Mathematisch fundiertes fachdidaktisches Wissen

von

Lisa Hefendehl-Hebeker, Duisburg-Essen

Kurzfassung: Der Beitrag möchte einen Diskussionsbeitrag leisten zu der Frage, was fachdidaktisches Wissen ausmacht, in welchem Bezug es zur Fachwissenschaft steht und welche Qualifikationen erforderlich sind, um fachdidaktisches Wissen mathematisch fundiert entwickeln und vermitteln zu können.

Abstract: This paper intends to contribute to discussions centering on a number of questions: Which aspects constitute knowledge on didactics of mathematics? Which relation does knowledge on didactics of mathematics bear to the science of mathematics? Which qualifications are being required to develop and mediate knowledge on didactics of mathematics in a mathematically substantiated manner?

Die Mathematikdidaktik ist – von profilierten Vorläufern abgesehen – eine noch relativ junge wissenschaftliche Disziplin. Ihre Etablierung durch die Einrichtung von Professuren und Graduierungsmöglichkeiten begann in Deutschland vor etwa fünfzig Jahren (Burscheid 2003).

Seitdem hat sich die Mathematikdidaktik vielfältig entwickelt. Ursprünglich war sie fachbezogen, seitdem hat sie sich eine Fülle neuer Forschungsgegenstände und Forschungsmethoden erschlossen (Bruder et al. 2014). In den Curricula der Lehramtsstudiengänge hat sie sich einen festen Platz erobert.

Deshalb ist es an der Zeit, eine Bilanz zu ziehen und über die Frage nachzudenken, was Fachdidaktik leisten soll:

> Es ist an der Zeit, gründlich darüber zu diskutieren, was „fachdidaktisches Wissen“ ausmacht, in welchem Bezug es zur Fachwissenschaft steht und welche Qualifikationen eine „Fachdidaktikerin“ oder ein „Fachdidaktiker“ haben muss, um dieses fachdidaktische Wissen mathematisch fundiert entwickeln und vermitteln zu können. (Walcher & Wittmann 2012)

Der vorliegende Beitrag versteht sich als Auseinandersetzung mit dieser Fragestellung, wobei der Fokus auf dem Bezug zur Fachwissenschaft liegt.

1 Bildungstheoretische Grundposition

Eine Frage wie die vorliegende lässt sich nicht unabhängig von bildungstheoretischen Vorentscheidungen beantworten. Die folgenden Betrachtungen basieren auf einer Grundposition, die B. Dressler wie folgt umrissen hat:

> Deshalb gehört es zur Bildung, dass sie unterschiedliche Weltzugänge, unterschiedliche Horizonte des Weltverstehens eröffnet, die … nicht wechselseitig substituierbar sind und auch nicht nach Geltungshierarchien zu ordnen sind: empirische, logisch-rationale, hermeneutische und musisch-ästhetische Weltzugänge mit ihren jeweils unterschiedlichen Potenzialen an Verfügungswissen und Orientierungswissen, mit ihren jeweils eigenen Rationalitätsformen. (Dressler 2006, S. 110).

Mathematik ist eine Weise des Weltverstehens, die unverwechselbar und nicht durch andere Weltzugänge ersetzbar ist. Sie geht logisch-rational vor und hat diese Rationalität zu einem Höchstmaß an Stringenz und zugleich einer weiten Anwendbarkeit entwickelt. Damit nimmt sie im Zeitalter der Hochtechnologie eine unentbehrliche Position ein.

Nimmt man nun die Forderung von Dressler ernst, dann kommt es nicht nur darauf an, mathematische Kenntnisse und Fähigkeiten zu vermitteln, sondern auch ein Bewusstsein dafür, wie diese Form der Wissensbildung geschieht. Daraus leiten wir folgende Forderungen ab:

Mathematikunterricht sollte

- in stufengemäßer Form erlebbar machen, wie mathematische Wissensbildung geschieht,
- und dabei je nach Bildungsgang
  - Sicherheit in der alltagspraktischen Bewältigung des Faches vermitteln (Verfügungswissen),
  - dann auch wissenschaftlich vermittelte Erfahrungen und Erkenntnisse ermöglichen,
  - schließlich (Sek. II) die Erkenntnisweisen des Faches wissenschaftstheoretisch reflektieren (z. B.: Welche Art von Orientierungswissen stellt die Mathematik bereit?)
  - und auf allen Stufen ein ausgewogenes Verhältnis zwischen intellektueller Selbstentfaltung und Verwendbarkeitsaspekten herstellen.

