Mathematik und Bildung

von

Volker Ladenthin, Bonn

Kurzfassung: Nach einer historischen Analyse, die aufzeigt, dass die Mathematik nicht als universales Erklärungsmodell, wohl aber als Perspektive des Weltverständnisses neben anderen verstanden werden kann, befragt der Verfasser vier Zugangsweisen zur Mathematik auf ihre Bedeutung für den Bildungsprozess: Mathematische Verfahren, Reine Mathematik, Mathematik in der Anwendung, Mathematikphilosophie. Er versucht zu zeigen, dass jede dieser Zugangsweisen notwendig ist, keine aber allein und für sich genommen die Frage nach der Bedeutung der Mathematik für die Bildung des Menschen beantworten kann. Erst die zusätzliche Frage nach der Bedeutsamkeit jeder dieser Zugangsweisen für das Gelingen des Lebens („Sinn") erschließt die Bildungsbedeutsamkeit der Mathematik.

Abstract: After using a historical analysis to show that mathematics is not to be understood as a universal model of explanation, but as a perspective of understanding the world which exists alongside others, the author investigates the significance of four approaches to mathematics for the educational process: mathematical procedures; abstract mathematics; applied mathematics; philosophy of mathematics. He seeks to prove each of these approaches necessary, while none of them alone enables determining the importance of mathematics for the education of man. Only the additional examination of the contributions of each of these approaches to succeeding in life (sense of life), reveals the significance of mathematics for education.

Vorbemerkung

Die Mathematik ist unzweifelhaft einer der Grundpfeiler von Kultur. Wer unsere Kultur *verstehen* will, bedarf der Mathematik – das zeigen Kulturhistoriker (vgl. Winzen 2011) wie Essayisten (Enzensberger 1997) oder Romanautoren (Kehlmann 2005) immer wieder. Wer zudem in unserer Kultur agieren und sie *gestalten* will, bedarf der Mathematik: Zeitungen präsentieren *die Zahl des Tages*, Elektromärkte beweisen ihre Seriosität durch Zahlen (Zinsen, Rabatte und Preise). Statistiken und Diagramme beherrschen optisch selbst das Infotainment. Zugleich aber gibt es bundesweit keinen Mathematiker, der es an Popularität mit Wirtschaftswissenschaftlern, Literaturkritikern oder Philosophen aufnehmen könnte. Und es gibt nicht wenige Autoren, die gerade in der *öffentlichen* Präsentation von Zahlen Ideologie wittern – einmal aus epistemischen und ethischen Gründen (Michels 1928, Kaube o. J.) zum anderen aber aus politischen Gründen, weil der mathematisch ungebildete Normalkunde solcher Nachrichten und Argumentationen die Manipulationen mit Zahlen (Krämer 2008) nicht durchschaue: Mathematik als Ideologie?

Die Mathematik gilt als lebensfern und schwierig – obwohl die Unterhaltungsseiten der Zeitungen mit Sudokus und anderen Knobeleien gefüllt sind (Delahaye 2006). Und obwohl Mathematik mit guten Gründen zuweilen als reine Vernunft verstanden wird, ist sie zugleich im Zuge der Ökonomisierung der Politik für das Zusammenleben in der Gesellschaft und das Lebensglück des Einzelnen *maß*-geblich.[1]

Diese Bilder der Mathematik sind ebenso widersprüchlich wie alltäglich – wie kann man sie ordnen, gewichten und bewerten? Anders gefragt: Welche Bedeutung hat die Mathematik für die Bildung des Menschen? Meine Antwort beginnt (1) mit der Rückschau auf ein Modell, das Mathematik als Bildung verstand. Angestoßen durch die Kritik an einem solchen Konzept werden dann (2) vier Modelle diskutiert, die den Bildungswert der Mathematik unterschiedlich begründen. Zum Abschluss wird (3) eine Konzeption mathematischer Bildung vorgestellt, in der ihr Proprium, ihre Selbstreflexivität und die Reflexion ihres Verhältnisses zur menschlichen Gesamtpraxis als Spezifika eines bildenden Zugangs zur Mathematik ausgewiesen werden.

1 Rückschau: Mathematik als Bildung

In seiner „Metaphysik“ genannten Schrift berichtet Aristoteles in aspektreicher Weise über jene Menschen, die sich „zuerst“[2] mit der Mathematik beschäftigt hätten:

> „Zu dieser Zeit, aber auch schon vorher, befaßten sich die sogenannten Pythagoreer als erste mit der Mathematik, führten sie weiter aus und waren, da sie sich damit geradezu ernährten, der Meinung, daß deren Ursprünge die Ursprünge aller Dinge seien. Da nun von diesen Ursprüngen die Zahlen von Natur aus die Ersten seien, sie aber gerade in diesen viele Ähnlichkeiten mit dem Seienden und Entstehenden zu sehen glaubten – mehr als in Feuer, Erde oder Wasser –, weil die eine Ausdruckskraft der Zahlen die Gerechtigkeit, die andere die Lebensseele und die Vernunft, wieder eine andere den richtigen Augenblick meine, und von allem übrigen sozusagen jede in gleicher Weise, und da sie zudem in den Zahlen die Ausdruckskräfte und Verhältnisse der Harmonien sahen, weil sie also glaubten, alles andere gleiche seiner ganzen Natur nach den Zahlen und die

---

1 Das mathematisch erstellte Bruttoinlandsprodukt (BIP) sei „der wohl aussagefähigste und in sich konsistenteste Indikator für die materielle Komponente von Wohlstand und Lebensqualität.“ Zit. nach: http://www.bundestag.de/bundestag/gremien/enquete/wachstum/kommissionsmaterialien/M_34_BIP-Thesenpapier_BDI.pdf (Zugriff am 05.02.2014).

2 Dazu Schadewaldt (1978, 282): „Mit ihm (Pythagoras, V.L.) beginnt es, daß man die Mathematik nicht mehr als Mittel der Weltbewältigung betrachtet (…) sondern als reine Mathematik, eine Weise, wie das Phänomen von Verhältnissen, die in großer Fülle im Erfahrbaren vorliegen, nun an sich genommen und auf Prinzipielles zurückgeführt werden kann.“

> Zahlen seien die ‚Ersten' in der ganzen Natur, nahmen sie an, daß die Elemente der Zahlen die Elemente alles Seienden seien und daß der gesamte Himmel Harmonie und Zahl sei. Und alles, was sie Übereinstimmendes in den Zahlen und in den Harmonien in Hinsicht auf die Ausdruckskräfte und Teile des Himmels und die Gesamtordnung des Himmels fanden, das führten sie zusammen und paßten es einander an. Und wenn nun etwas offenblieb, so fügten sie noch etwas hinzu, damit ihre ganze Theorie geschlossen sei. (…) Offenbar halten auch die Pythagoreer die Zahl für einen Ursprung – sowohl im Sinne von Stoff für das Seiende wie im Sinne von Ausdruckskräften und Zuständen –; sie glauben, die Elemente der Zahl seien das Gerade und Ungerade, wovon aber das eine begrenzt sei, das andere unbegrenzt; das EINE jedoch bestehe aus beidem (denn sie sei gerade und ungerade), die Zahl wiederum bestehe aus dem Einen, und – wie gesagt – die Zahlen bildeten den ganzen Himmel." (Aristoteles/Capelle 1968, 490)

