

# Bedeutungsherstellung als Lehr- und Lerninhalt

von

**Martin Brunner, Salzburg**

**Kurzfassung:** Im vorliegenden Aufsatz werden so genannte mathematische Darstellungen als Zeichenspiele im Sinne von Wittgenstein betrachtet. In diesen Zeichenspielen entsteht Bedeutung als Resultat der regelkonformen Verwendung von Inskriptionen. Mithilfe der angesprochenen Sichtweise können viele Phänomene der Mathematik wie etwa die Möglichkeit der multiplen Repräsentation von so genannten mathematischen Objekten rein konstruktiv erklärt werden. Im Zuge der nachfolgenden Überlegungen werden Vorteile dieser Sichtweise theoretisch erläutert und anhand von Beispielen für die Praxis des Mathematikunterrichts nutzbar gemacht.

**Abstract:** In this paper the so-called mathematical representations are considered as sign-games in the meaning of Wittgenstein. In these sign-games, meaning appears as a result of the use of inscriptions due to given rules. By means of this approach, many phenomena of mathematics such as the possibility of multiple representations of so-called mathematical objects can be explained in a purely constructive way. In the course of the following considerations, advantages of this view are theoretically explained and made available for the practice of mathematics teaching by given examples.

## 1 Einleitung

In den Übungen zu einer Vorlesung über die Didaktik der Analysis stellte ich folgende provokante Frage: „Woher weiß der Funktionsgraph, was die Funktionsgleichung, und umgekehrt, die Funktionsgleichung, was der Funktionsgraph tut?“ Ergänzt wurde diese Fragestellung durch eine Abhandlung über eine konstruktive Erklärungsweise des Zusammenwirkens der verschiedenen Darstellungen der komplexen Zahlen aus Brunner (2013, S. 64). Ziel der Fragestellung war es, den Studenten/innen konstruktive Erklärungsweisen im Zusammenhang mit Phänomenen wie etwa der multiplen Repräsentation so genannter mathematischer Objekte (hier eben speziell der Darstellungen Funktionsgleichung und Funktionsgraph des Objekts „Funktion“) näher zu bringen. Ich nahm zwar an, dass sich die Studierenden mit dieser Fragestellung schwer tun würden. Mag auch sein, dass die Frage besser formuliert hätte werden können. Ich war in Summe aber doch überrascht, wie wenig die Studenten/innen letztlich mit der Frage anfangen konnten. Was ich als Antworten bekam, war nach meiner Deutung „Platonismus“ in Reinkultur. Im Kern war es immer folgende Erklärungsweise: „Es gibt das Objekt ‚Funktion‘,

welches eigentlich wirksam ist. Um über dieses Objekt etwas erfahren zu können, muss man die zugeordneten Darstellungen des Objekts ‚Funktion‘ untersuchen. In unserem Fall eben die Funktionsgleichung und den Funktionsgraphen. Warum sollten diese Darstellungen aber etwas voneinander wissen?“ Nach meiner subjektiven Sicht scheint der angesprochene Platonismus die mathematische Sozialisation der angesprochenen Studenten/innen weitgehend geprägt zu haben. Der „Glaube“ an existente implizit wirksame abstrakte Objekte scheint in ihnen fest verankert zu sein. Mit der Möglichkeit der bewussten konstruktiven Herstellung von Bedeutung im Zusammenhang mit mathematischen Darstellungen hatten sich die angehenden Lehrer/innen nach eigenen Angaben noch nicht befasst.

Genau dafür soll im Folgenden geworben werden. Durch die Beschäftigung mit den Verwendungsmöglichkeiten der involvierten Inskriptionen soll im Mathematikunterricht die Herstellung von Bedeutung im Zusammenhang mit mathematischen Darstellungen anhand von konkreten Beispielen sichtbar gemacht werden. So wie sich etwa ein vertieftes Verständnis für die Funktionsweise einer Maschine als vorteilhaft für deren Bedienung erweisen wird, so wird sich ein vertieftes Verständnis für die Funktionsweise mathematischer Darstellungen positiv auf das mathematische Handeln der Schüler/innen auswirken.

Im vorliegenden Aufsatz wird nach einer Einführung in das Zeichenspiel nach Wittgenstein anhand von Beispielen u. a. untersucht, wie im Sinne von Wittgenstein Bedeutung durch die jeweiligen Verwendungsregeln von Inskriptionen entsteht, wie neue Bedeutung durch die Kombination oder Ersetzung von Inskriptionen geschaffen wird oder welche Regelfortschreibungen bzw. Regelveränderungen im Zusammenhang mit den jeweiligen Bedeutungserweiterungen erforderlich sind. Es wird veranschaulicht, dass viele Phänomene der Mathematik auf die vorgeschlagene Art und Weise rein konstruktiv und ohne implizit wirksame Objekte gut erklärt werden können. Von besonderer Bedeutung ist im angeführten Kontext die Untersuchung des Zusammenspiels von Inskriptionen aus verschiedenen „Zeichensystemen“ (hier v. a. aus den Zeichensystemen „Algebra“ und „Geometrie“).

Vieles aus den Ausführungen kann als Vorlage für den Schulunterricht verwendet werden. Anhand von Beispielen wie den angeführten kann den Schülern/innen eine alternative bzw. ergänzende konstruktive Sicht auf mathematische Darstellungen und in der Folge auf mathematische Objekte ermöglicht werden. Auch Lehrer/innen können unter Umständen Anregungen aus den Erläuterungen gewinnen und so das Repertoire ihrer Erklärungsweisen/Deutungsweisen im Zusammenhang mit den Phänomenen der Mathematik erweitern.

## 2 Mathematik als Zeichenspiel

Die im vorliegenden Artikel eingenommene Sichtweise ist jene von Mathematik als Zeichenspiel. Sie geht auf Wittgenstein zurück. Der Begriff des Zeichenspiels ist dabei an jenem des Sprachspiels angelehnt. Für Wittgenstein haben Wörter keine Bedeutung an sich. Ihre Bedeutung wird durch deren Gebrauch im Sprachspiel geregelt (vgl. Meyer, 2010, S. 59). Nach Meyer (2010, S. 59) definiert Wittgenstein in diesem Sinne selbst nicht, was er als Sprachspiel versteht. „Er gebraucht das Wort, indem er Beispiele anführt und den Umgang mit ihm beschreibt. Auf diese Weise verleiht er ihm Bedeutung“ (Meyer, 2010, S. 59–60). Wittgenstein folgert (vgl. Meyer, 2010, S. 60):

Wenn die Bedeutung eines Wortes sein Gebrauch ist, dann können wir auch sagen, dass die Bedeutung eines Wortes die Art und Weise ist, wie mit ihm in einem Sprachspiel kalkuliert wird. „Ich sagte, die Bedeutung eines Wortes sei die Rolle, die es im Kalkül der Sprache spiele“ (ich verglich es mit einem Stein im Schachspiel). Und denken wir nun daran, wie mit einem Wort, sagen wir z. B. „rot“ kalkuliert wird. Es wird angegeben, an welchem Ort sich die Farbe befindet, welche Form, welche Größe der Fleck oder der Körper hat, der die Farbe trägt, ob sie rein oder mit anderen vermischt, dunkler oder heller ist, gleich bleibt oder wechselt, etc. etc. Es werden Schlüsse aus den Sätzen gezogen, sie werden in Abbildungen, in Handlungen übersetzt, es wird gezeichnet, gemessen und gerechnet.

Nach Wittgenstein erhalten auch Sätze ihre Bedeutung auf diese Weise. „Es gibt keinen alleinstehenden Satz. „Denn was ich Satz nenne, ist eine Spielstellung in einer Sprache“ (Wittgenstein, 1984a, S. 172). Betrachtet man Sätze ebenso wie Wörter in einem größeren Zusammenhang, so ist es im Sinne des obigen Zitats wieder der Gebrauch, der die inhaltliche Bedeutung bestimmt (Meyer, 2010, S. 61). Im Zusammenhang mit bedeutungstheoretischen Aussagen von Frege erläutert Wittgenstein mit Bezug auf Mathematik und dem Schachspiel seine Entdeckung von „Bedeutung durch Gebrauch“ (Epple, 1994, S. 127):

Für Frege stand die Alternative so: Entweder wir haben es mit Tintenstrichen auf dem Papier zu tun, oder diese Tintenstriche sind Zeichen von *etwas*, und das, was sie vertreten, ist ihre Bedeutung. Daß diese Alternative nicht richtig ist, zeigt gerade das Schachspiel: Hier haben wir es nicht mit den Holzfiguren zu tun, und dennoch vertreten die Figuren nichts, sie haben in Freges Sinn keine Bedeutung. Es gibt eben noch etwas drittes, die Zeichen können verwendet werden wie im Spiel.

Da in den mathematischen Sprach- bzw. Zeichenspielen neben phonetischen auch rein skripturale (non-phonetische) Elemente verwendet werden, wird im vorliegenden Artikel der Begriff „Zeichenspiel“ gegenüber jenem des „Sprachspiels“ der Vorzug gegeben. Der Begriff „Zeichenspiel“ findet sich übrigens bereits bei Wittgenstein (1984b, S. 257):

Ich will sagen: Es ist der Mathematik wesentlich, dass ihre Zeichen auch im *Zivil* gebraucht werden. Es ist ihr Gebrauch außerhalb der Mathematik, also die *Bedeutung* der Zeichen, was das Zeichenspiel zur Mathematik macht.

Obwohl Wittgenstein selbst vom *Sprachspiel* oder *Zeichenspiel* spricht, ist er nicht der Meinung, dass Mathematik ein Spiel ist (Wittgenstein, 1978, S. 171).

