Making it explicit?

Zum Lehren und Lernen von mathematischen Leitideen und „nature of science" als Aspekte mathematischer bzw. naturwissenschaftlicher Grundbildung

von

Eva Müller-Hill, Köln

Kurzfassung: In diesem Beitrag geht es um die Frage, wie zwei den aktuellen curricularen Rahmenvorgaben zugrundeliegende konzeptuelle Konstrukte, „nature of science" (NOS) und „mathematische Leitideen", im Rahmen der Lehramtsausbildung geeignet thematisiert werden können. Aktuell wird NOS in der Lehramtsausbildung verstärkt explizit-instruktiv, reflexionsbetont unter Einbeziehung meta-kognitiver Aspekte, sowie problem- und kontextbezogen thematisiert. In diesem Beitrag wird die Frage gestellt, inwieweit ein genauerer Blick in die Diskussion um das Lehren und Lernen von NOS für das Lehren und Lernen von mathematischen Leitideen fruchtbar sein kann. Dem voraus geht eine Erläuterung bzw. begriffliche Konkretisierung und vergleichende Betrachtung von NOS und mathematischen Leitideen. Ergebnis der Diskussion ist eine Ablehnung des explizit-instruktiven Ansatzes in der vorgestellten Art, und der Entwurf eines expliziten, verstärkt offen-reflexiven Ansatzes unter Beibehaltung des Problem- und Kontextbezuges und der Einbeziehung meta-kognitiver Aspekte für den Fall mathematischer Leitideen.

Abstract: This article deals with the question of how to teach conceptual didactical constructs underlying actual core curricula, „nature of science" (NOS) and „fundamental mathematical ideas" in pre-service teachers education. Contemporary NOS teaching, especially in pre-service teacher education, is explicit, highly instructive, problem- and context-oriented, and emphasizes reflective and meta-cognitive aspects. The question is posed in how far a closer look onto such teaching concepts can be fruitful for teaching on fundamental mathematical ideas, with a focus on pre-service teacher education. In a first step, NOS and fundamental mathematical ideas are concretized and compared on a meta-conceptual level. In a second step, this concretized understanding of fundamental mathematical ideas is confronted with highly instructive ways of making NOS an explicit object of consideration in pre-service teachers' didactical seminars. The conclusion is to refrain from the instructive character of explicitly teaching conceptual constructs for the case of fundamental mathematical ideas in teachers' education. In the last part of this paper, a short description of a pre-service teachers' course on fundamental mathematical ideas is given which follows a different explicit-reflective paradigm, keeping the orientation to problems and contexts, and the consideration of meta-cognitive aspects.

1 Einleitung und Aufriss der Problemstellung

Eine Reihe von Rahmencurricula für die MINT-Fächer auf internationaler Ebene orientieren sich sowohl im Bereich der konkreten Unterrichtsinhalte als auch im Bereich der sogenannte prozessbezogenen Kompetenzen in Teilen an spezifischen theoretischen, den stofflichen Inhalten übergeordneten, konzeptuellen Konstrukten wie „Basiskonzepte“, „big ideas“, „Leitideen“ und „nature of science“ . Diese Orientierung ist zumeist durch unterschiedliche allgemeinere Bildungsbegriffe, etwa den Begriffen der „literacy“, „Grundbildung“ oder „Allgemeinbildung“ motiviert und mit entsprechenden Bildungszielen verbunden.

So findet man z. B. in den deutschen Bildungsstandards für das Fach Physik für den mittleren Schulabschluss zu Begriff und Funktion der „Basiskonzepte“:

> Die in vier Kompetenzbereichen festgelegten Standards beschreiben die notwendige physikalische Grundbildung. Die im Kompetenzbereich Fachwissen vorgenommene vertikale Vernetzung durch die übergeordneten vier Basiskonzepte Materie, Wechselwirkung, System und Energie soll den Schülerinnen und Schülern kumulatives Lernen erleichtern. […] Sie [die Basiskonzepte] systematisieren und strukturieren Inhalte so, dass der Erwerb eines grundlegenden, vernetzten Wissens erleichtert wird. Die inhaltliche Dimension umfasst übergreifende, inhaltlich begründete Prinzipien und Erkenntnis leitende Ideen, mit denen Phänomene physikalisch beschrieben und geordnet werden. (KMK 2005b)

In der angelsächsischen didaktischen Diskussion um Aufbau und Zielsetzung curricularer Standards wird das Konstrukt der „big ideas“ sowohl in Bezug auf das Fach Mathematik als auch auf die naturwissenschaftlichen Fächer verwendet:

> In national and state standard projects [National Science Education Standards, 1996; Benchmarks for Scientific Literacy, AAAS 1993], basic concepts [and principles] of science are clustered under „big ideas“. […] The big ideas of science provide a structure on which knowledge can be built. They cross disciplines and provide an important mental framework for storing knowledge and showing relationships between disciplines, a key factor for understanding. (Hammermann 2006, S. 1)

> Teaching to big ideas provides coherence to the curriculum and helps teachers align curriculum tasks with learning performances. Big ideas are central to their discipline and have broad power or explanatory scope. Some are the source of coherence among the various concepts, models, theories, principles, and explanatory schemes that apply to different classes of phenomena within a discipline. They also provide insight into the development of the field and are links between disciplines. Others are powerful ideas about scientific process and method. (Smith et al. 2006, S. 5)

> Big ideas [in mathematics] should be the foundation for one’s mathematics content knowledge, for one’s teaching practices, and for the mathematics curriculum. Grounding one’s mathematics content knowledge on a relatively few Big Ideas establishes a robust understanding of mathematics. […] Because Big Ideas have connections to many other ideas, understanding Big Ideas develops a deep understanding of mathematics. (Charles & Carmel 2005, S.10)

Hierbei wird explizit die Rolle der „big ideas" in Bezug auf das fachliche Wissen der Lehrenden betont, z. B. um Mathematik im Schulunterricht als „coherent and connected enterprise" (NCTM 2000, S. 17) darstellen zu können.

Als ebenfalls inhalts- und begriffsorientiertes, auch stoffstrukturierendes Konstrukt, welches auch auf charakteristische mathematische Arbeits- und Denkweisen, die erkenntnisgenerierende und gesellschaftliche Funktion von Mathematik bezogen ist, haben die sogenannten „zentralen mathematischen Ideen" oder „Leitideen" – stark geprägt durch die Position von Heymann (1996) zur allgemeinbildenden Funktion von mathematischen Leitideen – Einzug in die deutschen Bildungsstandards (KMK 2004, 2005, 2012) und die darauf basierenden Kernlehrpläne für das Fach Mathematik gehalten. Damit verbunden ist eine Reihe von normativ hochgesteckten Bildungszielen:

> Die Standards für inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen sind jeweils ausgewählten mathematischen Leitideen zugeordnet, um Verständnis von grundlegenden mathematischen Konzepten zu erreichen, Besonderheiten mathematischen Denkens zu verdeutlichen sowie Bedeutung und Funktion der Mathematik für die Gestaltung und Erkenntnis der Welt erfahren zu lassen. Folgende mathematische Leitideen sind zugrunde gelegt: Zahl, Messen, Raum und Form, funktionaler Zusammenhang, Daten und Zufall. Eine Leitidee vereinigt Inhalte verschiedener mathematische Sachgebiete und durchzieht ein mathematisches Curriculum spiralförmig. (KMK 2004, S. 9)

> Der entscheidende Beitrag des allgemeinbildenden Mathematikunterrichts zur kulturellen Kohärenz besteht darin, die besondere Universalität der Mathematik und ihre Bedeutung für die Gesamtkultur anhand zentraler Ideen exemplarisch erfahrbar zu machen. […] In zentralen Ideen für den allgemeinbildenden Unterricht sollte die Universalität der Mathematik für Schüler nachvollziehbar zum Ausdruck kommen; sie sollten für unterschiedliche mathematische Teilgebiete von Bedeutung sein; sie sollten etwas anderes darstellen als lediglich mathematische Grundbegriffe, also nicht nur eine innermathematische Bedeutung haben; und vor allem sollte sich an ihnen aufzeigen lassen, daß und wie Mathematik mit der außermathematischen Kultur unserer Gesellschaft verbunden ist. (Heymann 1996, S. 158f.)

Leitideen sind im Rahmen von PISA als Baustein der mathematischen Grundbildung festgeschrieben worden (vgl. Abschnitt 3).

Das Lehren und Lernen der sogenannten *Nature of Science* (kurz: NOS) ist ein wesentlicher Aspekt insbesondere in amerikanischen und britischen Curricula (vgl. z. B. McComas & Olson 1998; Höttecke & Rieß 2007). So heißt es in der Einleitung zu Kapitel 1 „The nature of science" der *Benchmarks for scientific literacy* exemplarisch:

> Over the course of human history, people have developed many interconnected and validated ideas about the physical, biological, psychological, and social worlds. Those ideas have enabled successive generations to achieve an increasingly comprehensive and reliable understanding of the human species and its environment. The means used to develop these ideas are particular ways of observing, thinking, experimenting, and validating. These ways represent a fundamental aspect of the nature of science and reflect how sci-

> ence tends to differ from other modes of knowing. […] This chapter [The nature of science] lays out recommendations for what knowledge of the way science works is requisite for scientific literacy. (AAAS 1993)

Bildungsziele, die im Zusammenhang mit NOS (vgl. hierzu genauer den nachfolgenden Abschnitt 2) vor allem in der angelsächsischen didaktischen Diskussion stark gemacht werden, sind in erster Linie funktionaler Natur. Damit ist im Idealfall gemeint, dass Schülerinnen und Schüler mit Hilfe eines adäquaten Verständnisses von NOS in die Lage versetzt werden, die gesellschaftliche Relevanz der Naturwissenschaften zu erkennen, sowie Konsequenzen konkreter naturwissenschaftlicher Erkenntnisgewinnungs- und darauf basierender gesellschaftlich relevanter Entscheidungsprozesse mündig bewerten und sich zu diesen positionieren zu können (vgl. etwa Akerson et al. 2000). Darüber hinaus beziehen sich diese Ziele, wie bereits obiges Zitat andeutet, auch auf grundlegende epistemologische Überzeugungen, d. h. individuellen Vorstellungen zu Wissen, Überzeugung und Rechtfertigung der Lernenden (vgl. Mason & Bromme 2010; Neumann & Kremer 2013).

Den jeweiligen Bildungsbegriffen und theoretisch-konzeptuellen Konstrukten mag man aus fachdidaktischer, pädagogischer oder bildungstheoretischer Sicht ganz unterschiedlich begegnen. Dennoch sind sie Teil verbindlicher curricularer Vorgaben. Daher ist es nicht nur aus pragmatischen Gründen eine relevante Frage, wie angehende Lehrerinnen und Lehrer durch ihre universitäre Lehramtsausbildung in die Lage versetzt werden können, mit diesen Begriffen und konzeptuellen Konstrukten in ihrer späteren Tätigkeit als Fachlehrkräfte souverän und kritisch umzugehen.

Anliegen dieses Beitrages ist in erster Linie die Diskussion von Möglichkeiten zur nachhaltigen und fruchtbaren Thematisierung des Lehrens und Lernens von mathematischen Leitideen insbesondere im Rahmen der Lehrerausbildung. Dabei soll ausdrücklich auch die in jüngerer Zeit wieder auflebenden fachdidaktischen Diskussion zur aus dem Begriff der fundamentalen Ideen nach (Bruner 1970) abgeleiteten Begriffsfamilie „grundlegende mathematische Ideen" (etwa Kuntze & Dreher 2011[1]; Vohns 2007, 2010; Prömmel 2013, insbes. S. 61 ff.; siehe auch den nachfolgenden Abschnitt 3) in den Blick genommen werden.

Zum Lehren und Lernen von mathematischen Leitideen in der Lehrerausbildung liegen bisher nur einige wenige ausgearbeitete, umfassende[2] Vorschläge bzw. For-

---

1 In Kuntze et al. (2011) wird zwar von „big ideas" gesprochen, die dort verwendete Arbeitsdefinition von „big ideas" berücksichtigt jedoch explizit die Konzepte der „fundamentalen Ideen", „zentralen Ideen" und „Leitideen" der deutschsprachigen mathematikdidaktischen Debatte (ebd. S. 106).

2 „Umfassend" ist hier in dem Sinne gemeint, dass nach Ansätzen für eine Thematisierung des Lehrens und Lernens von mathematischen Leitideen in der Lehrerausbildung gefragt wird, die auch das allgemeine konzeptuelle Konstrukt mathematischer Leitideen umfasst

schungsergebnisse zu deren Wirksamkeit vor, gleichzeitig verfügen aber viele Lehramtsstudierende im Fach Mathematik zum Ende ihres Studiums nachweislich nur über unzureichende inhaltliche und didaktische Kenntnis zum Thema „mathematische Leitideen“ (vgl. Kuntze et al. 2011). Daher soll dieser Beitrag dazu dienen, den Blick auch auf geeignete Vorschläge zu anderen der genannten Konstrukten zu erweitern. Dem liegt die Prämisse zugrunde, dass es grundsätzlich Sinn macht und fruchtbar sein kann, eine vergleichende Gegenüberstellung des Lehrens und Lernens von solchen curricular verankerten, dem Stoff übergeordneten konzeptuellen Konstrukten vorzunehmen.

Dabei wird hier aus unterschiedlichen Gründen der Fokus auf NOS gelegt:

1. In der angelsächsischen Debatte um „big ideas“ für das Fach Mathematik findet man viele kommerzielle, häufig online-basierte Materialien für die „inservice“-Weiterbildung der Fachlehrkräfte. In Bezug auf die universitäre „preservice“-Ausbildung bleiben die vorhandenen Ansätze und Vorschläge vereinzelt (z. B. Schifter et al. 1999) und eher programmatisch (Charles & Carmel 2005), oder sind bereichsspezifisch (z. B. Batanero et al. 2011).
2. Ein möglicher Grund für 1 mag die große Heterogenität und Unschärfe der Begriffsexplikationen (vgl. die obigen Zitate) zum konzeptuellen Konstrukt der „big ideas“ selbst sein.[3] Dies betrifft auch die deutschsprachige didaktische Diskussion zu Leitideen (vgl. nachfolgenden Abschnitt 3.1). In dieser Hinsicht scheint die Debatte um das Lehren und Lernen von „big ideas“ in der Mathematik also keinen Mehrwert zu liefern.
3. Auch, in gewissem Grad allerdings abhängig von den jeweils verwendeten konkreten Explikationen, scheint das Konstrukt der „big ideas“ begrifflich und in Bezug auf die damit verbundenen Funktionen die mit „Leitideen“ verbundenen Aspekte nicht auszuschöpfen. So sind „big ideas“, ähnlich wie „Basiskonzepte“, in der Regel stärker auf der konzeptuellen Ebene angesiedelt und von den Funktionen her auf Vernetzung, Vertiefung, Verfestigung und Organisation vorhandenen (Fakten-)Wissens fokussiert. Insbesondere fehlen die mit dem Konstrukt der mathematischen Leitideen begrifflich in Beziehung stehenden Aspekte des „mathematischen Weltbildes“, also der Bedeutung mathematischen Wissens und Denkens für Welt und Gesellschaft, sowie der durch Leit-

---

und damit über einzelne stoffliche Teilgebiete und konkrete Kandidaten für zugehörige zentrale Ideen hinausgehen kann.

3 Etwas plakativ kommt dies auch in der folgenden Formulierung in den US-amerikanischen *Common Core State Standards* für das Fach Mathematik (CCSSI 2010, App. A, S. 2) zum Ausdruck: „Units within each course are intended to suggest a possible grouping of the standards into coherent blocks; in this way, units may also be considered ‚critical areas‘ or ‚big ideas‘, and these terms are used interchangeably throughout the document.“

ideen ebenfalls geprägten epistemologischen Überzeugungen, etwa zur Universalität von Mathematik (siehe etwa das obige Zitat aus Heymann 1996).