Aristoteles schildert hier ein Weltbild, in dem alles, was geschieht, erklärt wird durch ein einziges Prinzip – durch die Mathematik. Die Welt lasse sich *insgesamt* erkennen und Weltklugheit lasse sich erlernen, wenn man sie aus mathematischen Erkenntnissen ableite. Die Mathematik hat in diesem Weltbild kein Legitimationsproblem. Sie *ist* vielmehr die Legitimation. Und zwar ist sie Legitimation nicht allein für Handlungen, in denen es ganz vordergründig um mathematische Probleme geht. Sie ist vielmehr Legitimation für *alle* denkbaren Handlungen. Die Welt ist Zahl (Schadewaldt 1978, 281). Fortschritt in der Mathematik ist gleichbedeutend mit dem Fortschritt in der Welterkenntnis *und* der individuellen Klugheit. Mathematische Erkenntnis ist Einsicht in das Bauprinzip der Welt. Fortschritt in der Mathematisierung der Welt ist zugleich kultureller und moralischer Fortschritt. *Bildung* in einem solchen Weltbild ist identisch mit *mathematischer Ausbildung*. Die Einsicht in die Mathematik gewährt Einsicht in die Welt. Mathematik ist die „philosophische Erhellung des eigentlichen Seinsgrundes" (Schadewaldt 1978, 282). Mathematik dient nicht nur lebensweltlichen Zwecken (*Anwendung*); sie ist vielmehr theoretische und philosophische Mathematik: Denn *erst als solche* kann sie sinnstiftend für alles andere sein. Mathematik ist Letztbegründung.

Diese Argumentation stößt allerdings auf ein Problem. Bei Aristoteles ist es in den Formulierungen „glaubten" und „Meinung" versteckt:

> „(W)eil sie also glaubten (…) und (…) der Meinung (waren), daß deren Ursprünge die Ursprünge aller Dinge seien". (Aristoteles/Capelle 1968, 490)

Aristoteles stellt fest, dass die Pythagoreer ihren grundlegenden Satz nicht in dem System bewiesen hatten, das doch erklärtermaßen für *alles* grundlegend sein sollte: Mit der Mathematik. So setzt eine solche Bestimmung der Mathematik als Letztbegründung (Gethmann 2010) eine Metaphysik voraus, die sie doch erst begründen will. Ganz in diesem Sinne schrieb z. B. Kant:

> „Alle Naturphilosophen, welche in ihrem Geschäfte mathematisch verfahren wollten, haben sich daher jederzeit (obschon sich selbst unbewußt) metaphysischer Prinzipien bedient und bedienen müssen, wenn sie sich gleich sonst wider allen Anspruch der Metaphysik auf ihre Wissenschaft feierlich verwahrten." (Kant 1983b, 17)

Die Sätze weisen darauf hin, dass Mathematik nicht die *Gesamtheit* der Welt erklären kann, weil die Begründung dieses Erklärungsversuchs nicht zu der Regel gehört, die sie aufstellt. Die Auffassung, alles sei in Zahlen auszudrücken, wird daher nach diesen Einwänden zu spekulierender Metaphysik oder Ideologie.

Rousseau (1995) hatte zudem zuvor durch die Frage „Ob die Erneuerung der Wissenschaften und Künste zum Verderb oder zur Hebung der Sittlichkeit gewirkt habe?“ eine weitere Unterscheidung nachmetaphysisch aktualisiert: Die Unterscheidung von Erkennen (Theorie) und Handeln (Praxis). Diese Unterscheidung nährt den Zweifel an der optimistischen Vorstellung, dass Fortschritt in der Wissenschaft zugleich Fortschritt in der Moralität und Humanität bedeute. Wonach – so fragte er – beurteilen wir, dass eine völlig verwissenschaftlichte Welt auch zugleich eine humane Welt ist?

Sowohl systematisch wie historisch betrachtet kommt es daher zu einer zweifachen Differenz: Es entsteht erstens eine Differenz zwischen Metaphysik (Erkenntnistheorie) und Mathematik, weil die eine nicht identisch mit der anderen sein *kann*. Und es entsteht eine Differenz zwischen Erkennen (Theorie) und Sollen (Praxis): Die Eigenart der Dinge (theoretische Bestimmung) und ihr möglicher Zweck (technische und praktische Bestimmung) werden in drei nicht ineinander zu überführenden Diskursen bestimmt: Die Erkenntnis, die (technische) Anwendung und die (praktische) Reflexion (Ethik). Aus dem beschreibbaren Zustand der Welt lässt sich nicht zwingend ableiten, wie man sie gestalten *kann* und wie sie sein *soll*. Mindestens folgende Erkenntnisdiskurse sind daher seitdem zu unterscheiden und nicht ohne zusätzliche Reflexionen ineinander zu überführen:

- der innerszientifische (theoretische) Diskurs der Wissenschaften (z. B. der Diskurs der Mathematik: Was ist mathematisches Denken?),
- der Diskurs über die Möglichkeit von Wissenschaft (Erkenntnistheorie: Wie ist Mathematik möglich?),
- die Diskurse über den technischen und praktischen Umgang mit Wissenschaft (Technologie; Ethik: Wie geht man mit Wissen im Hinblick auf Funktionalität und auf die Würde des Menschen um?),
- und jener Diskurs, der fragt, was und wie zu lernen ist, wann und inwiefern für ein einzelnes Subjekt etwas gelten soll (Bildungstheorie: Wie lernt man, mathematisch zu denken und mit dem Gelernten verantwortungsvoll umzugehen?).

