Bildsame Schönheit

Zur Integration des Ästhetischen im mathematikdidaktischen Bildungsdiskurs

von

Susanne Spies, Siegen

Kurzfassung: Mit Schönheit und Kunstförmigkeit werden Aspekte von Mathematik angesprochen, die jenseits von Anwendungs- und Nützlichkeitserwägungen den Blick auf die Beziehung von Individuum und Gegenstand richten. Die mathematikphilosophische Untersuchung dieser Phänomene zeigt, dass sich die immer wieder in der mathematischen Wissenschaftspraxis beschriebenen Schönheitserfahrungen mit Mathematik durch eine spezifische Verbindung objektimmanenter Eigenschaften sowie epistemischer und emotionaler Erlebnisse auszeichnen und die Mathematik weiterhin in vielen Aspekten als besondere Kunstform aufgefasst werden kann und sollte. Im vorliegenden Beitrag können auf dieser Grundlage Bildungsanlässe sowohl in der reflektierten Rezeption schöner Mathematik und dem mathematisch-künstlerischen Schaffen anderer als auch im eigenaktiven künstlerisch-kreativen Umgang mit Mathematischem lokalisiert werden. Die ästhetische Dimension allgemeiner Bildung stellt sich dabei auch für den Mathematikunterricht als zu Unrecht vernachlässigte, fruchtbare Erweiterung bestehender Konzepte mathematischer Bildung dar.

Abstract: The beauty of proofs and theorems as well as treating mathematics as an art are concerning the relationship between the individual and mathematical objects beyond their applicability. Based on general research in the philosophy of mathematics aesthetic value judgment in mathematical practice is describable as an interplay of properties being inherent in the objects on the one hand and epistemic and emotional experiences on the other. Against this background the following paper shows expectable impact on the subjects Bildung by becoming aware of mathematical beauty and the process of its production as well as by working creatively. By this the aesthetical dimension of Allgemeinbildung turns out to be a fruitful but neglected extension of common concepts of mathematical Bildung.

1 Zum Vergessen der ästhetischen Dimension

> „Dieser rein spekulative Aspekt des menschlichen Geistes, der in der Mathematik vornehmlich nach Gesetzmäßigkeiten und innermathematischer Ästhetik Ausschau hält, […] darf bei den Überlegungen zur Bildung junger Menschen nicht vergessen werden.“ (Graumann 1993, S. 196)

Dass der Beschäftigung mit dem Schönen und der Kunst ein eigener Bildungswert zukommt, ist spätestens seit Schillers *27 Briefen Über die ästhetische Erziehung des Menschen* (erstmals erschienen 1795) eine gängige Auffassung im deutschsprachigen Bildungsdiskurs. Ebenso ist es mindestens in der mathematischen Wissenschaftspraxis ein Gemeinplatz, Mathematik mit ästhetischen Attributen zu belegen und die eigene Wissenschaft als Kunstform aufzufassen – man denke nur an das berühmte Zitat des britischen Mathematikers G.H. Hardy, der in seiner *Apology* die Schönheit zum ersten Prüfstein der Mathematik erhebt, den Mathematiker mit Malern und Dichtern vergleicht und hässlicher Mathematik keinen dauerhaften Platz in der Welt zubilligt (Hardy, 1940, S. 85). Dennoch wird in aktuellen Arbeiten zur mathematischen (Allgemein-)Bildung das ästhetische Moment der Mathematik und des Mathematiktreibens allenfalls mit Blick auf die Kreativität einbezogen. Auf die mögliche Bildungsrelevanz umfassender mathematisch-ästhetischer Erfahrungen wird nicht explizit eingegangen, obgleich bereits ein vorläufiger Abgleich aus mathematikästhetischer Perspektive auf den ersten Blick Anknüpfungspunkte zu verschiedenen Allgemeinbildungstheorien aufzeigt (vgl. Spies, 2013b).

Eine Ausnahme bildet hier Graumann (1993), dessen eingangs zitierter Forderung, das ästhetische Moment „im Nachdenken über Bildung nicht zu vergessen" (S. 196), im Folgenden nachgegangen werden soll. Dazu wird keine alternative mathematikdidaktische Bildungstheorie ausgearbeitet, sondern die Forderung wörtlich genommen und aufgezeigt, wie vor mathematikästhetischem Hintergrund bestehende Theorien an bestimmten Stellen ausdifferenziert bzw. vorhandene Hinweise expliziter werden können.

Die Mathematikästhetik, wie auch die allgemeine philosophische Ästhetik, kennt dabei zwei verschiedene Blickrichtungen: Zum einen kann das Phänomen ästhetischer Werturteile für Mathematisches in den Blick rücken und damit die Rezipientensicht im Vordergrund stehen. Interessant sind aus dieser Perspektive etwa Fragen nach der Art mathematischer Schönheitsurteile oder damit eng verbunden nach der Möglichkeit ästhetischer Erfahrungen mit Mathematik.[1] Zum anderen führen Vergleiche von schaffenden Mathematikern mit Malern, Dichtern oder Komponisten auf die Frage nach Parallelen von Mathematik und Kunst und nach dem Geniecharakter eben dieser Produzenten mathematischer Kunstwerke.[2] So unterschiedlich die Fragestellungen der beiden Perspektiven auch sind, so kreuzen Sie

---

1 Anders als im Rahmen zeitgenössischer bildender Kunst ist im Bereich der Mathematik das Attribut „schön" weiterhin die zentrale, positiv belegte ästhetische Wertung. Ein genauer Blick zeigt, dass mindestens Mathematiker ihre Erlebnisse mit eben dieser mathematischen Schönheit einer ästhetischen Erfahrung in anderen Bereichen ähnlich beschreiben (vgl. 2.1).

2 Naturgemäß kann die Frage nach dem Kunstcharakter von Mathematik nicht eindeutig und abschließend beantwortet werden, was nicht zuletzt am fehlenden einheitlichen Kunstbegriff der allgemeinen Ästhetik liegt. Die Untersuchung von Parallelen lohnt sich dennoch, da sie eine spezifische Beschreibung der Mathematik und der mathematischen Wissenschaftspraxis liefert (vgl. Spies, 2013a, Kap. 8).

sich doch an verschiedenen Stellen, etwa wenn zu entscheiden ist, ob es sich bei den stilbildenden Elementen in der Mathematik tatsächlich um ästhetische Attribute handelt. Auch im Rahmen von Bildungstheorien, die sich dem Ästhetischen allgemein annehmen, wird beiden Perspektiven eine Bildungswirksamkeit zugesprochen. So subsummiert beispielsweise Klafki seiner „ästhetischen Bildungsdimension“ sowohl „ästhetische Wahrnehmungserfahrungen“ als auch das „ästhetische Gestalten“ (Klafki & Braun, 2007, S. 170).

Wenn also im Folgenden der Forderung Graumanns nachgegangen wird, sollen daher ebenfalls beide Forschungsrichtungen der Mathematikästhetik auf eine mögliche Rolle im mathematikdidaktischen Bildungsdiskurs untersucht werden. Dazu wird zunächst skizziert, wie ästhetische Werturteile und der Kunstcharakter der Mathematik zum Reflexionsmoment werden können (Abschnitt 2), um dann aufzuzeigen, welche Rolle die Künstlerähnlichkeit mathematischen Schaffens im Mathematikunterricht und im Bildungsdiskurs spielen kann (Abschnitt 3).[3]

2 Schönheit als Reflexionsmoment

Wenn Mathematiker etwa in populärwissenschaftlichen Beiträgen oder Vorlesungen vor einem nichtmathematischen Publikum die Schönheit der Mathematik nicht nur behaupten, sondern auch begründen wollen, dann geschieht dies häufig anhand von Beispielen gepaart mit einer Liste von Eigenschaften, die für die Schönheit dieser Beispiele verantwortlich gemacht werden. Dabei sind die angeführten Eigenschaften meist ebensolche schwer greifbaren Begriffe, wie der der Schönheit selbst. Dies liegt nicht zuletzt darin begründet, dass der mathematische Schönheitsbegriff – wie dies für ästhetische Werturteile im Allgemeinen gilt – ein schwer zu fassendes, facettenreiches Konstrukt ist. Im Folgenden soll und kann daher weder eine der bestehenden Listungen als grundlegend ausgewählt werden, noch eine geschlossene (Arbeits-)Definition gegeben werden. Als Grundlage sollen vielmehr die Ergebnisse einer systematischen Zusammenschau und Analyse einer Vielzahl solcher Begründungsansätze[4] herangezogen und hier nur soweit skizziert werden, wie es für die folgende Verortung im Bildungsdiskurs notwendig ist.

---

[3] Da es also um die Verortung im Rahmen normativer Theorien zum Lehren und Lernen von Mathematik geht, müssen auch die Ergebnisse zunächst normativer Art sein, so dass die Frage nach der unterrichtspraktischen Umsetzung hier nicht konkret ausgearbeitet wird.

[4] Die hier verwendeten Ergebnisse liegen in ausführlicher Form in Spies (2013a) vor. Dort sind auch die jeweils herangezogenen Einzelpositionen ausführlich zitiert und diskutiert, so dass hier aus Gründen der knapperen Darstellbarkeit auf Einzelnachweise verzichtet wird. Für die Konkretisierung der Eigenschaftskomplexe an Beispielen der Schulmathematik siehe Spies (2012) und Schelldorfer & Spies (2013).