Ein genauerer Blick in die detaillierte Diskussion um das Lehren und Lernen von NOS in den benachbarten Naturwissenschafts-Didaktiken dagegen scheint in Bezug auf die genannten Punkte aussichtsreicher:[4]

NOS wird als Teil naturwissenschaftlicher Grundbildung betrachtet, die ein wesentliches Bildungsziel aktuellen naturwissenschaftlichen Unterrichts darstellt (vgl. etwa Holbrook & Rannikmae 2009; Lederman 2007; Osborne et al. 2003; siehe den nachfolgenden Abschnitt 2). Der Fokus der Diskussion um NOS in den Naturwissenschafts-Didaktiken liegt, wie in Abschnitt 6 dieses Beitrages genauer ausgeführt wird, neben dem „Wie“ eines Unterrichtens von NOS insbesondere auf den möglichen Konsequenzen für die geeignete Thematisierung in der Lehrerausbildung, insbesondere in der „pre-service“-Phase (obiger Punkt 1). Als Argument dafür wird angeführt, dass Studien einerseits ergeben haben, dass sowohl bei Lehrenden als auch bei Lernenden nur wenig als adäquat betrachtete Vorstellungen über NOS vorliegen (vgl. Abschnitt 6.1), und andererseits die Lehrenden als Multiplikatoren ihrer Vorstellungen zu NOS anzusehen sind (vgl. z. B. Höttecke & Rieß 2007, S. 2). Daher stellt eine bessere (Aus-)Bildung der Lehrerinnen und Lehrer in Bezug auf NOS den notwendigen ersten Schritt auf dem Weg zur Vermittlung eines „adäquaten“ NOS-Verständnisses im naturwissenschaftlichen Unterricht dar. Solche Beobachtungen bezüglich der Kenntnisse angehender Lehrerinnen und Lehrer haben bereits Anfang der achtziger Jahre dazu geführt, dass im Rahmen der (insbesondere angloamerikanischen) didaktischen Diskussion verschiedene Lehrkonzepte erprobt, evaluiert und weiterentwickelt wurden (vgl. auch hierzu die Ausführungen in Abschnitt 6).

Weiterhin ist in Bezug auf obigen Punkt 2 im Rahmen der naturwissenschaftsdidaktischen Diskussion vergleichsweise konsensfähig, welche Aspekte NOS charakterisieren (Lederman 2006, 2007), sodass die didaktische Diskussion zur Gestaltung des Lehrens und Lernens in Bezug auf den einvernehmlichen Gehalt von NOS natürlicherweise facettenreicher und etablierter ist, als sie bei strittigeren Lern- und Lehrinhalten sein könnte.[5] Hinsichtlich Punkt 3 beinhaltet NOS auch Aspekte naturwissenschaftlicher Denk- und Arbeitsweisen im Allgemeinen, ist auf

---

4 Natürlich werden dadurch weitere vergleichende Betrachtungen nicht ausgeschlossen, im Rahmen dieses Beitrages allerdings nicht geleistet.

5 Diese Aspekte werden in Abschnitt 2 genauer vorgestellt. Mit diesem Konsens soll weniger eine abschließende oder umfassende Antwort auf die Frage ausgedrückt werden, was Naturwissenschaften nun essentiell ausmacht, sondern vielmehr die besondere Relevanz einiger der für sich betrachtet eher unstrittigen Aspekte für den naturwissenschaftlichen Unterricht festgestellt werden. (vgl. Neumann & Kremer 2013, S. 211 ff.).

das naturwissenschaftliche Weltbild bezogen, und prägt epistemologische Überzeugungen (vgl. hierzu genauer die nachfolgenden Abschnitte 2 bis 4). An letzteres knüpft sich eine interessante Anschlussfrage (die im Rahmen dieses Beitrages allerdings nicht verfolgt werden kann) und damit ein weiterer Grund für die prinzipielle Relevanz des vergleichenden Blickes in die Naturwissenschaftsdidaktiken und auf NOS im Besonderen, nämlich das Interesse an der Frage, ob und inwiefern epistemologische Überzeugungen domänenspezifisch sind (vgl. Neumann & Kremer 2013, S. 218f; Rott et al. 2015, S. 40).

In den folgenden drei Abschnitten werden zunächst sowohl NOS als auch „mathematische Leitidee" begrifflich erläutert, wichtige Aspekte der jeweiligen Rolle von Leitideen für die mathematische Grundbildung (bzw. *literacy*)[6] und der von NOS für die naturwissenschaftliche Grundbildung (bzw. *literacy*) herausgearbeitet und Parallelitäten aufgezeigt. Anschließend wird entlang einer partiellen, indirekten Analogie von NOS und mathematischen Leitideen in Bezug auf ihre didaktischen Funktionen und damit verbundenen Bildungsziele untersucht, ob aus den Erfahrungen und Ansätzen zu *learning to teach NOS* etwas über das Lehren und Lernen von mathematischen Leitideen und die Art und Weise der geeigneten Thematisierung in der Lehramtsausbildung abgeleitet werden kann.

2 Naturwissenschaftliche Grundbildung und NOS

Definitionen naturwissenschaftlicher Grundbildung sind vielfältig in der didaktischen Diskussion. Dies diagnostizieren etwa Holbrook und Rannikmae (2009) mit Hinweis auf Norris und Phillips (2003), nach denen der Begriff je nach Autor ein mehr oder weniger stabiles Konglomerat der folgenden unterschiedlichen Komponenten ist:

a) Knowledge of the substantive content of science and the ability to distinguish from non-science;
b) Understanding science and its applications;
c) Knowledge of what counts as science;
d) Independence in learning science;
e) Ability to think scientifically;
f) Ability to use scientific knowledge in problem solving;
g) Knowledge needed for intelligent participation in science-based issues;

[6] Die Begriffe „Grundbildung" und „literacy" werden hier zwar nicht als grundsätzlich synonymbetrachtet. Da eine genaue Differenzierung dieser beiden Begriffe im Rahmen dieses Beitrages nicht geleistet wird, wird jedoch im Folgenden außerhalb von Zitaten der (grundsätzlich weitere, vgl. z. B. Neubrand 2003) Begriff „Grundbildung" verwendet.

h) Understanding the nature of science, including its relationship with culture;
i) Appreciation of and comfort with science, including its wonder and curiosity;
j) Knowledge of the risks and benefits of science; and
k) Ability to think critically about science and to deal with scientific expertise.

Holbrook und Rannikmae betonen als eine grundlegende, die anderen Komponenten auf vernünftige Weise integrierende und funktional wirksam machende Komponente die „appreciation of nature of science".

NOS wird dabei mit vergleichsweise großer Einheitlichkeit (vgl. die Bemerkungen in der Einleitung) u. a. verstanden als der empirische, vorläufige (*tentative*), subjektive, theorie-abhängige (*theory-laden*), erfinderische, kreative, soziale und kulturelle Charakter von Wissenschaft. Zwei weitere Aspekte sind die charakteristischen Beziehungen zwischen Beobachtung und Herleitung sowie zwischen Theorien und Gesetzen (vgl. etwa Akerson et al. 2000, S. 298). Offenbar betrifft ein Teil dieser Aspekte neben Inhalten in erster Linie Prozesse wissenschaftlichen Arbeitens, andere Aspekte knüpfen an spezifische wissenschaftliche Meta-Theorien oder -Konzepte (Was ist überhaupt ein Naturgesetz bzw. eine Messgröße? Was ist ein wiederholbares Experiment? etc.) sowie epistemologische Überzeugungen (z. B. Theorieabhängigkeit und Vorläufigkeit naturwissenschaftlichen Wissens, vgl. Neumann & Kremer 2013, S. 221) und naturwissenschaftliche Weltbilder an (empirischer Charakter im Sinne eines Primats der Beobachtung) an. Laut Holbrook und Rannikmae (2009) kann NOS aus mindestens drei unterschiedlichen Perspektiven interpretiert werden. Hier wird noch einmal besonders der in Abschnitt 1 angesprochene Punkt deutlich, dass das Konstrukt „NOS" prinzipiell umfassender ist als das Konstrukt der „big ideas":

a) it can relate to the development of big ideas in science in a conceptual sense, especially considering these with regard to higher order or with regard to theories promoted by scientists.
b) it can be an examination of the ways in which scientists work and a consideration of the variety of scientific methods related to process [and problem solving] skills.
c) a third direction relates to the nature of science in a social setting and encompasses socio-scientific decision making. […] This puts forward an image of science as tentative, not able to provide a definite answer, but bringing to bear reasoned argumentation on the science theories and methods related to the issue. (Holbrook & Rannikmae 2009, S. 281 f.)

Die Perspektiven a) und b) beziehen NOS sowohl auf konkrete fachliche Inhalte als auch auf spezifisch, konkrete naturwissenschaftliche Arbeits- und Erkenntnisgewinnungsprozesse. Insbesondere die Bedeutung des direkten Bezugs auf konkrete fachwissenschaftliche Inhalte und Arbeitsweisen beim Lehren und Lernen von NOS betonen auch Akerson et al. (2000):

> It cannot be overemphasized that we believe that NOS instruction is best undertaken in the context of science content courses. (Akerson et al. 2000, S. 313)

Perspektive b) betont die „examination of the ways in which scientists work“ für die Herausbildung eines adäquaten Verständnisses von NOS. Nicht nur deswegen sind Methoden zum Lehren und Lernen von NOS aktivitätsorientiert, verschiedene Aspekte von NOS sollen im Kontext von konkreten Arbeits- und Problemlöseprozessen erfahren werden (vgl. hierzu Abschnitt 6). Die dazu notwendige Realisierung unterschiedlicher Aspekte von NOS in konkreten Kontexten und problemhaltigen Situationen kann, wie im Folgenden vorgeschlagen wird, auch für das Lehren und Lernen von mathematischen Leitideen fruchtbar sein (vgl. Abschnitt 3.2), weshalb der Blick auf entsprechende Lehrkonzepte zu NOS (Abschnitte 6.2 und 6.3) sinnvoll sein kann.

Perspektive c) rückt weitergehende Bildungsziele in den Blickpunkt: Die Komponente NOS soll dafür sorgen, dass über naturwissenschaftliche Grundbildung verfügende Schülerinnen und Schüler eine bestimmte Fähigkeit erlangen.

> […] an ability of functionality as a citizen within society (at home, at work, in the community), not purely at a knowledge level, but in making [socio-scientific] decisions and acting as a responsible person. (Holbrook & Rannikmae 2009., S. 281)

Hier geht es also um die Ausbildung von Handlungs- und insbesondere Entscheidungskompetenzen, d. h. in Bezug auf das Stufenmodell naturwissenschaftlicher Grundbildung von Bybee (1997) das Erreichen der vierten, „multidimensionalen“ Stufe:

> *Multidimensional*: not only has understanding, but has developed perspectives of science and technology that include the nature of science, the role of science and technology in personal life and society. (Bybee 1997, zitiert nach Holbrook & Rannikmae 2009, S. 279)

Ein wichtiger Aspekt in diesem Zusammenhang ist die Vernetzung eines expliziten Bewusstseins von NOS und seiner Relevanz mit den eigenen, persönlichen Einstellungen und Perspektiven auf Wissenschaft und wissenschaftliches Wissen. Auch hier besteht eine Verbindung zu (allgemeinen oder naturwissenschaftsspezifischen) epistemologischen Überzeugungen.

Auf der Grundlage, dass epistemologische Überzeugungen und die individuellen Vor- und Einstellungen zum jeweiligen Wissensgebiet konkrete Problemlöseprozesse beeinflussen[7] und auf dieser Ebene auch reflektiert werden können, wird deutlich, warum jüngere Ansätze in der Debatte um das Lehren und Lernen von NOS insbesondere in der Lehrerausbildung den Bezug zu Einstellungen und Überzeugungen berücksichtigen und mit spezifischen Reflexionsinstrumenten adressieren (vgl. wieder Abschnitt 6). Diese grundsätzliche, explizite Verknüpfung von NOS und Einstellungen, „Weltbildern“ und epistemologischen Überzeugungen,

---

7 Diese These wird prominent etwa in Schoenfeld (1985) vertreten, vgl. in der aktuellen mathematikdidaktischen Diskussion z. B. Bernack et al. (2011).

ebenso wie konkrete Ideen der methodischen Ausgestaltung können für das Lehren und Lernen von mathematischen Leitideen lehrreich sein. Ähnlichkeiten und explizite Verknüpfungen von Leitideen zu epistemologischen Überzeugungen in der mathematikdidaktischen Diskussion sind nicht einvernehmlich etabliert (vgl. nachfolgenden Abschnitt 3), und somit eher vereinzelt Teil von speziellen Lehrkonzepten zu Leitideen (z. B. im Rahmen des Projektes *abcmaths*, vgl. Kuntze & Dreher 2011).

3 Mathematische Grundbildung und Leitideen

Mathematische Grundbildung wird nach (OECD/PISA 2003, S. 24) wie folgt definiert:

> Mathematical literacy is an individual's capacity to identify and understand the role that mathematics plays in the world, to make well-founded judgements and to use and engage with mathematics in ways that meet the needs of that individual's life as a constructive, concerned and reflective citizen.

Es werden darüber hinaus drei sogenannte Dimensionen (OECD/PISA 2002, S. 13 ff.) mathematischer Grundbildung unterschieden:

> *Prozesse*: Denkfähigkeiten, drei Kompetenzklassen: Reproduktion und Routinen, Herstellen von Zusammenhängen, mathematisches Denken.
>
> *Inhalte*: Phänomenbezug und charakteristische Problemstellungen, mathematische Leitideen stehen dabei im Vordergrund.
>
> *Kontexte*: mathematisches Wissen in Alltagskontexten anwenden können.

Dabei fasst das PISA-Konsortium den Begriff und die Funktion der mathematischen Leitidee wie folgt:

> Mathematische Leitideen sind bedeutungshaltige, stark miteinander vernetzte mathematische Konzepte, wie sie in realen Situationen und Kontexten auftreten. (OECD/PISA 2000, S. 48)
>
> Inhalte werden in Bezug auf ein Phänomen und die mit diesem Phänomen einhergehenden Problemstellungen definiert, und hierfür der Begriff „Leitidee" verwendet. (OECD/PISA 2002, S. 95)

Leitideen sollen insbesondere

> so vielfältig und so tiefgehend [sein], dass sie die wesentlichen Charakteristika der Mathematik repräsentieren, und zugleich eine angemessene Berücksichtigung curricular definierter Stoffgebiete erlauben. (ebd.)

Leitideen sind demgemäß also der inhaltlichen Dimension zuzuordnen. Dies entspricht auch einer geläufigen Interpretation von Leitideen als Stoffvernetzer („vernetzendes Denken fördern" (KMK 2004, S. 6)) bzw. „rote Fäden" durch den Schulstoff sowie der auf Kompetenzen bezogenen Rolle von Leitideen in den aktuellen Kerncurricula; nicht die prozessbezogenen Kompetenzen, sondern die inhaltsbezogenen werden nach Leitideen systematisiert:

> [Die Standards für inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen] sind jeweils ausgewählten mathematischen Leitideen zugeordnet, um Verständnis von grundlegenden mathematischen Konzepten zu erreichen, Besonderheiten mathematischen Denkens zu verdeutlichen sowie Bedeutung und Funktion der Mathematik für die Gestaltung und Erkenntnis der Welt erfahren zu lassen. (KMK 2004, S. 9)

3.1 Kritik des Leitideebegriffs

Wie die obigen Zitate illustrieren sollen, leisten weder PISA noch die aktuellen KMK-Bildungsstandards eine wirkliche Definition oder genauere Explikation des Begriffs der mathematischen Leitidee. In der Regel werden didaktisch und curricular relevante *Funktionen* von solchen Leitideen genauer beschrieben: z. B. das Repräsentieren von Charakteristika der Mathematik als didaktisch relevante Funktion, oder die Stoffstrukturierung als curricular relevante Funktion. Weiterhin finden sich in diversen Rahmencurricula oder Standards *Kataloge* von Leitideen, neben den oben bereits genannten etwa „Algorithmus", „Modellieren" oder „Daten und Zufall".

