymnasiallehrerbildung an Universitäten. Wiesbaden: Vieweg + Teubner Verlag.

Danckwerts, R. (1988). Linearität als organisierendes Element zentraler Inhalte der Schulmathematik. Didaktik der Mathematik 2, 136–148.

Freudenthal, H. (1983). Didactical phenomenology of mathematical structures. Dordrecht; Boston; Hingham, MA, U.S.A.: Reidel Pub. Co.

Fricke, A. (1987). Sachrechnen. Das Lösen angewandter Aufgaben. Stuttgart: Klett.

Führer, L. (2004). Verhältnisse. Plädoyer für eine Renaissance des Proportionsdenkens. mathematik lehren 123, 46–51.

Hischer, H. (2002a). Zur Geschichte des Funktionsbegriffs (Preprint Nr. 54). Saarbrücken: Universität des Saarlandes.

Hischer, H. (2002b). Viertausend Jahre Mittelwertbildung. Eine fundamentale Idee der Mathematik und didaktische Implikationen. mathematica didactica 25, 3–51.

Hischer, H. (2012). Grundlegende Begriffe der Mathematik: Entstehung und Entwicklung. Struktur – Funktion – Zahl. Heidelberg: Springer Spektrum.

Ilse, D. (1971). Über funktionale Charakterisierungen der direkten Proportionalität. Mathematik in der Schule 9, 16–37.

Kirsch, A. (1969). Eine Analyse der sogenannten Schlußrechnung, Beiträge zum Mathematikunterricht, 75–84.

KMK (2004): Bildungssstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. Beschluss vom 04.12.2003. München: Wolters Kluwer.

Körner, H. (2005). Mit Wachstum durch die Analysis. Der Mathematikunterricht 51(4), 4–18.

Krauss, S., Neubrand, M., Blum, W., Baumert, J., Brunner, M., Kunter, M., & Jordan, A. (2008). Die Untersuchung des professionellen Wissens deutscher Mathematik-Lehrerinnen und -Lehrer im Rahmen der COACTIV-Studie. Journal für Mathematik-Didaktik 29(3/4), 223–258.

Malle, G. (1993). Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Wiesbaden: Vieweg.

Matthews, R. (2001). Der Storch bringt die Babys zur Welt (p = 0.008). Stochastik in der Schule 21(2), 21–23.

Pinkernell, G. (2010a). Eine ungewöhnliche Aufgabe, und wie man sie mit Rechnereinsatz verbessern kann. Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 63(5), 263–266.

Pinkernell, G. (2010b). Qualitatives Modellieren mit der Funktionenbox und anderen schwarzen Kästen. Computeralgebra Rundbrief 46, 13–17.

Schnittpunkt 2 (2006). Mathematik Realschule. Baden-Württemberg, hrsg. v. Matthias Dorn. Stuttgart: Klett.
Schweiger, F. (1992). Fundamentale Ideen – eine geisteswissenschaftliche Studie zur Mathematikdidaktik. Journal für Mathematik-Didaktik 13(2/3), 199–214.
Schweiger, F. (2006). Fundamental ideas – a bridge between mathematics and mathematics education. In J. Maaß & W. Schlöglmann (Hrsg.), New mathematics education research and practice (S. 63–74). Rotterdam: Sense Publishers.
Schwill, A. (1993): Fundamentale Ideen der Informatik. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 25(1), 20–31.
Vollrath, H.-J. (1987). Didaktische Phänomenologie als Grundlagen der Erforschung der Konstitution mentaler Objekte. Journal für Mathematik-Didaktik 8(4), 147–356.
Vohns, A. (2010). Fünf Thesen zur Bedeutung von Kohärenz- und Differenzerfahrungen im Umfeld einer Orientierung an mathematischen Ideen. Journal für Mathematik-Didaktik 31(2), 227–255.
Von der Bank, M.-C. (2013). Fundamentale Ideen, insbesondere Optimierung (Preprint Nr. 334). Saarbrücken: Universität des Saarlandes.

Der Autor ist dem Gutachter für seine wertvollen Hinweise zu Dank verpflichtet.

Anschrift des Verfassers

Prof. Dr. Guido Pinkernell
Pädagogische Hochschule Heidelberg
Institut für Mathematik und Informatik
69120 Heidelberg
pinkernell@ph-heidelberg.de

Eingang Manuskript: 07.04.2014
Eingang überarbeitetes Manuskript: 18.01.2015
Online verfügbar: 04.03.2016