Dies ist ohne eine hierauf ausgerichtete Vermittlung im Mathematikunterricht nicht möglich. Damit ergibt sich in natürlicher Weise die Frage, was Lehrkräfte für eine sachgerechte Wahrnehmung dieser Aufgaben benötigen und was die fachdidaktische Ausbildung dafür bereitstellen sollte.

2 Was Lehrkräfte können sollten

Aus Gründen der Übersichtlichkeit nehmen die folgenden Überlegungen eine idealtypische Einteilung in vier Dimensionen vor, nämlich

1. die fachlich-inhaltliche Dimension
2. die fachlich-epistemologische Dimension
3. die lern- und kognitionspsychologische Dimension
4. die unterrichtsmethodische Dimension.

2.1 Die fachlich-inhaltliche Dimension

Eine solide fachliche Grundbildung sollte die erforderlichen Wissensgrundlagen für den Unterricht legen. Dazu gehören Kenntnisse wie die folgenden:

- wissen, wie das dezimale Stellenwertsystem aufgebaut ist, wie die darauf basierenden Rechenverfahren funktionieren und worin somit die besondere Leistungsfähigkeit dieses Zahldarstellungssystems besteht;
- wissen, wie die algebraische Formelsprache als Darstellungs- und Beweismittel funktioniert und inwiefern sie in dieser Doppelfunktion grundlegend für die Mathematik ist;
- wissen, wie der Ableitungsbegriff inhaltlich und formal zu verstehen ist und welche Modellgrößen in Sachkontexten damit bestimmt werden können, und aus dieser Sicht Aussagen wie die folgenden beurteilen können: „Die Zunahme der Staatsverschuldung nimmt ab.“

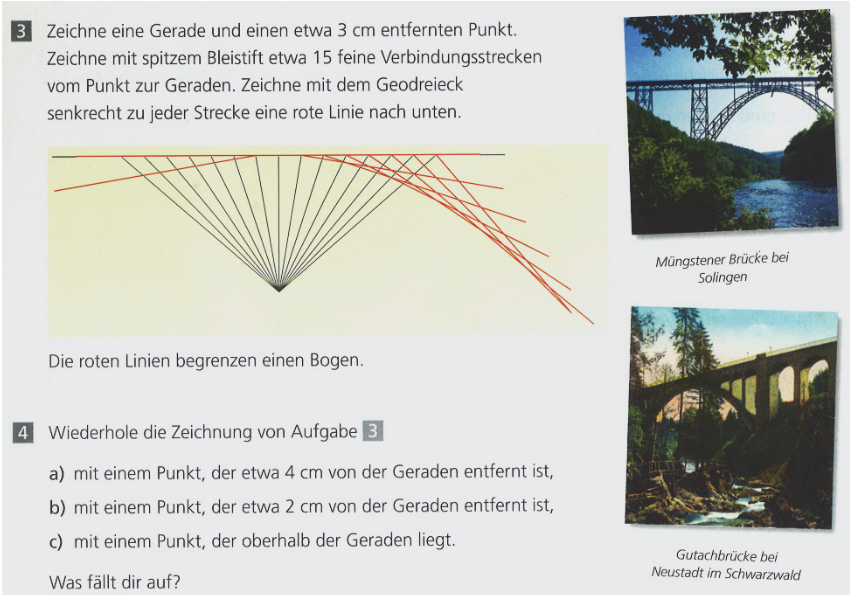
Darüber hinaus wäre eine vertiefte Durchdringung des Schulstoffes wünschenswert. Dazu gehört zum Beispiel ein Wissen um das Verhältnis von Logik und Anschauung in der Geometrie, das zwischen geometrischem Beweisen auf axiomatischer Basis und Begründen im Rahmen lokalen Ordnens zu unterscheiden hilft.