Auch ein kurzer, exemplarischer Blick in die *mathematikdidaktische* Literatur liefert keine klare oder konsensfähige Begriffsdefinition oder -explikation. Die Ideen- und Begriffsgeschichte des Konzepts der Leitideen – über die fundamentalen Ideen bei Bruner (1970), die universellen und zentralen Ideen z. B. bei Schreiber (1979, 1983) sowie Bender und Schreiber (1985), die Leitideen, bereichsspezifischen Strategien und zentrale Mathematisierungsmuster bei Tietze (1979), oder die fundamentalen Ideen von Schweiger (1992), die fundamentalen Ideen bei Schwill (1993) bis hin zu den zentralen Ideen im Sinne von Heymann (1996) offenbart vielmehr eine umfängliche Deutungsbreite und einen großen Facettenreichtum dieser „Begriffsfamilie". Die vorgenommenen Begriffsexplikationen und einzelne Kriterien reichen dabei von „grundlegende Begriffe" (Bruner 1970) über „allgemeine kognitive Denk- und Handlungsschemata, die im Prozess der Mathematik eingesetzt werden", „Methoden und Begriffskonstruktionen" (beides Schreiber 1979), „Denk-, Handlungs-, Beschreibungs- und Erklärungsschemata" (Schwill 1993), „Mathematisierung allgemeiner Erfahrungen" und „Strategien des Problemlösens und der Begriffsbildung" (Tietze 1979), „archetypische Konzepte und Denkmuster" (Schweiger 1992) und Kriterien wie „Bündelung von vormathematischen Erfahrungen aus unterschiedlichen Bereichen" (Schreiber 2011), Anwendungsfülle (Schreiber 1979), zur Stiftung kultureller Kohärenz (Heymann 1996). Außerdem findet man auch eine Reihe von im Vergleich zu den Bildungsstandards erweiterten oder gänzlich anders gearteten Katalogen, z. B. „Exhaustion, Iteration, Reduktion, Abbildung, Quantität, Kontinuität, Optimalität, Invarianz, Unendlich […]" (Schreiber 1983) oder „Linearisierung, einfache Strukturen, Ähnlichkeit, Stabilität, Unabhängigkeit von Störungen, Kraft des Formalen, Erweiterndes Umdefinieren, Dualität“ (Schweiger 1992).

Diese konzeptuelle Offenheit geht aber zulasten der gehaltvollen fachdidaktischen Präzisierbarkeit dessen, was eine Leitidee[8] eigentlich sein soll (vgl. hierzu auch Vohns 2010, Abschnitt 2):

> Handelt es sich beispielsweise um Beschreibungen, um Orientierungspunkte, um Normen […] oder um curriculare Konstruktionsprinzipien? […] Für wen sollen diese Ideen fundamental sein […], und in welchem Sinne sind sie […] grundlegend? (Graumann et al. 1996, S. 172)

So findet man in Anlehnung an (Schweiger 1992) in der aktuelleren Debatte vage bleibende Explikationsansätze von „fundamentale“ oder „grundlegende Idee“ als *Metakonzept*, d. h. zum Beispiel ein „Bündel von Handlungen, Strategien, Techniken, Zielvorstellungen und […] Subkonzepten“ (vgl. hierzu auch Vohns 2007, Kap. 2.2, 2.3; Vohns 2010). Dabei wird versucht, der Offenheit des Konzepts durch die „Bündelung“ ihrer Natur nach gänzlich unterschiedlicher Dinge wie Handlungen, Vorstellungen und Begriffen gerecht zu werden. Mit Blick darauf, dass durch solche „Bündel-Explikationen“ aber insbesondere der ontologische Status von Leitideen unbestimmbar wird, entzieht sich die mathematikdidaktische Debatte um Leitideen letztlich einerseits der grundlegenden wissenschaftlichen Basis, andererseits wird das Konzept mit Blick auf die (schul)praktische Umsetzung schwer konkretisierbar. Leitideen als Konzepte hinter solchen Bündeln anzusetzen (vgl. ebenfalls Vohns 2010 in Bezug auf „grundlegende Ideen“), drückt die Hoffnung aus, dass all diesen unterschiedlichen gebündelten Dingen etwas gemeinsam ist, was dann als Idee konzeptualisiert werden kann. Die Herausforderung besteht dann darin, dieses Gemeinsame seiner Natur nach und in seinen konkreten Ausprägungen genauer zu bestimmen.

Deutlich wird anhand solcher Explikationsversuche allerdings einerseits, dass sich die in der fachdidaktischen Debatte diskutierten erwünschten Funktionen von Leitideen nicht allein auf die eines curricularen Strukturierungsinstruments für die Lehrenden reduzieren lassen. Andererseits zeigt sich, dass mit Leitideen mehr als bloße *Mengen* von Strategien, (mentalen) Konzepten oder Vorstellungen zu mathematischen Begriffen, etwa zu „Zahl“, gemeint ist, sondern dass hier begrifflich um einen spezifischen didaktischen Mehrwert gerungen wird, der über einen bestimmten quantitativen Schwellenwert z. B. an unterschiedlichen Vorstellungen zu einem

8 Ich spreche im Folgenden mit Ausnahme von Zitaten wieder einheitlich von „mathematischer Leitidee“. Damit ist nicht gemeint, dass die einzelnen Mitglieder der oben genannten Begriffsfamilie untereinander oder zum Begriff „Leitidee“ synonym sind. Gemeint ist, dass für den in Standards und Kerncurricula verwendeten, aber nicht definierten Begriff „Leitidee“ mögliche Bedeutungsexplikate im Rahmen der fachdidaktischen Begriffsgeschichte und zugehörigen Begriffsfamilie gesichtet werden.

mathematischem Begriff o. ä. hinauszugehen scheint und unterschiedliche Ebenen des Mathematiklernens, neben der kognitiven Vorstellungsebene und Begriffsbildungsebene auch die Handlungsebene, umfasst. Zwar erscheinen Leitideen in einer Reihe von Ansätzen als an grundlegenden Fachbegriffen orientiert: Bereits gemäß der Grundkonzeption von fundamentalen Ideen als „Grundbegriffen" nach Bruner (1970) haben Leitideen das Potential zur Entwicklung von „big ideas in a conceptual sense", das sich auch in der Formulierung der didaktischen Funktion von Leitideen in den Bildungsstandards findet: Die Strukturierung von Inhalten anhand von Leitideen soll das „Verständnis grundlegender mathematischer Begriffe" (KMK 2004, S. 6) fördern. Dennoch sind sie in der didaktischen Debatte nicht durchgängig als rein konzeptioneller Natur angelegt. Leitideen umfassen, anders als die in PISA vorgeschlagene Dimensionierung vorsieht, gemäß einigen der genannten Ansätze vielmehr auch deutlich prozessbezogene und operative Aspekte, die auf grundlegende mathematische Denk- und Arbeitsweisen und -muster zielen.[9] In Zusammenhang mit Einstellungen und Überzeugungen zu Mathematik und mathematischem Wissen, die spätestens durch das Bewusstmachen von Leitideen in ähnlicher Breite wie in der skizzierten didaktischen Debatte (etwa im Rahmen einer Thematisierung in der Lehramtsausbildung) offenbar berührt werden, werden auch meta-kognitive und affektive Aspekte miteinbezogen.[10]

3.2 Zur Konkretisierung des Leitideebegriffs

Bevor man sich der Frage nach dem „Wie" des Lehrens und Lernens mathematischer Leitideen annehmen kann, muss die Frage danach hinreichend beantwortet werden, *was* mathematische Leitideen sind oder sein sollen. Nun ist es nicht das Ziel dieses Beitrages, die oben angerissene begriffliche Debatte um Leitideen detaillierter aufzurollen, oder für eine spezielle Gesamtkonzeption von „Leitidee" zu argumentieren. Für die Frage, ob mathematische Leitideen generell, mit Blick auf die damit verbundenen didaktischen Funktionen und Bildungsziele, eher ein impliziter oder expliziter, instruktiv oder reflexiv behandelter Gegenstand der Lehrerausbildung sein sollten, erscheint dies zweitrangig. Es ist aber meines Erachtens notwendig, aufzuzeigen, dass der Begriff „mathematische Leitidee" zumindest in Bezug auf einige Teilaspekte hin begründet konkretisiert werden kann.[11] Ohne sol-

---

[9] Mit dieser Aussage wird also explizit ein anderer Blickwinkel auf Leitideen eingenommen, als ihn z. B. Vohns einnimmt (vgl. Vohns 2010). Dort werden fundamentale Ideen und verwandte Konstrukte, wie die Leitideen sie darstellen, als primär konzeptuelles Mittel mit geringem konstruktiven oder operativen Gehalt diskutiert.

[10] Affektive Aspekte werden bereits bei Bruner – dort auch in Bezug auf das Lehren und Lernen von Leitideen im Schulunterricht – hervorgehoben, wenn er von der „dramatisierenden Wirkung" des „Vorlebens" von Leitideen durch die Lehrerin oder den Lehrer spricht. (Bruner 1970, S. 89 f., vgl. Abschnitt 5 im Folgenden).

[11] Einen prinzipiell ähnlichen Aspektcharakter weist auch NOS auf.

che Konkretisierungen bleibt es fraglich, ob mathematische Leitideen überhaupt zum Lehrgegenstand werden können, egal ob explizit, implizit, instruktiv oder reflexiv.[12]

Die Möglichkeit einer solchen Teilkonkretisierung möchte ich hier zumindest per Skizze herausstellen. Dabei soll die rein „formale" Stoffstrukturierungs- und Orientierungsfunktion von Leitideen im Sinne einer registerhaften Organisation von Curricula (vgl. auch Abschnitt 5) außen vor gelassen werden. Im Blickpunkt stehen dagegen didaktische Funktionen von Leitideen als Orientierungsgeber für Mathematikunterricht, die stärker direkt die Lernenden adressieren. Diese Funktionen werden deutlicher, wenn man einige der mit der Orientierung an Leitideen verbundenen Ziele wie z. B. die Vermittlung von Charakteristika der Mathematik und mathematischen Arbeitens, die Förderung vernetzenden Denkens oder das Anknüpfen an archetypische Denkmuster und -strukturen betrachtet. Dass es eine Reihe guter Kandidaten für gewisse stoffliche Kategorien gibt, die eine solche Funktion erfüllen könnten, illustrieren die unterschiedlichen Kataloge, die in der Diskussion vorgeschlagen werden. Welcher konkretere Aspekt des Begriffsspektrums einer Leitidee aber liegt diesen Katalogen als gemeinsames Merkmal zugrunde und verdeutlicht noch dazu etwa Charakteristika mathematischen Arbeitens- und Denkens?

Ich schlage daher vor, als mögliche Teilkonkretisierung des Leitideebegriffs von gebietsübergreifend oder teilgebietsspezifisch zentralen, charakteristischen mathematischen Problemlöseprozesstypen zu sprechen. Mit Problemlöseprozesstypen sind Typen von komplexen Handlungen gemeint, die darin bestehen, ein gegebenes (inner- oder auch außermathematisches) Problem einer bestimmten Art in einer dafür typischen Weise mit mathematischen Mitteln zu strukturieren und im Anschluss (ggf.) auch zu lösen.[13] Dabei geht es weniger um den chronologischen Ab-

[12] Eine Gegenbewegung zu solchen Konkretisierungsvorhaben stellt vielleicht das Argument dar, dass der Begriff der Leitidee nicht präzise definierbar ist, weil es sich um intuitive, subjektiv geprägte Schöpfungen des anschaulichen Denkens handelt. Diesem wird hier so nicht zugestimmt. Statt auf eine präzisere Explikation vollständig zu verzichten, wird im Rahmen des hier entwickelten Ansatzes dem intuitiven, subjektiven Charakter von „Idee" in „Leitidee" durch den *Umgang* mit Leitideen in der Lehre Rechnung getragen; etwa dadurch, dass ein „Lehren" von mathematischen Leitideen an zuvor gefundene subjektive, inhaltsbezogene mathematische Kernideen der Lernenden anknüpfen soll (vgl. Abschnitt 7).

[13] Der dabei verwendete Begriff des Problemlöseprozesses ist grundsätzlich weit gedacht, und umfasst auch (kollektive und individuelle) Prozesse des Bewältigens von Problemen vom Typ „entscheide, ob A" (verifying), „beweise, dass A" (proving) oder „erkläre, warum A" (explaining) (vgl. Sierpinska 1994).

lauf als um die charakteristischen Elemente eines solchen Strukturierungs- und Lösungsprozesses.[14]

Drei Beispiele zu in den Bildungsstandards (KMK 2004) verankerten Leitideen:

- *Daten und Zufall:* Im Falle dieser Leitidee lassen sich typische Problemlöseprozesse als spezifische Modellierungskreisläufe rekonstruieren (z. B. „Datenanalyse" und „Wahrscheinlichkeitsanalyse", vgl. Eichler & Vogel 2009).
- *Funktionaler Zusammenhang:* Ein Kernelement typischer Problemlöseprozesse in Bezug auf den dynamischen Aspekt dieser Leitidee besteht darin, unter Ausnutzung der Kenntnis bestimmter Zusammenhangstypen die Kovariation zwischen variablen Größen „über mehrere Wertepaare hinweg" (Sproesser et al. 2012) zu beschreiben. Dabei wird Wissen zu unterschiedlichen Darstellungsformen von Funktionen und der heuristische Wechsel zwischen solchen Darstellungen genutzt.
- *Messen:* Unter dem operativen Aspekt „Messen als spezifische Form des Passens", den Bender und Schreiber (1985, S 175 ff.) betonen, ist das „Feststellen von Kongruenzen" (ebd., S. 175) als Weiterführung von alltagspraktischen Messprozessen des „Einpassens" ein charakteristisches Element typischer Problemlöseprozesse in der elementaren und höheren Mathematik (zu letzterem liefert die sogenannte Hilbertsche Streckenrechnung zur Algebraisierung affiner Ebenen konkrete, fast schon prototypische Beispiele).

Problemlöseprozesstypen können als Teilkonkretisierungen einer mathematischen Leitidee u. a. in dem Sinne aufgefasst werden, dass unterschiedliche, inhaltliche und prozessbezogene Aspekte der jeweiligen Leitidee in einer „prototypischen Situation" realisiert werden.[15] Eine solche Ausrichtung auf die Realisierung von (Aspekten von) Leitideen in geeigneten problemhaltigen Situationen mag man bereits in den Bildungsstandards durch die kompetenzbezogene Operationalisierung unterschiedlicher inhaltlicher Aspekte von Leitideen angebahnt sehen:

> Die Bewältigung mathematischer Problemsituationen erfordert das permanente Zusammenspiel von prozess- und inhaltsbezogenen Kompetenzen. Insofern sind die folgenden Inhalte immer im Kontext allgemeiner mathematischer Kompetenzen […] zu sehen. Die inhaltsbezogenen Kompetenzen werden jeweils übergreifenden Leitideen zugeordnet […]. (KMK 2012, S. 18)

---

14 Ein mögliches Charakterisierungsschema für solche Problemlöseprozesstypen bietet beispielsweise die Taxonomie in Schoenfeld (1985) anhand von *Resources* (verwendetes Begriffs- und Routinenwissen), *Heuristics* (verwendete heuristische Strategien), *Control* (eingesetzte Maßnahmen zur Prozesssteuerung), *Belief System* (zugrundeliegende, relevante Auffassungen, Überzeugungen und Einstellungen).

15 Im Falle von „Daten und Zufall" und mit Blick auf den Aspekt „Zufall" werden hier z.B. geeignete Spielsituationen vorgeschlagen, vgl. Biehler & Hartung (2006, S. 68).