Es ist sehr oft behauptet worden, die Mathematik sei ein Spiel, dem Schach vergleichbar. In einem Sinne ist diese Behauptung offensichtlich falsch: die Mathematik ist kein Spiel in der gewöhnlichen Bedeutung dieses Wortes. In einem anderen Sinn ist sie offensichtlich wahr: es gibt eine gewisse Ähnlichkeit. Nun sollte man aber nicht Partei ergreifen, sondern vielmehr eine Untersuchung anstellen. Manchmal ist es eben nützlich, die Mathematik mit einem Spiel zu vergleichen, und manchmal ist es irreführend.

Wittgenstein spricht im Zusammenhang mit Spielen von „Familienähnlichkeiten“. Gemeint sind Ähnlichkeiten, durch welche die Sprachspiele untereinander verwandt sind. Solche Ähnlichkeiten macht Wittgenstein anhand von Spielvergleichen sichtbar (Wittgenstein, 2003, S. 56):

Betrachte z. B. einmal die Vorgänge, die wir „Spiele“ nennen. Ich meine Brettspiele, Kartenspiele, Ballspiel, Kampfspiele, usw. Was ist allen diesen gemeinsam? – Sag nicht: „Es muß ihnen etwas gemeinsam sein, sonst hießen sie nicht ‚Spiele‘“ – sondern schau, ob ihnen allen etwas gemeinsam ist. – Denn wenn du sie anschaust, wirst du zwar nicht etwas sehen, was allen gemeinsam wäre, aber du wirst Ähnlichkeiten, Verwandtschaften, sehen, und zwar eine ganze Reihe. Wie gesagt: denk nicht, sondern schau! – Schau z. B. die Brettspiele an, mit ihren mannigfachen Verwandtschaften. Nun geh zu den Kartenspielen über: hier findest du viele Entsprechungen mit jener ersten Klasse, aber viele gemeinsame Züge verschwinden, andere treten auf. [...] Und so können wir durch die vielen, vielen anderen Gruppen von Spielen gehen. Ähnlichkeiten auftauchen und verschwinden sehen. Und das Ergebnis dieser Betrachtung lautet nun: Wir sehen ein kompliziertes Netz von Ähnlichkeiten, die einander übergreifen und kreuzen. Ähnlichkeiten im Großen und Kleinen.

Durch die Betrachtung von mathematischen Darstellungen als Zeichenspiele rückt der Gebrauch der mathematiküblichen Inskriptionen in den Vordergrund. Im Sinne von Wittgenstein entsteht in diesen Zeichenspielen Bedeutung durch die Regeln der Inskriptionsverwendung. Der Vermittlung und Verdeutlichung der geltenden Regeln muss daher im Unterricht entsprechend viel Aufmerksamkeit geschenkt werden.

Der im vorliegenden Aufsatz verwendete Regelbegriff ist ebenfalls an jenem von Wittgenstein orientiert. Im Sinne von Wittgenstein werden Regeln „nicht durch die logische Summe ihrer Beispiele explizit definiert“ (Hoffmann, 2007, S. 1). Hoffmann (2007, S. 1) schreibt weiter:

Die Regel wird durch eine nicht weiter hintergehbare Ähnlichkeit gegeben, die unter den zu ihrer Definition angegebenen Beispielen besteht. Diese Ähnlichkeit wird durch jedes neu hinzukommende Beispiel fortgeschrieben, verengt, verändert oder auch erweitert. [...] Das Erlernen von Regeln beinhaltet daher immer zwei Punkte: Einerseits die Erkennung ihrer Anwendungskriterien in konkreten Situationen, d.h. die Subsumption einer Erfahrung unter der jeweiligen Regel. Andererseits die spezifische Fortschreibung, die Veränderung, die Verengung oder Erweiterung der Regel aufgrund jeder neuen Erfahrung.

Korrekte Regelanwendung ist im Zusammenhang mit Mathematik nicht einfach. Man muss beispielsweise wissen, welche Regeln in welchen Kontexten der Verwendung von Inskriptionen überhaupt Gültigkeit besitzen. Zusätzlich muss man erkennen, welche Anwendungskriterien in einer konkreten Situation die Verwendung einer bestimmten Regel rechtfertigen. Darüber hinaus ist im Zusammenhang mit Mathematik die Beachtung von Regeln alleine schon aufgrund der vielen möglichen Beispiele, die alle zumindest partiell verschiedene Regelverwendung verlangen, nicht einfach. Regeln müssen also ständig nicht nur fortgeschrieben, sondern auch verengt oder erweitert werden. Die Fähigkeit korrekter Regelauslegung erfordert in der Mathematik also die Subsumption vieler verschiedener Spezialfälle. Regelanwendung ist also selbst nicht durch eine allgemein gültige Regel beschreibbar.

### 3 Zur Inskriptionsverwendung

Zunächst etwas Grundlegendes. Mathematische Inskriptionen müssen schreibregelkonform sein. Nicht jede beliebige Linie kann etwa als „gerade Linie“ verwendet werden. Auch in der Mathematik müssen Inskriptionen Schreibtypen wie etwa

a, a, a, a, a, a

entsprechen. Im Zusammenhang mit diesen Schreibtypen geht es aber nicht nur um Schreibregeln, es geht auch um Wiedererkennung. Um eine empirisch vorkommende Inskription als Verkörperung eines generellen Typus identifizieren zu können, geht es nach Krämer (2009, S. 101) um eine Wiedererkennungsleistung, die auf der Vernachlässigung von Aspekten der sinnlichen Erscheinung beruht. Eine Theorie, die in diesem Zusammenhang von Bedeutung sein könnte, ist die der „Prototypen“ nach Lakoff (1987). Wahrscheinlich erlernt man Herstellungsweisen von Inskriptionen, indem man sich an Prototypen orientiert.

#### 3.1 Zur Vermittlung des Wittgenstein'schen Konzepts „Bedeutung durch Inskriptionsgebrauch“

Im Schulunterricht kann relativ leicht vermittelt werden, dass Inskriptionen generell und speziell in der Mathematik keine feste Bedeutung haben. Beispiel: Der angeführte Strich (Abb. 1) kann ein Zeichen für eine bestimmte Länge, für eine bestimmte Breite, für schwarz, für die Trennung von oben-unten, für eine Bewegung von links nach rechts, für eine Geste, für unendlich viele Punkte usw. sein. Ein Zeichen zu sein kann nach dem Sprachgebrauch des vorliegenden Artikels als „Bedeutung erhalten durch“ interpretiert werden. Ein Strich kann eben in gewissen Kontexten Bedeutung genau dadurch erhalten, dass er etwa als Trennlinie verwendet wird.

Abb. 1: Der angeführte Strich kann auf unterschiedlichste Art und Weise Bedeutung erhalten.

Auch in der Mathematik haben Inskriptionen keine feste Bedeutung. Der oben angeführte Strich hat etwa als „Strecke“ eine andere Bedeutung als als „Strahl“ oder „Gerade“. Die Inskription „2413“ hat im Sechssystem eine andere Bedeutung als etwa im Fünfer- oder Zehnersystem. Die gleichen vier schreibregelkonformen Striche etwa einer Handzeichnung können als Quadrat, als Rechteck, als Parallelogramm, als Raute oder als Deltoid verwendet werden. Die Inskription  $\circ$  kann als Kreis, als runde Scheibe (das Innere beinhaltend), als rundes Loch (das Innere nicht beinhaltend), als Kegelschnitt, als Jordankurve, als Zeichen für „Verkettung“ usw. verwendet werden (Beispiel von Stjernfelt, 2007). Es ließen sich hier unzählige weitere Beispiele anführen. Im Zusammenhang mit all diesen Beispielen können die unterschiedlichen Verwendungsregeln benannt oder gegebenenfalls von den Schülern/innen in reflektierender Rückschau beobachtet werden. Beim obigen Beispiel des angeführten Striches als „Strecke“, „Strahl“ oder „Gerade“ sind es etwa Verwendungsregeln wie: In allen drei Fällen wird der Strich als „gerade“, „ohne Breite“ und „ohne Höhe“ verwendet. Als Strecke wird er als „Länge“ oder als „kürzeste Verbindung zweier Punkte“ verwendet. Als Strahl wird er als „von einem Anfangspunkt ausgehend“, „ohne Ende“ und als „orientiert“, als Gerade wiederum „ohne Anfangs- und Endpunkt“ und als „unendlich lang“ verwendet. In der Mathematik bedingen also Bedeutung und Inskriptionsverwendung einander. Begriffe (Objekte, Gegenstände) wie die angeführten können daher zunächst einmal als Bezeichnungen für Inskriptionen und deren Gebrauch betrachtet werden. Erst durch die Verwendung und die dabei geltenden Regeln werden Inskriptionen zu mathematischen Objekten. Dies kann den Schüler/innen leicht vermittelt werden.

Eine Möglichkeit, das Konzept „Bedeutung durch Gebrauch“ zu veranschaulichen, ist auch jene von Analogien aus der außermathematischen Erfahrungswelt der Schüler/innen. Wittgenstein hat etwa selbst eine Fülle von Spielvergleichen gebracht. Er veranschaulicht etwa das obige Konzept anhand der Spielfiguren im Schachspiel (aus Epple, 1994, S. 127):

Wenn ich sage: ‚Jetzt werde ich mir eine Königin anschaffen mit ganz furchtbaren Augen, die wird alles aus dem Feld schaffen‘, so werden Sie lachen. Es ist egal, wie ein Bauer aussieht. Es ist vielmehr so, dass die Gesamtheit der Spielregeln den logischen Ort des Bauern ergibt.

