

Strukturgenetische didaktische Analysen – empirische Forschung „erster Art“

von

Erich Ch. Wittmann, Dortmund¹

Kurzfassung: Die strukturgenetische didaktische Analyse, eine Weiterentwicklung der „Stoffdidaktik“, beruht darauf, dass wesentliche Informationen über das Lehren und Lernen von Mathematik aus fachlichen Strukturen und Prozessen geschöpft werden können. Im vorliegenden Beitrag wird diese Methode charakterisiert, und es wird gezeigt, was sie in der mathematikdidaktischen Entwicklungsforschung und in der Lehrerbildung zu leisten vermag.

Abstract: Structure-genetic didactical analyses are a continuation of the traditional “subject matter didactics” that has been the dominating method of mathematics education in the past. However, unlike their predecessor, structure-genetic didactical analyses are not only directed to the logical structures of mathematics, but also to processes inherent in doing mathematics and to the development of genetic curricula. In this paper this research method is illustrated by typical examples (introduction of multiplication, practice of long addition, nets of cubes) and characterized as an empirical method, and it is indicated what this method is able to achieve in developmental research and in teacher education.

0 Vorbemerkung

Der Vergleich der Beiträge in Zeitschriften und Tagungsbänden in den 1970er und 1980er Jahren mit den Beiträgen im neuen Jahrtausend zeigt, dass sich das Koordinatensystem der Mathematikdidaktik im Laufe der vergangenen Jahrzehnte massiv verschoben hat: weg vom Fach Mathematik, weg von der Unterrichtspraxis, und weg von einer kritischen Auseinandersetzung mit bildungstheoretischen Grundlagen, hin zu qualitativen und quantitativen empirischen Untersuchungen von Lernprozessen, hin zur Entwicklung und Analyse von Tests, hin zu Theorieentwürfen mit Importen aus unterschiedlichsten Disziplinen. Dabei wurde bewusst oder unbewusst der Bruch mit der Tradition der Mathematikdidaktik vollzogen. Nach Auffassung des Autors gibt es für diesen radikalen Paradigmenwechsel keinerlei sachlichen Grund: Anknüpfend an die traditionelle „Stoffdidaktik“ hat sich in den letzten Jahrzehnten gerade im deutschsprachigen Raum eine „Mathematikdidaktik *von Fach aus*“ weiterentwickelt, von der die Unterrichtsentwicklung und die Lehrerbil-

¹ Der Autor ist Lutz Führer für kritisch-konstruktive Hinweise zur Verbesserung des Manuskripts zu Dank verpflichtet.

dung nach wie vor wesentlich getragen werden und die sich eine eigene wissenschaftliche Basis geschaffen hat. Das international beachtete Projekt „mathe 2000“ ist hierfür ein Beispiel (Wittmann 2012).

Diese „Mathematikdidaktik vom Fach aus“ ist keineswegs eine „Didaktik am grünen Tisch“, wie der früheren Stoffdidaktik gerne nachgesagt wurde, sondern ist auf eigene Weise empirisch untermauert. Sie ist auch nicht theoriefern, sondern stützt sich auf implizite Theorien des Lehrens und Lernens, die im Fach selbst liegen. Dies soll im vorliegenden Beitrag gezeigt werden, der folgendermaßen aufgebaut ist: In den vier ersten Abschnitten wird an zentralen Themen, hauptsächlich aus den unteren Stufen, die Leistungsfähigkeit der heute vorherrschenden, auf importierten Theorien und Methoden beruhenden Richtung der Mathematikdidaktik mit der Leistungsfähigkeit der mathematisch fundierten Richtung der Mathematikdidaktik verglichen. Im letzten Abschnitt wird die *strukturgenetische didaktische Analyse* beschrieben, die sich als Forschungsmethode der mathematisch fundierten Mathematikdidaktik herausgebildet hat, und es wird gezeigt, was sie zu leisten vermag.

1 Einführung der Multiplikation im 2. Schuljahr

In der angelsächsischen Didaktik ist das Erlernen des Einmaleins Malreihe für Malreihe, wie es auch in Deutschland früher praktiziert wurde, immer noch tief verankert. Die Multiplikation wird dort weithin sogar noch als „repeated addition“ definiert. In den letzten Jahren hat in England und den USA eine intensive Diskussion darüber stattgefunden, was die Multiplikation wirklich ist, bezeichnenderweise unter Ignorierung der Entwicklung in anderen Ländern. In diesen Kontext gehört die empirische Untersuchung von Park und Nunes (2001), in der zwei Hypothesen der Begriffsbildung bei der Multiplikation verglichen wurden: die Begründung der Multiplikation als „repeated addition“ bzw. als „schema of correspondences“. Was mit Letzterem gemeint ist, bleibt in der Arbeit allerdings im Dunkeln. Vermutlich verstehen die Autoren darunter, dass die Multiplikation als lineare Funktion interpretiert werden kann: Bei einem festen Multiplikator a wird einer Zahl n das Produkt $n \cdot a (= a \cdot n)$ zugeordnet.

Als Ergebnis der Untersuchung wird festgestellt, dass auf „repeated addition“ nur bei der Berechnung der Ergebnisse, nicht aber bei der Definition der Multiplikation zurückgegriffen werden sollte.

Aus der Sicht der Mathematikdidaktik vom Fach aus stellt sich die Situation zum Thema Multiplikation wie folgt dar: Arnold Fricke definierte in seiner operativen Rechendidaktik die Multiplikation als „verkürzte Addition“, wie dies in der Mathematik üblich ist. Die Berechnung der Ergebnisse durch fortlaufende Addition lehnte er aber ausdrücklich ab. Er empfahl stattdessen, die Ergebnisse der schwie-

rigeren Aufgaben von den leichten Kernaufgaben mit Hilfe der Rechengesetze abzuleiten (Fricke 1970). Das ist heute in der deutschsprachigen Grundschuldidaktik Standard. Heinrich Winter ging noch einen Schritt weiter: Mit seiner grundsätzlichen Forderung nach *algebraischer Durchdringung der Arithmetik* hat er den Vorschlag verbunden, die Multiplikation explizit auf rechteckige Punktfelder zu gründen (Winter 1984). Dieser Vorschlag findet sich auch bei Courant und Robins (1962, 3), einem Klassiker der Mathematik, bei Freudenthal (1983, 109–110) und bei Penrose (1994, 51–53).