Kenntnisse und Fähigkeiten in weniger als den ersten drei Diskursen reichen von nun an nicht mehr aus, um den vierten Diskurs zu bewältigen – die Frage nämlich, wie und was zu lernen ist, in welcher Situation welche Ergebnisse der Wissenschaften handlungsbestimmend gelten sollen. *Bildung*, also die von jedem Menschen auf Grund seiner Bildsamkeit (Benner & Brüggen 2004) durch Lernen anzueignende Befähigung, die Welt angemessen zu erkennen und in ihr verantwortungsvoll zu handeln (vgl. die Beiträge in Ladenthin 2007), bedarf heute der Wissenschaften ebenso wie der Technologie, der Ethik und der Reflexion über die Möglichkeit und den Sinn, das Wissen und Können hierzu anzueignen. Bildung kann also nicht mehr durch die Aneignung eines speziellen Wissens und Könnens in *einem* Fach, durch kanonisch festgelegte *Inhalte* oder elementare *Denkoperationen* erworben werden. Ein Fach kann seine Bildungsbedeutung selbst nicht erweisen: Die Welt ist aufgespalten in Wissenschaften, deren sinnvolle Verbindung nicht schon mit den Wissenschaften gegeben ist, sondern reflexiv in einem zusätzlichen Diskurs hergestellt werden muss (Krämer & Ladenthin 2009). Kant hat die Voraussetzungen dieser Aufgabe beschrieben:

> „Es ist aber von der größten Wichtigkeit, zum Vorteil der Wissenschaften ungleichartige Prinzipien von einander zu scheiden, jede in ein besonderes System zu bringen, damit sie eine *Wissenschaft ihrer eigenen Art* ausmachen, um dadurch die Ungewißheit zu verhüten, die aus der Vermengung entspringt." (Kant 1983b, 17f)

Wissenschaften grenzen sich demnach nicht nur zufällig historisch (oder hochschulstrategisch) voneinander ab, sondern systematisch. Die Folge für die Mathematik ist, dass sie von nun an nicht mehr den Anspruch erheben kann, Rechtfertigung allen Handelns zu sein. Vielmehr muss sie sich als *eine Handlungsoption unter vielen* rechtfertigen. Und zwar muss sie sich mindestens in dreierlei Hinsicht rechtfertigen:

- Was ist die methodische und inhaltliche Eigenheit einer Wissenschaft im Unterschied zu anderen Wissenschaften?
- Welche Bedeutung hat eine Wissenschaft im Ensemble anderer Wissenschaften?
- Welche Bedeutung hat eine Wissenschaft für das Gelingen des Lebens?

Die Bedeutung der Mathematik im Bildungsprozess des Menschen kann nicht aus der Mathematik allein bestimmt werden, sondern durch die Reflexion des Verhältnisses zur Mathematik.

2 Vier Zugänge zur Mathematik – und die Frage nach ihrer Bildungsbedeutung

Im Folgenden werden vier Modelle diskutiert, die die Bildungsbedeutung der Mathematik bestimmen wollen, einmal (2.1) durch ihre Bedeutung als (lebensweltlich bedeutsame) Rechentechnik, dann (2.2) als Reflexion von (reinen) Denkregeln, (2.3) als Lösung lebensweltlicher Probleme und (2.4) schließlich als Reflexion der Bedingung ihrer Möglichkeit.

2.1 Mathematik als Handlungsanweisung für Rechentechniken

Die Bedeutsamkeit mathematischer Rechentechniken für die Bewältigung des Alltags ist lebensweltlich so evident, dass man sich weitere Ausführungen scheinbar ersparen kann. Der Lehrplan und die Methoden für diese Art der Mathematik ergäben sich aus den zu erwartenden Anforderungen des Alltags. Genau mit dieser Argumentation wurde die Mathematik als Rechentechnik gemäß der Theorie der „volkstümlichen Bildung“ (Glöckel 1964) begründet, die den Sinn der Volksschule darin sah, die damals 14-jährigen Schulabgänger auf die anstehende Lebensbewältigung in der Lehre vorzubereiten:

> „Für die Volksschule ist der Umfang des mathematischen Wissensgebietes durch die Erfordernisse des Lebens vorgezeichnet und kann daher mit den einfachsten Sätzen der Raumlehre und den sogenannten vier Spezies ausgefüllt werden. Gründliche Einübung des Zahlenrechnens und klare Einsicht bei Anwendung auf die vorkommenden Aufgaben ist dabei wichtiger als eingehende wissenschaftliche Begründung.“ (Schwering 1921, 606)

Die Leitideen sind erkennbar: Die Erfordernisse des Lebens bestimmen Inhalt und Methode („Einübung“) sowie Sinn des Mathematikunterrichts („Anwendung“). Der Satz „Einübung ist wichtiger als Begründung“ legt allerdings das Problem dieser Bildungskonzeption offen: Mathematik wird als formelhafte Handlungsanweisung verstanden – analog etwa den Rechtschreibregeln im Deutschunterricht. Nun gelten aber nach der Rechtschreibreform andere Regeln – und damit ist die Begrenztheit des Modellsbenannt: Wer nur die formalen Operationen (Techniken) kennt, ist bei veränderten Voraussetzungen hilflos; Transfer wird nicht möglich; eigenständiges Denken oder gar Weiterentwickeln des Gelernten werden erschwert; eine Einsicht in die Eigenart der Mathematik wird nicht explizit; wenn die Regeln nicht dauernd geübt werden, werden sie vergessen.

Es ist daher naheliegend, dass die Mathematik nicht ausschließlich durch *Rechentechniken* repräsentiert werden kann – es war schon zu der Zeit, als jene Zeilen veröffentlicht wurden, problematisch, und es ist nach einer Kritik der *Volkstümlichen Bildung*, die die in ihr angelegte Gewöhnung an Unmündigkeit und Unterordnung aufgedeckt hat, ebenfalls nicht mehr möglich.

Dass umgekehrt Rechentechniken notwendig sind, um den Alltag zu bewältigen, ist ebenso naheliegend – aber sie müssten anders begründet werden als durch den Gedanken der Einübung für Alltagszwecke. Sie können dann einen anderen Charakter bekommen – nämlich einen mathematischen. Aber: Was ist das Mathematische?

2.2 Mathematik als Reflexion von Denkregeln

Kants Unterscheidung hatte nicht nur die Trennung der Metaphysik von der Mathematik eingefordert, sondern dabei auch gefordert, dass durch Unterscheidung und Trennung „Wissenschaft(en) ihrer eigenen Art“ entständen. Gerade die Nichtidentität von Mathematik und Metaphysik ermöglichte es beiden Wissenschaften, ihrer je „eigenen Art“ gemäß zu forschen. Die Wissenschaften differenzierten sich weiter aus und konnten, unabhängig voneinander, neue Forschungsbereiche erschließen. Es entwickelt sich die durch Arbeitsteilung bedingte rasante Expansion von Wissenschaftsdisziplinen. Eine Wissenschaft definiert sich nunmehr *nicht* im Nutzen für andere Wissenschaften, sondern entfaltet sich in „ihrer eigenen Art“; diese „eigene Art“ schließt freilich weder den Nutzen für andere Wissenschaften noch für das Handeln aus.

Diese Entlassung der Wissenschaft aus teleologischer Metaphysik hat allerdings einen Preis: Jede Wissenschaft muss von nun an sowohl ihre *Eigenart* wie ihre *Bedeutung* explizit nachweisen (Ladenthin 2011). Die Frage ist nur, *angesichts wessen* muss sie ihre *Bedeutung* erweisen?

- Hat eine Wissenschaft nur deshalb Bedeutung, weil sie technisch notwendig ist?
- Hat eine Wissenschaft nur deshalb Bedeutung, weil sie ökonomisch betrachtet ertragreich ist?
- Hat eine Wissenschaft nur deshalb Bedeutung, weil sie dem Menschen zur Selbsterkenntnis verhilft?