Mithilfe von Vergleichen im Zusammenhang mit Alltagserfahrungen der Schüler/innen kann die Tatsache, dass Inskriptionen, Spielfiguren, Spielkarten, Gegenstände usw. keine feste Bedeutung haben, sondern deren Bedeutung von den jeweiligen Verwendungsregeln abhängt, leicht veranschaulicht werden. Beispiele: Mit

denselben Spielkarten kann man nach unterschiedlichen Regeln Rommé, Canaster oder Bridge spielen. Ein Holzstock kann als Besenstil, als Trennstück zwischen zwei Wettkampfparteien, als Bruchstrich eines in den Sand geschriebenen Bruches, als Zeigestab usw. verwendet werden. Ein Stück Karton kann als Regenschirm verwendet werden usw. Beim Schachspiel könnte man „Dame“ und „König“ oder bei verschiedenen Kartenspielen „Unter“ und „Ober“ ohne Probleme vertauschen. Wenn die Spielenden damit einverstanden wären, bereitete dies keine Probleme. Analog könnte das Verkehrszeichen „Vorrang geben“ etwa mit jenem für „Stopp“ getauscht werden. Usw. Es kann aber auch leicht vermittelt werden, dass sich mathematische Verwendungen von Inskriptionen von außermathematischen unterscheiden können. Es gelten jeweils unterschiedliche Regeln. Beispiel: Die Inskription „ $6/8$ “ wird als Bruch nach vollkommen anderen Regeln als als Taktbezeichnung verwendet.

Das Wittgenstein'sche Konzept „Bedeutung durch Gebrauch“ kann nicht nur durch inner- und außermathematische Beispiele, sondern auch durch Sprechweisen wie „Wir verwenden diese Inskription(en) so und so“ oder „Wir verwenden diese Inskription(en) als ‚Begriff (Objekt, Gegenstand)‘ so und so“ im Zusammenhang mit Prozessen der Erarbeitung neuer Lerninhalte und der reflektierenden Rückschau zu einem festen Bestandteil des Unterrichts gemacht werden. Auf diese Weise werden Inskriptionen ohne Referenz verwendet. Die mathematischen Inskriptionen sind die Inskriptionen selbst in einer Verwendung nach bestimmten Regeln. Dies ist bei einem anderen Sprachgebrauch nicht so. Schreibt man etwa am Anfang des Geometrieunterrichts „Linien haben keine Breite“ (genau so habe ich das in Schulbüchern wie etwa Kraker, Plattner, Preis, 2010, S. 40 gefunden), so können die tatsächlich verwendeten Linien nicht die Linien der Mathematik sein. Es wird eine referentielle Sicht auf ideale, abstrakte mathematische Linien eingeführt. In diesem Sinne können „Sprechweisen der Verwendung“ anstelle von „Sprechweisen der Existenz“ helfen, die Inskriptionen selbst als verwendete Inskriptionen im Zeichenspiel auftreten zu lassen.

### 3.2 Zur Referenz der Inskriptionen

„Üblicherweise“ werden mathematische Inskriptionen als Darstellungen gesehen. Sie repräsentieren abstrakte, implizit existente mathematische Objekte (Gegenstände). Diese abstrakten Objekte sind aber nicht beobachtbar. Dem gegenüber sind Verwendungen von Inskriptionen und die dabei geltenden Regeln beobachtbar, beschreibbar, vergleichbar, kommunizierbar und häufig auch nachahmbar. Es bleibt im Normalfall auch gar nichts anderes übrig, als die „realen“ Inskriptionen zu beobachten, diese zu vergleichen und über diese zu sprechen. Durch die Konzentration auf Inskriptionen und deren Gebrauch kann vieles (möglicherweise alles) ohne die Metaphysik (oder zumindest Metapher oder Sprechweise) existenter mathematischer Objekte erklärt werden. Erklärungsweisen werden so möglicherweise für

Schüler/innen naheliegender und nachvollziehbarer. Beispiel: Die Erklärungsweise, dass die gleichen vier schreibregelkonformen Striche jeweils nach gleichen und unterschiedlichen Verwendungsregeln der involvierten Inskriptionen als Quadrat, als Rechteck, als Parallelogramm, als Raute oder als Deltoid gedeutet werden können und erst durch die Verwendungsregeln zu einem dieser Objekte werden, erscheint für Lernende wahrscheinlich nachvollziehbarer als die Erklärungsweise, dass diese Inskriptionen gleichzeitig verschiedene mathematische (abstrakte, existente) Objekte repräsentieren. Durch deren Beobachtbarkeit können die jeweiligen Regeln, Regelgleichheiten und Regelunterschiede der Inskriptionsverwendung von Schülern/innen selbst herausgefunden werden. Es müssen nicht Regeln unsichtbarer Inskriptionen „erahnt“ werden. Die Betonung der Beobachtbarkeit der Inskriptionsverwendungen und der geltenden Regeln kann auch der gängigen Meinung, „dass Mathematik abstrakt ist“, entgegenwirken. Nach Dörfler (2006) hängt die Sichtweise, „dass Mathematik abstrakt ist“ eng mit jener von mathematischen Inskriptionen als Repräsentationen von abstrakten mathematischen Objekten zusammen. Sie ist nach Dörflers Meinung eine der Hauptursachen für Ängste und Frustrationen der Schüler/innen.

Im vorliegenden Aufsatz wird öfters die Schreibweise „Begriffe (Objekte, Gegenstände)“ verwendet. Es wird damit angedeutet, dass man in den gegebenen Zusammenhängen zumindest Begriffe benötigt. Ob man zum Betreiben und Vermitteln von Mathematik aber auch abstrakte mathematische Objekte und/oder Gegenstände benötigt, wird hier nicht explizit diskutiert. Die bisherigen Ausführungen und speziell die Ausführungen im Zusammenhang mit dem Phänomen der multiplen Darstellung mathematischer Objekte (Abschnitt 4) können aber als Beitrag zu dieser Diskussion verstanden werden.

### 3.3 Konsequenzen der Inskriptionsverwendungen

Die Verwendungen von Inskriptionen sind realitätsstiftend (vgl. Brunner, 2015). Sie haben Konsequenzen. Es werden durch sie Regeln implementiert und andere Verwendungen ausgeschlossen. Verwendet man etwa eine Linie als „gerade“ so kann sie nicht gleichzeitig etwa als „rund“ verwendet werden. Verwendet man Striche im Zusammenhang mit einem Rechteck ohne „Breite“, so muss man sich etwa bei der Berechnung der Fläche um die Strichbreite keine Gedanken machen. Die mathematischen Zeichenspiele sind durch einen festen Regelrahmen bestimmt. Dieser Regelrahmen bestimmt das Mögliche. Wie bei den Regeln eines Spiels darf es dabei keine Ungeklärtheiten geben. Wittgenstein (2003, S. 77) schreibt: „Es ist doch kein Spiel, wenn es eine Vagheit in den Regeln gibt“. Insofern müssen Spielende, welche die Regeln kennen und mit ihnen vertraut sind, immer entscheiden können, ob Verwendungen etwa von Spielfiguren erlaubt sind oder nicht. Daneben ist der Umgang mit dem Rahmen der möglichen Handlungen für den Spielerfolg entscheidend. Will man gut spielen, so muss man den Rahmen des Möglichen der



jeweiligen Rollen der Spielfiguren (Spielkarten usw.) ausschöpfen können. Ähnliches geschieht beim Betreiben von Mathematik. Inskriptionen übernehmen Rollen in den Zeichenspielen der Mathematik. Beispiel: Die Rolle eines Strichs als „Höhe im Dreieck“ wird durch die Regel „von einer Seite normal in die gegenüber liegende Ecke“ festgelegt. Die Ausformung der Rolle ist keine rein private Angelegenheit. Sie muss in Übereinstimmung mit der „community of practice“ erfolgen. Es darf auch in der Mathematik keine Vagheiten hinsichtlich der Regeln geben. Die Zuordnung von Inskriptionen und Rolle muss vorgegebenen Regeln genügen. Auch in den Zeichenspielen der Mathematik muss man, um erfolgreich sein zu können, den Rahmen der möglichen Handlungen mit den jeweiligen Inskriptionen auszuschöpfen imstande sein.

Viele Konsequenzen der implementierten Verwendungsregeln werden erst mithilfe von Experimenten sichtbar. Dabei kann das epistemologische Potential der mathematischen Zeichenspiele nur entfaltet werden, wenn man zur kreativen operativen Nutzung derselben imstande ist. Nur so kann man diese zur Herleitung von Kenntnissen verwenden. Die Ergebnisse der durchgeführten Experimente können dabei durchaus überraschend sein. Es ist beispielsweise nicht von vornherein einsichtig, dass Dreiecke in Halbkreisen immer rechtwinklig sind oder bei rechtwinkligen Dreiecken die Summe der Quadrate über den Katheten dem Quadrat über der Hypotenuse entspricht. Die durch zielgerichtetes und kreatives Operieren gewonnenen Kenntnisse stimmen im Gegensatz zu Kenntnissen, die empirisch gewonnen wurden, immer. Die Ursache liegt in der Regelhaftigkeit der Verwendung schreibregelkonformer Inskriptionen. Im Gegensatz zu empirischen Experimenten der Naturwissenschaften gibt es keine Unbestimmtheiten. Führt man mit schreibregelkonformen Inskriptionen bestimmte Experimente regelkonform durch, so führt dies unausweichlich zu bestimmten Ergebnissen. Diese Ergebnisse sind Kenntnisse, die Vorhersagen im Zusammenhang mit bestimmten Verwendungen nach den Regeln bestimmter Zeichenspiele erlauben. In unserer Sprache könnte man sagen, es sind Regeln, die in der Folge unser mathematisches Handeln im Umgang mit entsprechenden mathematischen Zeichenspielen anleiten können. Beispiele: Verwendet man in einem Dreieck zwei Striche als gleich lang, so lässt sich daraus regelkonform folgern, dass zwei Winkel gleich groß sein müssen. Verwendet man hingegen drei Striche als gleich lang, so wird man durch geeignete Transformationen und Überlegungen in der Folge feststellen, dass alle Winkel gleich groß, nämlich  $60^\circ$  sein müssen und Umkreismittelpunkt, Schwerpunkt und Höhenschnittpunkt in einem Punkt zusammenfallen. Würde man die Ziffernreihenfolge im Zusammenhang mit den Zahlzeichen etwa so verändern: „1, 0, 3, 2, 5, 4, 7, 6, 9, 8“, so wäre eine natürliche Zahl genau dann gerade, wenn ihre Entziffern 1, 3, 5, 7, 9 wären. Verwendet man  $f(x) = x^3 - 9x^2 + 18x$  nach den geltenden Regeln des Riemann-Integrals und integriert man dieses Polynom von 0 bis 6, also über die Nullstelle  $N(3|0)$  hinweg, so wird man die Erfahrung machen, dass die so erhaltene Fläche