Die Präferenz auch von bedeutenden Mathematikern für rechteckige Punktfelder zeigt deutlich, dass Punktfelder nicht einfach ein von Didaktikern für die Zwecke des Unterrichts erfundenes „Anschauungsmittel“ darstellen, sondern mit der mathematischen Epistemologie fundamental verwoben sind: Der große Vorteil dieser Darstellung liegt nämlich darin, dass sich mit ihr *alle* Rechengesetze der Multiplikation operativ begründen lassen, was mit anderen Darstellungen der Multiplikation nicht möglich ist (s. dazu Wittmann & Müller 2007, 54–56). Penrose (1983, 53) stellt zurecht fest, dass sich mit rechteckigen Punktfeldern am besten mitteilen lässt, was die Multiplikation ausmacht.

Wenn der Anspruch erhoben wird, das Einmaleins von Anfang an als mathematische Struktur zu etablieren, sind Punktfelder unverzichtbar. Im Zuge der Zahlbereichserweiterung geht die Darstellung eines Produktes durch ein Punktfeld in die Darstellung durch ein Rechteck über, und diese Darstellung reicht hinauf bis in die Integralrechnung. Sie ist eine fundamentale Idee der Algebra und Analysis.

Folgerung aus dem Vergleich der beiden Ansätze: Was die Multiplikation ist und wie sie im Unterricht behandelt werden soll, kann nicht mit den empirischen Methoden der Psychologie entschieden werden, sondern nur vom wohlverstandenen Fach aus. Damit werden empirische Untersuchungen von Lernprozessen auf dieser fachlicher Grundlage keineswegs überflüssig, wie später noch weiter ausgeführt werden wird.

2 Die Hundertertafel

Die Hundertertafel, in der die Zahlsymbole von 1 bis 100 in zehn Reihen von 1 bis 10, von 11 bis 20 usw. angeordnet sind, ist ein seit Jahrhunderten bewährtes Darstellungsmittel. Daher ist es überraschend, dass sie und Unterrichtswerke, in denen sie verwendet wird, in jüngster Zeit kritisiert wurden (s. z. B. Lorenz 2009). Die dort formulierte Kritik geht von der durch die Kognitionspsychologie und Hirnforschung angeblich empirisch belegten Theorie aus, die Zahlen seien im Gehirn als Längen repräsentiert, der kardinale Zahlaspekt sei daher neben dem ordinalen Aspekt marginal, und Addition und Subtraktion seien als Vor- und Zurückrücken auf der Zahlenreihe zu deuten (Lorenz 2005).

Ob es wirklich möglich ist, dem Gehirn mit Hilfe bildgebender Verfahren der Hirnforschung „beim Rechnen zuzuschauen“, wie Zürcher Forscher kühn behaupten (Kucian & von Aster 2005), sei dahingestellt. Mit der mathematischen Praxis ist die exklusive neuronale Repräsentation der Zahlen als Längen nicht vereinbar. Es ist zwar keine Frage, dass geometrische Vorstellungen eng mit Zahlen verbunden sind und dass die lineare Darstellung der Zahlen (Zahlenreihe, später Zahlenstrahl) dabei eine wichtige Rolle spielt. Aber bereits in Abschnitt 1 wurde deutlich, dass zu einer mathematisch fundierten Darstellung der Multiplikation *zweidimensionale* Punktfelder nötig sind. Auch die Stellentafel kann nicht auf den ordinalen Zahlaspekt reduziert werden. Dieser Aspekt ist zwar wichtig, aber er ist nur ein Aspekt unter anderen.

Dass die Hundertertafel nicht in Konzepte passt, die einseitig auf den ordinalen Zahlaspekt aufbauen, spricht keineswegs gegen dieses altbewährte Darstellungsmittel, sondern ist umgekehrt ein Indiz dafür, dass die Fixierung auf den ordinalen Zahlaspekt zu eng ist.

Aus der Sicht der mathematischen Praxis in der Grundschule ist die Hundertertafel wie folgt zu bewerten: In Verbindung mit dem Hunderterfeld ist die Tafel sehr gut geeignet, um das *Stellenwertprinzip* zu untermauern und die Balken-/Punktdarstellung für Zehner und Einer herzuleiten, die für die algebraische Begründung der Addition und Subtraktion tragend ist. Im Tausenderraum dienen Tausenderbuch und Tausenderfeld analog dazu, um den Hunderter als weitere Zahleneinheit darzustellen und zu Zehnern und Einern in Beziehung zu setzen. Die Kinder müssen verstehen, dass das Rechnen im Zehnersystem nichts anderes ist als ein Rechnen mit kleinen Zahlen bezogen auf immer größere Zahleneinheiten.

Die Hundertertafel und das Tausenderbuch sind darüber hinaus auch optimal geeignet, um die Menge der Zahlen von 1 bis 100 bzw. von 1 bis 1000 übersichtlich darzustellen und um zahlentheoretisch wichtige Beziehungen zwischen Zahlen zu verdeutlichen. In dieser Funktion sind sie unverzichtbar.

Folgerungen aus dem Vergleich: Ob die Hundertertafel in einem didaktischen Konzept sinnvoll ist oder nicht, kann nicht allein aufgrund einer von einer anderen Disziplin importierten Theorie entschieden werden. Die Struktur des Faches und die mathematische Praxis sind dabei wesentlich zu berücksichtigen. Unterschiedliche Konzepte ermöglichen unterschiedliche Lösungen.

3 Design einer Lernumgebung zur produktiven Übung der Addition

Bei den beiden ersten Beispielen ging es um grundlegende Darstellungen für das Lehren und Lernen bestimmter Themen. Das dritte Beispiel führt mitten hinein in den Kernbereich der Didaktik. Der natürliche Weg, um Lernende zum Erwerb ma-

thematischen Wissens und mathematischer Fähigkeiten anzuleiten, besteht darin, ihnen substanzielle Lernumgebungen anzubieten, in denen sie mathematisch aktiv werden können. Das Üben spielt dabei eine Schlüsselrolle.

Heinrich Winter ist das Konzept des „produktiven Übens“ zu verdanken, das die gleichzeitige Förderung inhaltlicher und allgemeiner Lernziele beinhaltet (Winter 1984).

Bei der Neubearbeitung eines Unterrichtswerks stellte sich die Aufgabe, eine substanzielle Lernumgebung zur produktiven Übung der schriftlichen Addition zu konstruieren. Dabei musste die Elementarmathematik nach Mustern durchforstet werden, die bei der schriftlichen Addition auftreten. Dann war zu prüfen, ob die Voraussetzungen der Kinder am Ende des 3. Schuljahrs ausreichen, um die intendierte Aufgabenstellung zu verstehen, die angeregten Operationen auszuführen, die zu beobachtenden Muster zu erkennen, zu beschreiben und mit Hilfe der Lehrperson anhand vertrauter Arbeitsmittel zu begründen. Schließlich war die Lernumgebung auch noch curricular einzuordnen.