Als Beispiele für Träger mathematischer Schönheit werden häufig Beweise oder Theoreme, aber auch ganze Theorien und besondere Argumentationsgänge angeführt. Hardy (1940) beispielsweise spricht allgemein von den „Mustern der Mathematiker" („the mathematicians patterns", S. 85) und deren Schönheit[5] und bietet damit einen Begriff, der den Rahmen möglicher Träger explizit öffnet. Insbesondere mit Blick auf bildungsrelevante mathematisch ästhetische Werturteile, also solche über Schulmathematik ist es zweckmäßig sich Hardy folgend nicht auf eine bestimmte Gruppe möglicher Träger festzulegen. Wenn im Folgenden also von schönen *Stücken der Mathematik* die Rede ist, geht dies über Beweise und mathematische Theorien hinaus und schließt explizit auch für die Schulmathematik relevantere mathematische Muster, wie z. B. anschauliche mathematische Begründungen, präformale Beweise oder Problemlösestrategien ein.

2.1 Aspekte mathematischer Schönheit

In der Analyse und Zusammenschau der herangezogenen Beiträge aus Mathematikphilosophie und Wissenschaftspraxis tauchen bestimmte Charakteristika immer wieder auf. Wenn diese auch je nach Autor unterschiedlich gewichtet werden und in verschiedenen Kombinationen auftreten, so können dennoch Gemeinsamkeiten festgestellt werden und die Einzeleigenschaften zu den vier Eigenschaftskomplexen *Tragweite* oder Relevanz, *Ökonomie* oder relative Einfachheit, *epistemische Transparenz* sowie die *emotionale Wirksamkeit* zusammengefasst und in ihrem eigenen Facettenreichtum expliziert werden:

Tragweite als ästhetisches Moment umfasst insbesondere das Potential eines Stücks Mathematik in Bezug auf einen größeren innermathematischen Zusammenhang. Dabei kann einerseits die Relevanz eines Resultates selbst und seine innermathematische Vernetzung eine Rolle bei der ästhetischen Bewertung spielen. In diesem Sinne werden etwa disziplinübergreifende Zusammenhänge, wie beispielsweise zwischen Geometrie und Algebra im Zusammenhang mit mathematischer Schönheit genannt. Andererseits wird ein Beweis auch dann als besonders schön empfunden, wenn die zugrunde liegende Heuristik über den aktuellen Fall hinaus Anwendungen findet oder wenn ein elementares Konzept in besonderer Weise anschlussfähig ist für weitere Verallgemeinerungen. Die Tragweite allein macht jedoch nicht die mathematische Schönheit eines Gegenstandes aus, sondern tritt häufig gemeinsam mit anderen Eigenschaften oder in Beziehung zu diesen auf. So ist sie z. B. eine wichtige Bezugsgröße im Rahmen der Ökonomie als einem der prominentesten mathematisch-ästhetischen Kriterien.

---

[5] Für eine Abgrenzung der „Muster der Mathematiker" von anderen Mustern im Spannungsfeld von Mathematik und Kunst etwa im Rahmen Konkreter Kunst siehe Spies, 2013a, Kap. 1.1.

Ökonomie: Hier geht die Tragweite in Relation zu einer besonderen Einfachheit in das mathematische Schönheitsurteil ein. Unter Einfachheit wird dabei keine absolut angebbare Größe verstanden, vielmehr geht die Einschätzung, dass ein mathematischer Gegenstand besonders einfach ist, mit seiner Zugänglichkeit für das wertende Subjekt einher. Insofern ist die Kürze oder Einfachheit zunächst eine strukturelle Bedingung für eine ganzheitliche Art subjektiver epistemischer Wahrnehmung, für das Fassen etwa einer Argumentationsstruktur als Ganze. In diesem Sinne wird sie auch negativ durch das Nichtvorhandensein möglicher Wahrnehmungs- bzw. Verständnishindernisse bestimmt. In diesem Fall wird das Verhältnis von Einfachheit und Komplexität ästhetisch wirksam. Naturgemäß ist die Einschätzung, wie zugänglich, und damit einfach, ein Stück Mathematik ist, stark vom wertenden Subjekt, seinen Vorerfahrungen und seinen Vorlieben abhängig. Die umfassende subjektive Zugänglichkeit geht dann wiederum in Relation zu anderen inhaltlichen oder strukturellen Eigenschaften in das mathematische Schönheitsurteil ein. Um diesen relativen Charakter zu betonen, wird treffend von Ökonomie als Eigenschaft schöner Mathematik gesprochen.

Epistemische Transparenz greift die häufig in Anschlag gebrachten Metaphern aus dem Bereich des Visuellen und damit die Beziehung von ästhetischer und epistemischer Qualität eines Stücks Mathematik auf. So überzeugen schöne Argumentationsgänge in ihrem strukturellen Aufbau durch eine besondere Klarheit oder Transparenz. Damit sind eine deutlich nachvollziehbare Dramaturgie und für den Leser leicht durchschaubare Schlüsse gemeint. Ein schöner Beweis etwa führt nicht allein dazu, die Gültigkeit der bewiesenen Aussage anzuerkennen, sondern vielmehr dazu, die Aussage und ihre Zusammenhänge tiefer zu verstehen. Darüber hinaus steht mit „Aha!-Erlebnissen" eine bestimmte Art des Verstehens im Zentrum des Interesses, Erfahrungen also, in denen sich das Wissen um das „Warum" eines mathematischen Sachverhaltes und um seine grundlegenden Strukturen, einer Enthüllung gleich, scheinbar plötzlich einstellt. Das (vollständige) unmittelbare Verstehen – quasi „von einem Moment zum nächsten" – wird als tiefgreifendes Erlebnis beschrieben. Ob sich jedoch eine solche epistemische Transparenz einstellt, hängt sowohl von der strukturellen Beschaffenheit des betrachteten Gegenstandes als auch von der Verfasstheit des Rezipienten ab. Der mathematischen Schönheit kommt somit ein das schlichte Verstehen übersteigender, spezifisch epistemischer Wert zu, der sich erst im Zusammenspiel von Subjekt und Objekt offenbart.

Emotionale Wirksamkeit: Schöne Stücke der Mathematik lösen generell bei den produzierenden wie auch bei den rezipierenden Personen eine Fülle von Emotionen aus. Dies kommt insbesondere durch eine emotional gefärbte Sprache im Zusammenhang mit ästhetischen Werturteilen zum Ausdruck. Neben den allgemein zu beobachtenden Zeugnissen emotionaler Betroffenheit im Umgang mit (besonders schöner) Mathematik werden bestimmte Gefühle ausdifferenziert und immer wieder genannt, die wiederum häufig die bisher beschriebenen Eigenschaftskomplexe qualifizieren. So werden beispielsweise Überraschung und Erstaunen über die vorgefundene innermathematische Tragweite oder Ökonomie zum Ausdruck gebracht. Eine schöne mathematische Argumentation vermittelt darüber hinaus den Eindruck von Unausweichlichkeit, einer mit der epistemischen Transparenz einhergehenden emotionalen Wirkung schöner Mathematik. Im tiefen Verstehen oder einem Aha!-Erlebnis stellt sich gleichzeitig zum rationalen Erfassen das Gefühl ein, dass ein Resultat oder ein bestimmter Schluss nun unumgänglich[6] ist. In der Analyse zeigt sich immer wieder die besondere Bedeutung der emotionalen Komponente für den ästhetischen Charakter eines Stücks Mathematik, was die Vermutung nahe legt, dass erst durch die emotionale Wirksamkeit aus einer etwa epistemischen Eigenschaft, wie einfache Zugänglichkeit oder Transparenz, eine im eigentlichen Sinne ästhetische wird.

Diese skizzenhafte Vorstellung der Charakteristika bestätigt zum einen den Eindruck von der mathematischen Schönheit als schillerndem und facettenreichem Konstrukt, lässt aber zum anderen und insbesondere auch die *ästhetisch wirksame Beziehung von objektimmanenten Eigenschaften und subjektivem epistemischem und emotionalem Erleben* deutlich werden.

Die aus der mathematischen Forschungspraxis stammenden Charakteristika schöner Mathematik sind nicht an hochschulmathematische Inhalte gebunden und prinzipiell auch für Schüler erfahrbar, wie die Untersuchung einzelner Beispiele und erste unterrichtspraktische Umsetzungen zeigen (vgl. Praxis der Mathematik in der Schule, Heft 54, 2013). Dennoch verweist der Facettenreichtum darauf, dass – wie bei allem Kunstschönen – das Erkennen der mathematischen Schönheit der Übung, Anleitung und Gewöhnung bedarf. Im Fall von Kriterien wie Ökonomie und Tragweite sind ein instruktives Aufzeigen an Beispielen und zusätzliche Informationen über das konkrete Problem hinaus notwendig. Eigenschaften wie epistemische Transparenz oder emotionale Wirksamkeit dagegen können sicher nicht im klassischen Sinne gelehrt werden, sondern bedürfen insbesondere des eigenständigen erforschenden Umgangs mit den Gegenständen. Gegenstand von Demonstration und Erfahrung können dabei nicht nur Beweise und Theoreme im engeren Sinne, sondern allgemeiner auch mathematisches Argumentieren und Begründen – einschließlich präformal-inhaltlicher Beweise – sowie das Lösen von Problemen und die Reflexion dieser Prozesse sein (vgl. auch Dreyfus & Eisenberg, 1986, S. 4 f.).