Moderne Anwendungen der Mathematik gehen in Bezug auf das benötigte Grundlagen- und Verfahrenswissen oft über das hinaus, was Lehrkräfte im Studium lernen können. So erfordern

- Finite-Elemente-Methoden vertiefte Kenntnisse aus der Funktionalanalysis,
- moderne Verfahren der Codierungstheorie fortgeschrittene Kenntnisse in analytischer Zahlentheorie.

Lehrkräfte sollten aber eine Idee von modernen Anwendungen haben und erzählen können, welche Rolle die Mathematik heute in der Welt spielt.

Schließlich benötigen Lehrkräfte Wissensreserven für die Gestaltung phantasievoller und produktiver Aufgaben. H. Winter hat das Konzept des produktiven Übens entfaltet (Winter 1984). Dabei kommt es darauf an, ein Schema dadurch zu automatisieren, dass ein interessantes, über den augenblicklichen Übungszweck hinausgehendes Produkt hergestellt wird. Dieses Konzept ist zum Beispiel in der Aufgabe in Abb. 1 umgesetzt (Wittmann & Müller 2005, S. 89).



3 Zeichne eine Gerade und einen etwa 3 cm entfernten Punkt. Zeichne mit spitzem Bleistift etwa 15 feine Verbindungsstrecken vom Punkt zur Geraden. Zeichne mit dem Geodreieck senkrecht zu jeder Strecke eine rote Linie nach unten.

Die roten Linien begrenzen einen Bogen.

4 Wiederhole die Zeichnung von Aufgabe 3

a) mit einem Punkt, der etwa 4 cm von der Geraden entfernt ist,

b) mit einem Punkt, der etwa 2 cm von der Geraden entfernt ist,

c) mit einem Punkt, der oberhalb der Geraden liegt.

Was fällt dir auf?

Müngstener Brücke bei Solingen

Gutachbrücke bei Neustadt im Schwarzwald

Abb. 1: Hüllkurve einer Geradenschar in Klasse 4 (Wittmann & Müller 2005, S. 89)

Um solche beziehungsreichen Aufgaben konzipieren oder zumindest sachkundig handhaben zu können, benötigen Lehrerinnen und Lehrer eine reichhaltige Wissensbasis. Dasselbe gilt für differenzierende Lernumgebungen, die es ermöglichen, mit der Heterogenität von Schülerinnen und Schülern konstruktiv umzugehen. Das von Müller und Wittmann entwickelte Beispielmaterial für beziehungsreiches Üben im Arithmetikunterricht (Müller & Wittmann 1990/92) hat hierfür grundlegende Impulse gesetzt.

2.2 Die fachlich-epistemologische Dimension

Ein Fach aus einer epistemologischen Perspektive zu betrachten bedeutet, Prozesse der fachbezogenen Wissensbildung mit ihren internen Mechanismen und spezifischen Denkhandlungen in den Blick zu nehmen. Die Bedeutung dieser Dimension hat insbesondere Steinbring ins Bewusstsein gerufen (Steinbring 2009). Nachfolgend seien zwei Fragerichtungen aufgegriffen, die für die Unterrichtsgestaltung besonders wichtig erscheinen:

1. Wie geschieht mathematische Wissensbildung *horizontal*? Diese Frage kann man in viele Detailfragen aufschlüsseln. Dazu gehören die folgenden:

- Welche Phänomene können mit dem jeweiligen Wissensbereich organisiert werden? Warum kann man zum Beispiel mit dem Werkzeug Integral sowohl Bogenlängen wie auch Flächeninhalte und Volumina (und vieles mehr) bestimmen?
- Welche Denkhandlungen sind beteiligt? Welche kognitiven Werkzeuge müssen zum Beispiel bei der Entwicklung algebraischen Denkens zusammenwirken?
- Welche spezifischen Stilmittel und Rationalisierungspraktiken werden verwendet und was zeichnet diese aus? Dazu gehören u. a. die folgenden:
  - genaues Beobachten und gezieltes Fragen;
  - plausibles Schließen;
  - exaktes Schließen (Wie führt man einen Beweis?);
  - gedankliches Ordnen (z. B.: Wie trifft man eine Fallunterscheidung?);
  - Formalisieren.