Als Ergebnis der Analyse ergab sich eine Lernumgebung, deren Hintergrund die schon bei Adam Ries erwähnte Neunerprobe der Addition bildet und die durch folgende Einstiegsaufgabe erschlossen wird (Deschauer 2012, 44; Wittmann & Müller 2012, 85):

Bilde aus den Ziffern 2, 3, 4, 5, 6, 7 zwei dreistellige Zahlen und addiere sie.
Finde unterschiedliche Ergebnisse.

Die daran anschließenden Aufgaben für die Kinder dienen dazu, auf das Muster hinzulenken, das sich in den (richtigen) Ergebnissen versteckt.

Eine gute Spur, auf die man die Kinder setzen kann, ist, sie Aufgaben finden zu lassen, deren Ergebnisse nahe an den reinen Hundertern 600, 700, 800, ..., 1300 liegen. Es zeigt sich, dass die optimalen Ergebnisse 603, 702, 801, 900, 999, 1008, 1098, 1107, 1197, 1206, 1296, 1305 sind. An diesen Zahlen tritt die Neunerprobe besonders deutlich in Erscheinung: Ihre Quersumme sind 9, 18 und 27. Die Zahlen 600, 700, 800, 1000, 1100, 1200 und 1300 sowie andere Zahlen, deren Quersumme kein Vielfaches von 9 ist, lassen sich nicht erreichen, was gute Kontrollmöglichkeiten bietet.

Natürlich stellte sich beim Design dieser Lernumgebung die Frage, ob sich die Neunerprobe mit den Mitteln des 3. Schuljahrs begründen lässt. Die Analyse zeigte, dass mit der Stellentafel der folgende einfache Beweis geführt werden kann (Wittmann & Müller 2013, 120–121): Die Quersumme einer Zahl hat in der Plättchendarstellung an der Stellentafel eine konkrete Bedeutung. Sie gibt die Anzahl der Plättchen an, die man benötigt, um die Zahl an der Stellentafel zu legen. Wenn man also die zwei zu addierenden Zahlen gemäß der o.g. Aufgabenstellung mit Plättchen an der Stellentafel untereinander legt, benötigt man immer $2 + 3 + 4 + 5$

+ 6 + 7 = 27 Plättchen, unabhängig davon, wie man die sechs Ziffern zu dreistelligen Zahlen zusammengesetzt hat. Bei der Addition an der Stellentafel müssen die Plättchen dann in jeder Spalte zuerst zusammengeschoben werden, und dann muss, bei den Einern beginnend, in jeder Spalte, in der sich mehr als 9 Plättchen befinden, gebündelt werden. Immer wenn 10 Plättchen einer Spalte durch 1 Plättchen in der nächsthöheren Spalte ersetzt werden, werden 9 Plättchen aus dem Spiel genommen. Bei jedem Übertrag ist das so. Daher können am Schluss in der Summe nur 27, 18 oder 9 Plättchen übrig bleiben, je nachdem ob kein Übertrag, ein Übertrag oder ob zwei Überträge auftreten. Die Quersummen aller möglichen Ergebnisse sind also Vielfache von 9.

In dieser operativen Weise lässt sich die Neunerregel für die Addition allgemein begründen: Wenn man beliebige viele Summanden addiert, unterscheidet sich die Anzahl der Plättchen, die man für das Legen der Summanden benötigt, d. h. die Summe der Quersumme aller Summanden, um ein Vielfaches von 9 von der Anzahl der Plättchen, die zum Legen des Ergebnisses benötigt werden, d. h. von der Quersumme des Ergebnisses.

Angemerkt sei noch, dass bei der Entwicklung dieser Lernumgebung der Artikel von H. Winter zur operativen Begründung der Teilbarkeitsregeln an der Stellentafel Pate stand (Winter 1983).

Folgerung: Es ist a priori klar, dass man mit Theorien aus anderen Disziplinen allein sowie mit den üblichen empirischen Methoden keine mathematisch substantiellen Lernumgebungen entwickeln kann. Man kommt nur zu konstruktiven Lösungen, indem man den gewachsenen Fundus des Faches produktiv nutzt. Dies erfordert eine gründliche Kenntnis elementarmathematischer Strukturen und Prozesse, allerdings in Verbindung mit weiteren Kenntnissen.

4 Würfelnetze

Dieses Thema ist ein Standardthema des Unterrichts in der Sekundarstufe I, kann aber auch schon in der Grundschule behandelt werden. In diesem Abschnitt werden ein empirischer und ein stoffdidaktischer Zugang einander gegenübergestellt.

Susanne Prediger und Claudia Scherres haben in einer qualitativen Fallstudie mit Schülerinnen und Schülern der Klasse 5 einer Realschule untersucht, inwieweit beim Suchen möglichst vieler verschiedener Würfelnetze neben der „Niveaustreuung“ auch die „Niveauangemessenheit“ berücksichtigt werden kann (Prediger & Scherres 2012). Bei dieser Untersuchung haben die Autorinnen eine Reihe empirischer Instrumente eingesetzt, um genauere Aufschlüsse über die bei der kooperativen Bearbeitung dieser Aufgabe in Zweiergruppen ablaufenden Prozesse zu erhalten. Die Ergebnisse sind sehr umfangreich und lassen sich daher nicht kurz zusammenfassen. Wichtig für den folgenden Vergleich sind zwei Befunde: 1. Die

Niveauangemessenheit, d.h. die Ausschöpfung des Potenzials der jeweiligen Zweiergruppe, „gelingt oft erst durch Interventionen der Lehrkraft“. 2. Die Kooperation für die Niveauangemessenheit wird erst dann vorrangig, „wenn sie auch als fachlich intensiv beurteilt werden kann.“ (Prediger & Scherres 2012, 171).

Aus der Sicht der Entwicklungsforschung ist die primäre Frage bei der Bearbeitung des Themas „Würfelnetze“, an welcher Stelle des Curriculums man die Voraussetzungen der Schülerinnen und Schüler mit den fachlichen Anforderungen und Zielen in Einklang bringen kann, wobei man bei diesem schönen und wichtigen Thema von vorneherein überlegen sollte, wie man es an mehreren Stellen des Curriculums berücksichtigen kann.