Das sind drei unterschiedliche Kriterien zur Bestimmung der Bedeutung einer Wissenschaft, die zwar im Handeln zusammenhängen mögen, sich aber nicht ohne weitere Reflexion ineinander überführen lassen: Weder lassen sich technische Probleme allein ökonomisch lösen, noch lässt sich die Notwendigkeit von Selbsterkenntnis nur technisch begründen. Die Bedeutung des mathematischen Denkens lässt sich also nicht *nur* oder gar *letztlich* daran bemessen, wie viel an Lösungspotential für physikalische, soziologische oder ökonomische Probleme sie bereitstellt.

Und so ist als These zu formulieren: Die Bedeutung mathematischen Denkens bemisst sich innerhalb der Wissenschaft (innerszientifisch) danach, inwiefern es mathematische Probleme löst. Was aber sind innerszientifische Probleme der Mathematik?

Die Mathematik muss einen Gegenstand ausweisen, der nicht mit dem einer anderen Wissenschaft identisch ist. Gelingt ihr dies, dann hat die Mathematik eine *innerszientifische* Problemgeschichte und eine der Logik ihrer Forschung folgende *Systematik*. (Das schließt die Anwendung nicht aus. Um es mit einem analogen Beispiel zu sagen: Man kann mit den Lehren der Optik Brillen konstruieren; gleichwohl gelten die Gesetze der Optik auch dann, wenn man gar keine Brillen konstruieren will. Man kann sie in sich selbst erforschen.) Das Ziel der *Mathematik als Wissenschaft* läge dann in der Weiterentwicklung der Mathematik. (Man kann dies die *Reine Mathematik* nennen.) Dass sie zudem auch noch nützlich, notwendig oder sinnvoll ist für andere Wissenschaften oder die Bildung des Menschen, sei unbenommen. Es ist aber nicht ihr Identitäts*grund*.

Ihr Identitätsgrund könnte darin liegen, die Probleme, die das Denken mit sich selbst hat, zu erforschen. Die Mathematik erforscht dabei nicht alle Probleme, die das Denken an sich selbst aufspürt (dieses Ziel verfolgen – wie Kant feststellte[3] – die Logik ebenso wie die Hermeneutik oder die Sprachwissenschaft). Sondern die Mathematik erforscht am Denken jene Probleme, die die Forschungsgemeinschaft als *mathematisch* bezeichnet – also z. B. im Hinblick auf Zahlen und Formen. (An dieser Stelle ist der Bildungstheoretiker auf die Expertise der wissenschaftlichen Mathematik angewiesen: Sie allein benennt ihr Proprium.)

Mathematische Forschung erforscht unter Regeln, was ihr selbst am mathematischen Denken ein Problem ist. Sie ist fortschreitende Selbsterkenntnis. Die Menschen lernen, Aspekte ihres Denkens immer mehr und vielleicht besser zu verstehen. Die Eigenheit mathematischen Denkens liegt zuallererst und zentral in der Entfaltung und Weiterentwicklung des Denkens über das Denken – z.B. im Hinblick auf Zahlen und Formen.

Wenn wir nun sagen, dass die Mathematik selbst sich ihre Aufgaben stellt, dann müssen Bildungssysteme auch jene Fähigkeiten in der nachwachsenden Generation fördern, die diese Selbstbetrachtung des Denkens aufnehmen, tradieren und weiterentwickeln. *Das mathematische Denken ist eine Denkbewegung, die durch eine andere nicht ersetzt werden kann und durch eine Nebenentscheidung – metaphysischer oder pragmatischer Art – nicht begrenzt werden darf (und wohl auch nicht kann).* Aus diesem Grund ist Mathematik für die Bildung des Menschen unverzichtbar.

2.3 Mathematik als (pragmatische) Lösung lebensweltlicher Probleme

Es ist versucht worden, die Bildungsbedeutung der Mathematik mit ihrem Beitrag zur Lösung von Lebensproblemen zu begründen. Diese Begründungsweise kann mindestens auf drei Legitimationstraditionen zurückgreifen, auf eine *erkenntnistheoretische*, eine *bildungstheoretische* und eine *mathematiktheoretische* Legitimation.

2.3.1 Die erkenntnistheoretische Perspektive

Betrachtet man die Anwendung von Mathematik unter *erkenntnistheoretischer* Perspektive, so bedeutet diese, Regel und Beispiel, Prinzip und Fall zusammenzubringen. Denkregeln der Mathematik lassen sich auf Beispiele applizieren, wie sich umgekehrt Vorfälle mathematisieren lassen. Die Beispiele können *innerszientifi-*

---

3 Mathematik habe eine andere Wissenschaftsgeschichte als die „Logik, wo die Vernunft es nur mit sich selbst zu tun hat“. (Kant 1983a, 23f (= B XIIIf)).

sch, aber auch *lebensweltlich* sein, eine Unterscheidung, die nichts über die Qualität mathematischer Reflexion aussagt. Dabei lassen sich zwei Richtungen in der Denkbewegung unterscheiden:

1. Es gibt ein mathematisches Verfahren, dem ein Beispiel attribuiert wird, das das Verfahren illustriert. Man hat eine Regel – und sucht einen Fall dazu. Die Anwendung ist dann das *Beispiel einer Regel*. Mit Kant (1983c, 188 f.) kann man in solchen Fällen von Urteilskraft[4], in diesem Falle von „*bestimmender* Urteilskraft" sprechen.

- Die Regel ist bekannt, so dass ihr ein Fall zuzuordnen ist.
- Beispiel und Regel sind (möglichst) deckungsgleich; das Beispiel wurde so ausgewählt, dass es der vorab bekannten Regel entspricht (Prinzip der Exemplarizität).
- Das Beispiel enthält nicht mehr als die Regel(n). Regel und Beispiel sind austauschbar – und nur durch den Abstraktionsgrad different.

2. Davon zu unterscheiden ist es, wenn zuerst eine Erfahrung in der Lebenswelt oder ein wissenschaftliches Problem vorliegt und nun der Versuch unternommen wird, eine mathematische Operation zu finden oder gar zu *er*finden, die dieses Problem oder Teile von ihm löst. In Kants (1983c, 188 f.) Terminologie ist dies ein Vorgang *reflektierender* Urteilskraft. Denn nun stellt sich die Frage, welcher Art die Regel sein könnte, nach der man das lebensweltliche Problem lösen könnte.

Unter dieser Perspektive war der Anwendungsbezug im Mathematikunterrichtet seit je üblich. Er *erweitert* die Betrachtung der Denkregeln (als Proprium der Mathematik) um die erkenntnistheoretisch höchst bedeutsamen Fragen, *ob*, *warum* und *wie weit* sich Natur und menschliches Wirklichkeit mathematisieren lassen und welchen Beitrag die Mathematik zur Lösung von Handlungsherausforderungen des Menschen zu leisten vermag. Damit ist der Anwendungsbezug auch unter bildungstheoretischer und mathematiktheoretischer Betrachtung bedeutsam.