Die Subjektorientierung und die eigentümliche Wechselbeziehung von Emotionen, Intuition und Rationalem in den verschiedenen Facetten der mathematischen

[6] Die Unumgänglichkeit eines Argumentationsgangs kann auch in gewissem Sinne als Bedrohung empfunden werden und ist insofern nicht generell positiv konnotiert (vgl. Papert, 1988, S. 115).

Schönheit zeigen außerdem tragfähige Gemeinsamkeiten mit Beschreibungen ästhetischer Erfahrungen in anderen Bereichen und geben einen ersten Hinweis auf den Bezug zu Fragen mathematischer Bildung: Hier wie dort steht mindestens die Beziehung von Subjekt und Gegenstand im Fokus. Wie die spezifisch durch die Rezeption schöner Mathematik initiierte Beziehung bildungswirksam werden kann, soll im Folgenden am Beispiel der Reflexion über das Ästhetische der Mathematik dargestellt werden.

2.2 Reflexion über die Geschmacksfrage hinaus

Das Nachdenken über das eigene Handeln und Denken sowie über die dazu Anstoß gebenden Gegenstände wird spätestens seit der Aufklärung in den verschiedensten (Allgemein-)Bildungskonzepten sowohl als Mittel auf dem Weg zum gebildeten Bürger als auch als Bildungsziel gehandelt. Unter dem Stichwort *Reflexion* findet es so nicht nur Eingang in aktuelle Allgemeinbildungskonzeptionen (vgl. etwa Fischer, 2012), sondern geht insbesondere auch in eine Reihe von Ansätzen zur mathematischen Bildung als zentrales Moment ein (vgl. bspw. Bauer, 1990, Lengnink, 2005, Neubrand, 1990 oder Skovsmose, 1998). So verschieden diese Ansätze bezüglich ihres bildungstheoretischen Hintergrunds, ihrer Zielgruppe und ihrer Zielsetzung sind, so ähnlich sind sie sich doch im jeweils gewählten Mittel: Um zu konkretisieren, inwiefern das Reflektieren über das Mathematiktreiben, die Mathematik sowie deren Anwendungen in den Unterricht einfließen kann, werden je nach bildungstheoretischem Hintergrund und Zielsetzung sich je nach Ansatz in Teilen unterscheidende Kataloge von Reflexionsebenen aufgestellt.

Die aufgelisteten Ebenen unterscheiden sich dabei untereinander bezüglich des jeweiligen Reflexionsgegenstandes. Dieser kann in Konzepten und Zusammenhängen der Mathematik im engeren Sinne sowie dem Umgang mit diesen bestehen, aber auch in der Beziehung von Mathematik und Lebenswelt oder in der Beziehung des handelnden Individuums zur Mathematik.[7] Mittels möglicher, das Reflektieren auf der jeweiligen Ebene anregender Fragen können diese Ebenen dann wiederum weiter ausdifferenziert werden. Vor dem Hintergrund, dass in der mathematischen Wissenschaftspraxis ästhetische Attribute gängige Wertkategorien darstellen[8], ist es jedoch erstaunlich, dass die Frage nach Schönheit und Eleganz von Mathematik im Rahmen der genannten Theorien ebenso wenig explizit gemacht wird, wie die nach Geschmack und Gefallen oder nach ästhetischen Erfahrungen.

---

[7] Für eine genau Verortung verschiedenster immer wieder genannter Ebenen im Mathematik-Welt-Subjekt-Gefüge siehe Lengnink (2006), S. 343.

[8] Neben schaffenden Mathematikern selbst, belegen auch wissenschaftssoziologischer Studien diesen Befund (vgl. Heinz, 2000, S. 145ff.).

Die mathematische Schönheit zeigt sich wie oben dargestellt als einerseits dem Gegenstand anhängig und andererseits „im Auge des Betrachters“ liegend. Sich ihrer bewusst zu werden bedeutet somit, Eigenschaften eines Stücks Mathematik wahrzunehmen, die über logische Korrektheit hinausweisen, und außerdem den eigenen Verstehensprozess und insbesondere die damit verbundene Gefühlslage in der Rezeption in den Blick zu nehmen. Ein mathematisch-ästhetisches Erlebnis kann somit verschiedene Reflexionsebenen ansprechen und diese darüber hinaus in spezifischer Weise in Verbindung setzen. Anhand der begrifflichen Einteilung nach Bauer (1990) soll dies im Folgenden exemplarisch skizziert werden.

Inhaltsreflexion

> „Reflexion im Gegenstand meint einen über mathematische Automatismen und Mechanisierungen hinausgehenden bewussten, verständigen, kompetenten Umgang mit mathematischen Themen.“ (Bauer, 1990, S. 8)

Zu einem über das (unreflektierte) Anwenden von Rezepten hinaus gehenden Umgang mit Mathematik gehört auch das Erkennen von Strukturen und Mustern, das Vollziehen von Darstellungswechseln, die Auswahl von Heurismen, wie das Symmetrisieren oder das Bilden von Analogien (und damit das Erkennen innermathematischer Vernetzungen) oder auch die Entscheidung zwischen logisch gleichwertigen Strategien. Mithin sind dies kreative, ein mindestens im weiteren Sinne mathematisch-ästhetisches Gespür voraussetzende Fähigkeiten (vgl. dazu auch Abschnitt 3). Barth stellt beispielsweise vor, wie eine solche Inhaltsreflexion selbst bei dem schulmathematischen Standardbeispiel für schematisches Arbeiten, dem euklidischen Algorithmus, das reine „Wie“ in den Hintergrund rückt und die „Schönheit im Unterricht zum Blühen“ bringen kann (Barth, 2013, S. 14f.).

Gegenstandsreflexion

> „Reflexion über Entwicklungslinien, Strukturmerkmale, Erscheinungsformen, Grundlagenfragen der Mathematik. Die Reflexion richtet sich auf das Wesen der Disziplin Mathematik.“ (Bauer, 1990, S. 6)

Zu dieser Reflexionsebene gehört zum einen die klassische Geschmacksbildung im Sinne einer mathematikästhetischen Sozialisation und damit die Diskussion von Fragen wie „Was gilt gemeinhin als schöne Mathematik?“ und das Kennenlernen von „Klassikern“ der Mathematikästhetik[9]. Zum anderen sind der Gegenstandreflexion naturgemäß Fragen der Mathematikästhetik als Teildisziplin der Philosophie der Mathematik zuzurechnen: Wie wird/wurde Mathematisches in Malerei oder Musik wirksam und umgekehrt (vgl. hierzu die Beiträge in Lauter & Weigand, 2007)? Ist Mathematik eine Kunstform bzw. was hat sie mit den klassischen

[9] Hierzu zählen u. a. die Eulersche Formel ($e^{i\pi} + 1 = 0$) aber auch prinzipiell schulmathematisch zugängliche Beispiele, wie die euklidischen Widerspruchsbeweise für die Irrationalität von $\sqrt{2}$ oder die Unendlichkeit der Primzahlmenge.

Künsten gemeinsam? Wie zeigen sich verschiedene Stile oder Stilepochen und welche Rolle spielen sie?[10] Diese letztgenannte Frage kann beispielsweise dann thematisiert werden, wenn stilistisch unterschiedliche Wege zur Verfügung stehen, wie etwa in der Mittelstufengeometrie im Falle der Gegenüberstellung von Kongruenz- und Abbildungsbeweisen oder im Rahmen der Schulanalysis am Beispiel der Einführung der Ableitung über die momentane Änderungsrate einerseits oder geometrisch über die Idee der lokalen Linearisierung.[11] Bei beiden Beispielgebieten handelt es sich jeweils um zwei Zugänge, die sich sowohl bezüglich der mathematischen Stilepoche, in der sie entstanden sind, als auch bezüglich der individuellen Strategien, die jeweils zur Geltung kommen, unterscheiden. Die Beispiele zeigen darüber hinaus, dass eine solche Gegenstandsreflexion und ein damit einhergehendes Bewusstsein für verschiedene mathematische Stile auch von Relevanz für Mathematiklehrkräfte ist, handelt es sich doch jeweils um Inhalte, in denen curricularer Spielraum besteht und damit eine begründete Entscheidung für das eine oder andere Vorgehen notwendig wird.[12]

Bedeutungs- bzw. Sinnreflexion

> „Reflexion über Möglichkeiten und Grenzen mathematischen Denkens, über die Bedeutung der Mathematik und über den Sinn einer Beschäftigung mit Mathematik." (Bauer, 1990, S. 7)

Schönheit und Kunstförmigkeit werden häufig als Legitimation und Motivation der reinen Mathematik angeführt[13] und müssen somit auf dieser Reflexionsebene ge-

---

10 Neben der Beschreibung persönlicher Stile einzelner Mathematiker oder Mathematikergruppen (Denk- bzw. Arbeitsstile) ist in der Mathematikphilosophie und -geschichte auch das Phänomen zu beobachten, Stilepochen auszuweisen; nicht selten auch unter Rückgriff auf die in der Kunstgeschichte gängigen Bezeichnungen. Stile werden dabei als sich zeitlich ablösende Arbeits- und Denkweisen gesehen. Ähnlich dem Vorgehen in der Kunstgeschichte erlauben Ansätze zur Stilgeschichte der Mathematik die Zusammenfassung und Beschreibung von Phänomenen innerhalb der Mathematikgeschichte vor dem Hintergrund bestimmter ästhetischer bzw. kunstähnlicher Eigenschaften (vgl. Spies, 2013a, Kap. 6.2)

11 Für eine Gegenüberstellung aus mathematischer bzw. mathematikdidaktischer Sicht siehe Schmidt-Thieme & Weigand (2009, S. 208ff.) bzw. Danckwerts & Vogel (2006, Kap. 3). Eine ausführliche Diskussion der stilistischen Unterschiede würde hier den Rahmen sprengen.