Im „mathe 2000“-Curriculum ordnen sich Würfelnetze in die geometrische Grundidee „Zerlegen und Zusammensetzen von Figuren“ ein, die vom ersten Schuljahr an systematisch entwickelt wird, was im Rahmen dieses Beitrags nicht ausgeführt werden kann. Ein einfacher Weg zu einer systematischen Bestimmung aller Würfelnetze eröffnet sich in diesem Kontext bereits im 3. Schuljahr im Zusammenhang mit Quadratmehrlingen, einem Thema, das in Golomb (1962) ausführlich dargestellt ist (s. dazu auch Müller & Wittmann 1977, Kap. 1.3.1) und von dem Heinrich Besuden im Rahmen seiner schönen Lernumgebung „Geometrie mit Winkelplättchen“ einen Ausschnitt weithin bekannt gemacht hat (Besuden 1984; 2006). Die zur Bearbeitung dieses Themas nötigen Lernvoraussetzungen sind gering, sodass die Bestimmung von Quadratmehrlingen bereits Anfang des 2. Schuljahrs möglich ist (Wittmann & Müller 2013, 15). Leicht zu sehen ist, dass es nur einen Quadratzwilling, aber zwei wesentlich verschiedene Drillinge gibt. Die Kinder finden mühelos auch alle fünf Vierlinge. Mithilfe der Lehrerin können sie sich überzeugen, dass es alle sind, indem sie systematisch prüfen, auf wie viele Weisen man einen Drilling zu einem Vierling ergänzen kann. Dabei ist zu beachten, dass manche Vierlinge mehrfach entstehen. Wenn man Mehrfachexemplare aussondert, bleiben fünf verschiedene Vierlinge übrig. Zwei Mehrlinge gelten nach Vereinbarung genau dann als „gleich“, wenn sie kongruent sind.

In analoger Weise können die 12 möglichen Fünflinge gefunden und von den Vierlingen systematisch abgeleitet werden. Es ist eine sehr schöne Aufgabe, die Kinder herausfinden zu lassen, welche dieser Fünflinge sich zu einer offenen Würfeldose falten lassen. Dies ist erstaunlicherweise bei 8 Fünflingen der Fall.

Auf dieser Basis können die Würfelnetze folgendermaßen systematisch gefunden werden (Wittmann & Müller 2013, 65): Mit den Kindern wird besprochen, aber wegen des zu hohen Zeitaufwands nicht durchgeführt, dass man aus den Fünflingen durch Hinzufügung eines weiteren Quadrats 35 Sechslinge gewinnen kann. Diese 35 Formen werden dann vorgegeben, und die Kinder fischen aus ihnen in Gruppenarbeit die 11 Würfelnetze heraus. Im Klassengespräch wird begründet, weshalb sich die anderen Sechslinge nicht zu einem Würfel falten lassen.

Das Thema wird im weiteren Unterricht wachgehalten durch einen Modul „Netze“ in der Kartei „Geometrie im Kopf. Basiskurs Formen“ (Wittmann & Müller 2007b). Auf jeder Karteikarte dieses Moduls ist ein Mehrling vorgegeben, von dem Kinder entscheiden müssen, ob es ein Würfelnetz ist oder nicht. Der Abwechslung halber sind auch Konfigurationen aufgenommen worden, bei denen zu entscheiden ist, ob es sich um Netze eines Quaders handelt.

In Klasse 5 kann das Thema „Würfelnetze“ erneut aufgegriffen werden, wobei es sinnvoll ist, die Kinder wie in der Grundschule zunächst in Gruppen mit Papierquadraten und Tesafilm als Material alleine Netze suchen zu lassen. Bei der Frage, ob die in der Klasse gefundenen Netze alle Netze sind, muss die Lehrperson unbedingt einen fachlichen Impuls geben. Es ist naheliegend, eine Fallunterscheidung anzuregen, was immer hilfreich ist, wenn man in eine größere Menge von Möglichkeiten Übersicht bringen möchte. Das „Additionsprinzip“, d. h. die Zerlegung aller Möglichkeiten in leichter überschaubare Teilmengen und die Addition der Anzahlen der in den Teilmengen gefundenen Fälle, ist eine kombinatorische Grundidee, die im Unterricht oft wiederkehren sollte. Im Fall der Würfelnetze liegt es nahe, die Maximalzahl der Quadrate in einer Reihe als Ordnungskriterium zu wählen, wie kurz angedeutet sei:

Sechs Quadrate in einer Reihe sind ein Sechsling, der zu keinem Würfel führt, da beim Falten gewisse Flächen doppelt belegt werden müssen und zwei Seitenflächen offen bleiben. Auch fünf Quadrate in einer Reihe ermöglichen keinen Würfel, da eine Fläche offen bleibt und eine doppelt belegt ist.

Wenn maximal vier Quadrate in eine Reihe gelegt werden, muss überlegt werden, wie ein fünftes Quadrat angefügt werden kann, damit ein Würfelnetz überhaupt möglich ist. Für jede mögliche Lage des fünften Quadrats muss geprüft werden, wo evtl. ein sechstes Quadrat so angesetzt werden kann, dass ein Würfelnetz entsteht. Man kann die einzelnen Fälle mit Papierquadraten der Reihe nach sehr schön durchgehen. Aufgepasst werden muss nur, dass kein Netz doppelt erscheint. Man findet für diesen Fall sechs Netze. Abbildung 1 zeigt das schrittweise Vorgehen. Die sich ergebenden Netze sind dick umrandet.

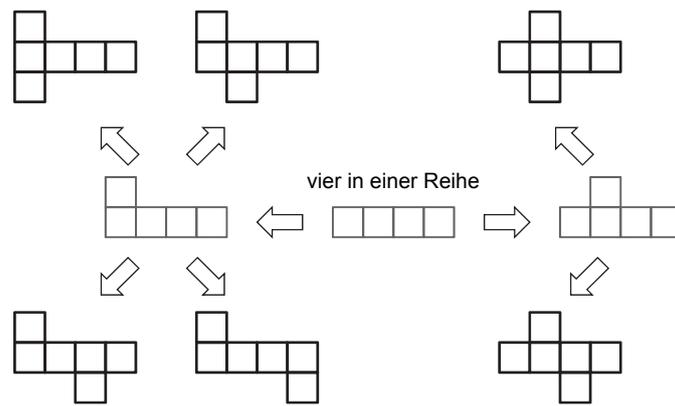


Abbildung 1

Wenn maximal drei Quadrate in einer Reihe liegen dürfen, findet man analog vier Möglichkeiten (dick umrandete Netze in Abb. 2). Dass rechts von den Fünflingen keine Pfeile zu Würfelnetzen eingezeichnet sind, liegt daran, dass entweder keine Fortsetzung möglich ist oder nur Netze entstehen, die schon gefunden wurden.