das Maß 0 hat. Man wird also feststellen, dass man, sofern man eben die Fläche zwischen Kurve und  $x$ -Achse berechnen will, das Intervall bei der Nullstelle teilen und den Betrag der Maßzahl des unter der  $x$ -Achse liegenden Flächenstücks nehmen muss. Die Erfahrung dieser Form von Unausweichlichkeit fällt niemandem automatisch zu. Sie erfordert große Vertrautheit mit den Regeln und Verwendungen der Inskriptionen in den mathematischen Zeichenspielen.

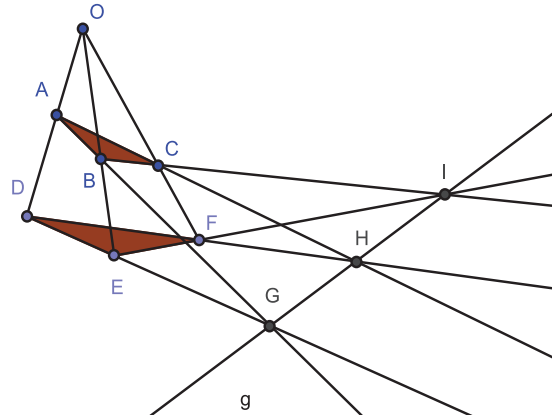


Abb. 2: Der Satz von Desargues anschaulich dargestellt. Zwei Ebenen schneiden sich in einer Geraden (Grafik ähnlich wie bei Hilbert, Cohn-Vossen, 1932, 1996; erstellt mit GeoGebra).

Die Zuordnung der Verwendungsregeln hat großes epistemologisches Potential. Beim Beweis des Satzes von Desargues über zwei in einer Perspektive liegende Dreiecke werden etwa nach der Methode von Staudt exakt die gleichen Inskriptionen nach anderen Regeln als bei anderen Beweisen verwendet. Inskriptionen, die zunächst als „Dreieck in der Ebene“, „Punkt in der Ebene“ oder „Gerade in der Ebene“ verwendet wurden, werden nun in räumlicher Perspektive verwendet (Abb. 2).

### 3.4 Inskriptionen und Zeichensysteme

Man kann nicht nur die Mathematik generell sondern auch jede mathematische Darstellung als Zeichenspiel betrachten. In Anlehnung an das „Darstellungssystem“ nach Peirce (vgl. Hoffmann, 2005, S. 11) kann man diese Zeichenspiele aufgrund der verwendeten schreibregelkonformen Inskriptionen zu Zeichensystemen zusammenfassen. In solchen Zeichensystemen existieren Regeln und Konventionen für die Erstellung von Inskriptionen. Es gibt Regeln für die Verwendungen der Inskriptionen und durch die erforderliche Akzeptanz dieser Regeln eine Art eigener

Realität. Es gibt Regeln für das Operieren mit den Inskriptionen. Es ist festgelegt, welche Transformationen zugelassen sind und welche nicht. Mit der Veränderung des Systems können sich auch diese Regeln verändern. Innerhalb des Systems gibt es einen Regelrahmen, durch welchen die möglichen Handlungen bestimmt werden. Der bestehende Handlungsrahmen kann nur ausgeschöpft werden, wenn man zur kreativen operativen Nutzung desselben imstande ist. Die Begriffe „Darstellungssystem“ bzw. „Zeichensystem“ müssen sicher noch besser erforscht werden. Es gibt aber bei den Zeichenspielen der Geometrie oder jenen der Algebra so etwas wie Familienähnlichkeiten bzgl. der Erstellung der Inskriptionen, der Verwendungsmöglichkeiten der Inskriptionen oder der zugelassenen Transformationen. Im vorliegenden Aufsatz wird im Wesentlichen nur zwischen dem Zeichensystem „Geometrie“ und dem Zeichensystem „Algebra“ unterschieden. Vom Zeichensystem „Stellenwert“ wird im Zusammenhang mit Zahlzeichen gesprochen.

#### **4 Bedeutungsherstellung durch Inskriptionskombination und Inskriptionsersetzung**

Im Zusammenhang mit mathematischen Inskriptionen verdienen nicht nur die Inskriptionen selbst Beachtung. Eine besondere Rolle spielt auch das Zeichenblatt. Die Bedeutung der Inskription in Abbildung 3 kann wiederum durch die „Verwendung als“ (Strecke, Strahl, Gerade) festgelegt werden. Wofür steht aber das Zeichenblatt? Zur Sensibilisierung der Schüler/innen können Verwendungsmöglichkeiten des Zeichenblatts erkundet werden. Es geht hier um Fragen wie: Wird das Zeichenblatt als Ebene mit unendlicher Ausdehnung oder als gar nichts verwendet? Falls die Inskription für eine Gerade steht, kann es sich dann nur um eine Ebene mit unendlicher Ausdehnung handeln? Falls es sich um einen Ausschnitt aus dieser Ebene mit unendlicher Ausdehnung handelt, kann dieser Ausschnitt dann auch eine endliche Ausdehnung haben, müsste dann der Strich aber nicht bis zu den Zeichenblatträndern verlängert sein? Wie muss die Verwendung des Striches erfolgen, damit er „Ebenheit“ formuliert? Ohne Höhe? Ist die Bedeutung des Zeichenblatts also nicht Teil der Inskriptionsverwendung? Gibt es nun schon eine Lage der Gerade? Wie wirkt sich die Leserichtung „von links nach rechts“ aus? Fällt die Gerade etwa? Usw. Ein genereller Gesichtspunkt verdient in diesem Zusammenhang auch noch Beachtung. Krämer (2012, S. 80) betont im Zusammenhang mit der Zweidimensionalität der Fläche einen Aspekt, der „im phonographischen Schriftverständnis unterbelichtet, wenn nicht sogar ausgeblendet“ ist.

Mediales Charakteristikum des Sprechens ist die Sukzession der Laute in der Zeit. Im Rahmen des phonographischen Schriftverständnisses wurde diese zeitliche Linearität umstandslos auf das räumliche Nebeneinander der Buchstabenfolgen übertragen. Übersehen ist damit allerdings, dass zu Texten kondensierte Schriften von der Zweidimensionalität der Fläche Gebrauch machen und sich damit dem „Linearitätsdogma“ der Schrifttheorie keineswegs fügen.

Mathematische Inskriptionen werden nicht nur von links nach rechts gelesen. Man liest sie quasi in alle erforderlichen Richtungen und das wiederholend. Auch dieser Aspekt ist leicht beobachtbar und thematisierbar.

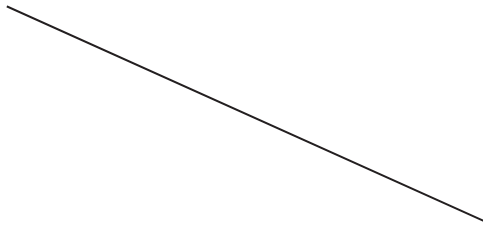


Abb. 3: Es kann nicht nur die Verwendung der angeführten Linie, es können auch Verwendungsmöglichkeiten des Zeichenblattes als Ebene diskutiert werden.

Eine Möglichkeit Bedeutungsherstellung sichtbar zu machen, ist die „Entflechtung“ der Zeichenspiele. Man nimmt Inskription nach Inskription hinzu. So kann an konkreten Beispielen Bedeutungsherstellung detailliert sichtbar gemacht bzw. von den Schülern/innen selbst beobachtet werden. Diese Methode kann sowohl in reflektierender Rückschau auf bereits Gelerntes, als auch beim Erarbeiten neuer Lerninhalte angewandt werden. Im Folgenden sind nun konkrete Beispiele angeführt.

#### 4.1 Inskriptionen aus einem Zeichensystem

Zunächst ein Beispiel zur Bedeutungsherstellung mithilfe von Inskriptionen der Geometrie. Durch die Kombination von Inskriptionen und die weitere Festlegung von Regeln können neue Bedeutungen geschaffen werden. In Abbildung 4 werden drei Linien miteinander kombiniert. Verwendet man alle drei Linien als unendlich lang, ohne Breite, ohne Höhe und zwei der Linien als orthogonal zueinander stehend, so sind neue Bedeutungen gegenüber Abbildung 3 herstellbar. Alle drei Linien werden als „Geraden“ verwendet, zwei heißen nun aber „Achsen“. Es treten neue skripturale Phänomene auf (hier in den gewohnten mathematischen Sprechweisen formuliert): Schnittpunkte, Achsenabschnitte, Winkel. Es ist auch so etwas wie die Lage der Geraden herstellbar. Die Gerade geht hier etwa durch die Quadranten 1, 3 und 4, aber nicht durch 2. Verwendet man die dritte Linie als Strecke, so kann diese Linie auch als kürzeste Verbindung von Anfangs- zu Endpunkt verwendet werden usw. Dieses geometrische Zeichenspiel kann nun im Sinne des Zeichensystems „Geometrie“ auf die gewohnte Weise erweitert werden. Mit jeder neuen Inskription wird die Anzahl der Regeln erhöht. Es können neue Bedeutungen hergestellt und so die Gestaltungsmöglichkeiten ständig vermehrt werden.