12 Ein Beispiel für die Wirksamkeit der bewussten (subjektiven) Entscheidung für das Vorgehen gemäß eines bestimmten Stils im Rahmen des Lehrens von Mathematik stellen die Kleinschen Vorlesungen zur „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte" dar (vgl. Allmendinger & Spies, 2013).

13 Dies ist beispielsweise ein Grundthema in Hardys *A mathematician's Apology* (1940), in der sich der bekennende Pazifist insbesondere gegen die Anwendbarkeit seiner mathematischen Erkenntnis für Kriegszwecke richtet und stattdessen die Signifikanz der von ihm betriebenen reinen Mathematik auf deren besondere Schönheit zurückführt.

wissermaßen als Gegenspieler zu den häufig im Zentrum stehenden Fragen um die außermathematische Anwendung zur Geltung kommen. Möglichkeiten, solche Reflexionen anzubahnen, bestehen beispielsweise in der Rückschau des eigenen kreativen Problemlöseprozesses (vgl. 3.1) oder in der Dokumentation eigenständiger Begriffsbildungsprozesse (vgl. 3.2). Denkbar ist aber auch der direkte Vergleich gemeinsamer inhaltlicher Themen in Kunst und Mathematik, wie es etwa Heitzer (2007) am Beispiel der Behandlung von Spiralen in Mathematik und Kunst entlang jeweils relevanter Spannungsfelder vorstellt, obgleich zu beachten ist, dass hier natürlich auch Momente der vorhergehenden Reflexionsebenen eingehen:

> „Anschaulichkeit und Strenge, Konkretisierung und Abstraktion, Einzelfall und Verallgemeinerung, kühner Entwurf und detaillierte Ausführung sind konträre Aspekte, mit denen und mit deren fruchtbarer Diskrepanz sich sowohl Künstler als auch Mathematiker auseinanderzusetzen haben." (Heitzer, 2007, S. 65)

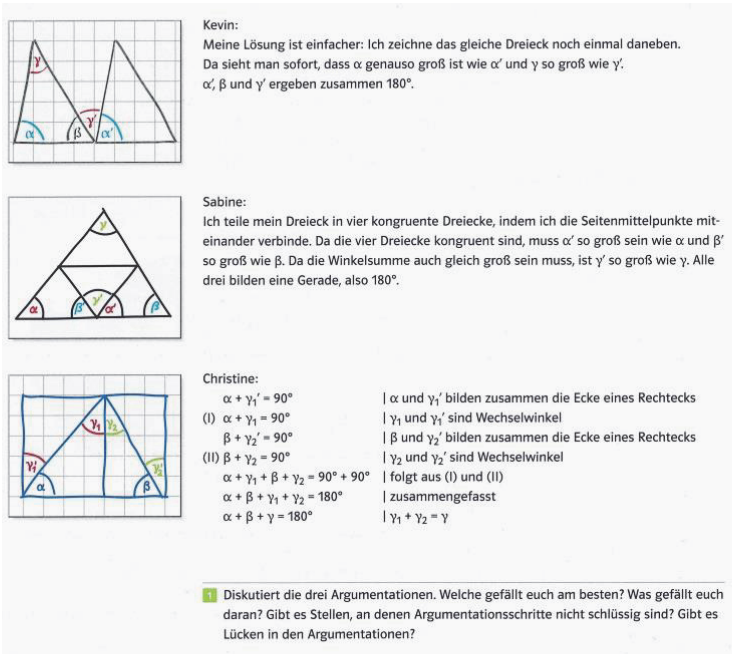
Ähnlich der Ausschärfung dieser Reflexionsebene bezogen auf die außermathematische Anwendung der Mathematik (vgl. etwa die kontextorientierte und lebensweltorientierte Reflexion nach Skovsmose, 1998) bedarf die mathematikästhetische Bedeutungsreflexion eines Überblicks über den konkreten mathematischen Gegenstand hinaus und damit gezielte Hilfestellungen und Informationen durch die Lehrkraft. Dies verweist wiederum auch auf Grenzen solcher Reflexion im Mathematikunterricht.

Selbstreflexion bzw. Reflexion über die Bedeutung der Mathematik für die eigene Person:

> „Auf der Basis rationaler und ‚reflexiver' Überlegungen wird die Mathematik in die eigene, individuelle Wertstruktur eingebettet." (Bauer, 1990, S. 7)

Auf dieser Ebene kann auch das mathematisch-ästhetische Erleben der Schülerinnen und Schüler zum Gegenstand des Nachdenkens werden und etwa durch Fragen nach der epistemischen Transparenz und emotionalen Wirksamkeit angeregt werden: War die Lösung erstaunlich einfach für Dich? Warum erstaunt Dich das? Hattest Du ein Aha!-Erlebnis? Was hat es in Dir bewirkt? Dazu gehören auch direkte Geschmacksfragen wie „Findest Du diesen Lösungsweg schön bzw. schöner als jenen?" „Warum hast Du Dich für diese Darstellungsform bzw. diesen Lösungsansatz entschieden?". Mit solchen Fragen wird nicht allein dem ästhetischen Werten Raum gegeben. Vielmehr wird der große Spielraum subjektiver Entscheidungen in einer vermeintlich vollständig logisch determinierten Wissenschaft sichtbar, was wiederum zur Reflexion über das Wesen der Mathematik anregt. Gelegenheiten zu solcher Selbstreflexion können beispielsweise durch die Rezeption und den anschließenden bewussten Vergleich zweier logisch gleichwertiger Lösungen desselben Problems entstehen.

Ein Beispiel, wie eine solche Selbstreflexion angeregt werden kann, zeigt die, in Abb. 1 dargestellte Aufgabe aus „Das Mathematikbuch 7" (2010). Im Vergleich von drei unterschiedlichen Beweisen für den Satz über die Innenwinkelsumme im Dreieck wird neben der Frage nach korrekten Argumentationsgängen (Inhaltsreflexion) explizit auch nach dem subjektiven Gefallen und insbesondere nach Gründen für diese Urteil gefragt. Hier können mathematisch-ästhetische Eigenschaften wie subjektive Zugänglichkeit und damit das Argument der Ökonomie ebenso hineinspielen wie Erlebnisse von epistemischer Transparenz. Diese können im Gespräch mit der Lehrperson z. B. durch Informationen über die Tragweite der verschiedenen Beweisideen ergänzt werden. Dabei muss das Urteil explizit nicht einhellig ausfallen. So ist durchaus denkbar, dass diesem Schüler die Argumentation von Christine über die Algebraisierung und das Lösen von Gleichungen zugänglich ist und ihm die Verwendung der bekannten Technik für ein geometrisches Problem gefällt, während für jene Schülerin dieser Schritt ein Verständnishindernis darstellt und ihr daher die Argumentation von Kevin eine Ökonomieerfahrung ermöglicht. Wieder ein anderer könnte aber auch durch Sabines Lösung einen tiefen Einblick in die Zusammenhänge im Dreieck, z. B. die Ähnlichkeit von einem Dreieck zu seinem Mittendreieck, erhalten und auf dieser Grundlage diese Argumentation vorziehen.



Kevin:
Meine Lösung ist einfacher: Ich zeichne das gleiche Dreieck noch einmal daneben. Da sieht man sofort, dass α genauso groß ist wie α' und γ so groß wie γ'. α', β und γ' ergeben zusammen 180°.

Sabine:
Ich teile mein Dreieck in vier kongruente Dreiecke, indem ich die Seitenmittelpunkte miteinander verbinde. Da die vier Dreiecke kongruent sind, muss α' so groß sein wie α und β' so groß wie β. Da die Winkelsumme auch gleich groß sein muss, ist γ' so groß wie γ. Alle drei bilden eine Gerade, also 180°.

Christine:

	$\alpha + \gamma_1' = 90°$	$\mid$ α und γ_1' bilden zusammen die Ecke eines Rechtecks
(I)	$\alpha + \gamma_1 = 90°$	$\mid$ γ_1 und γ_1' sind Wechselwinkel
	$\beta + \gamma_2' = 90°$	$\mid$ β und γ_2' bilden zusammen die Ecke eines Rechtecks
(II)	$\beta + \gamma_2 = 90°$	$\mid$ γ_2 und γ_2' sind Wechselwinkel
	$\alpha + \gamma_1 + \beta + \gamma_2 = 90° + 90°$	$\mid$ folgt aus (I) und (II)
	$\alpha + \beta + \gamma_1 + \gamma_2 = 180°$	$\mid$ zusammengefasst
	$\alpha + \beta + \gamma = 180°$	$\mid$ $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$

1 Diskutiert die drei Argumentationen. Welche gefällt euch am besten? Was gefällt euch daran? Gibt es Stellen, an denen Argumentationsschritte nicht schlüssig sind? Gibt es Lücken in den Argumentationen?

Abb. 1: Beweise für den Satz über die Innenwinkelsumme im Dreieck als Anlässe zur Selbstreflexion (aus:Das Mathematikbuch 7, S.70 f.)