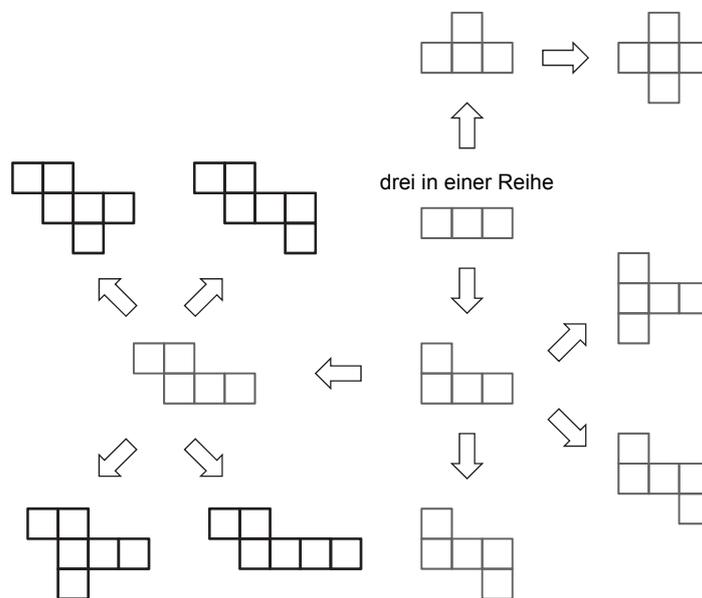


Abbildung 2

Wenn maximal zwei Quadrate in einer Reihe liegen dürfen, gibt es nur eine einzige Möglichkeit, ein Würfelnetz zu bilden (Abb. 3).

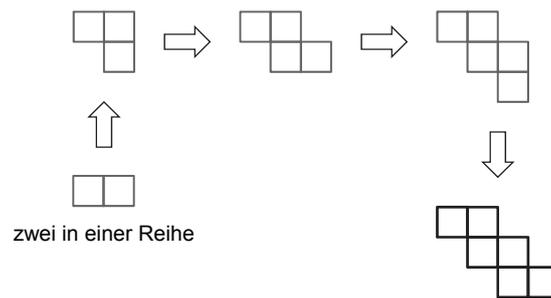


Abbildung 3

Diese schlüssige Ableitung aller elf Netze ist wegen der vielen Fallunterscheidungen keineswegs einfach. Es werden aber nur Mittel benutzt, die für Schülerinnen und Schülern der Klasse 5 zugänglich sind.

Wie der Unterricht bei dieser fachlichen Rahmung im Einzelfall laufen wird, kann nicht vorhergesagt werden. Jede Interaktion nimmt unter den jeweils besonderen Umständen ihren eigenen Verlauf. Wichtig für die Lehrperson ist, dass sie eine klare fachliche Grundlage hat, die es ihr erlaubt, die Beiträge der Schüler produktiv zu interpretieren und gezielt weitere Impulse zu geben.

Auf jeden Fall sollte man im Unterricht nach einer freien Phase die Klassifikation nach der Maximalzahl von Quadraten in einer Reihe besprechen und dann Gruppen die drei Fälle bearbeiten lassen. Dadurch wird die Komplexität auf ein sinnvolles Niveau reduziert.

Folgerung aus dem Vergleich: Bei diesem Thema wird deutlich, dass sich der empirische und der stoffdidaktische Ansatz sehr gut ergänzen. Beide sind lehrreich. Es ist keine Frage, dass eine Lehrperson, die genauere Einsicht in Lernprozesse hat, den Unterricht viel natürlicher führen wird als eine Lehrperson, die sich eng an eine bestimmte Fachstruktur hält und den Schülerinnen und Schülern kaum Raum lässt. Umgekehrt natürlich ist es schwer vorstellbar, dass man den Unterricht, ausgehend von spontanen Ideen der Schülerinnen und Schüler, allein mithilfe allgemeiner Konzepte führen kann, ohne klare Vorstellungen von der Fachstruktur zu haben.

In Bezug auf die Lehrerbildung und den Unterricht bestehen dennoch deutliche Unterschiede zwischen beiden Ansätzen: Es erscheint kaum möglich, die „hochauflösenden“ (und komplizierten!) Instrumente in dieser empirischen Untersuchung Studierenden und Lehrpersonen in der Aus- und Fortbildung zu kommuni-

zieren, jedenfalls nicht in der zur Verfügung stehenden Zeit. Man kann die Ergebnisse auch kaum so in Materialien integrieren, dass sie ohne entsprechendes Zutun einer Lehrperson wirken. Die oben skizzierte stoffliche Analyse hingegen erfordert einen relativ geringen Zeitaufwand und kann in der Lehrerbildung gut erarbeitet werden (wobei die Erfahrung wie so oft zeigt, dass sich die Zugangsweisen der Studierenden nicht wesentlich von denen der Schülerinnen und Schüler unterscheiden).

Die bei der Entwicklung und der Analyse der Lernumgebung verwendete Sprache ist im Gegensatz zu der in der empirischen Untersuchung verwendeten Sprache einfach und leicht verständlich. Wenn das Thema in der fachlichen und der didaktischen Lehrerbildung zudem in aktiv-entdeckender Weise erarbeitet wird, bestehen gute Chancen, dass die metakognitiven und kooperativen Fähigkeiten, die sich in der empirischen Untersuchung als wichtig herausgestellt haben, von den Studierenden implizit miterworben werden.

Der stoffdidaktische Ansatz zeigt also auch bei diesem Beispiel seine Stärken. Damit wird der Wert der empirischen Untersuchung für die Mathematikdidaktik keinesfalls bestritten. Es geht in Rahmen dieses Beitrags nur um die Rehabilitierung der Stoffdidaktik, nicht um die Verdrängung anderer Zugänge.