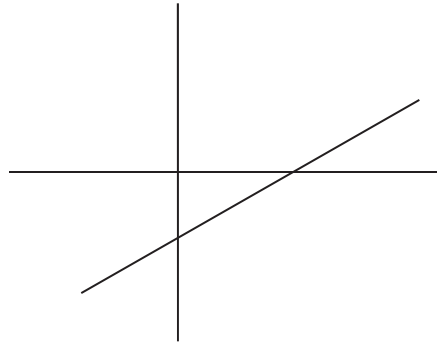


Abb. 4: Durch die Kombination von Inskriptionen entstehen neue beobachtbare skripturale Phänomene. Die Namensgebung ist als Basis der Begriffsbildung Teil der Bedeutungsgebung.

An dieser Stelle sei eine wichtige Komponente im Zusammenhang mit der Bedeutungsgebung hervorgehoben: die Einführung der Sprechweisen. Beispiele wie das obige können gut in dieser Hinsicht im Unterricht verwendet werden. Die herstellbaren skripturalen Phänomene können zunächst ohne Namen behandelt werden. Durch eine derartige vorübergehende „Entkopplung“ von skripturalem Phänomen und Namen/ Begriff kann die Funktion von Namen bzw. von Begriffen für die Schüler/innen verdeutlicht werden. Beispiel: Durch die beiden neuen Linien (Achsen) können vier verschiedene Bereiche des Zeichenblattes in der Verwendung als Ebene (also in unendlicher Ausdehnung) unterschieden werden. Hier kann etwa erkundet werden welche Vorteile die Benennung und Nummerierung der Bereiche bringt. Analog können andere herstellbare skripturale Phänomene identifiziert, beschrieben und in der Folge mit den üblichen Namen versehen werden. Es kann in der Folge auch anhand konkreter skripturaler Phänomene der Weg vom Namen zum Begriff skizziert werden.

Auf gleiche Art und Weise kann der Ausbau anderer Zeichensysteme entflochten werden. Schritt für Schritt kann wieder beobachtet werden, wie durch die Hinzunahme von Inskriptionen neue Bedeutungen hergestellt werden. Dabei kann man fallweise auch auf die „Anfänge“ der Zeichensysteme zurückgehen. Beim Stellenwertsystem kann beispielsweise von Strichlisten ausgehend die Wirksamkeit der Bündelung von Strichen und damit die Überführung eines additiven in ein multiplikatives System beobachtet werden. Beim gewohnten Stellenwertsystem erhalten die Inskriptionen (Ziffern) „0“, „1“, „2“ usw. ihre Bedeutung in den Zahlzeichen durch deren Verwendung nach den Regeln verschiedener Positionsspiele. Auch hier ist ein zentrales Element der Erweiterung der Bedeutung die Kombination von Inskriptionen (Ziffern). Der schrittweise Bedeutungsausbau durch die Schaffung neuer Zahlzeichen erfordert Regelfortschreibungen und Regelveränderungen. Bei-

spiel: Einerseits bleibt auch bei der Kombination von mehreren Ziffern in den Zahlzeichen die Regel „0“ vor „1“ vor „2“ usw. im Zusammenhang mit der letzten Stelle wirksam, andererseits benötigt man neue Regeln wie etwa „Zahlzeichen mit  $n$  Ziffern folgen nach Zahlzeichen mit  $m$  Ziffern falls  $n > m$ “. Bei der Verwendung der Zahlzeichen als Zahlen geht der Ausbau der Zahlenmengen mit der Kombination von Zahlzeichen und der Ersetzung derselben mithilfe von Operationsregeln einher. Es wird u. a. in diesem Sinn neue Bedeutung hergestellt:

$$5 = 6 - 1 = -2 + 7 = 40 : 8 = 4,7 + 0,2 + 0,1 = 6, \overline{6} - 1, \overline{6} = \text{usw.}$$

Beim Umrechnen von Zahlzeichen eines Stellenwertsystems in ein anderes geht es wiederum um Zeichenersetzung. Aufgrund von geänderten Inskriptionsanzahlen (beim Sechssystem kommen beispielsweise nur die Ziffern „0“, „1“, „2“, „3“, „4“, „5“ vor) sind auch hier Regelanpassungen erforderlich. Für die Schüler/innen gibt es im Zusammenhang mit dem Ausbau des Dezimalsystems und der Zahlenmengen neben den angeführten viele weitere Beobachtungsmöglichkeiten. Hier eine ungewöhnliche. Es kann beispielsweise Zeichenökonomie zum Kriterium der Beobachtung gemacht werden. Beispiele für Fragestellungen: Welchen Vorteil hätte es, wenn Computer intern nicht mit dem Zweier- sondern mit dem Zehnersystem rechnen würden? Welche Additionen können durch Multiplikationen ersetzt werden und welche Vorteile bringt die Multiplikation?

Ein weites Feld für Beobachtungen im Zusammenhang mit der Herstellung von Bedeutung bietet die Algebra. Im Hinblick auf zu erreichende Ziele wie etwa der Lösung von Gleichungen wird genau die Verwendung der involvierten Inskriptionen nach den Regeln der Algebra zum bedeutungsgebenden Element. Dies kann den Schülern/innen mithilfe von Beispielen vermittelt werden. Beispiel:  $a(b + c) = ab + ac$ . Durch diese Vorschrift wird die Verwendung der Inskriptionen  $a$ ,  $b$  und  $c$  genau im gegebenen Fall geregelt. Von links nach rechts gelesen ist dies eine Regel für das Klammern auflösen, von rechts nach links eine Regel für das Herausheben eines gemeinsamen Faktors. Die involvierten Inskriptionen können im Zeichenspiel der Algebra aufgrund der Zielorientiertheit, es soll etwa eine Gleichung gelöst werden, genau im Hinblick auf eine derartige Regel Bedeutung erhalten. Ein Beispiel: Wegen

$$\frac{ab + ac}{a} = \frac{a(b + c)}{a} = b + c \quad \text{und} \quad \frac{ab + ac}{a} = b - 2$$

gilt  $c = -2$ .

#### 4.1.1 Das Bild der Rolle als Hilfe im Unterricht

Wie bereits angedeutet kann die Bedeutung der Inskriptionsverwendungen in den jeweiligen mathematischen Zeichenspielen mit dem Bild der „Rolle“ beschrieben werden. Inskriptionen spielen Rollen in den mathematischen Darstellungen. Die Rolle ist die Verwendung der Inskriptionen nach den geltenden Regeln. Sie be-

stimmt die Bedeutung im Zeichenspiel. Gerade das Bild der „Rolle“ kann Schülern/innen leicht bewusst gemacht werden. Es kann gut als Erklärungshilfe eingesetzt werden. Schüler/innen sind es gewohnt, Rollen zu spielen: als „Pfadfinder“, „Klassensprecher“, „Klassenordner“, „Schauspieler“ usw. Auch diese „alltäglichen“ Rollen sind regelbestimmt. Die Rolle von Inskriptionen in der Mathematik wird durch das jeweilige Zeichenspiel bestimmt. Die geltenden Regeln können von den Schülern/innen benannt werden. Beispiel: Rolle eines Striches als „Schwerelinie im Dreieck“: „vom Halbierungspunkt der Seite in die gegenüber liegende Ecke“. Speziell in der Algebra kann die Rolle von Inskriptionen gut thematisiert werden. Beispiel: Wegen  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  bleibt bei  $(a + 3z)^2$  die Rolle von  $a$  gleich,  $3z$  muss aber in der Rolle von  $b$ , also dergestalt  $a^2 + 2a(3z) + (3z)^2$  verwendet werden. „ $3z$ “ erhält im gegebenen Kontext genau durch die angeführte Rolle Bedeutung. Häufig beziehen sich Zeichenspiele der Mathematik gerade im Hinblick auf bestimmte Rollen aufeinander. Rollen von Inskriptionen in einem Zeichenspiel können durch ein anderes Zeichenspiel sichtbar gemacht werden. Beispiel: Im Zeichenspiel  $a^x = b$  haben  $a$ ,  $x$  und  $b$  verschiedene Rollen. Will man  $\log_a b$  verstehen, so muss man zunächst die spezielle Rolle von  $x$  in  $a^x = b$  verstehen.

#### 4.1.2 Die Vermittlung von Typen als didaktische Herausforderung

Neben der „Rolle“ sind auch Typen im Zusammenhang mit der Bedeutungsherstellung wichtig. Die einzelnen Darstellungstypen können nach Brunner (2013) als Äquivalenzklassen über Inskriptionen, die im Hinblick auf deren Verwendung gebildet werden, betrachtet werden (Abb. 5):

1.  $2 + 3i \sim 3 + 7i \sim a + bi$

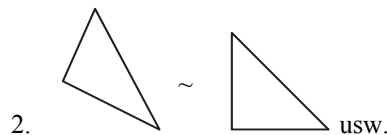


Abb. 5: Die angeführten Inskriptionen gehören im Hinblick auf die Verwendung als „Komplexe Zahl“ (1.) als „Dreieck“ (2.) zur gleichen Äquivalenzklasse.