Solche persönlichen Urteile über Mathematik explizit mit dem individuellen allgemeinen Schönheitsbegriff von Schülerinnen und Schülern in Beziehung zu setzen, kann etwa über die Auseinandersetzung mit der entsprechenden Mathematik vorausgehenden explizite Fragen gelingen, wie sie Goy für eine Unterrichtseinheit über platonische Körper vorschlägt:

> „1. Was ist Schönheit? Versuchen Sie eine persönliche ‚Definition' zu finden.
>
> 2. Begegnet Ihnen Schönheit auch im Schulkontext, in einem anderen Fach/Unterricht? Inwiefern und warum fanden Sie die ‚Sache' schön?
>
> 3. Hat auch Mathematik für Sie schöne Seiten? Wenn ja: Wann bzw. bei welchem Thema haben Sie Mathematik als ‚schön' erlebt? Versuchen Sie für sich zu klären, warum Sie damals das Empfinden von Schönheit hatten." (Goy, 2013, S. 20)

Auf diese Weise kann „die Mathematik [explizit] in die eigene, individuelle [ästhetische] Wertstruktur" eingebettet werden, wie Bauer (1990, S. 7) es für die Ebene der Selbstreflexion fordert.

Die Darstellung zeigt, dass der ästhetische Charakter als integrale Eigenschaft der Mathematik Reflexionsanlässe auf den verschiedensten Ebenen schafft, die insbesondere über die Reflexion der Mathematik als „Werkzeugkasten" für außermathematische Anwendungen hinausgehen. Dabei bedarf es nicht der Ergänzung der vorhandenen Kataloge um eine weitere Ebene der „ästhetischen Reflexion". Vielmehr lässt sich die mathematikästhetische Perspektive subsummieren und hilft dabei, die jeweiligen Ebenen weiter auszudifferenzieren. In Ergänzung zur mittelbaren Betroffenheit von Menschen durch die außermathematische Anwendung von Mathematik, wird so die *unmittelbare*, das subjektive epistemisch und emotionale Erleben betreffende, *Beziehung von Mensch und Mathematik* zum Reflexionsgegenstand und somit bildungswirksam.

3 Kreativität in der Mathematik (nach-)erleben

> „Auch darin hebt sich die Mathematik vor den anderen Wissenschaften heraus, daß in ihr das künstlerische Element nicht durch Rücksicht auf die raue Wirklichkeit gehemmt ist. Schon in dieser Hinsicht ist der Mathematiker vergleichbar mit einem frei nach seiner Begabung und Eingebung gestaltenden Künstler." (Hasse, 1952, S. 18)

Der Vergleich von mathematischen mit künstlerischen Schaffensprozessen ist eine zentrale Begründungsebene für den Kunstcharakter der Mathematik. Wie es der Mathematiker Helmut Hasse hier auf den Punkt bringt, wird dazu insbesondere der regelgebende Charakter und damit die Möglichkeit zur freien kreativen Gestaltung im mathematischen Schaffen betont. Ein Vorzug, der sich unter anderem aus dem abstrakten, zunächst nicht der Beschreibung realer Zusammenhänge verpflichteten Charakter der reinen Mathematik ergibt. Damit einhergehend wird außerdem die Notwendigkeit einer gewissen Begabung und eine Sensibilität für die mathematisch-ästhetischen Qualitäten der so gestaltend wirkenden Mathematiker unterstellt. Hier liegt dann wiederum der Vergleich mit dem künstlerischen Genie nahe.

3.1 Mathematische Erfindung und ästhetisches Gefühl

Die wohl berühmteste introspektive Beschreibung des Mathematiktreibens in diesem Sinne gibt Henri Poincaré in einem Vortrag vor Pariser Psychologen, der unter dem Titel *Die mathematische Erfindung* in der Sammlung *Mathematik und Methode* (Poincaré, 1914) erschienen ist: Das Lösen mathematischer Probleme wird als ein Wechselspiel von bewusster und unbewusster Arbeit in verschiedenen Phasen beschrieben. In den Phasen bewusster Arbeit kommt es zur disziplinierten Anwendung bekannter Regeln, zur Systematisierung der Voraussetzungen sowie zur logischen Überprüfung und Einordnung der Intuitionen aus dem Bereich des Unbewussten. In den unbewussten Arbeitsphasen kommt es zu freien, nicht regelgeleiteten Kombinationen aus denen das „sublime Ich" auf der Grundlage eines „wahrhaft ästhetischen Gefühls" (Poincaré, 1914, S. 48) diejenigen Möglichkeiten auswählt, die „nützlich und schön zugleich" (ebd. S. 49) seien. Diese wiederum bahnen sich dann häufig unerwartet den Weg ins Bewusstsein. Poincaré gibt dazu einige plastische Beispiele solcher „plötzlichen Erleuchtungen" aus seinem eigenen sehr erfolgreichen mathematischen Schaffensprozess (ebd. S. 44ff.). Diese Beschreibungen Poincarés greift Jaques Hadamard später in der vielbeachteten Arbeit *The Psychology of Invention in the Mathematical Field* auf und fasst sie treffend zusammen:

> „We have reached the double conclusion: that invention is choice, that this choice is imperatively governed by the sense of beauty." (Hadamard, 1945, S. 31)

Auf Hadamard gehen auch die vielbemühten Bezeichnungen der identifizierten Phasen mathematischer Erfindung zurück: „*1. Präparation, 2. Inkubation, 3. Illumination, 4. Verifikation*" (in deutscher Übersetzung zitiert nach Weth, 1999, S. 12).

Poincaré selbst greift zur Veranschaulichung des beschriebenen Auswahlprozesses an anderer Stelle wiederum auf den Vergleich mit der künstlerischen Auswahl- und Gestaltungsfreiheit eines Malers zurück:

> „Die Suche nach dieser eigentümlichen Schönheit [...] bringt uns dazu, diejenigen Tatsachen zu wählen, welche am geeignetesten dazu sind, diese Harmonien zu vervollständigen, so wie der Künstler unter den eigenartigen Gesichtszügen seines Modells diejenigen auswählt, welche das Porträt vervollständigen und ihm Leben und Charakter verleihen." (Poincaré, 1914, S. 13)

Auch erinnert die Poincarésche Vorstellung an die Arbeit des künstlerischen Genies wie sie etwa Immanuel Kant in der *Kritik der Urteilskraft* beschreibt, obgleich dort der Vergleich von Mathematikern und Künstlern explizit nicht gezogen wird (vgl. Spies, 2013a, Kap. 7). Poincaré dagegen unterstreicht die Parallelen, in dem er die Fähigkeit zu solchem mathematischen Schaffen als besondere Gabe beschreibt: Wem die nötige ästhetische Intuition nicht gegeben sei, der könne bestenfalls mathematische Schlüsse Schritt für Schritt nachvollziehen und damit die Mathematik verstehen und anwenden. Gleichzeitig betont er aber auch die Möglichkeit, im (erneuten) Nachvollziehen bereits bekannter mathematischer Ideen ähnliche Erfahrungen machen zu können, wie in der mathematischen Erfindung selbst:

> „Bei Wiederholung eines erlernten mathematischen Beweises kommt es mir vor, als hätte ich ihn selbst erfunden; das ist nur eine Illusion, aber selbst dann, wenn ich nicht stark genug bin, selbst zu schaffen, so finde ich doch den Beweis von neuem, während ich ihn wiederhole." (Poincaré, 1914, S. 39)

In Überlegungen zur mathematischen Bildung kann der beschriebene kunstähnliche Charakter mathematischen Arbeitens nun auf verschiedene Arten einfließen: Zum einen kann es im Sinne einer Wissenschaftsorientierung bezogen auf die wissenschaftlichen Arbeitsweisen, aber auch eines Wissens um die Kulturleistung Mathematik und eines tragfähigen Bildes von Mathematik darum gehen, diese Art des mathematischen Schaffens kennenzulernen und rezeptiv zu erleben. Zum anderen verweisen solche Beschreibungen aus der mathematischen Wissenschaftspraxis auch auf die Relevanz des Ästhetischen im eigenen Problemlöseprozess von Schülerinnen und Schülern, was wiederum die Bildung durch aktives mathematisch-ästhetischen Gestalten in den Blick nimmt. Beide Facetten werden im mathematikdidaktischen Diskurs als bildungsrelevant gehandelt und können im Folgenden über den Rückbezug auf Mathematik-Kunst-Vergleiche konkretisiert werden.

3.2 Künstlerisches Schaffen im Mathematikunterricht

Die Phasen der mathematischen Erfindung und insbesondere die Rolle des Ästhetischen im mathematisch-kreativen Schaffensprozess konnte in empirischen Untersuchungen unter Mathematikern bestätigt werden (vgl. Burton, 2004, S. 63ff. oder Srirarman, 2009, S. 25). Unter der (nicht unumstrittenen) Grundannahme, dass Mathematiklernen auch in Prozessen des Nacherfindens geschieht, liegt die Übertragung auf den schüleraktiven Umgang mit Mathematik im Unterricht nahe und verweist auf Stichworte wie *Problemlösekompetenz* oder *Kreativität*. Beides sind prominente und vieldiskutierte Themen der Mathematikdidaktik und sollen daher im Folgenden nur unter der Perspektive ihrer Bildungswirksamkeit gemeinsam mit der Beziehung zur Mathematikästhetik betrachtet werden.