Es wird jedoch dort nicht deutlich, inwieweit solche, für eine Leitidee ggf. typische Zusammenspiele prozess- und inhaltsbezogener Aspekte für die Lernenden also solche auch transparent gemacht, oder selbst zum Lerngegenstand werden sollen, beispielsweise im Sinne der bereits genannten spezifischen Modellierungskreisläufe von Daten- und Wahrscheinlichkeitsanalysen in Bezug auf „Daten und Zufall“ (vgl. auch Eichler & Vogel 2013). Deutlicher im Sinne einer sinnstiftenden Explizierung solcher Zusammenspiele weisen auch Biehler & Hartung (2006, S. 53 f.) für die Leitidee „Daten und Zufall“ und den Aspekt „Umgang mit Daten“ darauf hin, dass dieser im Rahmen eines breiteren Konzeptes von „statistischer Literalität“ im Zusammenhang mit „Erfahrungen der Lernenden mit verschiedenen Phasen einer statistischen Untersuchung“ gesehen werden sollte:

> Es ist wichtig, dass Schüler auch einen solchen kompletten Untersuchungszyklus erfahren (ebd., S. 53)

Dieser Gedanke wird im Rahmen der Konkretisierung von Leitideen durch Problemlöseprozesstypen so aufgegriffen, dass Einzelaspekte einer Leitidee (z. B. im Umgang mit Daten) erst im typischen Zusammenspiel in geeigneten problemhaltigen Situationen im Sinne eines „Bewältigungs*typus*“ ideenkonstitutiv werden können. Eine diese Interpretation stützende, allgemeinere theoretisch-didaktische Auffassung von Begriffsbildung ist die Vergnauds, der als ein Schlüsselelement von Begriffsbildungsprozessen die „invariant organization of behavior for a certain class of situations“ (Vergnaud 1992, S. 301; vgl. Hußmann & Schacht 2009) identifiziert und als das Hauptproblem mathematikdidaktischer Forschung das Explizieren solcher Invarianten formuliert. Zumindest im Rahmen der Lehrerausbildung ist demnach ein gewisser Grad der Explizierung und Reflexion solcher charakteristischer Invarianten, hier verstanden als charakterisierende Elemente von Problemlöseprozesstypen, ein wesentlicher Baustein der Begriffsbildung in Bezug auf mathematische Leitideen, die hinsichtlich ihres begrifflichen Gehaltes im Vergleich mit Begriffen der mathematischen Objektsprache auf einer Meta-Ebene angesiedelt sind. Gleichzeitig kommen im Rahmen von konkreten Problemlöseprozessen mit einer Leitidee typischerweise verbundene oder verträgliche, allgemeinere sowie spezifischere, kontext-bezogene epistemologische Überzeugungen (Rott et al. 2015, S. 40), grundsätzliche Einstellungen und Auffassungen von Mathematik als Teil des zugehörigen *belief systems* der Problemlösenden (Schoenfeld 1985) zum Tragen.[16]

Beispiele für solche spezifischen epistemologischen Überzeugungen in Zusammenhang mit „Messen“ (und, sofern die Datengewinnung als Messprozess aufgefasst wird, auch „Daten und Zufall“, vgl. Biehler & Hartung 2006, S. 56) betreffen

[16] Z. B. hinsichtlich des logischen und ontologischen Status mathematischer Objekte und Theorien (Struve 1990, Müller-Hill 2015).

grundsätzliche epistemische Aspekte von Messbarkeit wie die Bedeutung von Idealisierungen, Rechtfertigung von Einheitsgrößen und Maßskalen, oder die Beziehung von Sicherheit und Genauigkeit bzw. Fehlern bei (insbesondere unendlichen) Messprozessen.

Dieser Konkretisierungsvorschlag weicht Unterscheidungen wie die zwischen universellen Ideen und bereichsspezifisch zentralen Ideen (als „Repräsentationen und Kombinationen" universeller Ideen, Bender & Schreiber 1985, S. 199) graduell auf, da einzelne Problemlöseprozesstypen in der Regel bereichsspezifisch sind, als solche aber prinzipiell sowohl eine „universelle Idee" wie „Exhaustion" (ebd., S. 199) als auch eine „zentrale Idee" wie „Messen als Form des Passens" (ebd., S. 200) konkretisieren können (vgl. das folgende Beispiel).

Die Stoßrichtung dieses Konkretisierungsvorschlags geht nicht dahin, sich auf bestimmte Kataloge von Leitideen im Unterschied zu nicht leitenden Ideen festzulegen. Es geht vielmehr darum, die Bedeutung eines grundsätzlich an *leitenden*, und zwar *handlungsleitenden* mathematischen Ideen orientierten Mathematikunterrichts hervorzuheben. Im Hintergrund steht dabei eine prinzipiell konstruktivistische Auffassung von Orientierung, Sinn- und Kohärenzstiftung als (im wesentlichen konsensualen) didaktischen Funktionen mathematischer Leitideen, welche die inhaltliche Bedeutung mathematischer Leitideen in der Explizierung ihres kommunikativen Gebrauches verankert. Einen theoretischen Rahmen dazu liefert etwa die Bedeutungstheorie von Robert Brandom (1994), die in der Mathematikdidaktik in Bezug auf Begriffsbildungsprozesse etwa in Schacht (2012) ausführlich rezipiert wird.[17] Danach sind die wesentlichen bedeutungstragenden oder -konstituierenden Denkeinheiten sogenannte Festlegungen, die *Gründe für das weitere Handeln* liefern.

Beispiel: Wird ein mathematisches Problem z. B. als „Messproblem" im Sinne einer Leitidee „Messen" aufgefasst, so kann dies etwa mit den charakteristischen Festlegungen einhergehen, dass für die vorliegende mathematische Problemsituation als strukturelle Elemente eine sinnvolle Messgröße, ein passendes Messverfahren, geeignete Messeinheiten bzw. (multiplikative) Vergleichsgrößen zu finden oder zu konstruieren sind (praktisches Messen als „Feststellen von Kongruenzen" und damit als „Spielart des Passens", Bender & Schreiber 1985, S. 175), dass dabei von nicht-messbaren Aspekten abstrahiert (Exhaurieren mir realen und anschließend mit ideellen Modellen, ebd., S. 176 f.), ggf. Hilfsobjekte eingeführt und mathematisch geeignete Näherungsverfahren gefunden und eingesetzt werden müssen (Aspekt der Genauigkeit, ebd. S. 178).

[17] Der Titel dieses Beitrages spielt in diesem Sinne auf Brandoms grundlegende Arbeit „Making it explicit" (1994) an.

Solche charakteristischen Festlegungen oder handlungsleitenden Gründe werden im Rahmen von individuellen oder kollektiven Problemlöseprozessen kontextbezogen konkretisier-, verhandel- und reflektierbar (Müller-Hill & Spies 2015), auch hinsichtlich ihrer potentiellen Kopplung an epistemologische Überzeugungen (z. B. zur Relevanz logischer Argumentation als rechtfertigender Gründe oder zur Rolle von subjektiven Interpretationen für die Beurteilung der Wahrheit mathematischer Aussagen). Sie können – im Hintergrund durch die Lehrenden oder zusammen mit den Lernenden – als Entscheidungen für die Nutzung bestimmter Ressourcen, heuristischer Strategien und Steuerungsmaßnahmen rekonstruiert und erklärt („Warum hast du so gehandelt?") werden.

Betont wird bei diesem Konkretisierungsvorschlag damit, alternativ zu der rein kognitiv-begrifflichen Ebene, die Prozess- und Handlungsebene mathematischen Tuns.[18] Eine verwandte Präzisierung eines allgemeineren Ideenbegriffes aus operativer Sicht findet sich auch bei Bender und Schreiber (1985) und betont die „instrumentelle Natur" und den „Entwurfscharakter":

> Ideen sind bewusst und willentlich gefaßte Zielbilder menschlichen Handelns. (ebd., S. 297)

Eine Idee vom „Messen" als mathematische Leitidee versetzt also in die Lage, in geeigneten problemhaltigen Situationen eine Plan zu haben oder zu machen, wie in der jeweiligen Situation ein Problem als Messproblem zu lösen ist (z. B. wie im Sinne des oben zu „Messen als Feststellen von Kongruenzen" Gesagten passende Kongruenzen herzustellen sind).

4 Vergleich von „mathematische Leitidee" und NOS

Dieser Beitrag steht unter der zu Beginn formulierten Prämisse, dass eine vergleichende Gegenüberstellung des Lehrens und Lernens von NOS und Leitideen als zwei curricular verankerten, dem Stoff übergeordneten konzeptuellen Konstrukten zunächst grundsätzlich sinnvoll ist, auch wenn letztlich „nur" eine indirekte Analogie aufgezeigt werden kann. Wie in Abschnitt 1 dargelegt, ist ein wesentliches Anliegen dieser vergleichenden Perspektive, aus der *learning to teach NOS*-Debatte lehrreiche Schlüsse für die angemessene Vermittlung von mathematischen Leitideen insbesondere in der Lehramtsausbildung ziehen zu können.

Nach einem ersten Blick vor allem auf konkrete Kataloge von mathematischen Leitideen erscheint eine direkte Analogie zu NOS als Komponenten mathematischer bzw. naturwissenschaftlicher Grundbildung in Bezug auf die meisten Kandi-

---

[18] Ein möglicher, stärker kognitiv-begrifflich orientierter Konkretisierungsvorschlag ist die Zuordnung von Leitideen und „Grundvorstellungen" (vom Hofe 1995, vgl. auch Bender 1991).

daten tatsächlich unpassend. Während viele der genannten Leitideen, wie Funktion, Daten und Zufall, Algorithmus, Raum und Zahl sich letztlich doch eng an bestimmten schulmathematischen Inhalten und curricularen Stoffgebieten orientieren, sind die verschiedenen Aspekte, die NOS charakterisieren, Aspekte, die wissenschaftliches Arbeiten im Allgemeinen betreffen und von einer Meta-Ebene aus betrachten. Eine direkte Analogie wäre höchstens für Leitidee-Kandidaten wie „quantitativen Denkens“ (OECD/PISA 2000) und „Modellieren“ (bei Heymann 1996) möglich.

Dennoch lassen sich NOS und Leitideen mittels der damit verbundenen didaktischen Ziele und Funktionen, sowie hinsichtlich des Abstraktionsgrades und der Bezogenheitsintensität in Bezug auf konkrete fachliche Inhalte, indirekt in eine gewisse Analogie setzen.[19] Dies gilt insbesondere mit Bezug auf die hier vorgeschlagene partielle Konkretisierung des Leitidee-Begriffs. Sowohl mathematische Leitideen als auch verschiedenen Aspekte von NOS sollen im Unterricht eng auf konkrete fachwissenschaftliche Inhalte bezogen werden. NOS ebenso wie Leitideen um Mathematikunterricht sollen ein adäquates und vernetztes konzeptuelles Verständnis einzelner naturwissenschaftlicher bzw. mathematischer Inhalte, Begriffe und Theorien und deren Bedeutung für die Wissenschaft und Kultur im Allgemeinen ermöglichen und fördern. Sowohl bei NOS als auch bei mathematischen Leitideen geht es für den Lernenden darum, etwas Gemeinsames aus einer Reihe von wiederkehrenden Erfahrungen in der Beschäftigung mit den fachlichen Inhalten zu abstrahieren. Der Versuch der Begriffsexplikation von Leitideen als „Bündel von Etwas“ betont bereits deren operative Bedeutung, die darin besteht, den Kern der Sache, das Bündelungsprinzip ausfindig zu machen. Insbesondere aber in Bezug auf die hier vorgenommene Konkretisierung von Leitideen als Problemlöseprozesstypen geht es um eine Gemeinsamkeit, um Charakteristika verschiedener konkreter Problemlöseprozesse als Episoden mathematischen Arbeitens. Analoges gilt in Bezug auf die Aspekte von NOS – hier geht es aber um Gemeinsamkeiten und Charakteristika wissenschaftlichen Arbeitens im Allgemeinen.

Zwar bieten die einzelnen Aspekte von NOS keine begriffliche Fachsystematik, und entsprechend auch kein „Register“ zu einer fachsystematischen Strukturierung des Schulstoffes, wie das in Bezug auf die in den Rahmencurricula verwendeten Kataloge von Leitideen der Fall ist. Dennoch erscheinen nach gerade Gesagtem die NOS-Aspekte hinsichtlich ihrer Wissensstrukturierungs-, -organisations und funktionales Verständnis generierenden Funktion sowie ihrer Abstraktionsstufe mit ma-

[19] Dieser nähere Vergleich mag allerdings für das Grundargument dieses Beitrages in Bezug auf eine explizite vs. einer impliziten bzw. instruktiven vs. reflexiven Vermittlung von NOS bzw. Leitideen im Unterricht, welches in den nachfolgenden Abschnitten weitergeführt wird, nur mittelbar relevant sein. Er hebt jedoch noch einmal einige der bisher herausgearbeiteten Punkte deutlicher hervor.

thematischen Leitideen sinnvoll vergleichbar. Umgekehrt umfasst der Begriff der Leitideen ideengeschichtlich und unter Bezug auf die hier getroffene Konkretisierung nicht nur die inhaltlich-konzeptuelle, sondern tatsächlich alle drei Perspektiven bzw. Dimensionen naturwissenschaftlicher bzw. mathematischer Grundbildung:

- Der Grundkonzeption von fundamentalen Ideen als „Grundbegriffen" nach Bruner (1970) entstammt das Potential von Leitideen zur Entwicklung von „big ideas in a conceptual sense", das sich auch in der Formulierung der didaktischen Funktion von Leitideen in den Bildungsstandards findet.[20]
- Der Blick auf Leitideen als sich im mathematischen Tun manifestierende charakteristische Problemlöseprozesstypen beinhaltet den Aspekt der *scientific methods* und der Problemlösefähigkeiten, den auch Holbrook und Rannikmae (2009) für NOS ansprechen. Auch die Auffassung von Leitideen als Meta-Konzepten, d. h. Bündel von Strategien, Techniken, Begriffen etc. weisen darauf hin.
- Schließlich ist es, in der Terminologie von Heymann (1996), die Stiftung sogenannter kultureller Kohärenz, die den „socio-scientific aspect" umfasst, den Holbrook unter c) bzw. h) nennt.

Auch scheint es nach oben Gesagtem begründet, wie im Falle von NOS einen wechselseitigen Einfluss zwischen mathematischen Leitideen, epistemologischen Überzeugungen und grundlegenden individuellen Auffassungen von Mathematik anzunehmen, auch wenn die jeweiligen Feinstrukturen dieser Beziehungen nicht unbedingt deckungsgleich sein mögen.[21]

Im Folgenden geht es nun um die Frage nach dem „Wie" des Unterrichtens von NOS bzw. Leitideen, im Schulunterricht und in der Konsequenz vor allem in der Lehrerausbildung. Im Falle von NOS existieren hier, wie in Abschnitt 6 dargestellt wird, eine Reihe von weit ausgearbeiteten Studien zu expliziten Ansätzen insbesondere im Rahmen der Lehrerausbildung, also Ansätzen, bei denen die Aspekte von NOS explizit auf einer Meta-Ebene mit den Lernenden thematisiert werden.

---

[20] Damit ist nicht gesagt, dass alle konkreten, aktuellen Kandidaten für Leitideen dieses Potential auch ausschöpfen. Im Falle von „Daten und Zufall" z.B. steht dieser in den Bildungsstandards verankerten Leitidee etwa Heiteles Vorschlag von 10 fundamentalen Ideen der Stochastik, darunter etwa „norming the expressions of our belief", „the idea of stochastic variable", „the law of large numbers", „combinatorics", „equidistribution and symmetry" (Heitele 1975, S. 194–202, zitiert nach Prömmel 2013) gegenüber.

[21] Die genaue Untersuchung dieser Feinstrukturen ist selbst noch ein Forschungsdesiderat, vgl. z. B. (Neumann & Kremer 2013).