2.3.2 Die bildungstheoretische Perspektive

Bei der *bildungstheoretischen* Tradition einer Begründung des angewandten Mathematikunterrichts lassen sich zwei Argumentationsweisen unterscheiden: Die eine Argumentationsweise, die nach dem *Sinn* der Mathematik im Prozess der Menschwerdung des Menschen fragt, und eine andere, die nach einem bestimmbaren *Nutzen* der Mathematik für (zuweilen vorab bestimmte) lebensweltliche (zumeist berufliche) Zwecke fragt. In der Antike wäre die eingangs beschriebene Mathematikkonzeption der Pythagoreer dem ersten Konzept, die handwerkliche Ausbildung

4 „Wenn der Verstand überhaupt als das Vermögen der Regeln erklärt wird, so ist Urteilskraft das Vermögen unter Regeln zu *subsumieren*, d.i. zu unterscheiden, ob etwas unter einer gegebenen Regel *(casus datae legis)* stehe, oder nicht." (Kant 1983a, 184).

zu Baumeistern oder Schiffbauern dem zweiten Konzept zuzuordnen. Zeitlich näher für das zweite Konzept sind uns heute die Theorien der Philanthropen und Frühaufklärer: Die von Didaktikern antizipierte spätere Lebenswelt der Edukandi (speziell die Arbeitswelt: Erziehung zur „Industriosität", Sextro 1968, 34) liefert in diesen Theorien das Auswahlkriterium für die Inhalte und das Erscheinungsbild der schulischen Inhalte. Eine *Erziehung fürs Leben* war auch die Leitidee der sogenannten „Lebensphilosophie" (Bollnow 1958) und ihrer Ausdifferenzierungen in der Reformpädagogik: Gegen eine als verkopft und akademisiert kritisierte Schulpraxis setzten viele Reformpädagogen das Ideal einer Bildung, die dem (rational nicht zugänglichen) „Leben" (Gräfrath 2011, bes. 1399 f.) oder dem Ganzen der Kultur zu dienen habe[5] – und möglichst zugleich im *Leben* oder wenigstens in *hantierenden Unterrichtsformen* erworben werden müsse. Eine weitere bedeutsame Konzeption, die den Bildungsprozess insgesamt aus einer Orientierung an der Lebenswelt herleiten will, ist der Pragmatismus in der Folge John Deweys (1951): Da sich Wahrheitsprobleme theoretisch nicht entscheiden ließen, will Dewey als geltend das bestimmen, was (lebensweltliche) Probleme zu lösen hilft: *Wahr* sei, was Erfolg habe. *Lernen* sei daher „die Aneignung (…) (von) Fertigkeiten als Mittel zur Erlangung von vital angestrebten Zwecken" (Dewey 1963, 34) und soll als Prozess des Problemlösens organisiert sein, so dass nur dasjenige Wissen als wahr und bildend angesehen wird, das hilft „vitale" Probleme zu lösen. (Bohnsack 2005) All diesen Theorien ist gemeinsam, dass *erst* und *nur* im Hinblick auf das erwartete Handeln ein Lerngegenstand bedeutsam für die Bildung des Menschen sei. Die Theorien setzen dabei voraus, dass die Bildungsplanung das spätere Handlungsfeld der Edukandi antizipieren oder wenigstens prognostizieren, also einen verlässlichen und dauerhaften gesellschaftlichen Konsens darüber herstellen kann, was „vitale" Probleme sind. Es ist allerdings die Frage zu stellen, ob diese Voraussetzung für offene und demokratische Gesellschaften möglich ist. Reicht es für die Mannigfaltigkeit einer sich unvorhersehbar verändernden globalisierten Gesellschaft aus, nur nach dem Nutzen von Wissen für *eine* antizipierte Zukunft zu fragen (Ausbildung) oder wäre es nicht sinnvoll, Zukunft als Aufgabe der nächsten Generation zu verstehen, so dass sie selbst bestimmt, wozu sie das Gelernte verwenden will (Bildung)?

In der derzeitigen didaktischen Diskussion reiht sich das hinter PISA stehende Konzept der Literacy und Kompetenzbildung in diese Tradition des „Lernen(s) für das Leben." (OECD 2001) ein. Mathematik wird dabei als „Werkzeug zur Erschließung und Strukturierung der Phänomene *der* physischen, sozialen und geistigen Welt" verstanden (Artelt u. a. 2001, 19, 25) – so, als sei bekannt, wie diese

---

[5] Auf den S. 75–79 stellt Bast (1996) das berühmte Starenkastenbeispiel Kerschensteiners dar und zeigt, inwiefern die Konstruktion eines lebensweltlichen Alltagsgegenstandes auch mathematische Aufgabenstellungen angeht.

Welt zu jenem Zeitpunkt aussähe, in dem die heutigen Schüler Entscheidungen treffen müssen.

2.3.3 Die mathematiktheoretische Perspektive

Im letzten Teilsatz spricht das Konzept die oben erwähnte dritte, die *mathematiktheoretische* Traditionslinie an, die die Mathematik selbst als *aus dem Bedürfnis praktischer Lebensbewältigung entstanden* deutet und hierin ihren alleinigen Sinn und ihr Proprium sieht. Die Studien zitieren Hans Freudenthal, der davon ausgegangen sei, dass Mathematik als Werkzeug zur Erschließung und Strukturierung der Phänomene „*erfunden* wurde". (Artelt u. a. 2001, 19, 25) Nicht erst die bildungstheoretische Betrachtung frage nach dem Nutzen der (autonomen) Mathematik für das Leben, sondern der Gegenstand selbst (hier die Mathematik) verdanke seine Existenz, Erscheinungsform und Bedeutung dem Umstand, Lösung von Lebensproblemen zu sein. Die Bedeutung der Mathematik wird mit Rekonstruktion ihrer Genese oder ihres Nutzens begründet. Es ist zu fragen, ob sich heutiges mathematisches Wissen insgesamt angemessen erschließen lässt, wenn man Mathematik ausschließlich aus der Perspektive des Nutzens betrachtet.

2.3.4 Ist die Anwendung mathematischen Wissens bildend?

An einem Beispiel soll gezeigt werden, inwiefern es eine bildungstheoretische und mathematiktheoretische Verkürzung ist, wenn die Bildungsbedeutung der Mathematik durch Nachweis ihrer technischen Anwendbarkeit begründet wird. Als Beispiel soll jenes Konzept dienen, das als Ziel des Mathematikunterrichts den Erwerb von „Mathematikkompetenz" („mathematical literacy") *postuliert*. Darunter wird im deutschen Sprachbereich[6]

> „die Fähigkeit einer Person (verstanden), die Rolle zu erkennen und zu verstehen, die Mathematik in der Welt spielt, fundierte Urteile abzugeben und die Mathematik zu nutzen und sich mit ihr in einer Weise zu befassen, die den Anforderungen im Leben dieser Person als konstruktivem, engagiertem und reflektierendem Bürger entspricht" (OECD, 2004, S. 42).