Poincaré und Hadamard folgend sind innovative mathematische Problemlösungen die Folge eines unbewussten Auswahlprozesses auf der Grundlage eines „wahrhaft ästhetischen Gefühls". Dem Ästhetischen kommt somit im Rahmen des mathematischen Schaffens neben einer „motivationalen" und „evaluativen" auch eine „generative" Funktion zu (vgl. Sinclair, 2006, S. 59ff.). Eine Beobachtung, die Sinclair folgend auch auf das schulische Lösen echter Probleme übertragen werden kann:

> „[S]tudents might have more success in problem solving – and here I refer to truly problematic problems – if they could engage their ‚sense of order'." (Sinclair, 2006, S. 66)

Anzumerken ist hier, dass in Ausführungen von Mathematikern zu den ästhetischen Qualitäten ihrer Gegenstände immer wieder das Gegensatzpaar *Ordnung und Chaos* als Spezialfall der ästhetisch wirksamen Spannung von *Einfachheit und Komplexität* genannt wird. So schreiben etwa Davis und Hersh, dass „ein Gefühl starken, persönlichen ästhetischen Vergnügens […] dem Phänomen [entspringe], das man mit Ordnung aus dem Chaos umschreiben kann“ (Davis & Hersh, 1994, S. 176) und stellen dies an einer Reihe verschiedener Beispiele dar. Nicht zu vergessen ist aber, dass es nicht diese Gegensätzlichkeiten allein sind, die mathematische Schönheit evozieren, sondern diese vielmehr auf das Zusammenspiel einer Reihe von verschiedenen Eigenschaftskomplexen zurückgeht (vgl. 2.1), so dass der von Sinclair hervorgehobene „Sinn für Ordnung“ eben nur einen Teil des „wahrhaft ästhetischen Gefühls“ ausmacht.[14] So verweist auch Goldin (2000) auf die Rolle weiterer, insbesondere affektiver Momente im Problemlöseprozess, die gleichzeitig zur Begründung mathematikästhetischer Werturteile angeführt werden. Dazu zählt neben dem Erstaunen über die unerwartete Kombination von Informationen insbesondere das Aha!-Erlebnis im Lösungsmoment, ausgelöst durch ein ökonomisches Vorgehen oder eine innermathematische Vernetzung:

> „The problem solver’s imagistic representations may have been drastically reconstructed, with new insights resulting. A formal expression may have been greatly simplified, through an elegant algebraic technique. A far-reaching structural relationship with another problem may have been detected.“ (Goldin, 2000, S. 216)

Aussagen wie diese weisen nicht nur darauf hin, dass eine Schulung des mathematisch-ästhetischen Gespürs, wie sie etwa durch Reflexion im oben beschriebenen Sinne (vgl. 2.2) geschehen kann, die Problemlösekompetenz stärken kann, sondern auch darauf, dass dieses „wahrhaft ästhetische Gefühl“ ein (zunächst unbewusster) aber nicht unwichtiger Teil kreativen Mathematiktreibens ist. Sollen Schülerinnen und Schüler also – wie es etwa der Kernlehrplan für die Sekundarstufe I in NRW fordert – im heuristischen Tun die Mathematik als „kreatives und intellektuelles Handlungsfeld“ (vgl. Kernlehrplan SI, NRW, 2004, S. 11) erleben, so spielen dabei mathematisch-ästhetische Gefühle eine nicht unwesentliche Rolle. In diesem Sinne gehört neben dem auf die Poincaré-Hadamardschen Phasen zurückgehende „Gestalt principle“ auch ein eben diese Dimension in den Blick nehmendes „Aesthetic principle“ nach Sriraman und Dahl zu den pädagogischen Prinzipien, die Kreativität im Unterricht befördern sollen (zitiert nach Brinkmann & Sriraman, 2009, S. 61f.). Und für Burton trägt die Auffassung von Mathematik als ästhetischer Diszip-

[14] Mit Blick etwa auf Schönfelds Erhebung erfolgreicher Heurismen (in den ersten Universitätssemestern), zu denen etwa Symmetrisieren oder der Beginn mit einfachen Spezialfällen gehören (vgl. Schoenfeld, 1985, S. 80 f.), scheint dieser Aspekt mathematikästhetischer Erfahrungen jedoch bezogen auf das Lösen elementarmathematischer Probleme von besonderer Relevanz zu sein.

lin wesentlich dazu bei, im Mathematikunterricht eine „mathinking atmosphere" zu schaffen (vgl. Burton, 2004, S. 182ff.). Ein mathematisch-künstlerisches Handeln ermöglichender Unterricht lebt den vorstehenden Ergebnissen zur Kunstförmigkeit der Mathematik zufolge von

- divergenten Aufgabenstellungen (Der Freiheitsgrad von methodischem Vorgehen, Stil und Motiv unterscheidet den Künstler vom Handwerker[15]),
- einer produktiven Fehlerkultur (Fehler und Irrwege gehören Poincaré folgend ja gerade zur Erschließung des Problemfeldes in der ersten Phase bewussten Arbeitens),
- Zeit und Gelegenheit, sich nach einiger vermeintlich nicht zielführender Beschäftigung zunächst einem anderen Problem zu widmen – auch Schülerinnen und Schüler brauchen die beschriebene „Inkubationszeit" als Phase der unbewussten Arbeit[16] – , wozu auch die Verantwortung für den eigenen Arbeitsprozess gehört,
- der Wertschätzung mathematikästhetischer Werturteile und Intuitionen als Auswahlkriterium bestimmter Lösungsansätze und -varianten[17] (Das „wahrhaft ästhetische Gefühl", welches in der Phase unbewussten Arbeitens die Auswahl trifft, darf erstens nicht durch ein einseitiges Bild von Mathematik als steriler rein logischen Gesetzen gehorchender Wissenschaft gehemmt werden und muss zweitens beispielsweise durch die bewusste Reflexion in der Rückschau oder auch durch Selbstzeugnisse der Lehrperson geschult werden (vgl. Spies, 2012) sowie der motivationalen Kraft, die den Moment des Aha! im mathematisch-ästhetischen Erlebnis begleitet (vgl. auch Liljedahl, 2005, S. 228ff.).

Diesen aus der Beschreibung künstlerisch-mathematischen Tuns abgeleiteten unterrichtspraktischen Voraussetzungen lassen sich viele der „Merkmale einer allgemeinbildenden Unterrichtskultur", wie sie Heymann (1996, S. 264 ff.) auflistet, zuordnen. Demnach hat ein Mathematikunterricht, der mathematisch-künstlerisches (Nach-)Erfinden fördert, bereits durch seine organisatorische Anlage

---

15 Was den Wert handwerklichen Könnens für künstlerisches Schaffens nicht herabsetzen soll: Für mathematisches (Nach-)erfinden ist es eine ebenso notwendige Voraussetzung, die grundlegenden Konzepte zu kennen und Techniken zu beherrschen, wie für die künstlerische Produktion.

16 Leone Burton betont darüber hinaus, dass die Mathematiker ihrer Interviewstudie angaben, jeweils mehrere Probleme parallel zu bearbeiten und zwischen diesen wechselten, wenn der Arbeitsprozess an einer Stelle stockte (vgl. Burton, 2004, S. 125f.).

17 Dies ersetzt selbstverständlich nicht die Verifikation der auf dieser Grundlage gefundenen Lösung. Dies betont Poincaré selbst: „Man muß die Resultate dieser Inspiration ausarbeiten, aus ihnen die unmittelbaren Folgerungen ableiten, sie ordnen, die Beweise redigieren und vor allem sie prüfen." (Poincaré, 1914, S. 45)

das Potential, insbesondere zu den von Heymann (1996) aufgestellten sozialethischen und personenbezogenen Aufgaben allgemeinbildender Schulen („Entfaltung von Verantwortungsbereitschaft“, „Einübung in Verständigung und Kooperation“, „Stärkung des Schüler-Ichs“, S. 249 ff.) sowie zur Entwicklung eines tragfähigen Mathematikbildes beizutragen. Aus der Sicht der ästhetischen Bildung ist die Relevanz künstlerisch-kreativer Tätigkeit insbesondere für die Subjektbildung nicht erstaunlich. So ist „die produktive Auseinandersetzung mit Kunst und mit als ästhetisch – oftmals als schön – qualifizierten Gegenstandsbereichen“ (Bilstein & Zirfas, 2009, S. 20) eine immer wieder stark gemachte Dimension ästhetischer Bildung, deren Bildungswert insbesondere in einer Veränderung der Selbstwahrnehmung des schaffenden Subjektes und seines „Ich-Welt-Entwurf[s]“ (Parmentier, 1993, S. 311) begründet liegend angenommen wird (vgl. Parmentier, 1993, S. 310ff.).

Abgesehen vom expliziten Fokus auf das mathematisch-ästhetische Gefühl kann der Wert einer solchen Unterrichtskultur auch ohne den Rückgriff auf die Kunstförmigkeit der Mathematik begründet werden – Heymann selbst ist hier das beste Beispiel. Vielleicht bietet aber der Grundgedanke, Schülerinnen und Schülern künstlerisch-kreatives mathematisches Denken und Tätigsein zu ermöglichen, ein einfaches und natürliches Korrektiv für die praktische Unterrichtsgestaltung – Anregungen bei den Kollegen der klassischen künstlerisch-musischen Fächer eingeschlossen.