5 Strukturgenetische didaktische Analysen

Der Ansatz der „Mathematikdidaktik vom Fach aus“ beruht auf folgenden Grundannahmen:

1. Mathematische Kenntnisse und Techniken werden am besten eigenaktiv unter Anleitung mathematisch erfahrener Lehrpersonen erworben. Das gilt sowohl für den Unterricht als auch für die Lehrerbildung. Das Üben in seinen unterschiedlichen Formen (grundlegend, automatisierend, produktiv) spielt dabei die Schlüsselrolle. Unter den produktiven Übungen kommt anwendungsorientierten (sachstrukturierten) Übungen eine besondere Bedeutung zu.
2. Für die Höhe des jeweils erreichbaren fachlichen Niveaus ist die Strukturierung des Unterrichts nach mathematischen Grundideen von Ausschlag gebender Bedeutung. Nur auf diese Weise können solide Voraussetzungen für den jeweils nächsten Lernschritt geschaffen und frühere Kenntnisse immer wieder aufgefrischt werden. Nur auf diese Weise können auch die für signifikante Anwendungen der Mathematik notwendigen Modellbausteine strukturell verankert werden. *Zentrale Aufgabe der Mathematikdidaktik ist daher die Entwicklung systematisch aufgebauter Curricula, bei denen die Strukturorientierung organisch mit der Anwendungsorientierung verbunden ist.*
3. Authentische mathematische Aktivitäten, bei denen die Heuristik eine entscheidende Rolle spielt, sind ihrer Natur nach sozial und kommunikativ und beinhalten

ten *in natürlicher Weise* eine Theorie des Lehrens und Lernens (implizite Didaktik). Diese Theorie auf dem Boden eigener mathematischer Aktivitäten von Studierenden und Lehrern in didaktische Prinzipien zu fassen und bewusst zu machen, ist die direkteste und effektivste Form der (expliziten) didaktischen Ausbildung.

Vor diesem Hintergrund kommt der bei den obigen Beispielen angewandten Analyse als Forschungsmethode eine besondere Rolle zu. Bei dieser Methode, die in der „design science“-Mathematikdidaktik Standard ist, handelt es sich um eine Weiterentwicklung der traditionellen Stoffdidaktik. Anders als bei der Stoffdidaktik, die sich im Wesentlichen auf die logische Analyse des Stoffes und die Wissensvermittlung konzentriert hat, stehen jetzt aber die *Genese des Wissens* im Verlauf der Schulzeit und *Lernprozesse* unter Bezug auf unterschiedliche Lernvoraussetzungen im Vordergrund. Um diese erweiterte Perspektive zu unterstreichen, wird für die weiterentwickelte Methode die Bezeichnung *strukturgenetische didaktische Analyse* vorgeschlagen.

Die obigen Beispiele zeigen, dass sich diese Methode an harte Fakten hält: an die mathematische Praxis bei der Erforschung, Beschreibung und Begründung von Mustern auf der jeweiligen Stufe, aber auch an die Lernvoraussetzungen der Lernenden, an die Zielsetzungen des Unterrichts und nicht zuletzt an das Curriculum. Dies alles ist *empirisches Material*. Daher ist die strukturgenetische didaktische Analyse eine *empirische Methode*. Sie darf wegen ihrer Ursprünglichkeit mit Recht als empirische Forschung „*erster Art*“ bezeichnet werden. Die üblichen empirischen Forschungen sind, wie insbesondere die Abschnitte 3 und 4 zeigen, nachgeordnet und daher als empirische Forschungen „*zweiter Art*“ zu bezeichnen. Die Behauptung, nur sie würden „empirisch abgesicherte Modelle“ für das Lehren und Lernen liefern, ist unhaltbar.

Strukturgenetische didaktische Analysen sind aus folgenden Gründen für die Mathematikdidaktik von primärer Bedeutung:

1. Sie gründen auf der *mathematischen Praxis* der jeweiligen Stufe.
2. Sie fördern ein aktives Verhältnis zum *lebendigen Fach*.
3. Sie sind *konstruktiv* und daher für das Design von Lernumgebungen und Curricula unentbehrlich.
4. Sie sind *für das Unterrichten handlungsleitend*, da sie die im Fach „eingefrorenen didaktischen Momente“ (Heintel 1978, 46), d. h. die im wohlverstandenen Fach enthaltene *implizite Theorie des Lehrens und Lernens von Mathematik*, zur Geltung bringen.
5. Ihre Ergebnisse sind in der Lehrerbildung im Gegensatz zu vielen Ergebnissen der „Forschungsdidaktik“ *in verständlicher Weise kommunizierbar*. Die Rückmeldungen aus der Praxis sprechen hier eine deutliche Sprache.

Wie die obigen Beispiele zeigen, ist bei der Anwendung der strukturgenetischen didaktischen Analyse im Design von Lernumgebungen und Curricula besonders auf folgende Punkte zu achten:

1. mathematische Substanz und Reichhaltigkeit an Aktivitäten auf unterschiedlichem Niveau,
2. Abschätzung der kognitiven Anforderungen,
3. curriculare Passung (in Bezug auf inhaltliche und allgemeine Lernziele),
4. curriculare Kohärenz und Konsistenz,
5. curriculare Reichweite,
6. Übungspotenzial,
7. Abschätzung des Zeitaufwandes.

Als Musterbeispiele strukturgenetischer didaktischer Analysen sind Wheeler 1963, Freudenthal 1983 und die von ihm angeregte Entwicklungsforschung am IOWO Utrecht in den 1970er Jahren sowie das Gesamtwerk von Heinrich Winter (insbesondere Winter 1987) zu nennen. Diese Beispiele zeigen, dass die Entwicklung origineller, konzeptuell begründeter Lernumgebungen und Materialien den Fortschritt der Mathematikdidaktik wesentlich bestimmt. Diese Leistungen müssen daher besonders gewürdigt werden.

Besondere Bedeutung kommt im Kontext dieses Beitrags dem Punkt 4 zu, der es daher verdient, noch etwas ausgeführt zu werden. Die Erkenntnis, dass im wohlverstandenen Fach in natürlicher Weise eine Theorie des Lehrens und Lernens enthalten ist und die Mathematikdidaktik daher nicht allein auf Theorieimporte aus anderen Disziplinen angewiesen ist, wurde bereits 1904 von John Dewey in einem fundamentalen Beitrag zur Lehrerbildung so klar formuliert, wie man es sich nur wünschen kann (Dewey 1904/1977). Dewey dürfte der einzige Bildungsphilosoph und Pädagoge sein, der die unmittelbar *didaktische* Bedeutung einer guten Fachausbildung erkannt hat. Er widmet dieser Ausbildungskomponente in seinem Beitrag ein langes Kapitel, in dem er Folgendes feststellt:

Das Fachwissen wird oft als methodisch irrelevant angesehen. Wenn diese Einstellung und sei es auch nur unbewusst vorherrscht, wird die Unterrichtsmethode zu einer äußerlichen Zutat zu den Fachinhalten. Sie wird relativ unabhängig von den Fachinhalten ausgearbeitet und angeeignet und kann erst dann auf sie angewandt werden.