Drei bildungstheoretisch und theoriegeschichtlich implikationsreiche Begriffe fallen auf, jener der „Welt", in deren Zusammenwirken die Bedeutung der Mathematik erkannt werden soll; jener des „Nutzens" und jener der „Person", die – in Nichtübereinstimmung mit der philosophischen und pädagogischen Theoriegeschichte (Böhm) – lediglich als „konstruktiver, engagierter und reflektierender Bürger", nicht aber als „Selbstzweck" (Kant) verstanden wird (vgl. die Beiträge in Sturma 2001). Da sowohl die Begriffe „Welt" wie „Reflexion" alles umfassen können und daher nicht als Auswahlkriterium geeignet sind, präzisieren die Auto-

[6] Der englische Sprachgebrauch verlangt eine eigene Analyse, die ich hier nicht leisten kann. Vgl. zuletzt: http://www.keepeek.com/Digital-Asset-Management/oecd/education/pisa-2012-assessment-and-analytical-framework_9789264190511-en#page25

ren ihr Konzept wie folgt: „PISA stellt bei der Definition der Mathematikkompetenz den Aspekt der Anwendung und Nutzung des mathematischen Wissens in einer Vielzahl von unterschiedlichen Kontexten in den Vordergrund.“[7] *Welt* und *Reflexion* werden also durch den Gedanken der „Anwendung“ („Nutzen“) eingeschränkt. Es geht nicht um *Welt*, sondern um *Anwendung* in der Welt; nicht um *Reflexion*, sondern um *eine* einzige Art der Reflexion: Nämlich die *Nutzung*. Die offenen Bezüge (Welt-Reflexion) werden *funktional* eingeschränkt – wie auch die folgende Bestimmung zeigt: „Für PISA sind daher vor allem Aufgaben relevant, bei denen reale Problemstellungen mit der Mathematik verknüpft werden und die den Aspekt der Anwendung und Nutzung des mathematischen Wissens beinhalten.“[8]

Freilich betont auch diese Bestimmung, dass „Anwendung (…) grundlegendes Wissen über mathematische Terminologien, Fakten und Prozeduren voraus(setzt)“[9], sodass die Mathematikkompetenz („mathematical literacy“) innerszientifisches Wissen und Können der Mathematik nicht *ersetzen* sondern vielmehr ergänzen soll. Und es wird ein eigener Reflexionsschritt betont: „Der Prozess des Interpretierens erfordert von den Jugendlichen, mathematische Ergebnisse in Bezug auf die anfängliche reale Problemstellung zu reflektieren und die *Sinnhaftigkeit der mathematischen Lösung in Bezug auf den realen Kontext zu bewerten*.“[10] Mathematikkompetenz umfasst nicht nur Vollzüge und Begründungen mathematischer Operationen, sondern auch reflektierende sowie bestimmende Urteilskraft anlässlich von Mathematik. Die Beherrschung mathematischer Operationen hat jedoch *lediglich dienende* Funktion.

Damit stellt sich PISA *bildungstheoretisch* in die Tradition funktionalistischer Bildungstheorien (Sophistik, Philanthropie, Industrieerziehung, Lebensphilosophie, Pragmatismus). *Mathematiktheoretisch* stellt sich PISA in die erwähnte Traditionslinie, die Genese und Sinn von Wissen und Können in ihrer Funktionalität für gegebene lebensweltliche Probleme sieht. Nicht der selbstzweckhafte Mensch ist Bezugspunkt der Mathematik, sondern die Funktion eines Teils der Mathematik *in der Welt*. PISA schränkt das, was seit je Mathematik umfasste, ein auf das nur noch Funktionale *an* der Mathematik. Hier findet im Hinblick auf die Fachtradition eine erhebliche Einschränkung bei der Bestimmung dessen statt, was Mathematik ist.

---

7 https://www.bifie.at/system/files/buch/pdf/pisa12_studienbeschreibung_2013-12-03.pdf (S.18) Zugriff am 27.10.2014.

8 https://www.bifie.at/buch/1279/3. Zugriff am 5.2.14.

9 https://www.bifie.at/buch/1279/3. Zugriff am 5.2.14.

10 https://www.bifie.at/system/files/buch/pdf/pisa12_studienbeschreibung_2013-12-03.pdf (S. 19) Zugriff am 27.10.2014.

Das Universitätsfach der Mathematik muss sich also fragen, ob sein Gegenstand überhaupt in dieser Einschränkung noch angemessen in der Schule repräsentiert ist, ob Mathematik überhaupt noch die *Bezugswissenschaft* einer solchen Schulmathematik ist. Zudem ist zu fragen, ob in der neuen, pragmatisch orientierten Schule überhaupt noch jenen Kompetenzen ausgebildet werden, die es einem interessierten Teil der Schülerschaft ermöglicht, zu wissen, was akademische Mathematik kennzeichnet – und zu lernen, was man können muss, um Mathematik zu studieren. Fördert ein solch auf das Funktionale begrenzter Mathematikunterricht überhaupt noch ausreichend Nachwuchs für ein Mathematikstudium? Interessiert er überhaupt für Mathematik?

Was sind nun die *didaktischen* Folgen, wenn man „Werkzeugfunktion" (Artelt u. a. 2001, 25) und Erkenntnissinn gleichsetzt? Ich möchte dies nicht theoretisch, sondern exemplarisch an einer PISA-Aufgabe verdeutlichen. Dabei geht es nicht darum, diese eine spezielle Aufgabe zu beurteilen; sondern es geht darum, am Beispiel (*exemplum*) einer Aufgabe ein grundsätzliches und allgemeines Problem aufzuspüren.

Der Anspruch von PISA ist, dass die Anwendungssituationen dem „Alltagsleben" entnommen worden sein sollen:[11]

> „Die in den Tests von OECD/PISA verwendeten Kontexte werden schwerpunktmäßig authentisch sein. Ein Kontext wird dann als authentisch angesehen, wenn er innerhalb der tatsächlichen Erfahrungen und Praktiken der Teilnehmer in realen Zusammenhängen angesiedelt ist."[12]

Diese Grundidee ist zwar nachträglich modifiziert, nicht aber aufgegebenen worden: Auch im Bericht 2012 wird erneut die „Authentizität" der Aufgabenstellung betont; „Einzelitems", die „einen authentischen außermathematischen Anwendungsbezug" (Prenzel u. a 2013, 132) aufweisen[13]. Hier das (wörtlich dokumentierte) Beispiel[14]:

---

[11] Vgl. http://www.pisa2012.tum.de/ und http://www.mpib-berlin.mpg.de/Pisa/Rahmenkonzeptiondt.pdf; daraus S. 11: „Im Bereich Mathematik kommt es bei der Anwendung von mathematischen Kompetenzen im täglichen Leben mehr auf die Fähigkeit an, quantitativ zu argumentieren und Beziehungen oder Abhängigkeiten zu erfassen, als auf die Fähigkeit, die für Schulbücher typischen Fragen zu beantworten." Vgl. auch S. 57. (Zugriff am 05.02.2014.)