3.3 Mathematik als „geistige Schöpfung“ erfahren

> „Jeder Schüler sollte erfahren, daß Menschen imstande sind, Begriffe zu bilden und daraus ganze Architekturen zu bilden“ (Winter, 1995, S. 39)

Mit dieser Konkretisierung der zweiten seiner drei Grunderfahrungen, die Mathematikunterricht ermöglichen soll, um allgemeinbildend zu sein, verweist Winter auf den bildenden Wert der Wahrnehmung von Mathematik als Kunstform. Als Beispiele, die Schülerinnen und Schülern einen solchen Blick auf die Mathematik erlauben, führt er u. a. den Nachweis der Unendlichkeit der Primzahlmenge und der Irrationalität von $\sqrt{2}$ bzw. der Inkommensurabilität von Seite und Diagonale im Quadrat an (vgl. Winter, 1995, S. 40). Wenn Winter auch nicht explizit auf den mathematisch-ästhetischen Wert der gewählten Beispiele hinweist, so ist die Auswahl aus mathematikästhetischer Perspektive nicht erstaunlich und daher mindestens bemerkenswert, denn es handelt sich um zwei der immer wieder angeführten Paradebeispiele besonders schöner Mathematik (vgl. z. B. Hardy, 1940). Um Gelegenheiten zur zweiten Winterschen Grunderfahrung zu schaffen, scheint also die Auswahl nach ästhetischen Kriterien, wie sie unter 2.1 skizziert wurden, hilfreich.

Dabei lohnt sich nicht nur ein Blick in die (naturgemäß subjektiv gefärbten) populärwissenschaftlichen „Kunst-Sammlungen“ (vgl. etwa Basieux, 2003), sondern auch die Durchsicht „alltäglicher“ Aussagen, Argumentationen und Problemlösungen mit der Frage, wo Eigenschaften wie Ökonomie oder Tragweite besonders gut aufgezeigt werden können oder Aha!-Erlebnisse und emotionale Beteiligung der Schülerinnen und Schüler angeregt werden können, mithin was der Lehrperson selbst mathematisch-ästhetische Erfahrungen beschert: Eine Quelle solcher möglicherweise ästhetisch wirksamer und gleichzeitig elementar zugänglicher Mathematik sind m.E. etwa die Zusammenhänge von ausgezeichneten Punkten, Linien und Kreisen im Dreieck. Für Schülerinnen und Schüler kann dabei schon die bspw. mit Hilfe einer Geometriesoftware gemachte Beobachtung, dass sich die Mittelsenkrechten *immer* in einem Punkt schneiden und dieses der Mittelpunkt des Umkreises ist, zu Erstaunen führen. Die zugehörige Beweisidee („Jeder Punkt auf der Mittelsenkrechte einer Strecke ist zu den Streckenendpunkten gleichweit entfernt ….") hat das Potential zu einem Aha!-Erlebnis und dem auch von Poincaré beschriebenen Eindruck zu führen, dass nun der Rest des Beweises nur noch „runtergeschrieben" werden muss (Phase der „Illumination"). Die Möglichkeit zur Erfahrung der (lokalen) Tragweite einer solchen Idee bietet darüber hinaus der Eindeutigkeitsnachweis des Winkelhalbierendenschnittpunkts bzw. Inkreismittelpunkts. Für den Lehrer, die Lehrerin ist es in diesem Themenbereich eher das Wiedererinnern an komplexere Zusammenhänge, wie sie in Eulergerade und Feuerbachkreis und den zugehörigen Beweisen manifest werden. Nicht umsonst schlägt Winter diesen Themenkomplex auch unter Berufung auf die innermathematische Ästhetik als wertvoll im Rahmen der Lehrerbildung vor (vgl. Winter, 2007).

Introspektive Beschreibungen wie die Poincarésche legen die Vermutung nahe, dass über das direkte mathematikästhetische Erlebnis im nacherfindenden Umgang mit solchen Kunstwerken der Mathematik hinaus auch der Blick auf die Entstehungsgeschichte der Unterrichtsinhalte und insbesondere die Arbeitsweise der großen Künstler des Fachs zu bildsamen Erfahrungen im Sinne Winters beitragen können. Dabei kann das explizite Hervorheben paralleler Arbeitsweisen in Mathematik und bildender Kunst sinnstiftend werden. Schiralli (2006) beschreibt in diesem Sinne die Tätigkeiten von Mathematikern wie folgt, wobei er den Begriff „patterns" in Anlehnung an Hardy (1940) sehr weitgefasst für die Gegenstände der Mathematik verwendet, und spricht nahezu all diese Tätigkeiten ebenso auch den Künstlern bzw. Kunstwissenschaftlern zu:

> „Mathematicians often: *wonder* at the patterns discerned in experience; *analyse* patterns – noticing, noting, associating patterns and elements of patterns; *represent* patterns, i.e. describe them in formal terms; *manipulate* patterns; *create novel or original* symbolic patterns; imagine the possibilities of patterns; *connect* pattern possibilities, i.e. analyse, classify and theorise patterns, thereby creating larger, more comprehensive patterns.
>
> Mathematicians also: *demonstrate*, i.e. prove (or describe) the necessity (or nature) of patterned relationships using other patterns, viz. the patterns of logical operations.
>
> In so doing, mathematicians: *compute*, i.e. perform operations on patterned relationships using other patterns, viz. arithmetical, algebraic and so forth.

> Finally, mathematicians: *appreciate* the historical and contemporary achievements of other mathematicians; *evaluate* the achievements of other mathematicians.“ (Schiralli, 2006, S. 110 f., Hervorhebungen im Original)

Im Mathematikunterricht können diese Tätigkeiten nun einerseits durch den Rückgriff auf (Selbst-)Darstellungen aus der Mathematikgeschichte zutage treten. Ein Beispiel hierfür sind die Beschreibungen wie sie Poincaré zur Motivation und Herleitung seines Phasenmodells voranstellt. Eindrücklicher als solche meist anekdotischen Erzählungen versprechen darüber hinaus „authentische Erfahrungen mit Mathematik“ (Habdank-Eichelsbacher & Jahnke, 1999, S. 95) anhand historischer Originalquellen zu sein, gepaart mit einem Vergleich zum heutigen Vorgehen.

Andererseits können sich die von Schiralli für mathematische Wissenschaftspraxis und Kunst beschriebenen Tätigkeiten aber auch im eigenaktiven, entdeckenden *Umgang der Schülerinnen und Schüler selbst* mit der Mathematik zeigen: So kommt es etwa in Phasen der eigenständigen Begriffsbildung zu Erfahrungen mit mathematischen Mustern, die zum „wundern“, „analysieren“ und „manipulieren“ ebenso einladen, wie zum Erfinden neuer Bezeichnungen und Symbole oder zum Herstellen von Verbindungen zu bereits bekanntem. Nicht umsonst wird hier explizit die Möglichkeit zu „schöpferischem Tun“ und damit mindestens im Kleinen künstlerisches Schaffen auch im Mathematikunterricht gesehen (vgl. etwa Vollrath, 1987, oder Weth, 2007). Zur Umsetzung ist sowohl Vollrath folgend an die Suche nach und Beschreibung von bestimmten Mustern an kleinen abgesteckten Fragen zu denken, als auch an die eigenständige Bildung zentraler Begriffe der Oberstufenmathematik initiiert durch „Intentionale Probleme“, wie es Hußmann (2003) vorschlägt. Im letzteren Ansatz bietet insbesondere die konsequente Begleitung des Arbeitens durch Lerntagebücher eine weitere Chance: Mindestens im Nachgang kann in den Aufzeichnungen, die künstlerischen Tätigkeiten im Arbeitsprozess aufgespürt und auch als solche *benannt* werden (Bedeutung- bzw. Gegenstandsreflexion, vgl. 2.2). Solche „prozedurale Metakognition“ (Sjuts, 2003, S. 19) hätte dann nicht nur eine lernfördernde Wirkung, sondern könnte es Schülerinnen und Schülern im Mathematikunterricht ermöglichen, bewusst zu reflektieren, „dass Menschen [dass sie selbst] in der Lage sind, Begriffe zu bilden“ und die Mathematik mit Recht als Kunstform charakterisiert wird.

4 Über die pragmatische Dimension hinaus!

In den vorangegangenen Abschnitten konnten Beispiele für die Anschlussfähigkeit des ästhetischen Moments der Mathematik an verschiedene Konzepte von Allgemeinbildung durch Mathematik gegeben werden. Dabei konnte mindestens skizzenhaft dargestellt werden, dass ein explizites Einbeziehen von mathematischer Schönheit und dem Kunstcharakter der Mathematik die Möglichkeit birgt, sowohl verschiedene Ebenen des Reflektierens zu ergänzen und auszuschärfen, als auch

Anlässe zu „Grunderfahrungen“ und den Anlass sowie ein natürliches Korrektiv für eine „allgemeinbildende Unterrichtskultur“ bietet. Es wurde also in der Begrifflichkeit Klafkis die „ästhetische Bildungsdimension“ ins Zentrum gerückt und gezeigt, dass auch im Mathematikunterricht Bildungsgelegenheiten sowohl im Sinne „ästhetischer Wahrnehmungserfahrungen“ als auch im Sinne des „ästhetischen Gestaltens“ (Klafki & Braun, 2007, S. 170) geschaffen werden können.