Nun müssen die Fachinhalte, die für die Lehrerausbildung in Frage kommen, ihrer Natur nach wohlstrukturiert sein. Sie dürfen keinen bunten Haufen unzusammenhängender Splitter bilden. Selbst wenn man diese Inhalte (wie im Fall der Geschichte und der Literatur) nicht als „wissenschaftlich“ bezeichnet, handelt es sich nichtsdestoweniger um Material, das methodisch bearbeitet wurde, d. h. um Material, das unter Bezug auf leitende intellektuelle Prinzipien ausgewählt und geordnet wurde, die als Kontrollmechanismen fungieren. *Daher steckt in den Fachinhalten selbst Methode, sogar die Methode*

höchsten Ranges, die der menschliche Geist entwickelt hat: die wissenschaftliche Methode.

Es kann nicht stark genug betont werden, dass diese wissenschaftliche Methode die Methode des menschlichen Geistes selbst ist. Die Klassifikationen, Interpretationen, Erklärungen und Verallgemeinerungen, die Fachinhalte zu einem Gegenstand der Untersuchung machen, stellen nicht etwas dar, das außerhalb des Geistes liegt. Sie widerspiegeln die Haltungen und Arbeitsweisen des menschlichen Geistes in seinem Bemühen, das Rohmaterial der Erfahrung auf einen Punkt zu bringen, wo es die Bedürfnisse aktiven Denkens befriedigt und gleichzeitig stimuliert. Aus dieser Sicht stimmt etwas an der „akademischen“ Seite der Lehrerbildung nicht, wenn die Studierenden in ihr nicht beständig Musterbeispiele höchster Qualität von geistiger Aktivität der Art erfahren, die für geistige Entwicklung und daher für Lernprozesse charakteristisch ist. (Dewey 1977, 263, Übersetzung und Hervorhebungen d. Verf.)

Für die Praxis hat diese Sichtweise fundamentale Bedeutung: Theorie (gr. $\Theta\epsilon\omega\rho\acute{\iota}\alpha$) bedeutet ursprünglich „Gesamtschau“. Wer eine Theorie über einen Bereich besitzt, verfügt damit über Wissen, das es ihm erlaubt, unabhängig von den wechselnden Umständen und Zufälligkeiten in diesem Bereich zielgerichtet zu handeln. Die im Fach liegende natürliche Theorie des Lehrens und Lernens liefert in diesem Sinn dem Lehrer entscheidende, wenn nicht die entscheidenden, Informationen für sein unterrichtliches Handeln. Ob es darum geht, Kinder in die Multiplikation einzuführen, die Hundertertafel sinnvoll zu nutzen, die schriftliche Addition produktiv zu üben oder die Würfelnetze herzuleiten: Die Einschätzung der Vorkenntnisse der Schüler, Impulse zur Aktivierung der Schüler, die Interaktion und Kommunikation mit ihnen, die Interpretation („Diagnose“) ihrer mündlichen und schriftlichen Äußerungen, die Einschätzung ihrer Lernfortschritte, die Einleitung von Fördermaßnahmen usw. All dies wird wesentlich von der „Gesamtschau“ des jeweiligen Themas bestimmt. Dass der Unterricht nicht glatt verläuft, dass es in den Lernprozessen Brüche gibt, dass die Schüler Fehler machen, Verständnisprobleme haben, das Gelernte wieder vergessen usw. Auch dieses Wissen ist wesentlicher Teil der „Gesamtschau“ von Lehren und Lernen.

Vor diesem Hintergrund kommt nicht der im engeren Sinn „didaktischen“ Komponente der Lehrerbildung die entscheidende Bedeutung für die spätere Unterrichtstätigkeit zu, sondern der mathematischen Komponente, sofern es bei dieser gelingt, die im Fach eingefrorenen didaktischen Momente „aufzutauen“ und die Studierenden zu mathematischen Prozessen zu aktivieren, in denen sie einschlägige Erfahrungen über mehr oder weniger brüchige Lern- und Kommunikationsprozesse machen und dabei gründliches Fachwissen erwerben können.

Eine in dieser Weise organisierte fachliche Lehrerbildung liefert nach den Erfahrungen des Autors die effektivste theoretische Grundlage für unterrichtliches Handeln. Damit wird nicht bestritten, dass auch Theorien aus anderen Disziplinen für den Lehrer hilfreich sind. Auch die Bedeutung der im engeren Sinn „didaktischen“ Komponente der Lehrerbildung wird damit nicht kleingeredet. Aber die-

se Komponente erhält auf der Grundlage einer Fachausbildung im o. g. Sinn erst ihren gegenständlichen Gehalt und ihre praktische Bedeutung.

Es ist hier nicht der Ort um diese Implikationen für die fachwissenschaftliche Komponente der Lehrerbildung weiter auszuführen. Sie ergeben sich, wie Dewey festgestellt hat, nicht von selbst.

6 Schlussbemerkung

Wer diesen Beitrag unvoreingenommen liest, wird feststellen, dass das hier vorgebrachte Plädoyer für strukturgenetische didaktische Analysen nicht mit einer Ablehnung empirischer Untersuchungen zweiter Art einhergeht. Im Gegenteil: Solche Untersuchungen sind unverzichtbar, wenn neue Gebiete unterrichtet werden sollen, bei denen noch keine Informationen über Vorkenntnisse vorliegen, und wenn neue Darstellungsformen zur Anwendung kommen. Ein Beispiel dafür ist die Einführung des Themenbereichs Stochastik in den Unterricht der Grundschule. Auch der Umgang mit den Neuen Medien wirft Fragen auf, deren Beantwortung nur auf empirischem Weg möglich ist. Natürlich ist es auch höchst sinnvoll, mit empirischen Methoden zweiter Art genauer zu untersuchen, welche Prozesse bei unterschiedlichen Inszenierungen einer Lernumgebung im Unterricht ablaufen. Gleichwohl darf nicht übersehen werden, dass strukturgenetische didaktische Analysen, die aus der Vertrautheit mit der mathematischen Praxis auf der jeweiligen Stufe erwachsen, hierfür bereits wesentliche Informationen liefern. Das Design von Lernumgebungen schließt die Empirie in vielen Fällen sogar schon zu einem großen Teil ein, wie aus den Abschnitten 3 und 4 ersichtlich ist.

Empirische Untersuchungen zweiter Art sind natürlich umso aufschlussreicher und für den Unterricht umso aussagekräftiger, je enger sie an strukturgenetische Analysen angelagert sind.