5 Mathematische Leitideen im Unterricht – Konsequenzen für die Lehrerausbildung

Im Falle der mathematischen Leitideen, legt man zunächst wieder die Breite der Lesarten dieses Begriffes zugrunde, gibt es unterschiedliche didaktische Positionen dazu, ob diese „nur" implizit und indirekt an die Schülerinnen und Schüler vermittelt werden können und sollen oder auch explizit. Zumindest vereinzelt findet man jedoch vergleichsweise deutliche Aufrufe zu einer expliziteren Thematisierung im Mathematikunterricht, wie: „Ein kompetenzorientierter Unterricht könnte sich dadurch auszeichnen, dass der Bezug zu diesen Leitideen immer wieder transparent gemacht wird, wobei das jeweilige Verständnis des Schülers (ggf. als Vor- oder Alltagsverständnis) diagnostisch geklärt und erweitert wird." (Klieme & Rakoczy 2008, S. 223)

Das ursprünglich ebenfalls auf Bruner (1970) zurückgehende und in Zusammenhang mit der Forderung nach einem an Leitideen orientierten Mathematikunterricht erhobene Prinzip des Spiralcurriculums (KMK 2004, S. 9) zielt darauf, die Lernenden rote Fäden im Stoff des Mathematikunterrichts erkennen zu lassen, etwa aufeinander aufbauende Inhalte und themenübergreifende stoffliche Zusammenhänge. Dies soll unter anderem durch Wiederauftauchen bestimmter Grundelemente in ggf. variierter Form gefördert werden, ohne dabei aber eine im Hintergrund stehende spezifische Leitidee explizit bewusst zu machen.[22] Leitideen spielen dabei in erster Linie als stoffdidaktische Analysekategorie für Lehrende und Unterrichtsentwickler und damit unter Betonung ihrer curricularen Funktion eine Rolle. Leitideen ordnen und strukturieren Stoff also zunächst aus Sicht der Lehrenden. Dies geschieht schlechtestenfalls registerartig in Form von „Klassennamen" für inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen, die von Schülerinnen und Schülern ab einer bestimmten Jahrgangsstufe erwartet werden. Sie bleiben damit aus Schülersicht unter Umständen allenfalls implizit. Ein didaktisch relevantes Idealziel einer curricularen Strukturierung nach Leitideen ist die Umsetzung eines Curriculums, welches beim Lernenden zur Ausbildung tragfähiger und nachhaltiger Vorstellungen zu unterschiedlichen Leitideen führen soll. Auch hier trägt der Gedanke der impliziten Rolle von Leitideen im Lernprozess.

Aus der Perspektive des implizit-curricularen Ansatzes eines an mathematischen Leitideen orientierten Mathematikunterrichts könnten Leitideen in der Lehreraus- und Weiterbildung schwerpunktmäßig in Bezug auf den Aufbau von Curricula nach dem Spiralprinzip, auf Materialwahl, Lernumgebungsdesign und Vorstellun-

---

[22] Bruner selbst formuliert dagegen stellenweise einen direkteren, expliziteren Adressatenbezug: Zentrale Ideen sollen von den Lernenden *begriffen* werden, d. h. sie sollen im auch sichtbar und explizit, z.B. anhand von geeigneten Darstellungsmitteln, zum Ausdruck kommen.

gen zu einzelnen Leitideen thematisiert werden. Erfolgt die Thematisierung dabei aber weitgehend unkommentiert, d. h. ohne Reflexion und Rechtfertigung zur Setzung des verwendeten Ideenkataloges, könnten mathematische Leitideen auch auf Ebene der Lehramtsausbildung letztlich implizit-curriculare, für die Studierenden mehr oder weniger willkürlich gesetzt erscheinende Kategorien bleiben. Auch die konkret verwendeten Leitidee-Kataloge in den Bildungsstandards und Kernlehrplänen können Lesern ohne tiefere Kenntnis der didaktischen Hintergrunddebatte als willkürliche Setzungen in Anlehnung an ohnehin und traditionell im Mathematikunterricht vorhandenen Themengebieten (vgl. z. B. Vohns 2007, S. 57) erscheinen.

In Beiträgen zur Lehrerweiterbildung, wie etwa in „Muster im Hunderterfeld“ (Herklotz 2013), werden Leitideen teilweise als gesetzt dargestellt, ohne dass die Gründe für eine solche Setzung die Gestaltung von Unterricht unter der Überschrift dieser Leitideen wirklich beeinflusst:

> Mathematik als Wissenschaft von den Mustern (vgl. Wittmann & Müller 2009, 50) zu verstehen, macht bereits deutlich, welchen besonderen Stellenwert der Kompetenzbereich Muster und Strukturen innerhalb der Bildungsstandards hat. Gesetzmäßigkeiten und funktionale Beziehungen zu erkennen, zu beschreiben und darzustellen, ist das Wesen der Mathematik (vgl. Wittmann & Müller 2009, 42). (Herklotz 2013, S. 19)

In der weiteren Entwicklung der Lernumgebung geht es fast ausschließlich um die Aspekte „systematische Variabilität“ und „Fortsetzbarkeit“, die hier recht selbstverständlich der Idee „Muster“ zugerechnet werden. Diese Zuordnung ist aber keineswegs notwendig oder eindeutig – Fortsetzbarkeit im Sinne eines Permanenzprinzips etwa geht über die Idee des Musters hinaus, und auch „systematisches Variieren“ ist eine heuristische Strategie, die auch in Bezug auf viele andere mathematische Leitideen eine Rolle spielt. Die anfängliche Zuordnung zu „funktionaler Zusammenhang“ spielt zudem faktisch keine Rolle mehr.

Neuere Schulbücher wie z. B. „mathewerkstatt“ (Barzel et al. 2012) zeigen (wieder) eine stärker schüleradressierte Orientierung an Leitideen, etwa „mathewerkstatt 5“ in Bezug auf die Idee des Messens. Hier wird recht explizit eine Thematisierung der zugehörigen Handlungstypen – Messen als direktes, indirektes, oder normiert indirektes, multiplikatives Vergleichen – betrieben (ebd., S. 77):

Aufgabe 6 „Messverfahren vergleichen“, Teil (a)

Ordne die drei Beispiele oben [dafür, wie man das Gewicht zweier gefangener Karpfen mit Hilfe einer Balkenwaage vergleichen kann; Anm. EMH] den drei folgenden Verfahren zu:

Verfahren A	*Verfahren B*	*Verfahren C*
Direkt vergleichen	Vergleichsgegenstand nehmen	Messen mit Einheiten
Man vergleicht die beiden Dinge direkt miteinander.	Man vergleicht beide Dinge einzeln mit einem Vergleichsgegenstand	Man zählt, wie viele Einheiten so lang oder so schwer sind, wie jedes der beiden Dinge. Dann vergleicht man nur noch die Zahlen.

Messen wird weiterhin als grundlegendes, kulturell verhaftetes Verfahren explizit thematisiert. Ein eigenes Kapitel „Zwerge und Riesen im Tierreich – Wie lang, wie schwer, wie alt?“ beschäftigt sich mit dem Umgang mit Größen und unterschiedlichen Arten des Größenvergleichs. Konkret finden sich hier unter anderem auch explizite Reflexionsaufgaben zum Messen wie (ebd., S. 71):

Was heißt es, etwas zu messen?

(a) In den beiden vorherigen Aufgaben hast Du erfahren, wie Ameisen und Menschen Längen messen können. Was ist jeweils ähnlich, was ist unterschiedlich?

(b) Beschreibe mit eigenen Worten, wie man eine Länge misst.

Zum Messen zugehörige Problemlösestrategien wie „nach Gleichem suchen“ oder sinnvolle Vergleichsgrößen finden“ werden auch in den anderen Kapiteln spiralig und bereichsübergreifend vernetzend immer wieder aufgegriffen, etwa in den Kapiteln über Symmetrie „Kunstwerke – Das Gleiche woanders erkennen und herstellen“ und über Anteile „Essen und Trinken – Teilen und Zusammenfügen“. Erfahrungsgemäß ist nun anzunehmen, dass die Schülerinnen und Schüler, auf sich gestellt, mit einem Mathematikbuch „lokal“ arbeiten und bei den Reflexionsaufgaben zu ganz unterschiedlichen, sehr subjektiven Ergebnissen kommen. Seitens der Lehrenden ist daher ein souveränes und auch kritisches, an die subjektiven Ideen und Vorstellungen der Lernenden anschlussfähiges Hintergrundverständnis von Messen als mathematischer Leitidee vonnöten, um anhand des Buches im Sinne einer Orientierung an mathematischen Leitideen unterrichten zu können.

Schon Bruner verwies darauf, dass mathematische Leitideen nur dann im Unterricht wirksam werden können, wenn die Lehrenden sich selbst verstehen als „dramatisierendes Hilfsmittel“ des Unterrichts (vgl. Bruner 1970, S. 89 f.), die durch das dramatische Vorleben und die eigene Begeisterung für bestimmte zentrale Ideen des Faches eine die Identifikation der Schülerinnen und Schüler mit diesen fördert, und betont die dafür notwendige Qualität der Lehrerausbildung. Dies gilt auch und insbesondere in Bezug auf die hier vorgenommene Konkretisierung. Damit Unterricht in diesem Sinne authentisch sein kann, ist einerseits ein Verständnis der Rolle und didaktischen Funktion von mathematischen Leitideen notwendig, welches auf den subjektiven Einstellungen und Überzeugungen, Vorstellungen und Herangehensweisen der Lehrenden an mathematische Inhalte geeignet aufbaut. Dieses Mathematikbild der Lehrenden ist sowohl vom erfahrenen Mathematikunterricht als auch von der Universitätsmathematik geprägt. Das Konzept der Leitideen und auch konkrete Ideenkataloge sollten daher nicht nur auf dem stofflichen Niveau der Schule, sondern auch in Bezug auf Inhalte der an der Universität vermittelten Mathematik reflektiert werden.

Die Frage, inwieweit eine lediglich auf eine implizit-curriculare Funktion von mathematischen Leitideen gerichtete Thematisierung dieses Konzepts in der Lehramtsausbildung dem Bildungsziel eines an Leitideen orientierten Mathematikunterrichtes angemessen ist, wäre demnach negativ zu beantworten. Auf der Suche nach möglichen Alternativen möchte ich nun der Frage nachgehen, ob man hier etwas von der l*earning to teach NOS*-Debatte aufgreifen und lernen kann. Dabei wird es insbesondere um eine Unterscheidung von explizit-instruktiven und explizit-reflexiven Ansätzen gehen.

6 Die learning to teach NOS-Debatte

6.1 Ansätze in den 60ern bis in die 90er Jahre

Auch im Falle von NOS wurden, insbesondere im angloamerikanischen Raum, seit den 60er Jahren bis Anfang der 90er Jahre unterschiedliche Unterrichtskonzeptionen entworfen und empirisch beforscht, die der Linie der indirekten impliziten Vermittlung folgen.[23] Obwohl hier schon seit den 60er Jahren systematisch an der Verbesserung der Vermittlung von NOS im naturwissenschaftlichen Unterricht gearbeitet und seitens der wissenschaftlichen Didaktik eine Reihe von Vorschlägen und Materialien entwickelt wurden, trug dies zunächst wenig Früchte. In dieser Zeit konzentrierte sich die didaktische Arbeit vor allem auf Curricula- und Unterrichtsentwicklung, nicht aber auf die Lehrerausbildung. Einige Studien aus den 60er Jahren scheinen zwar den Erfolg dieses Ansatzes auszuweisen (z. B. Klopfer & Cooley 1963; Crumb 1965; Sorensen 1966), diese wurden durch andere Studien (vgl. z. B. Kleinman 1965; Troxel 1968; Jungwirth 1970; Durkee 1974) aber als invalide herausgestellt: Die Resultate hingen tatsächlich stark von der jeweiligen Lehrperson ab, von deren „understandings, interests, attitudes“ (Brown & Clarke

[23] Die nun folgende kurze Darstellung und angegebene Literatur ist an die ausführlichere Übersicht in (Akerson et al. 2000, S. 296 f.) angelehnt.

1960; Merill & Butts 1969; Ramsey & Howe 1969). Insbesondere ergaben diese Studien aber, dass auch das Verständnis der untersuchten Lehrpersonen und Lehramtsstudierenden von NOS im Speziellen und naturwissenschaftlicher Grundbildung im Allgemeinen mangelhaft war (z. B. Bloom 1989, Pomeroy 1993, Abd-El-Khalick & BouJaoude 1997). Dieses Verständnis auf Seiten der Lehrende zu vertiefen, wurde als notwendige Bedingung für die Verbesserung der Vermittlung von NOS an die Schülerinnen und Schüler angesehen. Dabei wurden von den 60ern bis in die 80er Jahre zunächst zwei gegenläufige Ansätze vertreten: Dem zunächst vorherrschenden impliziten Ansatz zufolge ist NOS

> a learning outcome that can be facilitated through science process skills instruction, science content coursework, and doing science. […] The implicit approach, however, was devoid of any explicit or reflective components related to NOS (Akerson et al., 2000, S. 297)

Der zweite Ansatz war dagegen explizit und nutzte wissenschaftstheoretische oder wissenschaftshistorische Instruktionseinheiten, um die unterschiedlichen NOS-Aspekte zu thematisieren.

Seit Mitte der 90er Jahre änderte sich das didaktische Paradigma, und explizite Ansätze traten stärker in den Vordergrund: NOS-Verständnis wurde nicht mehr nur als eher „affektives" Lernziel gesehen, welches sich ohne explizite Thematisierung als Nebenprodukt von im Unterricht inszenierter typisch wissenschaftlicher Tätigkeiten von selbst einstellt, sondern in erster Linie auch als ein „kognitives" Lernziel, welches spezifische Begriffsbildungs- und Konzeptwechselprozesse sowie die Internalisierung bestimmter Verfahren und Strategien umfasst (vgl. Akerson et al. 2000, S. 297). Der Fokus der Aufmerksamkeit verschob sich dabei noch weiter in Richtung Lehramtsausbildung und das eigene NOS-Verständnis der Lehrperson. Diverse neuere Studien deuteten darauf hin, dass die der Rolle der Lehrkraft große Bedeutung gerade bei der Förderung von Meta-Kompetenzen oder Kompetenzbündeln wie mathematischer und naturwissenschaftlicher Grundbildung hat (Hattie 2009, Holbrook & Rannikmae 2009, Akerson et al. 2000): Selbst wenn mathematische und naturwissenschaftliche Grundbildung in Bezug auf die Schülerinnen und Schüler weitestgehend „nur" als ein funktionales Verständnis der komplexen Rolle von Mathematik und Naturwissenschaften in Bezug auf ihre gesellschaftliche Lebenswelt begriffen wird, setzt die erfolgreiche Förderung eines solchen Verständnisses der Lernenden beim Lehrenden ein solides und umfassend fachwissenschaftlich untermauertes „mehrdimensionales" (Holbrook & Rannikmae 2009, S. 279, vgl. Abschnitt 2 dieses Beitrages) Verständnis voraus.

Es wurden nun vermehrt Vorschläge für das *learning to teach NOS* gemacht und getestet, die ein explizit-instruktives Vermitteln von NOS in der Lehrerausbildung einem impliziten vorziehen und es mit reflexiven Elementen koppeln, um einer inzwischen aufgekommenen Kritik an einer rein instruktiven Vermittlung, bei der man schwerlich an die subjektiven „understandings, interests, attitudes" der Studierenden im Zusammenhang mit NOS anknüpfen kann, entgegenzuwirken. Ein Hauptkritikpunkt an diesen Ansätzen war, dass deren scheinbarer Erfolg mit quantitativen, standardisierten *forced choice*-Tests belegt wurde, die nicht auf die subjektiven Bedeutungen und Beweggründe hinter der Wahl von vorgefertigten Antwortmöglichkeiten eingehen können (Akerson et al. 2000, S. 300). Empirische Pilotstudien zu entsprechenden Seminarkonzepten für das Lehramtsstudium (z. B. Abd-El-Khalick & Lederman 1998, Akerson et al. 2000, Holbrook & Rannikmae 2009) behaupten für den Fall von NOS also insbesondere:

1. dass eine indirekte implizite Vermittlung von NOS im Rahmen von reinen Methodik- oder fachdidaktischen Veranstaltungen nicht zureichend ist, und somit eine direktere, instruktive Vermittlung an der Schnittstelle von Fachdidaktik und Fachwissenschaft stattfinden sollte.
2. dass die Aspekte von NOS stärker auf die persönlichen Einstellungen, Erfahrungen und Werte der Lehramtsstudierenden bezogen und zu diesen reflektierend in Beziehung gesetzt werden müssen, um deren Verständnis von NOS nachhaltig zu vertiefen. Dazu ist ein die unterschiedlichen Aspekte von NOS direkt und explizit thematisierender Ansatz mit geeigneten reflexiven Elementen zu koppeln.