Die Bedeutung der Inskriptionen ist bei den angeführten Beispielen (Abb. 5) genau im Hinblick auf den Typ die gleiche. „Verschiedene“ Inskriptionen werden nach gleichen Regeln verwendet. Speziell im Zusammenhang mit den Inskriptionen der Algebra sind Typisierungen von großer Bedeutung. Die Vermittlung von Typen erfolgt im Wittgenstein’schen Sinn durch die Erläuterung des Inskriptionsgebrauchs. Man führt entsprechende Beispiele an und beschreibt den Umgang mit ihnen. Erste Beispiele haben dabei die Funktion von Prototypen. „Sie tragen den Typ schon in sich“. Er muss von den Lernenden aber erst freigelegt werden. Beispiel:

$$\frac{2-z}{4-z^2} = \frac{1}{2+z}$$

Die Erläuterung der Inskriptionsverwendung besteht vor allem in der Besprechung der wirksamen Regeln. Im vorliegenden Fall geht es dabei um Transformationsregeln wie die folgenden:

$$\frac{2-z}{4-z^2} = \frac{(2-z)}{(2+z)(2-z)} = \frac{1}{2+z}$$

Die Bedeutung der Inskriptionsverwendung liegt im gegebenen Fall in der Möglichkeit des Kürzens. Die Übertragung der Inskriptionsverwendung und damit die Herstellung der gleichen Art von Bedeutung in einem anderen Fall von Inskriptionen der gleichen Äquivalenzklasse kann anfänglich unter Umständen sehr einfach sein und nur aus einer Zeichenersetzung („Namensänderung“) wie  $z = c$  bestehen.

$$\frac{2-z}{4-z^2} = \frac{1}{2+z} \sim \frac{3-c}{9-c^2} = \frac{1}{3+c}$$

Allgemeinheit im Sinne des Typs ist dabei keine Angelegenheit von bestimmten Inskriptionen. Sie ist eine Angelegenheit der Inskriptionsverwendung. Man kann

$$\frac{2-z}{4-z^2} = \frac{1}{2+z}$$

genauso allgemein wie

$$\frac{a-b}{a^2-b^2} = \frac{1}{a+b}$$

verwenden.

Typfreilegung ist eine Art der Bedeutungsherstellung durch Inskriptionsgebrauch. Wie bereits erwähnt ist eine Methode der Typfreilegung der reflektierende Vergleich mit Prototypen. Man kann jede der beiden obigen Darstellungen als Prototypen betrachten:

$$\begin{aligned} \frac{a-b}{a^2-b^2} &= \frac{1}{a+b} \sim \frac{2-z}{4-z^2} = \frac{1}{2+z} \sim \frac{a-c}{a^2-c^2} = \frac{1}{a+c} \sim \frac{2a-b}{4a^2-b^2} = \frac{1}{2a+b} \sim \\ &\sim \frac{3c-2b}{9c^2-4b^2} = \frac{1}{3c+2b} \sim \frac{4+(-b-c)}{16-(b+c)^2} = \frac{1}{4+(b+c)} \text{ usw.} \end{aligned}$$

Die Verwendungsregeln müssen jeweils von Beispiel zu Beispiel nicht nur fortgeschrieben, sondern auch verändert bzw. erweitert werden. Beim angeführten Beispiel muss etwa eine weitere Regel in Form des folgenden Zwischenschrittes beachtet werden:



$$\frac{4+(-b-c)}{16-(b+c)^2} = \frac{4-(b+c)}{16-(b+c)^2} = \frac{1}{4+(b+c)}$$

Bei der Übertragung von Verwendungen muss auch ständig auf die Einhaltung von Regeln anderer Verwendungen der gleichen Inskriptionen geachtet werden. Beim nachfolgend angeführten Beispiel muss die Übertragung der angeführten Inskriptionsverwendung etwa auch unter Beachtung der geltenden Regeln, die im Zusammenhang mit den Verwendungen als Bruch oder Integral stehen, erfolgen:

$$a = a + c - c \sim \int \frac{2x}{x^2 + 2x + 1} dx = \int \frac{2x + 2 - 2}{x^2 + 2x + 1} dx$$

## 4.2 Inskriptionen aus mehreren Zeichensystemen

### 4.2.1 Elementare Beispiele

Im Schulunterricht wird die Algebra meist nicht axiomatisch, sondern referentiell eingeführt. Variablen verweisen auf Zahlenmengen. Man geht von den Zahlenmengen aus, untersucht Rechenregeln, untersucht den Umgang mit Ausdrücken, die Variablen enthalten, und Wege zur Lösung algebraischer Gleichungen. Durch die referentielle Einführung ist Schülern/innen leicht vermittelbar, dass durch die Kombination von Inskriptionen des Zeichensystems „Stellenwert“ in der Verwendung als „Zahlen“ mit Inskriptionen des Zeichensystems „Geometrie“ geometrische Gebilde algebraisierbar werden. Man hat dadurch zwei involvierte mathematische Zeichensysteme: Geometrie und Algebra. Man kann eines zur Beschreibung des anderen verwenden. Dieser vertraute Zusammenhang kann leicht durch einfache Beispiele sichtbar gemacht werden (Abb. 6).

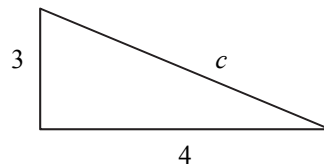


Abb. 6: Durch die Kombination von Maßzahlen mit Inskriptionen der Geometrie werden geometrische Zusammenhänge algebraisierbar. Es kann die Maßzahl  $c$  berechnet werden.

Durch die nun mögliche Algebraisierung kann  $c$  als Maßzahl der Länge berechnet werden. Es kann aber nicht nur ein Zeichensystem zur Beschreibung des anderen eingesetzt werden. Zeichensysteme können zur gegenseitigen Beschreibung verwendet werden. Wiederum zwei einfache Beispiele: Der Zusammenhang des Distributivgesetzes  $(a + b)c = ac + bc$  kann geometrisch dargestellt werden (Abb. 7).

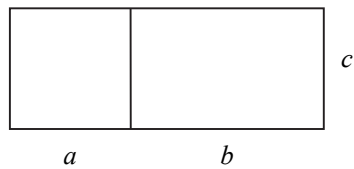


Abb. 7: Durch die Kombination von Inskriptionen entspricht die algebraische Darstellung  $(a + b)c = ac + bc$  im Hinblick auf die Rechtecksflächen der abgebildeten geometrischen Darstellung

Erkenntnisse in einem System können zu solchen im anderen System führen. Bedeutung in einem System kann auf Bedeutung im anderen System hinweisen. Betrachten wir die einfache Figur in Abbildung 8. Mithilfe eines einfachen geometrischen Experiments (Rechteck mit gestrichelten Linien) kann man erkennen, dass der Umfang von  $y$  unabhängig ist. Es gilt: „ $u = 2x + 2z$ “. Dies ist ein Hinweis dafür, dass diese Einsicht auch algebraisch herstellbar sein muss: „ $z + y + (z - y) + (x - y) + y + x = 2z + 2x$ “.

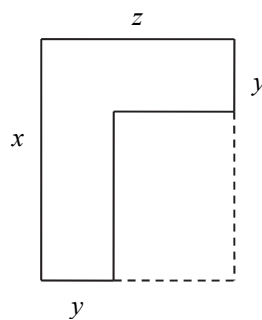


Abb. 8: Ein einfaches Experiment (gestrichelte Linien) führt zu einer algebraischen Erkenntnis:  $u = 2x + 2z$ . Umgekehrt kann eine algebraische Transformation zu einer geometrischen Erkenntnis führen.

#### 4.2.2 Reelle Zahlen und der Funktionsbegriff

Bei der Einführung der reellen Zahlen ist in der Schulmathematik das Zusammenwirken von algebraischen und geometrischen Zeichenspielen von besonderer Bedeutung. Die reellen Zahlen werden in der Schule im Normalfall weder axiomatisch, noch mithilfe von Intervallschachtelungen, Cauchyfolgen oder Dedekindschnitten eingeführt. Freudenthal (Danckwerts, Vogel, 2006, S. 33) empfiehlt folgende Vorgangsweise:

Man betrachte die reellen Zahlen als etwas Gegebenes, auf der Zahlengeraden. [...] Man analysiere die Zahlengerade mittels unendlicher Dezimalbrüche. Man fordere oder

deduziere aus den unendlichen Dezimalbrüchen topologische Eigenschaften der reellen Zahlen, sobald man sie wirklich verwendet. [...] Daß man sie (die reellen Zahlen) auch als Cauchyfolge oder als Dedekindscher Schnitt definieren kann, ist ein theoretischer Luxus.

Trotz der Tatsache, dass die reellen Zahlen so im Schulunterricht im Sinne von Freudenthal als etwas Gegebenes, also als abstraktes mathematisches Objekt erscheinen, lassen sich so gut wie alle schulrelevanten Verwendungen von Zahlzeichen als reelle Zahlen konstruktiv und anhand der Inskriptionsverwendungen beobachtbar herleiten. Die Dezimalbrüche können mithilfe von Inskriptionskombination und Inskriptionsersetzung, Regelfortschreibung und Regelerweiterung konstruktiv hergeleitet werden. Bei der Zahlengeraden werden geometrische Inskriptionen und Zahlen kombiniert. „1“ wird als Länge gedeutet. Die Marken für die irrationalen Zahlen sind mithilfe von geometrischen Konstruktionsmethoden (Beispiel:  $\sqrt{2}$  ist als Diagonale eines Quadrats der Seitenlänge 1 konstruierbar) oder mithilfe von Näherungsverfahren wie Heronverfahren oder Newtonverfahren exemplarisch setzbar. Die Zahlengerade wird so für die Schüler/innen zu einer „Darstellung“ der reellen Zahlen.