2. Wie geschieht mathematische Wissensbildung *vertikal*? Wie entwickelt sich also ein Wissensbestand aus ersten intuitiven Ansätzen bis zur theoretischen Ausreifung? Mögliche Ausdifferenzierungen dieser Frage sind die folgenden:

- Wie läuft eine genetische Entwicklung vom ursprünglichen Verstehen zum exakten Denken und schließlich präzisen Beschreiben in der Sprache der Mathematik? So lässt sich zum Beispiel das kontextbezogene Erkennen von Zahlenmustern schon auf früher Stufe anbahnen (Klasse 5 oder früher) und dann in Richtung fortschreitender Allgemeinheit und Explizitheit weiter entwickeln, bis schließlich eine Beschreibung mit Mitteln der elementaren Algebra möglich wird (Berlin 2010, Radford 2010).
- Wie kann man ein mathematisches Thema auf verschiedenen Stufen der Denkentwicklung intellektuell redlich entfalten? So kann man zum Beispiel die Quersummenregel für die Zahl 9 handlungsorientiert mit Legeplättchen an der Stellentafel erschließen, man kann sie exemplarisch symbolisch für eine dreistellige Zahl mit Mitteln der elementaren Algebra zeigen, und man kann sie schließlich allgemein auf symbolischer Ebenen beweisen.

2.3 Die lern- und kognitionspsychologische Dimension

Heute besteht weitgehend Konsens darüber, dass Mathematik nicht auf dem Wege der unmittelbaren Übertragung von Wissensbeständen gelehrt werden kann. Vielmehr müssen Lernende sich die Inhalte auf dem Wege der konstruktiven Auseinandersetzung aneignen. Deshalb muss die Fachdidaktik auch Prozesse einbeziehen, die bei den Lernenden während der Arbeitsphasen ablaufen. Solche Prozesse lassen sich unter verschiedenen Aspekten betrachten.

Da ist zunächst die Frage nach personenunabhängigen Invarianten der Denkentwicklung, zum Beispiel bezogen auf den Zahlbegriff, die Raumanschauung, das Variablenkonzept oder den Wahrscheinlichkeitsbegriff. In diesem Bereich hat Piaget eine große Pionierleistung vollbracht. Viele seiner Ergebnisse sind inzwischen ausdifferenziert, erweitert, zum Teil auch modifiziert worden.

Eine andere Frage bezieht sich auf individuelle Präferenzen für verschiedene Formen mathematischer Begriffsbildung. Hier hat Inge Schwank (Schwank 1996) in langjährigen Beobachtungen von Problemlöseprozessen die Hypothese abgeleitet, dass es individuelle Präferenzen für zwei grundlegend verschiedene Formen mathematischer Begriffsbildung gibt: Prädikatives Denken ist auf die Analyse von Strukturen und Beziehungen ausgerichtet, funktionales Denken zielt auf die Organisation von Handlungsfolgen und die Analyse von Wirkungsweisen. Das bedeutet auch, dass Personen auf unterschiedliche Darstellungsformen ansprechen.

Schließlich ist da der gesamte Bereich der Diagnose von individuellen Lernwegen, Lernhürden, Fehlvorstellungen und Fehlermustern, der fach- und bereichsspezifisch ausgestaltet werden muss.

2.4 Die unterrichtsmethodische Dimension

Hier geht es um die Umsetzung der gewonnenen Erkenntnisse in die Entwicklung von Lernumgebungen, Aufgabenideen, Lernimpulsen und Lehrmaterialien sowie fachliche Inhalte und Wissensbildungsprozesse akzentuierende Techniken der Unterrichtsmoderation.

Äußere Strukturen wie Arbeits- und Sozialformen schaffen Rahmenbedingungen, gewährleisten aber noch nicht von sich aus nachhaltige Lernprozesse. Wichtig sind fachliche Lerngelegenheiten, die es ermöglichen, dass Lernende aufbauend auf ihrem Vorwissen in Eigentätigkeit neues Wissen konstruieren und dabei das bestehende Begriffsnetz erweitern und ausdifferenzieren können (Ufer et al. 2014).