Im Folgenden soll exemplarisch der in Akerson et al. (2000) beschriebene Ansatz für eine entsprechende, explizite Thematisierung von NOS im Rahmen des Lehramtsstudiums und dessen Evaluation vorgestellt und diskutiert werden. Die Autoren gelten als Vorreiter in der angelsächsischen Debatte zu expliziten Ansätzen für das Lehren und Lernen von NOS. Sie fassen dieses nicht nur auf der Ebene der Vermittlung von (zusätzlichem) Fachwissen auf, sondern versuchen, durch ein angeleitetes, explizites meta-kognitives Monitoring von Konzeptwechseln eine Verknüpfung mit der sogenannten Concept-Change-Theorie (vgl. Neumann & Kremer 2013, S. 225) im Rahmen ihres Seminarkonzeptes herzustellen. Dabei werden NOS-Aspekte betont problem- und kontextbezogen und aktivitätsbasiert thematisiert, und es werden qualitative Erhebungsinstrumente für das NOS-Verständnis von Lehramtsstudierenden entwickelt und im Rahmen der konzipierten Lehrveranstaltungen auch erprobt. Die entsprechenden Arbeiten und Ergebnisse werden auch in der deutschsprachigen naturwissenschaftsdidaktischen Debatte als Grundlage für explizite Ansätze zum Lehren und Lernen von NOS rezipiert.[24]

[24] Höttecke & Rieß (2007) etwa verwenden dieselben Erhebungsinstrumente und übernehmen auch große Teile der Seminarstruktur; auf einzelne Unterschiede zur Konzeption von Akerson et al. gehe ich aber in Abschnitt 6.3 noch ein. Hofheinz (2008) als weitere Referenz im deutschsprachigen Raum arbeitet dagegen mit einem impliziten Ansatz, d. h. auf der Grundlage von implizit-strukturierten Lernumgebungen und implizitem Erfahrungslernen.

6.2 Neuere Ansätze von learning to teach NOS seit den 90er Jahren

Akerson, Abd-El-Khalick und Lederman berichten in (Akerson et al. 2000) von einem Seminarprojekt für das Grundschullehramtsstudium im Grund- oder Hauptstudium, dessen Ziel es ist, das Verständnis der angehenden Lehrerinnen und Lehrern von NOS zu verbessern. Der entworfene Kurs ist kein rein fachwissenschaftlicher, sondern fällt unter die Kategorie „science methods course". Eine direkte Bezugnahme auf konkrete Fachinhalte auf schulischem und universitärem Niveau ist jedoch ein integraler Bestandteil des Kurscurriculums. Der Projektkurs ist in methodischer Hinsicht „activity-based", d. h. das Kurscurriculum beginnt mit einer Reihe konkreter, instruktiver Aufgabenstellungen, die die Studierenden in unterschiedliche, auf einzelne Aspekte von NOS bezogene Aktivitäten verwickeln sollen. Das fachinhaltliche Niveau bei diesen Aktivitäten ist niedrig bis unspezifisch, da zu Beginn des Kurses kein spezielles fachwissenschaftliches Vorwissen vorausgesetzt werden soll.

Beispiel: W. E. Hills Zeichnung „Junge Frau – alte Frau" (1915) wird im Plenum gezeigt. Nach ein paar einleitenden Orientierungsfragen wird schließlich gefragt (vgl. Lederman & Abd-El-Khalick 1998, S. 24):

> How can it be that some of us see only one face and not the other? Is it possible that some scientists may look at the same piece of evidence or set of data and see different things?

Dies soll die Diskussion dann per Analogie auf den NOS-Aspekt der Theoriegeladenheit und Subjektivität naturwissenschaftlicher Erkenntnisse lenken.

Die im Rahmen dieser Aktivitäten herausgearbeiteten Aspekte von NOS werden anschließend an spezifischen, von den Studierenden gewählten fachwissenschaftlichen Inhalten höheren Niveaus (*science content*) und spezifischen fachdidaktischen (*pedagogical*) Inhalten (*teaching strategies*) umgesetzt, etwa Evolutionstheorie, Atomtheorie, Modellbegriff, und weitere Beispiele für *Benchmarks of Scientific Literacy* aus den AAAS (1993). Zu den gewählten fachwissenschaftlichen Inhalten interviewen die Studierenden zudem einzelne Grundschüler mit dem Ziel, die Angemessenheit oder Unangemessenheit deren Vor- und Einstellungen zum jeweiligen Thema zu diagnostizieren und mit den eigenen Vor- und Einstellungen zu kontrastieren. Anschließend entwickeln die Studierenden Stundenentwürfe mit dem vorgegebenen Lernziel eines geeigneten Konzeptwechsels (Concept Change Pedagogy, vgl. Akerson et al. 2000, S. 299), die auf diagnostizierten „unangemessenen" Vor- und Einstellungen der Schülerinnen und Schülern Bezug nehmen.

Zu den reflektiven methodischen Elementen gehören neben den oben genannten Aktivitäten und der Auseinandersetzung mit fachdidaktischen und fachwissenschaftlichen jeweils nachgeschaltete Gruppendiskussionen im Plenum sowie reflexive Schreibaufträge und qualitative Interviews mit den Studierenden. Es ist hier wichtig anzumerken, dass „reflexives Schreiben" in diesem Zusammenhang nicht im Sinne von freier Reflexion gemeint ist, sondern ein angeleitetes, zielorientiertes „Nachdenken“ über NOS. Akerson et al. betonen hier insbesondere die Bedeutung von ganz konkreten, instruktiven *prompts*, die auch die Gruppendiskussionen leiteten, und die die Reflexionen der Studierenden auf spezifische Aspekte von und Vorstellungen zu NOS instruktiv hinleiten sollen. Ein Beispiel für einen solchen *prompt* liefert der folgende kurze Ausschnitt aus einer Gruppendiskussion über ein Kinderbuch, welches das Phänomen „Transport“, wie wir es auf der Erde erleben, aus der Sicht von Außerirdischen beschreibt. Die Frage dazu lautete, welche Rolle so ein Buch in Bezug auf naturwissenschaftlichen Unterricht spielen könnte:

> Student 1: It talks about *different* viewpoints.
>
> Student 2: Yes, it is like drawing conclusions based on your own viewpoint.
>
> Student 3: It is good for sharing how things can be described and interpreted from different viewpoints.
>
> Instructor: To me it is like science because the aliens are taking the evidence of what they observe and interpreting through their own lens. They are drawing conclusions and presenting them based on their prior knowledge and their interpretations from that evidence and knowledge. They don't know for certain if their ideas/interpretations are correct, but they are reasonably sure that their conclusions, based on their observations, make sense.
>
> Student 4: This is another nature of science thing again. (ebd., S. 301)

Die *prompts* sind laut Akerson et al. nicht nur förderlich, sondern notwendig, um die Studierenden zu einer aus Lehrendensicht adäquaten Reflexion und Diskussion anzuregen (ebd., S. 302).

Um den Verständniszuwachs während und am Ende des Seminars im Vergleich zum Anfang zu „messen“, wurde am Anfang und am Ende der gleiche Fragebogen eingesetzt, der die subjektiven Bedeutungszuschreibungen der Studierenden in Bezug auf NOS erfassen soll. Es handelt sich dabei um sieben offene Fragen, also ohne durch den Fragebogen vorgegebene Antwortmöglichkeiten, die im Freitext beantwortet werden konnten. Ich greife hier exemplarisch drei der sieben Fragen heraus (für den vollständigen Fragebogen siehe Akerson et al. 2000, S. 313 f.):

> 2. What does an atom look like? How certain are scientists about the structure of atoms? What specific kinds of evidence do you think scientists used to determine what an atom looks like?
>
> 3. Is there a difference between a scientific theory and a scientific law? Give an example to illustrate your answer.
>
> 5. Scientists perform experiments/investigations when trying to solve problems. Other than the planning and design of these experiments/investigations, do scientists use their creativity and imagination during and after data collection? Please explain your answer and provide examples if appropriate.

Die offenen Antworten der Studierenden und ihre Äußerungen in den Interviews und Gruppendiskussionen sowie die „written reflections“ wurden per interpretativer Analyse (Strauss & Corbin 1990) ausgewertet.

6.3 Kritik am explizit-instruktiven Schwerpunkt

Die Planung von Lehrveranstaltungen ist, neben der Wahl der Inhalte und Methoden, stets auch wesentlich geprägt durch die Wahl und Formulierung eines Lernziels und entsprechenden Bewertungskriterien dafür, ob und in welchem Maße dieses Ziel erreicht wurde. Die gewählten Lernziele und zugehörigen Bewertungskriterien stehen also insbesondere auf dem Prüfstand, wenn es darum geht, ob die hier vorgestellte Veranstaltungskonzeption von Akerson et al. zu NOS Impulse für eine Thematisierung von mathematischen Leitideen in der Lehramtsausbildung liefern kann. Die im Folgenden vorgebrachte, entsprechende Kritik richtet sich also nicht gegen die diskutierte Kurskonzeption an sich, sondern gegen einen insbesondere durch die zugehörige Formulierung der Zielsetzung und der gewählten Bewertungsmethoden entstehenden, zu stark instruktiven methodischen und inhaltlichen Ansatz. Favorisiert wird demgegenüber ein stärker offen-reflexiver Schwerpunkt, zumindest in universitären Lehrveranstaltungen zu Konzepten wie NOS oder Leitideen.

Unter Berücksichtigung der im Rahmen des Kurses zweimalig durchgeführten Befragung zur Feststellung des Lernerfolgs in Bezug auf NOS und den dabei angewendeten „Messmethoden“ lässt sich trotz der Einbindung reflexiver Elemente in das Kurscurriculum fragen, inwieweit der Schwerpunkt der direkten Instruktion („explicit instructional activities […] coupled whith reflective elements“ (Akerson et al. 2000, S. 313)) mehr oder weniger in einem *teaching to the test* resultiert. Unter anderem die Auswertung der Fragebögen, die dazu angelegt waren,[25] subjektive Deutungen der Studierenden von NOS zu erfassen, deuten darauf hin. Die zur Auswertung definierten Bedeutungskategorien scheinen letztlich stark beeinflusst von vorher definierten „angemessenen“ und „unangemessenen“ Sichtweisen, Vorstellungen und Einstellungen zu spezifischen Aspekten von NOS (vgl. ebd., S. 301 ff.) und vorgefertigten Antwortschemata mit Bezug auf die unterrichteten Kursinhalte. So heißt es in der Auswertung und Analyse der Fragebogenergebnisse exemplarisch:

> Only one undergraduate participant (4 %) and seven graduate participants (28 %) expressed adequate views of the empirical NOS. These participants noted that science is different from other disciplines because scientific claims should be consistent with empirical observations. The greater majority of participants, however, did not include ob-

[25] Die Autoren verweisen explizit auf die Methodologie der *grounded theory* (Strauss & Corbin 1990), gemäß der die textanalytischen Kategorien möglichst unvoreingenommen direkt aus den Daten entstehen sollen.

> servations of natural phenomena as a characteristic factor that sets science apart from other disciplines, such as art. These participants mostly noted that science is characterized „by a method for doing things“, as a way „to prove theories“, or by its being a study of „life“ or „everything around us.“

Auch wurde die Sinnhaftigkeit der vorgegebenen Ausdifferenzierung dieser Aspekte (wie Empirizität, Theoriegeladenheit etc., vgl. oben) selbst für die Studierenden bei der Analyse gar nicht in Frage gestellt und somit auch nicht erfasst.

Der verwendete Fragebogen ist darüber hinaus sehr zielgenau auf die genannten und im Seminar behandelten, insbesondere auch durch die unterschiedlichen explizit-instruktiven *prompts* betonten Aspekte von NOS bezogen. Bei den Fragen handelt es sich größtenteils nicht um Einstellungsfragen im Sinne der Sozialforschung (diese haben z. B. die Form „Was sollte/müsste ihrer Meinung nach der Fall sein in Bezug auf X?“), sondern um Wissensfragen, die mit Beispielen illustriert werden sollen.[26] Die Aktivitäten und *science content*-Einheiten stellen genau diese Beispiele bereit. Das Belegen mit Beispielen z. B. zu Frage 5 fordert also eher zur Reproduktion auf statt zur freien Reflexion und Offenlegung eigener, subjektiver Vor- und Einstellungen. Ähnliches gilt für die oben angesprochenen *prompts*, die oftmals stark suggestiv formuliert sind und standardisierte „richtige“ Sichtweisen und Antworten vorwegnehmen. Auch in Bezug auf die reflexiven Elemente scheint es weniger um ergebnisoffenes, freies Reflektieren eigener Einstellungen zu gehen, sondern um das instruktiv angeleitete Formen von normativ angemessenen oder Überschreiben von nicht angemessenen Sichtweisen von NOS. Dies geschieht dabei unter Umständen ohne die ursprünglichen, ggf. inadäquaten Ein- und Vorstellungen der Studierenden bewusst zu machen, ernst zu nehmen und subjektive Entwicklungsmöglichkeiten hin zu „angemesseneren“ aufzuzeigen. Die Tatsache, dass derselbe Fragebogen am Anfang und am Ende des Kurses verwendet wird, kann im Sinne der Vorstellung interpretiert werden, dass die Studierenden während des Kurses quasi unbewusst eine „Verbesserung“ ihrer Vor- und Einstellungen zu NOS durchmachen, die sich dann im Vergleich der Prä- und Posttestergebnisse offenbart. Dies steht jedoch quer zu Bildungswert und -aufgabe von bewusstem, offenreflexivem Arbeiten und betont wieder den instruktiven Schwerpunkt dieser Kurskonzeption. (Höttecke & Rieß 2007) etwa verwenden zwar einen analogen Fragebogen zur Erhebung der Vorstellungen zu NOS in einer Pre-Studie, binden aber Reflexionseinheiten mit den Studierenden zu deren Pre-Testergebnissen in die Se-

[26] Tatsächlich ist Frage 2 durch das eingeschobene „do you think“ formal die einzige Glaubensfrage, die anderen sechs Fragen sind explizit als Wissensfragen formuliert. Diese Formulierung von Frage 2 scheint aber alibihaft, zumindest hinsichtlich der Befragung am Ende des Kurses, denn im Kurs wurde die Entwicklung der Atomtheorie explizit thematisiert.

minarkonzeption ein und führen eine Post-Studie dann mittels halbstrukturierter Interviews durch.

Entsprechend sind auch die Ergebnisse eines Durchlaufs des Kurskonzepts von Akerson et al. aus Sicht der Autoren nicht vollumfänglich zufriedenstellend. Akerson et al. selbst resümieren in eine ähnliche Richtung: Explizite instruktive Aktivitäten im Rahmen eines einsemestrigen Kurses, selbst wenn gekoppelt mit sogenannten „reflexiven Elementen", reichen nicht aus um lang gehegte und stabile, aber in der Regel „inadäquate" Überzeugungen zu NOS zu „überschreiben". Dies ist insbesondere dann schwierig, wenn die ursprünglichen Überzeugungen zu NOS zwar getestet, aber nicht mehr mit den Lernenden reflektiert werden (ebd., S. 313). Eine mögliche Alternative bieten hier stärker offene, epistemologische Reflexionen über möglichst authentische, autonom bewältigte Problemlöseprozesse (im Unterschied zu stark instruierten, fokussierten Aktivitäten). Diese sind zum Beispiel Grundlage von Bemühungen, im Rahmen von fachmathematischen und fachdidaktischen Lehrveranstaltungen für Lehramtsstudierende erwünschte Veränderungen von *beliefs* zu fördern (Bernack et al. 2011).