Das Zusammenspiel von Funktionsgleichung und Funktionsgraph (Eingangsfrage) kann ebenfalls zu vielfältigen Beobachtungen im Zusammenhang mit den Inskriptionsverwendungen, den involvierten Regeln und damit der Herstellung von Bedeutung genutzt werden. Beim Funktionsgraphen werden wiederum Inskriptionen der Zeichensysteme Geometrie und Zahlen kombiniert. Wie bei der Zahlengeraden werden die reellen Zahlen als Punkte auf nun zwei Koordinatenachsen veranschaulicht. Es werden dadurch auch Verwendungen der Achsen festgelegt. Aufgrund der Konstruktion der reellen Zahlen wird etwa jedes beliebig kleine Intervall der  $x$ -Achse als Ort unendlich vieler Punkte verwendet. Vieles wird nun aufgrund der beschriebenen Inskriptionskombination quantifizierbar und durch die Veranschaulichung der reellen Zahlen als Punkte auf den Koordinatenachsen auch algebraisierbar. Es ist nun möglich, Paare aus  $x$ - und  $y$ -Werten als Punkte der Ebene zu deuten. Man kann darüber hinaus den Abstand von Punkten oder die Länge von Strecken berechnen, die Größe von Winkeln bestimmen, Schnittpunkte von Geraden bestimmen usw. Es sind auch hier wieder Beobachtungen im Zusammenhang mit Verwendungsregeln der Inskriptionen möglich. Beispiele: Einige der Verwendungsregeln müssen adaptiert bzw. verändert werden. War ursprünglich bei der Zählwortreihe ein zeitlich „vorher-hinterher“ für die Position bestimmend, so ist es nun ein räumliches „weiter links-weiter rechts“ bei der  $x$ -Achse und ein „höher-tiefer“ bei der  $y$ -Achse. Durch das Zusammenspiel der Zeichensysteme Geometrie und Algebra sind auch Regelübersetzungen nötig. Beispiel: Eine Gerade wird geometrisch etwa als „gerade“ verwendet. Was heißt nun „gerade“ algebraisch? Die Bedeutung „gerade“ muss zunächst in eine geometrische Herstellung gebracht werden, die gut algebraisierbar ist.

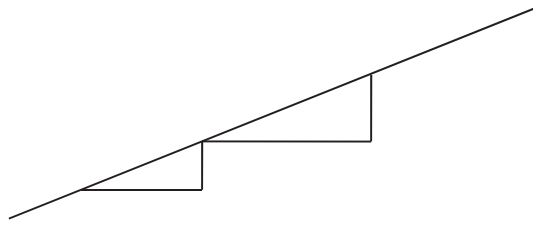


Abb. 9: Geradheit kann durch die angeführte geometrische Herstellung algebraisiert werden.

Zwei beliebige Punkte sind immer auf der derselben „geraden“ Gerade, wenn im zugehörigen „Steigungsdreieck“ immer dasselbe Verhältnis „Gegenkathete/Ankathete“ gegeben ist. Die Bedeutung „gerade“ wird so letztlich zur konstanten Steigung „ $k$ “ in „ $y = kx + d$ “.

Das Zeichensystem der Algebra kann nun durch die beschriebenen Inskriptionskombinationen zur Erzeugung geometrischer Gebilde genutzt werden. Funktionsgraphen können als unendliche Punktfolgen mithilfe von algebraischen Mitteln hergestellt werden. Algebraische Gleichungen der Form „ $y = f(x)$ “ werden dabei als Zuordnungsvorschrift verwendet. Die Zuordnung erfolgt nach der Regel: „jedem  $x$ -Wert wird genau ein  $y$ -Wert zugeordnet“. Diese Verwendungsregel wird als Eigenschaften einer so genannten „Funktion“ interpretiert. Sie hat Konsequenzen wie: die Abbildung  $y = f(x)$  ist eineindeutig,  $x$  ist eine unabhängige Variable,  $y$  ist eine abhängige Variable, „ $y = d$ “ ist eine „Funktion“ aber „ $x = d$ “ ( $d \in \mathbb{R}$ ) ist keine Funktion. Da es aber „real“ nicht möglich ist, unendlich vielen  $x$ -Werten jeweils einen  $y$ -Wert mithilfe einer Tabelle zuzuordnen, benötigt man Mittel der Vorhersage um Tendenzen des Kurvenverlaufs festzulegen zu können. Hier kommt die Differentialrechnung ins Spiel. Geometrisch geht es in diesem Zusammenhang um die Frage, wie man Tangenten in Punkten von Funktionsgraphen herstellen kann. Eine mögliche geometrische Herstellungsweise der Tangente ist jene mithilfe von Sekanten (Abb. 10).

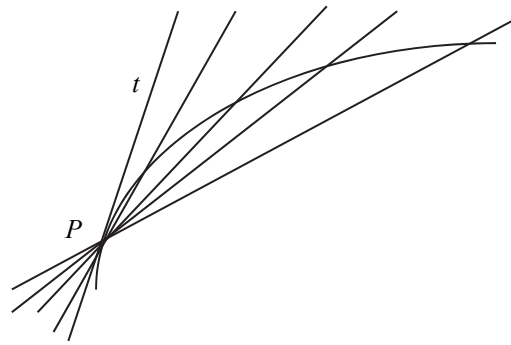


Abb. 10: Diese geometrische Methode besteht in der Herstellung der Tangente im Punkt  $P$  aus Sekanten durch  $P$ .

Wieder kann durch Inskriptionskombination die obige geometrische Herstellungsweise auf die bekannte Art algebraisiert werden. Es kommt zur Herstellung des Differentialquotienten (Abb. 11). Im Zusammenhang mit dem Differentialquotienten ist auch beobachtbar, dass ein Zeichensystem (in unserem Fall jenes der Algebra) zur Exaktifizierung eines Zeichenspiels in einem anderen Zeichensystem (hier der Geometrie) benutzt werden kann.

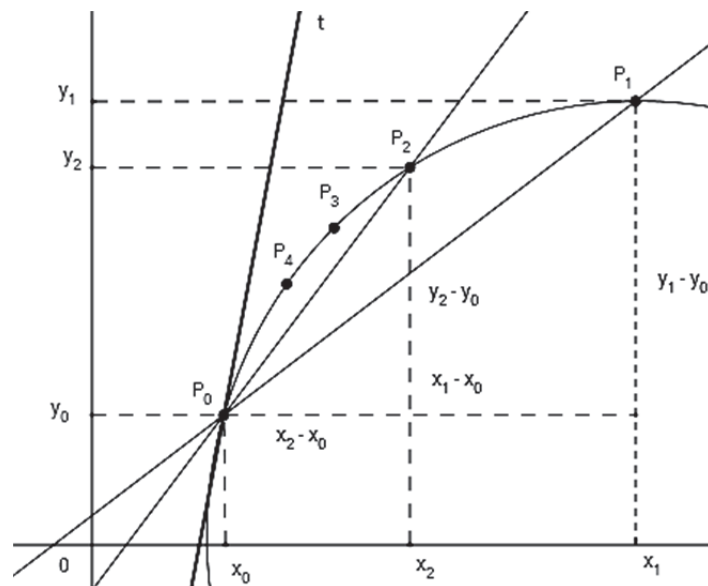


Abb. 11: Durch die bekannte Algebraisierung wird der Differentialquotient hergestellt.

Wie bereits erwähnt benötigt man Vorhersehbarkeiten um Kurvenverläufe angeben zu können. Man typisiert hierfür bestimmte skripturale Phänomene. Beispiele: Es gibt Punktfolgen, für welche der Kurvenlauf bei der gewohnten Leserichtung (von links nach rechts) steigend ist; Punktfolgen, für welche der Kurvenverlauf fallend ist; Punkte, in welchen die Kurve die  $x$ -Achse schneidet; tiefste Punkte von Kurventälern; höchste Punkte von Kurvenbergen, Punktfolgen von Rechtskrümmungen usw. Aufgrund der Konstruktion der Funktionsgleichung reicht es nun, die entsprechenden Stellen und Intervalle dieser skripturalen Phänomene auf der  $x$ -Achse zu bestimmen. Durch das Zusammenwirken der beiden Systeme ist es nun möglich, die Stellen und Intervalle der beschriebenen skripturalen Phänomene algebraisch zu bestimmen. Bekannterweise ist etwa der Punkt  $(x_0|y_0)$  der Spitze eines Kurvenbergs findbar, indem man dieses skripturale Phänomen mithilfe der Phänomene „Tangente ist in  $x_0$  parallel zur  $x$ -Achse“ und „Rechtskrümmung“ übersetzt, diese neuen Phänomene wiederum in algebraische Gleichungen  $f'(x_0) = 0$  und  $f''(x_0) < 0$  übersetzt und diese Gleichungen löst. In den gegebenen Zusammenhängen sind in Ergänzung der beschriebenen viele weitere Beobachtungen durch Schüler/innen etwa im Zusammenhang mit der Begriffsbildung möglich. Beispiel: Wie bereits erwähnt sind zur Identifizierung der skripturalen Phänomene Namen hilfreich (Nullstelle, Hochpunkt, Tiefpunkt, Wendepunkt usw.). Bereits durch die Subsumierung der algebraischen Herleitungsmethoden der betreffenden Punkte unter diesen Namen werden dieselben zu Begriffen. Man könnte sich etwa in reflektierender Rückschau weiter überlegen, was im Laufe der Zeit noch an Subsumierbarem dazu gekommen ist.