Eine Schlüsselstellung hierbei kommt dem Aufgabenmaterial zu (vgl. 2.1). Aufgaben sind Ausgangspunkte und Träger von Lehr- und Lernprozessen, die im gelingenden Fall mathematische Grunderfahrungen (Winter 1995) vermitteln, aktiv-entdeckendes Lernen anstoßen sowie Wissenssicherung und Reflexion ermöglichen. Empirische Befunde zeigen, dass das kognitive Aktivierungspotenzial von Aufgaben einen bedeutenden Einfluss auf den Leistungszuwachs von Lernenden hat. Dieses Aktivierungspotenzial hängt wiederum stark von dem fachlichen und fachdidaktischen Wissen der jeweiligen Lehrperson ab (Ufer et al. 2014).

Fachlich verankert ist auch eine weitere wesentliche Variable von Unterrichtsqualität, die inhaltliche und strukturelle Klarheit. Hierbei kommt es darauf an, dass die wesentlichen Elemente des Lehrstoffes identifiziert und für die Lernenden klar, verständlich und fachlich korrekt dargestellt und geeignete Veranschaulichungen, Arbeitsmittel und Beispiele ausgewählt werden (ebd.).

Literatur

Berlin, T. (2010): *Algebra erwerben und besitzen. Eine binationale empirische Studie in der Jahrgangsstufe 5*. Universität Duisburg-Essen, Duepublico, Dissertation.

Bruder, R., Hefendehl-Hebeker, L., Schmidt-Thieme, B. & Weigand, H.-G. (Hrsg.) (2014): *Handbuch der Mathematikdidaktik*. Heidelberg, Berlin: Springer.

Burscheid, H. J. (2003): Zur Entwicklung der Disziplin Mathematikdidaktik in den alten Bundesländern. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 35(4), 146–152.

Dressler, B. (2006). *Unterscheidungen*. Leipzig: Evangelische Verlagsanstalt.

Kirsch, A. (1980): Zur Mathematik-Ausbildung der zukünftigen Lehrer – im Hinblick auf die Praxis des Geometrieunterrichts. In: *Journal für Mathematik-Didaktik*, 1(4), 229–256.

Radford, L. (2010): Signs, Gestures, Meanings: Algebraic Thinking from a Cultural Semiotic Perspective. *Proceedings of CERME 6, January 28th – February 1st 2009*, Lyon France. www.inrp.fr/editions/cerme6. Zugegriffen: 15. Februar 2014.

Schwank, I. (1996): Zur Konzeption prädikativer versus kognitiver Strukturen und ihrer Anwendung. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 6, 168–183.

Steinbring, H. (2009): *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction – An Epistemological Perspective*. Berlin, New York: Springer.

Ufer, S., Heinze, A. & Lipowski. F. (2014): Unterrichtsmethoden und Instruktionsstrategien. In: Bruder, R., Hefendehl-Hebeker, L., Schmidt-Thieme, B. & Weigand, H.-G. (Hrsg.): *Handbuch der Mathematikdidaktik*. Heidelberg, Berlin: Springer, S. 411–434.

Walcher, S. & Wittmann, E. C. (2012): „Minus mal minus“. Zum Fundament der COACTIV-Studie. *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, 65(6), 371–377.

Winter, H. (1984): Begriff und Bedeutung des Übens. *mathematik lehren*, 2, 4–11.

Winter, H. (1995): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 61, 37–46.

Wittmann, E. C. & Müller, G. N. (1990/92): *Handbuch produktiver Rechenübungen.* Band 1: *Vom Einspluseins zum Einmaleins.* Band 2*: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen*. Stuttgart: Klett.

Wittmann, E. C. & Müller, G. N. (2005): *Das Zahlenbuch 4.* Leipzig: Klett.

Anschrift der Verfasserin

Prof. Dr. Lisa Hefendehl-Hebeker
Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Thea-Leymann-Str. 9
45127 Essen

Eingang Manuskript: 17.07.2014
Eingang überarbeitetes Manuskript: 07.09.2014
Online verfügbar: 29.02.2016