Heinz Griesel hat in einem Grundsatzartikel zum Selbstverständnis der Mathematikdidaktik die Auffassung vertreten, „didaktische Analysen“ in seinem Verständnis unterschieden sich grundsätzlich nicht von den „logischen Analysen“ der Mathematik (Griesel 1974). Heinz Steinbring hat diese Position zu Recht kritisiert (Steinbring 2011). Bei strukturgenetischen didaktischen Analysen liegt der Fall anders. Bei aller Wichtigkeit, die dabei logischen Analysen eingeräumt wird, geht in strukturgenetische didaktische Analysen wie oben beschrieben auch Wissen über mathematische Prozesse, über das Curriculum, über Lernvoraussetzungen auf der jeweiligen Stufe und über die Rahmenbedingungen des Unterrichts ein. Mit einer bloßen Kenntnis der (Elementar-)Mathematik ist es bei strukturgenetischen didaktischen Analysen nicht getan. Sich in der Frühförderung in ein Vorschulkind zu versetzen, das seine ersten Schritte in der Mathematik unternimmt, das Erlernen des Einmaleins mit den Augen eines Zweitklässlers zu sehen, Wege zu finden, wie

man Würfelnetze auf verschiedenen Stufen zugänglich machen kann, Ansätze zu einem Grundverständnis des Grenzwertbegriffs zu entwickeln usw.: All dies erfordert einen besonderen didaktischen Zugang und ein besonderes Einfühlungsvermögen in die Wissensgenese und die mathematische Praxis auf der jeweiligen Stufe. Fundierte Kenntnisse der (Elementar-)Mathematik sind für die Durchführung strukturgenetischer didaktischer Analysen notwendig, aber bei weitem nicht hinreichend.

Bei allem Nachdruck auf die im Fach enthaltene implizite Theorie des Lehrens und Lernens sind auch Beiträge aus anderen Disziplinen zur Theoriebildung ausdrücklich anzuerkennen. Diese haben zweifellos zu einer Bereicherung der Mathematikdidaktik beigetragen. Strukturgenetische didaktische Analysen sind für die Weiterentwicklung dieser Disziplin gleichwohl von zentraler, ja existenzieller Bedeutung. Nur sie können verhindern, dass die Mathematikdidaktik in toto in ein von der Praxis entferntes selbstreferentielles System degeneriert.

Literatur

- Besuden, H. (1984): Würfel, Ornamente, Knoten. Stuttgart: Klett
- Besuden, H. (2006): Geometrie mit Winkelplättchen. Seelze: Kallmeyer
- Courant, R. & Robbins, H. (1962): Was ist Mathematik? Berlin, Heidelberg, New York: Springer
- Deschauer, S. (2012): Das macht nach Adam Riese. Die praktische Rechenkunst des berühmten Meisters Adam Ries. Köln: Anaconda
- Dewey, J. (1904/1977): The Relation of Theory to Practice in Education. In: Dewey, J., The Middle Works 1899–1924, vol. 3, ed. by J. A. Boydston. Carbondale/Ill.: SIU Press, 249–272
- Freudenthal, H. (1983): Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: Reidel
- Fricke, A. (1968): Operative Lernprinzipien. In: Fricke, A. & Besuden, H. (1970): Mathematik. Elemente einer Didaktik und Methodik. Stuttgart: Klett, 79–116
- Golomb, S. (1962): Polyominoes. London: Penguin
- Griesel, H. (1974): Überlegungen zur Didaktik der Mathematik als Wissenschaft. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 6(3), 115–119
- Heintel, P. (1978): Modellbildung in der Fachdidaktik. Klagenfurt: Carinthia
- Kucian, K. & von Aster, M. G. (2005): Dem Gehirn beim Rechnen zuschauen. In: von Aster, M. & Lorenz, J. H. (Hrsg.): Rechenstörungen bei Kindern. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 60–71
- Lorenz, J. H. (2005): Grundlagen der Förderung und Therapie. In: von Aster, M. & Lorenz, J. H. (Hrsg.): Rechenstörungen bei Kindern. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 165–177
- Lorenz, J. H. (2009): Viel ist nicht immer mehr. Die Verwendung von Anschauungsmitteln in der Grundschule, Grundschule 3/2009, 48–49
- Müller, G. N. & Wittmann, E. Ch. (1977): Der Mathematikunterricht in der Primarstufe. Ziele, Inhalte, Prinzipien, Beispiele. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg
- Park, J. H. & Nunes, T. (2001): The Development of the Concept of Multiplication. Cognitive Development 16, 763–773

- Penrose, R. (1995): Schatten des Geistes. Berlin: Spektrum
- Prediger, S. & Scherres, C. (2012): Niveauangemessenheit von Arbeitsprozessen in selbst-differenzierenden Lernumgebungen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 33(1), 143–173
- Steinbring, H. (2011): Changed Views on Mathematical Knowledge in the Course of Didactical Theory Development: Independent Corpus of Scientific Knowledge or Result of Social Constructions? In: Rowland, T. & Ruthven, K. (Hrsg.): *Mathematical Knowledge in Teaching*, Series: Mathematics Education Library, Vol. 50. Berlin, New York: Springer, 43–64
- Wheeler, D. (Hrsg.) (1967): *Notes on Primary Mathematics*. London: CUP (deutsch: Modelle für den Mathematikunterricht der Grundschule. Stuttgart: Klett 1970)
- Winter, H. (1983), Prämathematische Beweise der Teilbarkeitsregeln. *mathematica didactica* 6, 177–187
- Winter, H. (1984): Begriff und Bedeutung des Übens. *mathematik lehren* 2, 4–11
- Winter, H. (1987): *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht*. Wiesbaden: Vieweg
- Wittmann, E.Ch. (2012): Das Projekt „mathe 2000“: Wissenschaft für die Praxis – eine Bilanz aus 25 Jahren didaktischer Entwicklungsforschung. In: Müller, G. N., Selzer, Ch. & Wittmann, E. Ch. (Hrsg.): *Zahlen, Muster und Strukturen. Spielräume für aktives Lernen und Üben*. Stuttgart: Klett, 263–279
- Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (2007a): Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept. In: Walther, G. u. a. (Hrsg.): *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret*. Berlin: Cornelsen, S. 42–65
- Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (2007b): *Geometrie im Kopf. Basiskurs Formen*. Stuttgart: Klett
- Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (2013): *Das Zahlenbuch, Band 3*. Stuttgart: Klett

Anschrift des Verfassers

Prof. em. Dr. Dr. h. c. Erich Ch. Wittmann
Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik, Lehrstuhl IEEM
Vogelpothsweg 87
44227 Dortmund

Online verfügbar: 29.02.2016