Die eingebundenen Aktivitäten, die die Aspekte von NOS in Bezug auf konkrete Problemsituationen erfahrbar machen sollen, werden durch stark fokussierenden Leitfragen ein wenig künstlich auf einzelne Aspekte beschränkt, und sind aus pragmatischen Gründen (wie das mangelnde Fachwissen der Studierenden zu Kursbeginn) als Analogien zur „alltäglichen" Erfahrungswelt der Studierenden angelegt (wie optische Täuschungen oder fiktive Geschichten in Kinderbüchern). Dies ist einerseits, aus Sicht auf das wissenschaftliche Denken als Fortführung des Alltagsdenkens, attraktiv und interessant. Es kann aber dann problematisch werden, wenn die so aufgeworfenen Aspekte nicht im Kontext genuiner Fachinhalte ausgeschärft und weiterentwickelt werden, sondern sich letztlich nur der „plakative" und ggf. überspitzte Eindruck aus den Einführungsaktivitäten als Lernergebnis verfestigt.[27] Höttecke & Rieß (2007, S. 3) etwa ersetzen diese Aktivitäten durch „kritische Lektüre eines Textspektrums aus Wissenschaftstheorie, -geschichte und Didaktik".

Mit Blick auf die zu Beginn dieses Beitrages gestellte Frage danach, ob man aus der *learning to teach NOS*-Debatte etwas über eine angemessene Thematisierung von mathematischen Leitideen in der Lehramtsausbildung lernen kann, entspricht der hier vorgestellte, immer noch stark direkt-instruktive Ansatz nicht dem angestrebten Bildungswert von an Leitideen orientiertem Mathematikunterricht, da er mehr auf die Vermittlung von abprüfbarem professionellen Wissen der angehenden Lehrerinnen und Lehrer zielt als auf kritisches, eigenständiges Reflektieren der inhaltlichen Bedeutung und Berechtigung und des didaktischen Nutzens mathemati-

---

[27] Eine Kritik mit vergleichbarer Stoßrichtung findet sich bei Hodson (2008).

scher Leitideen. Letzteres führt in der Regel gerade zu nicht einfach abprüfbaren, subjektiv gefärbten Ergebnissen, ist aber notwendige Grundlage zur Ausbildung eines souveränen, authentischen Verständnisses mathematischer Leitideen.

Die Betonung der Notwendigkeit einer expliziten Thematisierung und Diskussion von NOS, insbesondere mit Bezug auf fachliche Inhalte, die über das Schulcurriculum hinausgehen, sowie die prinzipielle Einbindung von Elementen zur in Maßen angeleiteten inhaltlichen und meta-kognitiven Reflexion in fachwissenschaftlichen und fachdidaktische Lehrveranstaltungen, erscheint jedoch eine fruchtbare Anregung für den Fall mathematischer Leitideen zu sein. Dies gilt auch für die von Akerson et al. vorgeschlagene Einbindung konkreter didaktischer Arbeit in Bezug auf Diagnose und Stundenentwürfe zu NOS im Zusammenspiel mit wissenschaftlich-fachdidaktischer Analyse und Reflexion, die auch in Höttecke & Rieß (2007) aufgegriffen wird.

7 Skizze: Ein explizit-reflexiver Ansatz zu mathematischen Leitideen als Gegenstand der Lehramtsausbildung

Ein Ziel der hier angestellten Überlegungen ist die Konzeption konkreter fachdidaktischer Lehrveranstaltungen im Lehramtsstudium. Die *Basis* einer adäquaten Thematisierung von mathematischen Leitideen in der Lehramtsausbildung bildet die reflektierte und explizite Anknüpfung des didaktischen Konzepts der Leitideen sowie deren fachinhaltlich begründeter Setzung und Ausformulierung an subjektive, fachinhaltsbezogenen Wertungen, Einstellungen, Vorstellungen und Herangehensweisen in Bezug auf Fachinhalte des universitären und des Schulstoffes. Dies dient der notwendigen Authentizität der Lehrenden bei der späteren Orientierung von Unterricht an mathematischen Leitideen, deren Mathematikbild dabei nicht in ein schulspezifisches und ein universitätsspezifisches zerfallen soll. Zentral für die Art der Thematisierung von mathematischen Leitideen in der Lehramtsausbildung ist der Reflexionsgedanke: fachdidaktische Lehrveranstaltungen sollten einen expliziten-reflexiven statt eines explizit-instruktiven Ansatz verfolgen, um einem subjektiven Zugang zu Leitideen Raum zu lassen. Ziel ist die Förderung eines kritischen, qualitativen, fundierten und reflektierten Hintergrundverständnisses mathematischer Leitideen und ihrer didaktischen Funktion.

Vor diesem Hintergrund befasst sich das Projekt „Zentrale mathematische Ideen in der LehrerInnenbildung“ (kurz: ZILB)[28] damit, die am Ende von Abschnitt 6.1 unter (1) und (2) genannten Vorschläge und Ergebnisse in Bezug auf NOS für den

[28] Hier war zunächst der Terminus „zentrale Ideen"“ namensgebend, da das zugehörige Projektseminar in den ersten Durchläufen im inhaltsbezogenen Teil auf spezifische „zentrale Ideen“ der Geometrie nach Bender (1983) hin konzipiert wurde.

Fall der mathematischen Grundbildung, insbesondere der mathematischen Leitideen, aufzugreifen, gemäß der in Abschnitt 6.3 genannten Kritik geeignet zu modifizieren und in entsprechenden Pilotlehrveranstaltungen umzusetzen. Ein ZILB-Seminar beinhaltet dazu drei unterschiedliche Seminarphasen. Ziel der ersten Phase ist es, verschiedene inhaltliche und fachdidaktische Aspekte zentraler mathematischer Ideen an ausgewählten Fachinhalten auf Schul- und Universitätsniveau kennenzulernen, selbst zu erarbeiten und zu den eigenen fachinhaltsbezogenen Wertungen, Einstellungen, Vorstellungen und Herangehensweisen für das Fach Mathematik in Beziehung zu setzen. Dazu gehört die explizite, teils angeleitete und teils offene Reflexion der eigenen Auffassungen vom und Einstellungen zum Fach sowie eigenen Kernideen (im Sinne von Ruf & Gallin 2005) auf unterschiedlichen Reflexionsstufen, die auch Anschlussmöglichkeiten für die Diskussion und Reflexion von spezifischen und allgemeinen epistemologischen Überzeugungen bietet. Basis dieser Reflexionsarbeit sind von den Teilnehmerinnen und Teilnehmern selbst durchgeführte Video- und Transkriptanalysen zu im Vorfeld des Seminars mit ihnen geführten Einzelinterviews. Dieses Reflektieren auf unterschiedlichen Ebenen wird über die gesamte Seminarzeit hinweg etwa durch die mehrstufige offen-reflexive (Bolton 2010) Erstellung eines Portfolios und wechselseitig kommentierten Lerntagebuchs beibehalten. Das reflexive Schreiben bei der Portfolioarbeit wird dabei auch als ein Element professioneller Lehrerbildung angesehen und gefördert (vgl. etwa Kolbe & Combe 2004 oder Roters 2012).

Es folgt eine zunächst stärker instruktive ideengeschichtliche Thematisierung auf der Basis von Textlektüre und anschließend eine offen-reflexive Problematisierung des Begriffs der mathematischen Leitidee, seiner begrifflich inhärenten Normativität und unterschiedlicher fachdidaktischer Ansätze und Kataloge. Dabei werden ausgewählte curricular verankerte Leitideen anhand von konkreten fachwissenschaftlichen Inhalten der Universitätsmathematik inhaltlich erarbeitet.[29] Ein Schwerpunkt liegt dabei, im Sinne der in Abschnitt 3.2 vorgeschlagenen Konkretisierung, auf Problemlöseprozessen als potentielle Erscheinungsträger dieser Leitideen und deren Reflexion mit Blick auf Typen und charakteristische Elemente, auch auf meta-kognitiver Ebene des *belief systems*. In den Lernportfolioeinträgen und Gruppendiskussionsrunden zeigte sich in dieser ersten Phase eine ablehnende Haltung der Studierenden gegenüber offen-reflexiven Methoden in Bezug auf ein so komplexes Themengebiet wie mathematische Leitideen – instruktivere Methoden werden ausdrücklich vorgezogen. Bereits ab der ersten Seminarphase erfolgt eine kontinuierliche Hospitation von Kleingruppen von Studierenden in einer aus-

[29] Hier: „Messen“ und „Passen“ anhand der Hilbertschen Streckenrechnung sowie am Thema „Schließungssätze“ auf der Basis einer vorangegangenen fachwissenschaftlichen Vorlesung zur synthetischen Geometrie.

gewählten Mathematikklasse einer kooperierenden Lehrkraft, um einen konkreten Lerngruppenbezug herzustellen.

Die zweite Seminarphase dient dazu, eine der konkreten curricularen Forderungen, mit denen die Studierenden spätestens im Referendariat verbindlich konfrontiert werden, am Beispiel der Orientierung von Mathematikunterricht an mathematischen Leitideen umzusetzen. Dazu entwerfen die Studierenden eine Lernreihe, ein Diagnoseinstrument und eine konkrete Unterrichtsstundenkonzeption für den Mathematikunterricht.[30] Die über einen einzelnen Stundenentwurf hinausgehende Lernreihenkonzeption ist dabei ein wesentliches Element, denn ein didaktisch wirksames Orientieren an mathematischen Leitideen spielt sich nicht auf der Mikroebene von Stundenkonzeptionen oder einzelnen Lernumgebungen ab. Die Übertragbarkeit und Explizierbarkeit des am Hochschulstoff inhaltlich Erarbeiteten im Rahmen des Mathematikunterrichtes oder notwendige Modifikationen werden ebenfalls diskutiert. In dieser Erarbeitungsphase führt eine weitestgehend autonome Arbeit in Kleingruppen zu einem offen-reflexiven Herangehen an die gestellte Aufgabe. Als begleitendes instruktives Element wird die Entwicklung des Reihen- und Stundenentwurfs zusätzlich von kooperierenden Fachlehrkräften und einem Fachleiter „gecoacht".

Die dritte Seminarphase ermöglicht es, das entwickelte Diagnoseinstrument anzuwenden und die Stundenkonzeption in den Hospitationsklassen konkret umzusetzen. Die Umsetzung wird anschließend mit direkter wissenschaftlicher Begleitung reflektiert und ggf. weiterentwickelt. Diese offene Feedback- und Reflexionsphase erfolgt als Abschluss des Seminars und wird von der Hochschullehrerin und dem Fachleiter gemeinsam betreut.

8 Ausblick: Leitideen und Nature of Mathematics?

In dem vorliegenden Beitrag wurden mathematische Leitideen und *nature of science* unter einem sehr speziellen didaktischen Blickwinkel in Beziehung gesetzt. Zum Abschluss kann man nun die eher philosophische Frage stellen, ob und inwiefern mathematische Leitideen in Beziehung zu einer „nature of mathematics" stehen könnten, diese vielleicht sogar zu einem gewissen Grad induzieren. Was aber ist die Natur der Mathematik?

Aus philosophischer Sicht sind hier die ontologische von der epistemischen Frage zu differenzieren, also die Frage nach der Natur mathematischer Gegenstände und der Natur mathematischen Wissens. Welche dieser beiden Fragen wäre aus ma-

[30] Hier: „Messen" und „Passen" bei der Einführung des Flächeninhalts (1. Stunde der Lernreihe, Klasse 6, Gesamtschule) sowie am Thema „Brüche und Flächenanteile" (Erkundungsstunde, Klasse 6, Gymnasium).

thematikdidaktischer Sicht relevanter? Welche „nature of mathematics" könnte zu einem sinnvollen Reflexionspunkt oder sogar Gegenstand der Lehrerausbildung oder des Mathematikunterrichtes erhoben werden? Das im Beitrag vorgestellte Konzept von NOS ist in erster Linie als eine Antwort auf die epistemische Frage nach der Natur naturwissenschaftlichen Wissens, der Gültigkeit naturwissenschaftlichen Begründungen und Erklärungen, der Art und des Geltungsanspruches naturwissenschaftlicher Methoden etc. zu verstehen.

Schlägt man diesen Weg auch für die Mathematik ein und fragt zunächst nach der Natur mathematischen Wissens und einer möglichen Beziehung zu mathematischen Leitideen, so ließe sich unter der hier vorgenommenen Teilkonkretisierung des Leitideebegriffs mittels zentraler Problemlöseprozesstypen folgende These aufstellen: *Die Arten und Weisen, wie in der Mathematik charakteristischerweise Probleme strukturiert und gelöst werden, bilden eine auf die fachlichen Inhalte bezogene Basis für zur Bestimmung allgemeinerer Wesenszüge mathematischen Tuns und damit der mathematischen Wissensgenese.*

Mögliche Ansatzpunkte zur Weiterverfolgung dieser These wäre einerseits eine pragmatische Variante, die keine abschließende oder umfassende Antwort darauf geben will, was die Natur der Mathematik sein soll (entsprechende Ansätze findet man auch im Falle von NOS, vgl. Neumann & Kremer 2013, S. 211 ff.). Dabei könnte man von gut begründeten, konkreten Katalogen von für den Mathematikunterricht relevanten mathematischen Leitideen ausgehen, und in Bezug auf deren handlungsleitende Funktion für das mathematische Arbeiten fragen, ob es dabei einigen oder sogar allen gemeinsame epistemische (und ggf. auch ontologische) Aspekte gibt, und welche diese ggf. sein können.

Eine andere Möglichkeit ist, die Veränderung und historischen Entwicklung dessen in den Blick zu nehmen, wie in der wissenschaftlichen mathematischen Praxis charakteristischerweise Probleme (im weiten Sinne von Abschnitt 3.2) strukturiert und gelöst werden und wurden.

> The unifying theme is that the work of mathematicians, on an ongoing basis, is solving problems – problems of the „perplexing or difficult" kind […] solving problems is „the heart of mathematics". (Schoenfeld 1992, S. 339)

In der Philosophie der Mathematik sind insbesondere die historischen Arbeiten von Imre Lakatos prominente Beispiele für einen solchen Ansatz, ebenso Philip Kitchers „The Nature of Mathematical Knowledge" (1984). Einen fruchtbaren Ansatzpunkt könnte hier aber auch eine didaktische Rezeption der vergleichsweise jungen „Philosophie der mathematischen Praxis" (vgl. exemplarisch Mancosu et al. 2006) liefern.

Wissenschaftspraktische und -historische Kontextualisierungen sind unter anderem auch ein Ankerpunkt in der Diskussion um unterschiedliche NOS-Aspekte (vgl. Abschnitt 6.1). Damit würde im Falle der „Natur der Mathematik" ein Aspekt in den Vordergrund gestellt, den Schweiger (1992) auch explizit in die Debatte um mathematische Leitideen einbrachte und der in diesem Beitrag bisher außer Acht gelassen wurde: der Aspekt der Historizität, der nicht mit kultureller Kohärenz zu verwechseln ist. Die geforderte historische Verankerung von Leitideen könnte einen Ausgangspunkt dafür liefern, Einsicht in historisch bedingte Wesenszüge mathematischen Wissens zu erhalten.

Literatur

Abd-El-Khalick, F. & BouJaoude, S. (1997), An Exploratory Study of the Knowledge Base for Science Teaching, Journal of Research in Science Teaching, 34(7), 673–699.

Abd-El-Khalick, F. & Lederman, N. G. (1998), Improving Science Teacher's Conceptions of the Nature of Science: A Critical Review of the Literature, Conference Paper, unpublished.

Akerson, V. L., Abd-El-Khalick, F. & Lederman, N. G. (2000), Influence of a Reflective Explicit Activity-Based Approach on Elementary Teacher's Conceptions of Nature of Science, Journal of Research in Science Teaching, 37(4), 295–317.

American Association for the Advancement of Science (AAAS) (1993). Benchmarks for Science Literacy: A Project 2061 report. New York: Oxford University Press.

Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T. & Prediger, S. (Hrsg.) (2012), mathewerkstatt 5, Schulbuch, Berlin: Cornelsen.

Batanero, C., Burrill, G. & Reading, C. (2011), Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education, Heidelberg: Springer.

Bender, P. (1983), Zentrale Ideen der Geometrie für den Unterricht der Sekundarstufe I, in: Beiträge zum Mathematikunterricht (S. 8–17), Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

Bender, P. & Schreiber, A. (1985), Operative Genese der Geometrie, Stuttgart: Teubner. Reprint Berlin: epubli, 2012.