[12] http://www.mpib-berlin.mpg.de/Pisa/Rahmenkonzeptiondt.pdf: S. 58. (Zugriff am 05.02.2014.)

[13] http://www.pisa.tum.de/fileadmin/w00bgi/www/Berichtband_und_Zusammenfassung_2012/PISA_EBook_ISBN3001.pdf. (Zugriff am 23.01.2014).

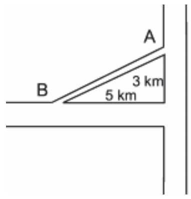
[14] http://pisa.ipn.uni-kiel.de/pisa2006/fr_reload.html?bsp_mathematik.html (Zugriff am 05.02.2014).

Kommentierte Beispielaufgaben Bildungsstandards Mathematik

Zugelassene Hilfsmittel zur Bearbeitung der Aufgaben sind Taschenrechner, Formelsammlung, Geodreieck und Zirkel.

(1) Lohnt sich die Abkürzung?

Aufgabenstellung



Viele Autofahrer benutzen für die Fahrt von A nach B nicht die stark befahrenen Hauptstraßen, sondern einen „Schleichweg“. Äußern Sie sich, ob die Abkürzung eine Zeitersparnis bringt, wenn man auf dem „Schleichweg“ durchschnittlich mit 30 km/h und auf den Hauptstraßen durchschnittlich mit 50 km/h fahren kann.

Beschreibung der Aufgabe und ihrer Zielsetzung

Bei der Bearbeitung der Aufgabe weisen die Schülerinnen und Schüler nach, inwieweit sie insbesondere die allgemeine mathematische Kompetenz

- mathematisch argumentieren (K 1)

im Rahmen der **Leitidee** Messen (L 2) erworben haben.

Die Aufgabe kann durch folgende erweitert werden: „Ab welcher Geschwindigkeit würde sich der Schleichweg lohnen?“

Lösungsskizze mit der Angabe von Leitideen und allgemeinen mathematischen Kompetenzen sowie deren Zuordnung zu Anforderungsbereichen

Lösungen und Hinweise	**Leitidee**	**Anforderungsbereich I**	**II**	**II**
Vergleich der benötigten Zeiten (1) Abkürzung über schmalen Weg Länge s1 ungefähr gleich 6 km Zeit: ca. 12 min (2) Hauptstraße Länge: s2 = 8 km Zeit: ca. 10 min → Die Abkürzung bringt keine Zeitersparnis	L2		K1	

So weit wörtlich die auch im Netz nachzulesende Aufgabe. Inwiefern ist die Aufgabe ein gelungenes Beispiel für die These, dass die Anwendung von Mathematik schon bildend sei?

Für Schülerinnen und Schüler im PISA-Test-Alter ist die gestellte Aufgabe keineswegs eine „lebensweltliche Aufgabe“: Sie selbst fahren nicht Auto. Bei einem Fahrrad oder einem Moped (das maximal 30 km/h fahren wird) funktioniert die Aufgabe nicht, weil die Geschwindigkeitsdifferenzen zu vernachlässigen sind. Diese Aufgabe ist mithin keine „realitätsnahe Situationen im persönlichen, erzieherischen/beruflichen, öffentlichen oder wissenschaftlichen Umfeld“[15].

Die Lösung der Aufgabe setzt zudem etwas voraus, was im Straßenverkehr selten gegeben ist: Gleichförmigkeit. Verkehrsteilnehmer können nicht vor Antritt der Fahrt wissen, ob eine Straße frei oder durch einen Unfall oder Stau versperrt ist. Hinzu kommt der Umstand, dass das Einfädeln am Punkt „B“ vielleicht Probleme machen wird und viel Zeit kostet, denn die Hauptstraße wird im Aufgabentext als „stark befahren“ ausgewiesen. Es wäre also geradezu *lebens*fremd, hier *allein* mit der Mathematik ein verkehrstechnisches Alltagsproblem lösen zu wollen.

Schließlich sagt die Alltagserfahrung, dass Nebenstraßen aus sozialen (und damit moralischen) Gründen verkehrsberuhigt wurden, sei es, um den Geräuschpegel oder die Luftverschmutzung in Wohngebieten zu senken, sei es, um spielende Kinder nicht zu gefährden.[16] So würde man *gegen den Sinn von rational begründeten Verkehrsreglungen handeln*, wenn man allein die mathematisch errechenbare Zeitersparnis als Geltungsgrund für eine lebensweltliche Entscheidung akzeptiere. Es ist auch ein *ethisches* Problem, ob der Verkehrsteilnehmer den „Schleichweg“ (Jargon der Aufgabenstellung) in einem verkehrsberuhigten Gebiet benutzen *darf* – selbst wenn er kürzer ist oder schneller zu befahren: Der Schutz des Lebens spielender Kinder und die Sorge um qualifizierten Wohnraum vieler Menschen ist höher zu bewerten als die Verkürzung der Reisezeit einer Einzelperson (Botta 1997). Es sind demnach ethische Probleme zu bedenken, die mit der Verkehrsführung gestellt sind. Sie lassen sich nicht mathematisieren. Allerdings kann die Mathematik zur Lösung einen Aspekt beitragen. Auf diese Unterscheidung aber kommt es an, wenn die Aufgabe die Bildung des Menschen messen soll.

Die Aufgabe enthält unrealistische Voraussetzungen, so dass sofort erkennbar ist, dass es sich lediglich um eine notdüftig ummäntelte bekannte Mess- oder Rechen-Aufgabe handelt. *Allein bestimmende Urteilskraft ist gefordert*. Die mit dieser Aufgabe getestete Schülerkohorte sollte keinesfalls ein *authentisches Lebensproblem* lösen, sondern eine (ihr bekannte) Regel anwenden.

Nur dann, wenn man diese Aufgabe *aus dem lebensweltlichen Zusammenhang löst* und alles Authentische fortlässt (also genau das, um dessenwillen sie doch eingeführt wurde), stellt sie sich als mathematisches Problem. Die bildungstheoretisch bedeutsame Reflexion nach der Ausdifferenzierung des Problems wird aber weder in der Aufgabenstellung verlangt noch abgetestet. PISA misst hier nicht *Bildung*, sondern anhand einer konstruierten Aufgabe bestimmende Urteilskraft: Denn die

---

15 https://www.bifie.at/buch/1279/3 (Zugriff am 05.02.2014).