Konstruktive Erweiterungen in einem Zeichensystem weisen auf Verwendungserweiterungen in einem anderen System hin. Beispiel: Geht man etwa von einem Polynom wie „ $x^2 + 5x - 6$ “ aus, so bietet eine kleine Änderung wie  $f(x) = x^2 + 5x - 6$  die Verwendungsmöglichkeit der algebraischen Darstellung als Funktionsgraph. Weitere kleine Änderungen wie  $x^2 + 5x - 6 = 0$  oder  $x^2 + 5x - 6 > 0$  können auch wieder in Verwendungen des Funktionsgraphen übersetzt werden. Konstruktive Erweiterungen haben natürlich großes epistemologisches Potential.

### 4.2.3 Anspruchsvollere Beobachtungsmöglichkeiten

Das Niveau des Beobachtungsanspruchs kann natürlich durch die verwendeten Beispiele und die Beobachtungskriterien beliebig erhöht werden. Eine anspruchsvollere Beobachtungsmöglichkeit wäre jene Dörflers (vgl. 2010 oder 2015, S. 40): In den Definitionen der Stetigkeit oder Differenzierbarkeit von reellen Funktionen treten die Funktionen selbst gar nicht auf. Sie treten nur als Hinweise der Form  $f, g, \dots$  in Erscheinung.

Für diese Definitionen und die daran anschließenden Sätze und Beweise sind die verschiedenen Darstellungen von Funktionen (Graph, Formel, Tabelle, Funktionalgleichung) gänzlich ohne Bedeutung. [...] Soll jedoch die Stetigkeit einer speziellen Funkti-

on nachgewiesen werden, so braucht man irgendeine Darstellung, etwa die Reihendarstellung der Exponentialfunktion.

Im Zusammenhang mit dem Zahlenbegriff kann die Untersuchung des Zusammenwirkens der verschiedenen Darstellungen der komplexen Zahlen „ $a + bi$ “, Gauß'sche Zahlenebene, Matrizendarstellung, Riemann'sche Zahlenkugel erhellend sein. Dieses Zusammenwirken kann gut auf konstruktive Weise erklärt werden (vgl. Brunner, 2013, S. 64). Die Vorteile der Vernetztheit der Darstellungen können auf diese Weise konstruktiv sichtbar gemacht werden. Es wird so verstehbar, dass Darstellungserweiterungen öfter auch mit Einbußen von Möglichkeiten verbunden sind. Beispiel: Neben all den Vorteilen, die durch die Kombination der Inskription „ $a$ “  $\in \mathbb{R}$  zu „ $a + bi$ “ ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) und durch die Ersetzung von  $i^2 = -1$  resultieren, wie etwa: die Rechenregeln der reellen Zahlen lassen sich anwenden, algebraische Abgeschlossenheit (jede algebraische Gleichung vom Grad größer 0 besitzt eine Lösung über  $\mathbb{C}$ ; Fundamentalsatz der Algebra), jede auf einer offenen Menge einmal komplex differenzierbare Funktion ist dort von selbst beliebig oft differenzierbar (anders als in  $\mathbb{R}$ ) usw., man bezahlt auch einen Preis für die errungenen Vorteile. Beispiel: Man kann die komplexen Zahlen nicht mehr anordnen. Nach Dörfler (2015, S. 37) ist darüber hinaus der Isomorphismus der verschiedenen Zeichensysteme (Darstellungssysteme) der komplexen Zahlen nur die algebraische Formulierung der beobachtbaren Tatsache, dass jedem Zeichen eines Systems eineindeutig ein Zeichen des anderen Systems entspricht. Er schreibt:

Dieser Bezug ist meist von der Form, dass jedem Zeichen eines Systems eineindeutig ein Zeichen des anderen Systems entspricht oder zugeordnet werden kann derart, dass jeweils relevante Beziehungen ineinander übergehen. Algebraisch gesprochen liegt eine Isomorphie vor und es ist wichtig zu sehen, dass die beiden (oder eben mehrere) Zeichensysteme insofern unabhängig sind, dass die Relationen oder Verknüpfungen der einzelnen Zeichen innerhalb des jeweiligen Systems erklärt sind. Bei den komplexen Zahlen ist das ganz deutlich zu sehen: die Verknüpfungen wie Addition oder Multiplikation sind innerhalb jedes der Darstellungssysteme für die dort gegebenen Zeichen definiert und festgelegt...

Die Beispielsreihe zur Bedeutungsherstellung durch Inskriptionsgebrauch wäre beliebig fortsetzbar.

## 5 Fazit

Im vorliegenden Aufsatz wurde anhand von Beispielen veranschaulicht, dass das Wittgenstein'sche Konzept „Bedeutung durch Gebrauch“ und in der Folge das Konzept „Herstellung von Bedeutung mithilfe regelkonformer Inskriptionsverwendung“ sinnvoll im Mathematikunterricht thematisiert und als Sicht- und Sprechweise zu einem festen Bestandteil des Unterrichts gemacht werden kann. Die damit zusammenhängende Umdeutung von mathematischen Darstellungen als Herstellungen steht für eine alternative oder ergänzende Sicht auf Mathematik und den

Mathematikunterricht. Während Darstellungen zumindest indirekt für ein Lernen von Mathematik als Prozess des Erforschens und Verstehens abstrakter mathematischer Objekte stehen, stehen Herstellungen für Lernprozesse des Einarbeitens und Erforschens der Verwendungs- und Wirkungsweisen mathematischer Inskriptionen und Zeichensysteme. Bei beiden Sichtweisen muss im Hinblick auf das mathematische Tun sowieso Vertrautheit mit der Verwendung der mathematischen Inskriptionsverwendungen erworben werden. Im Fall der Sichtweise von mathematischen Inskriptionen als Herstellungen werden die mathematischen Inskriptionen aber weitgehend (oder zur Gänze) ohne Referenz auf abstrakte Inskriptionen verwendet. Mathematisches Tun wird damit direkt gestalt- und beobachtbar. Dies sollten auf jeden Fall auch Lehramtsstudierende erfahren. Damit wäre der Mathematik in der Schule gedient.

### Literatur

- Brunner, M. (2013): Didaktikrelevante Aspekte im Umfeld der Konzepte token und type. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 34(1), 53–72.
- Brunner, M. (2015): Diagrammatische Realität und Regelgebrauch. In G. Kadunz (Hrsg.), *Semiotische Perspektiven auf das Lernen von Mathematik* (S. 9–32). Berlin: Springer.
- Danckwerts, R., Vogel, D. (2006): *Analysis verständlich unterrichten*. Berlin: Springer.
- Dörfler, W. (2006): Diagramme und Mathematikunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 27(3/4), 200–219.
- Dörfler, W. (2010): Mathematische Objekte als Indizes in Diagrammen. Funktionen in der Analysis. In G. Kadunz (Hrsg.), *Sprache und Zeichen* (S. 25–48). Hildesheim: Franzbecker.
- Dörfler, W. (2015): Abstrakte Objekte in der Mathematik. In G. Kadunz (Hrsg.), *Semiotische Perspektiven auf das Lernen von Mathematik* (S. 33–49). Berlin: Springer.
- Epple, M. (1994): Das bunte Geflecht der mathematischen Spiele. *Mathematische Semesterberichte*, 41, 113–133.
- Hilbert, D., Cohn-Vossen, S. (1932): *Anschauliche Geometrie* (Nachdruck 1996). Berlin: Springer.
- Hoffmann, A. (2007): *Wittgensteins Regelbegriff*. <http://www.cse.unsw.edu.au/~achim/Research/Philosophie/node68.html> [12.10.2012].
- Hoffmann, M. (2005): *Erkenntnisentwicklung* (Philosophische Abhandlungen, Bd. 90). Frankfurt a. M.: Klostermann.
- Kraker, M., Plattner, G., Preis, C. (2010): *Expedition Mathematik 1*. Wien: Dietmar Steidl.
- Krämer, S. (2009): Operative Bildlichkeit. Von der ‚Grammatologie‘ zu einer ‚Diagrammatologie‘? Reflexionen über erkennendes ‚Sehen‘. In M. Hessler, D. Mersch (Hrsg.), *Logik des Bildlichen. Zur Kritik der ikonischen Vernunft* (S. 94–121). Bielefeld: transcript.
- Krämer, S. (2012): Punkt, Strich, Fläche. Von der Schriftbildlichkeit zur Grammatik. In S. Krämer, E. Cancik-Kirschbaum, R. Trotzke (Hrsg.), *Schriftbildlichkeit* (S. 79–100). Berlin: Akademie Verlag.
- Lakoff, G. (1987): *Women, fire and dangerous things. What categories reveal about the mind*. Chicago, London: The University of Chicago Press.



- Meyer, M. (2010): Wörter und ihr Gebrauch – Analyse von Begriffsbildungsprozessen im Mathematikunterricht. In G. Kadunz (Hrsg.), *Sprache und Zeichen* (S. 49–80). Hildesheim: Franzbecker.
- Stjernfelt, F. (2007): *Diagrammatology – An Investigation on the Borderlines of Phenomenology, Ontology, and Semiotics*. Dordrecht: Springer.
- Wittgenstein, L. (1978): *Wittgensteins Vorlesungen über die Grundlagen der Mathematik*. Schriften Band 7. Frankfurt: Suhrkamp.
- Wittgenstein, L. (1984a): *Philosophische Grammatik*. Werksausgabe, Band 4. Frankfurt: Suhrkamp.
- Wittgenstein, L. (1984b): *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*. Werksausgabe, Band 6, Auflage 2013. Frankfurt: Suhrkamp.
- Wittgenstein, L. (2003): *Philosophische Untersuchungen*. Frankfurt: Suhrkamp.

**Anschrift des Verfassers**

Dr. Martin Brunner  
Universität Salzburg  
A-5020 Salzburg  
e-Mail: martin.brunner2@sbg.ac.at

Eingang Manuskript: 01.09.2015  
Eingang überarbeitetes Manuskript: 04.12.2015  
Online verfügbar: 29.02.2016