Dass die Fragen nach Kunstcharakter und ästhetischem Erleben in den gängigen Ansätzen bisher dennoch nicht berücksichtigt werden, liegt vermutlich an den vorrangig herangezogenen Grundzielen, die der Mathematik nahezu ausschließlich die Möglichkeit zusprechen, einen Beitrag zur „pragmatischen Dimension“ allgemeiner Bildung (vgl. Klafki & Braun, 2007, S. 166ff.) zu leisten. So wird mit der Schulung mathematischer Kreativität und Problemlösefähigkeit traditionell das Ziel formaler Geistesbildung verbunden. Konzepte, die das Reflektieren in den Vordergrund stellen, haben dagegen häufig dezidiert gesellschaftsorientierte Grundziele wie „Citizenship“ (vgl. Skovsmose, 1998) oder „Mündigkeit“ (vgl. Lengnink, 2005), die möglicherweise zunächst den Verdacht nahelegen, dass die „Schöngeisterei“ hier keinen Beitrag leisten könne. Inwiefern dem aus mathematikästhetischer Perspektive zu widersprechen wäre – beispielsweise mit dem Hinweis auf Subjektbildung als Ziel ästhetischer Bildung im Allgemeinen, Bemerkungen zur „Stiftung kultureller Kohärenz“ (Heymann, 1996, S. 65ff.) auch durch ein möglichst umfassendes Mathematikbild oder dem Verweis darauf, dass ein Wissen um Bedingungen und Möglichkeiten mathematischer Schaffensprozesse notwendig ist, um mit den Experten mathematikaffiner Disziplinen zu kommunizieren (vgl. Fischer, 2012, S. 12ff.) – bleibt zu diskutieren.

Literatur

Affolder, W. u. a. (2010). *Das Mathematikbuch 7 – Lernumgebungen*. Stuttgart: Klett.

Allmendinger, H. & Spies, S. (2013). „Über die moderne Entwicklung und den Aufbau der Mathematik überhaupt“ – Das Zwischenstück in der „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus“ als Stilgeschichte und Kleinsches Programm*.* In M. Rathgeb u. a. (Hrsg.), *Mathematik im Prozess* (S. 177–194). Wiesbaden: Springer.

Barth, A. P. (2013). Wie bringt man die Schönheit der Mathematik im Unterricht zum Blühen? *Praxis der Mathematik in der Schule*, 55(55), S. 14–18.

Bauer, L. (1990). Mathematikunterricht und Reflexion*. mathematik lehren*, 38, S. 6–9.

Basieux, P. (2003). *Die Top Ten der schönsten mathematischen Sätze* (3. Aufl.). Hamburg: rororo.

Brinkmann, A. & Sriraman, B. (2009). Aesthetics and Creativity. An Exploration of the Relationships between the Constructs. In B. Sriraman & S. Goodchild (Hrsg.), *Relatively and Philosophically Earnest* (S. 57–80). Charlotte: Information Age Publishing.

Burton, L. (2004). *Mathematicians as Enquirers. Learning about Learning Mathematics.* Boston: Springer.

Danckwerts, R. & Vogel, D. (2006). *Analysis verständlich unterrichten.* Heidelberg: Spektrum.

Davis, P. & Hersh, R. (1994). *Erfahrung Mathematik.* Basel: Birkhäuser.
Dreyfus, T. & Eisenberg, Th. (1986). On the Aesthetics of Mathematical Thought. *For the Learning of Mathematics*, 6(1), S. 2–10.
Fischer, R. (2012). Fächerorientierte Allgemeinbildung. Entscheidungskompetenz und Kommunikationsfähigkeit mit Expertinnen. In R. Fischer, U. Greiner & H. Bastel (Hrsg.), *Domänen fächerorientierter Allgemeinbildung* (S. 9–17). Linz: Trauner.
Goldin, G. (2000). Affective Pathways and Representations in Mathematical Problem Solving. *Mathematical thinking and learning*, 2(3), S. 209–219.
Goy, A. (2013). Schöne Beweise: Die eulersche Polyederformel. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 55(54), S. 19–22.
Graumann, G. (1993). Die Rolle des Mathematikunterrichts im Bildungsauftrag der Schule. *Pädagogische Welt*, 47(5), S. 194–199.
Habdank-Eichelsbacher, B. & Jahnke, H. N. (1999). Authentische Erfahrungen mit Mathematik durch historische Quellen. In C. Selter & G. Walther (Hrsg.), *Mathematikdidaktik als design science. Festschrift für Erich Christian Wittmann* (S. 95–104). Leipzig: Klett.
Hadamard, J. (1945). *The Psychology of Invention in the Mathematical Field.* Princeton: University Press.
Hardy, G. H. (1940). *A Mathematician's Apology*. Cambridge: University Press. – 13. Nachdruck mit einem Vorwort von C. P. Snow (2007).
Hasse, H. (1952). *Mathematik als Wissenschaft Kunst und Macht.* Wiesbaden: Verlag für Angewandte Wissenschaften.
Heintz, B. (2000). *Die Innenwelt der Mathematik.* Wien u. a.: Springer.
Heitzer, J. (2007). Spiralen in Kunst und Mathematik. In M. Lauter & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Ausgerechnet … Mathematik und Konkrete Kunst* (S. 60–70). Würzburg: Spurbuchverlag.
Heymann, H. W. (1996). *Allgemeinbildung und Mathematik*. Weinheim: Beltz.
Hußmann, S. (2003). *Mathematik entdecken und erforschen – Theorie und Praxis des Selbstlernens in der Sekundarstufe II.* Berlin: Cornelsen.
Klafki, W. & Braun, K.-H. (2007). *Wege pädagogischen Denkens. Ein autobiografischer und erziehungswissenschaftlicher Dialog.* München: Reinhardt.
Lauter, M. & Weigand, H.-G. (Hrsg.) (2007). *Ausgerechnet … Mathematik und Konkrete Kunst.* Würzburg: Spurbuchverlag.
Lengnink, K. (2005). Mathematik reflektieren und beurteilen: Ein diskursiver Prozess zur mathematischen Mündigkeit. In K. Lengnink & F. Siebel (Hrsg.), *Mathematik präsentieren, reflektieren, beurteilen* (S. 21–36). Mühltal: Verlag Allgemeine Wissenschaft.
Lengnink, K. (2006). Reflected Acting in Mathematical Learning Processes. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38, S. 341–349.
Liljedahl, P. (2005). Mathematical Discovery and Affect: The Effect of AHA! Experiences on Undergraduate Mathematics Students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 36(2/3), S. 219–234.
Ministerium für Schule, Jugend und Kinder des Landes Nordrhein-Westfalen (Hrsg.) (2004). *Kernlehrplan für die Gesamtschule – Sekundarstufe I in Nordrhein-Westfalen*. Mathematik. Frechen: Ritterbach Verlag.
Neubrand, M. (1990). Stoffvermittlung und Reflexion: Mögliche Verbindungen im Mathematikunterricht. *mathematica didactica*, 13(1), S. 21–48.

Papert, S. (1988). The Mathematical Unconscious. In J. Wechsler (Hrsg.), *On Aesthetics in Science* (S. 104–119). Basel: Birkhäuser.
Parmentier, M. (1993). Möglichkeitsräume – Unterwegs zu einer Theorie der ästhetischen Bildung. *Neue Sammlung*, 33(2), S. 303–314.
Poincaré, H. (1914). *Wissenschaft und Methode.* Darmstadt:Wissenschaftliche Buchgesellschaft – Unveränderter Nachdruck der ersten deutschsprachigen Ausgabe (1973).
Schelldorfer, R. & Spies, S. (2013). Mathematik genießen – Schöne Mathematik. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 55(54). S. 2–8.
Schiralli, M. (2006). The Meaning of Pattern. In N. Sinclair u. a. (Hrsg.), *Mathematics and the Aesthetic. New Approaches to an Ancient Affinity* (S. 105–125). New York: Springer.
Schmidt-Thieme, B. & Weigand, H.-G. (2009). Symmetrie und Kongruenz. In H.-G. Weigand u. a. (Hrsg.): *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (S. 187–214). Heidelberg: Spektrum.
Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving.* Orlando: Academic Press.
Sjuts, J. (2003): Metakognition per didaktisch-sozialem Vertrag. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 24(1), S. 18–40.
Skovsmose, O. (1998). Linking Mathematics Education and Democracy. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* 30(6), S. 195–203.
Spies, S. (2012). Schön irrational! – Irrational schön? Ein klassischer Unterrichtsgegenstand aus mathematikästhetischer Perspektive. *mathematica didactica*, 35(1), S. 5–24.
Spies, S. (2013a). *Ästhetische Erfahrung Mathematik. Über das Phänomen schöner Beweise und den Mathematiker als Künstler.* Siegen: universi.
Spies, S. (2013b). Zum Bildungswert schöner Mathematik. In G. Greefrath, F. Käpnick & M. Stein (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013* (S. 958–961). Münster: WTM.
Vollrath, H.-J. (1987). Begriffsbildung als schöpferisches Tun im Mathematikunterricht. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 19(3), S. 123–127.
Weth, T. (1999). *Kreativität im Mathematikunterricht. Begriffsbildung als kreatives Tun.* Hildesheim: Franzbecker.
Weth, T. (2007). Die Schönheit in der Mathematik. In M. Lauter & H.-G. Weigand (Hrsg.), Ausgerechnet ... Mathematik und Konkrete Kunst. Baunach: Spurbuchverlag, S. 68–72.
Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 61, S. 37–46.
Winter, H. (2007). Eulersche Gerade und Feuerbachkreis – eine Studie zur ästhetischen Erziehung im Geometrieunterricht. In A. Peter-Koop & A. Bikner-Ahsbahs (Hrsg.), *Mathematische Bildung – Mathematische Leistung. Festschrift für Michael Neubrand zum 60. Geburtstag* (S. 197–214). Hildesheim: Franzbecker.

Anschrift der Verfasserin

Dr. Susanne Spies
Universität Siegen
Fakultät IV – Department Mathematik
57068 Siegen
e-Mail: spies@mathematik.uni-siegen.de

Eingang Manuskript: 11.05.2014
Eingang überarbeitetes Manuskript: 28.02.2015
Online verfügbar: 12.02.2016