Bender, P. (1991), Ausbildung von Grundvorstellungen und Grundverständnissen – ein tragendes didaktisches Konzept für den Mathematikunterricht, erläutert an Beispielen aus den Sekundarstufen, in: H. Postel, A. Kirsch & W. Blum (Hrsg.): Mathematik lehren und lernen, Festschrift für Heinz Griesel (S. 48–60), Schroedel: Hannover.

Bernack, C., Holzäpfel, L., Leuders, T. & Renkl, A. (2011), Veränderungen des Mathematikbildes in der Lehrerausbildung? Erste Ergebnisse des BMBF-Projektes „Forschende MathematiklehrerInnen“, in: Beiträge zum Mathematikunterricht (S. 99–102), Münster: WTM.

Biehler, R. & Hartung, R. (2006), Die Leitidee „Daten und Zufall“, in: W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung & O. Köller (Hrsg.), Bildungsstandards Mathematik: konkret – Sekundarstufe I (S. 51–80), Berlin: Cornelsen.

Bloom, J. W. (1989), Preservice Elementary Teacher's Conceptions of Nature of Science: Science, Theories, and Evolution, International Journal of Science Education, 11(4), 401–415.

Bolton, G. (2010), Reflective Practice: Writing and Professional Development (Third Edition), London: Sage Publications.

Brandom, R. (1994), Making it Explicit: Reasoning. Representing, and Discursive Commitment, Cambridge, MA: Harvard University Press.

Brown, S. & Clarke, N. (1960), International Education in Physics, Michigan: Michigan Institute of Technology.

Bruner, J. S. (1970), Der Prozeß der Erziehung, Düsseldorf: Schwann.
Bybee R. W. (1997), Towards an Understanding of Scientific Literacy, in: W. Gräber & C. Bolte (Hrsg.), Scientific Literacy, An International Symposium (S. 37–68), Kiel: Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften (IPN).
Charles, R. I. & Carmel, C. A. (2005), Big Ideas and Understandings as the Foundation for Elementary and Middle School Mathematics, Journal of Mathematics Education, 7(3), 9–24.
Common Core State Standards Initiative (2010), Common Core State Standards for Mathematics, Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers.
Crumb, G. H. (1965), Understanding of Science in High School Physics, Journal of Research in Science Teaching, 3(3), 246–250.
Durkee, P. (1974), An Analysis of the Appropriateness and Utilization of TOUS with Special Reference to High-ability Students Studying Physics, Science Education, 58(3), 343–356.
Eichler, A. & Vogel, M. (2009), Leitidee Daten und Zufall, Heidelberg: Vieweg.
Eichler, A. & Vogel, M. (2013), Daten- und Wahrscheinlichkeitsanalyse als Modellierung, in: R. Borromeo Ferri, G. Greefrath & G. Kaiser (Hrsg.), Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule, Realitätsbezüge im Mathematikunterricht (S. 163–180), Wiesbaden: Springer.
Graumann, G., Hölzl, R., Krainer, K., Neubrand, M. & Struve, H.(1996), Tendenzen der Geometriedidaktik der letzten 20 Jahre, Journal für Mathematik-Didaktik, 17(3/4) 163–237.
Hammermann, E. (2006), Eight Essentials of Inquiry-Based Science, K-8, Thousand Oaks, California: Corwin Press.
Hattie, J. (2009), Visible learning, London, New York: Routledge.
Heitele, D. (1975), An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas, Educational Studies in Mathematics, 6(2), 187–205.
Herklotz, I. (2013), Muster am Hunderterfeld, Erforschung mathematischer Strukturen als Grundlage für das Verständnis von Zahlen, Grundschulunterricht Mathematik, 60(1) , 19–23.
Heymann, W. (1996), Allgemeinbildung und Mathematik, Weinheim/Basel: Beltz.
Hodson, D. (2008), Towards Scientific Literacy, A Teacher's Guide to the History, Philosophy and Sociology of Science, Rotterdam: Sense.
Hofheinz, V. (2008), Erwerb von Wissen über „Nature of Science", Eine Fallstudie zum Potenzial impliziter Aneignungsprozesse in geöffneten Lehr-Lern-Arrangements am Beispiel von Chemieunterricht, Dissertation, Universität Siegen.
Höttecke, D. & Rieß, F. (2007), Rekonstruktion der Vorstellungen von Physikstudierenden über die Natur der Naturwissenschaften – eine explorative Studie, Physik und Didaktik in Schule und Hochschule, 1(6), 1–14.
Holbrook, J. & Rannikmae, M. (2009), The Meaning of Scientific Literacy, International Journal of Environment & Science Education, 4(3), 275–288.
Hußmann, S. & Schacht, F. (2009), Ein inferentialistischer Zugang zur Analyse von Begriffsbildungsprozessen, in: Beiträge zum Mathematikunterricht (S. 339–342), Münster: WTM.
Jungwirth, E. (1970), An Evaluation of the Attained Development of the Intellectual Skills Needed for „Understanding the Nature of Scientific Inquiry" by BSCS Pupils in Israel. Journal of Research in Science Teaching, 7(2), 141–151.

Kitcher, P. (1984), The Nature of Mathematical Knowledge, New York: Oxford University Press.

Kleinman, G. (1965), Teachers' Questions and Student Understanding of Science, Journal of Research in Science Teaching, 3(4), 307–317.

Klieme, E. & Rakoczy, K. (2008), Empirische Unterrichtsforschung und Fachdidaktik, Outcome-orientierte Messung und Prozessqualität des Unterrichts, Zeitschrift für Pädagogik, 54(2), 222–237.

Klopfer, L. E., & Cooley, W. W. (1963), The History of Science Cases for High Schools in the Development of Student Understanding of Science and Scientists, Journal of Research for Science Teaching, 1(1), 33–47.

Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (KMK) (Hrsg.) (2004), Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss, München: Wolters.

Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (KMK) (2005a), Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich, München: Wolters.

Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (KMK) (2005b), Bildungsstandards im Fach Physik für den mittleren Schulabschluss, München: Wolters.

Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (KMK) (2012), Bildungsstandards im Fach Mathematik für die allgemeine Hochschulreife, Köln: Wolters Kluwer.

Kolbe, F.-U., & Combe, A. (2004), Lehrerbildung, in: W. Helsper & J. Böhme (Hrsg.), Handbuch der Schulforschung (S. 853–877), Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Kuntze, S., Lerman, S., Murphy, B., Kurz-Milcke, E., Siller, H.-S. & Winbourne, P. (2011), Development of Pre-service Teachers' Knowledge Related to Big Ideas in Mathematics, in: B. Ubuz (Hrsg.), Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3 (S. 105–112), Ankara: PME.

Kuntze, S. & Dreher, A. (Hrsg.) (2011), Big Ideas im Zentrum des Mathematikunterrichts – Fachdidaktischer Hintergrund, Anregungen für die Unterrichtspraxis und Materialien für schüler(innen)zentrierte Lernumgebungen. Ludwigsburg: Pädagogische Hochschule.

Lederman, N. G., & Abd-El-Khalick, F. (1998), Avoiding De-natured Science: Activities that Promote Understandings of the Nature of Science, in: W. McComas (Hrsg.), The Nature of Science in Science Education: Rationales and Strategies (S. 83–126), Dordrecht: Kluwer Academic.

Lederman, N. G. (2006), Syntax of Nature of Science Within Inquiry and Science Instruction, in: L. B. Flick & N. G. Lederman (Hrsg.), Scientific Inquiry and Nature of Science (S. 301–317), Dordrecht: Springer.

Lederman, N. G. (2007), Nature of Science: Past, Present, and Future, in: S. K. Abell & N. G. Lederman (Hrsg.), Handbook of Research in Scientific Education (S. 831–879), Mahwah, NJ: Erlbaum.

Mancosu, P., Jørgensen, K. F., & Pedersen, S. A. (Hrsg.) (2006), Visualization, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics, New York: Springer.

Mason, L., & Bromme, R. (2010), Situating and Relating Epistemological Beliefs into Metacognition: Studies on Beliefs about Knowledge and Knowing. Metacognition and Learning, 5(1), 1–6.

McComas, W. F. & Olson, J. K. (1998), The Nature of Science in International Science Education Standards Documents, in: W. F. McComas (Hrsg.), The Nature of Science in Science Education: Rationales and Strategies (S. 41–52). Dordrecht: Kluwer.

Merill, R., & Butts, D. (1969), Vitalizing the Role of the Teacher, in: D. Butts (Hrsg.), Designs for Progress in Science Education (S. 35–42), Washington D.C.: National Science Teachers Association.

Müller-Hill, E. (2015), Die semiotische Rolle geometrisch-zeichnerischer Darstellungen für empirische Auffassungen von Geometrie im Mathematikunterricht, in: G. Kadunz (Hrsg.), Semiotische Perspektiven auf das Lernen von Mathematik (S.89–110), Berlin Heidelberg: Springer.

Müller-Hill, E., Spies, S. (2015), On the Role of Affect for Sense Making in Learning Mathematics – Aesthetic Experiences in Problem Solving Processes, in: K. Krainer, N. Vondrová (Hrsg.), CERME 9, Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (S. 1245–1251), Prag: Charles University, Faculty of Education and ERME.

National Research Council (1996), National science education standards*,* Washington, D.C.: National Academy Press.

NCTM – National Council of Teachers of Mathematics (2000), Principles and Standards for School Mathematics, Reston, VA: NCTM.

Neubrand, M. (2003), „Mathematical literacy"/„Mathematische Grundbildung", Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 6(3), 338–356.

Neumann, I., Kremer, K. (2013), Nature of Science und epistemologische Überzeugungen – Ähnlichkeiten und Unterschiede, Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften, 19, 209–232.

Norris S. P., & Phillips, L. M. (2003), How Literacy in its Fundamental Sense is Central to Scientific Literacy, Science Education, 87(2), 224–240.

OECD/PISA (2000), Schülerleistungen im internationalen Vergleich, Eine neue Rahmenkonzeption für die Erfassung von Wissen und Fähigkeiten, Berlin: MPI für Bildungsforschung.

OECD/PISA (2002), PISA Beispielaufgaben aus der PISA-Erhebung 2000 in den Bereichen Lesekompetenz, mathematische und naturwissenschaftliche Grundbildung, Paris: OECD Publishing.

OECD/PISA (2003), The PISA 2003 Assessment Framework – Mathematics, Reading, Science, and Problem Solving Knowledge and Skills. http://www.oecd.org/edu/school/programmeforinternationalstudentassessmentpisa/33694881.pdf [24.11.2015].

Osborne, J., Collins, S., Ratcliffe, M., Millar, R. & Duschl, R. (2003), What „Ideas-About-Science" Should Be Taught in School Science? A Delphi Study of the Expert Community, Journal of Research in Science Teaching, 40, 692–720.

Pomeroy, D. (1993), Implications of Teacher's Beliefs About the Nature of Science, Science Education, 77(3), 261–-278.

Prömmel, A., (2013), Das GESIM-Konzept: Rekonstruktion von Schülerwissen beim Einstieg in die Stochastik mit Simulationen, Wiesbaden: Springer Spektrum.

Ramsey, G., & Howe, R. (1969), An Analysis of Research on Instructional Procedures in Secondary School Science, The Science Teacher, 36(3), 62–68.

Roters, B. (2012), Professionalisierung durch Reflexion in der Lehrerbildung, Münster: Waxmann.
Rott, B., Leuders, T. & Stahl, E. (2015), Assessment of Mathematical Competencies and Epistemic Cognition of Preservice Teachers, Zeitschrift für Psychologie, 223(1), 39–46.
Ruf, U. & Gallin, P. (2005), Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik, 2 Bände, Seelze-Velber: Kallmeyer.
Schacht, F. (2012), Mathematische Begriffsbildung zwischen Implizitem und Explizitem. Individuelle Begriffsbildungsprozesse zum Muster- und Variablenbegriff, Wiesbaden: Vieweg + Teubner.
Schifter, D., Russell, S. J. & Bastable, V. (1999), Teaching to the Big Ideas, in: M. Z. Solomon (Hrsg.), The Diagnostic Teacher: Constructing New Approaches to Professional Development (S. 22–47), New York: Teachers College Press.
Schreiber, A. (1979), Universelle Ideen im mathematischen Denken, mathematica didactica, 2(3), 165–171.
Schreiber, A. (1983), Bemerkungen zur Rolle universeller Ideen im mathematischen Denken, mathematica didactica, 6(2), 65–76.
Schreiber, A. (2011), Begriffsbestimmungen – Aufsätze zur Heuristik und Logik mathematischer Begriffsbildung, Berlin: Logos.
Schoenfeld, A. (1985), Mathematical Problem Solving, New York: Academic Press.
Schoenfeld, A. H. (1992), Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics, in: D. A. Grouws (Hrsg.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics (S. 334–370). New York, NY, England: Macmillan.
Schweiger, F. (1992), Fundamentale Ideen, Eine geisteswissenschaftliche Studie zur Mathematikdidaktik, Journal für Mathematik-Didaktik, 13(2/3), 199–214.
Schwill, A. (1993), Fundamentale Ideen in der Informatik, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 25(1), 20–31.
Sierpinska, A. (1994), Understanding in mathematics, London: The Falmer Press.
Smith, C. L., Wiser, M., Anderson, C. W. & Krajcik, J. (2006), Implications of Research on Children’s Learning for Standards and Assessment: A Proposed Learning Progression for Matter and the Atomic-Molecular Theory, Measurement: Interdisciplinary Research & Perspective, 4(1–2), 1–98.
Sorensen, L. L. (1966), Change in Critical Thinking Between Students in Laboratory-centered and Lecture-demonstration Centered Patterns of Instruction in High School Biology, Dissertation, Oregon State University.
Sproesser, U., Kuntze, S., & Engel, J. (2012), Wissen zur Leitidee ‚Funktionaler Zusammenhang‘– Ergebnisse einer Studie mit Realschülerinnen und Realschülern, in: Beiträge zum Mathematikunterricht (S. 825–828). Münster: WTM.
Strauss, A., & Corbin, J. (1990). Basics of Qualitative Research: Grounded Theory Procedures and Techniques, London: Sage Publications.
Struve, H. (1990), Grundlagen einer Geometriedidaktik, Mannheim: BI-Wiss.-Verlag.
Tietze, U.-P. (1979), Fundamentale Ideen der linearen Algebra und analytischen Geometrie – Aspekte der Curriculumsentwicklung im Mathematikunterricht der SII, mathematica didactica, 2(3), 137–164.
Troxel, V. A. (1968), Analysis of Instructional Outcomes of Students Involved with Three Sources in High School Chemistry, Washington, DC: US Department of Health, Education, and Welfare, Office of Education.

Vergnaud, G. (1992), Conceptual Fields, Problem Solving and Intelligent Computer Tools, in: E. De Corte, M. Linn, H. Mandl & L. Verschaffel (Hrsg.), Computer-Based Learning Environments and Problem Solving (S. 287–308), Berlin: Springer.

Vom Hofe, R. (1995), Vorschläge zur Öffnung normativer Grundvorstellungskonzepte für deskriptive Arbeitsweisen in der Mathematikdidaktik, in: H.-G. Steiner & H.-J. Vollrath (Hrsg.), Neue problem- und praxisbezogene Forschungsansätze (S. 42–50), Köln: Aulis.

Vohns, A. (2007), Grundlegende Ideen und Mathematikunterricht, Norderstedt: BoD.

Vohns, A. (2010), Fünf Thesen zur Bedeutung von Kohärenz-und Differenzerfahrungen im Umfeld einer Orientierung an mathematischen Ideen, Journal für Mathematik-Didaktik, 31(2), 227–255.

Anschrift der Verfasserin

Dr. Eva Müller-Hill
Universität zu Köln
Seminar für Mathematik und ihre Didaktik
50931 Köln
e-Mail: eva.mueller-hill@uni-koeln.de

Eingang Manuskript: 07.07.2014
Eingang überarbeitetes Manuskript: 20.03.2015
Online zugänglich: 12.02.2016