16 Wie komplex die Planung von Haupt- und Nebenstraßen ist, und wie genau die Straßenplanung sich mit den genannten Problemen auseinandersetzen muss, ist (speziell für das in der Aufgabe angesprochene Problem) zu erfahren in: Meyer 2013, 106 ff.

Schüler haben ja die Regeln, mit denen sie das Problem lösen können, bereits gelernt. Es muss ihnen nur einfallen, dass sie hier zur Anwendung kommen. So waren aber seit je Textaufgaben konstruiert.

Nun kann man sicher fragen, ob dies alles zufällige Nachlässigkeiten bei einer einzigen Testformulierung sind, ob man durch methodische Nachbesserungen die Testaufgabe retten könnte und ob eine einzelne Aufgabe herhalten kann, ein ganzes Konzept in Frage zu stellen. Dem ist entgegenzuhalten, dass diese Nachlässigkeiten nicht zufällig sind und sich daher anhand eines Beispiels das anstehende Problem eines anwendungsbezogenen Mathematikunterrichts *grundsätzlich* reflektieren lässt. Am Beispiel dieser Aufgabe ist zu reflektieren, dass es grundsätzlich problematisch ist, wenn sich Mathematik *dadurch* als bildungsrelevant legitimiert, dass sie angewandt werden kann, dass sie „Werkzeug“ sei (Artelt u. a. 2001, 25). Ich greife hierzu auf meine einleitende Darstellung über ein bestimmtes Verständnis der Mathematik in der Antike zurück.

Um Lebensprobleme (der „realen Welt“) zu lösen, reicht *allein* die Mathematik nicht aus. Erst wenn das Anwenden *problematisiert* – d. h. in Bezug zu anderen Deutungsmustern gestellt wird – , wird aus einer Anwendungsübung („Training“) eine bildungsrelevante Aufgabe („Reflexion“). Eine angemessene *Antwort* auf die Problemstellung der PISA-Aufgabe müsste demnach lauten:

> Es sei nicht sinnvoll, diese Situation allein mathematisch zu lösen, weil nämlich Informationen fehlen. Die Aufgabe sei durch Erfahrung (wann ist welche Straße wie stark befahren? Warum wurde sie verkehrsberuhigt?) lebenspraktisch besser zu lösen. Zudem müssten die ethischen Implikationen der Stadtplanung bedacht werden.

Laut Lösungsbogen wird diese lebensübliche Antwort aber nicht erwartet. Obwohl das PISA-Design doch eben dies eingefordert hatte; ich zitiere noch einmal: „Der Prozess des Interpretierens erfordert von den Jugendlichen, mathematische Ergebnisse in Bezug auf die anfängliche reale Problemstellung zu reflektieren und die *Sinnhaftigkeit der mathematischen Lösung in Bezug auf den realen Kontext zu bewerten*.“[17] Die Aufgabe prüft das eigene Vorhaben gar nicht ab.

Mathematische Literacy ist nicht von sich aus schon bildungstheoretisch gewandte Mathematik. Sie ist deswegen auch nicht Indikator von mathematischer Kompetenz oder von Bildung. Es ist zu fragen, ob PISA nicht vielmehr einen Teilaspekt der Mathematik verabsolutiert – und Mathematik auf Technik und Bildung auf Anwendungsfähigkeit reduziert. Ein partieller Begriff von Mathematik würde dann normativ verbindlich. PISA schriebe ein – historisch, systematisch und aktuell betrachtet – *verkürztes* Verständnis von Mathematik fest und erzwänge durch staat-

[17] https://www.bifie.at/system/files/buch/pdf/pisa12_studienbeschreibung_2013-12-03.pdf (S. 19) Zugriff am 27.10.2014.

lich sanktionierte Tests eine Implementierung dieses reduzierten Verständnisses von Mathematik in der Didaktik und in den Schulen.

Die Voraussetzung, die *Anwendung* von Mathematik sei mathematische Grundbildung, ist historisch, systematisch und aktuell nicht zu legitimieren. Denn die Anwendung ist nie der Wahrheitsgrund von Mathematik, sondern (erstens) die Folge ihres *immanent* erhobenen Geltungsanspruchs und (zweitens) Folge *erkenntnistheoretischer* Grundsatzentscheidungen. Das Problem der mathematischen Literacy nach PISA ist zudem, dass sie die *Grundfrage* der Bildung nicht expliziert: „Welches Lebensproblem löse ich mit welchem Wissen?“

Literacy sei „das Modell eines realistischen, an der (!) Wirklichkeit orientierten Mathematikunterrichts“ (Artelt u. a. 2001, 25). PISA wolle lehren, wie man „Sachverhalte unter mathematischen Gesichtspunkten *angemessen* (…) beurteilen“ (ebd.) kann. Genau dies kann mit der Mathematik allein nicht gelingen. Es ist eine vorkritische, erkenntnistheoretisch betrachtet problematische Vorstellung, von „der Wirklichkeit“ zu sprechen – wie nicht erst der Konstruktivismus, der Kritische Rationalismus (z. B. Popper), die Hermeneutik (z. B. Dilthey) oder schon die Kantische Erkenntniskritik nicht müde wurden aufzuzeigen. Mathematisches Denken kann nur lehren, wie man rekonstruierte Sachverhalte unter mathematischen Gesichtspunkten *mathematisch* beurteilen kann – und ein bildender Mathematikunterricht muss darauf hinweisen, dass zur angemessenen Beurteilung lebensweltlicher Sachverhalte weitere Diskurse gehören als ausschließlich der mathematische. Ein bildender Mathematikunterricht müsste Recht *und* Grenzen des Mathematischen aufweisen.

Damit lässt sich das Beispiel der zitierten PISA-Aufgabe verallgemeinernd auslegen: Ob, wann und wie weit wir ein lebensweltliches Problem mathematisch lösen, sind Fragen, die der Berechnung der Probleme aus der Lebenswelt *logisch* vorausgehen. Bildungstheoretisch ist diese Beobachtung bedeutsam: Diese Fragen müssten nämlich Gegenstand des Mathematikunterrichts sein, wenn er denn bildend sein soll.

Je mehr Mathematik als Anwendung gelehrt werden *soll* – desto mehr müsste thematisiert werden, *ob, wann und wie weit* das anstehende lebensweltliche Problem mathematisch zu lösen ist. Die Folge wäre leicht zu extrapolieren: Der Mathematikunterricht würde zur (unsystematischen) Lebenskunde über alles und jedes. Das Fächerprinzip wäre vom Mathematikunterricht ausgehend durchbrochen. Und mathematische Kompetenz könnte man nicht mehr messen, weil mathematische Kenntnisse mit lebensweltlichen Problemen amalgamieren würden.

Die Anwendung der Mathematik auf Alltagsprobleme, technische Probleme oder solche anderer Wissenschaften kann nur *ein* Aspekt des Mathematikunterrichts sein. Diesen Aspekt zu bearbeiten ist nur möglich, wenn einerseits die Idee oder Intention des Mathematischen *vorausgesetzt* wird und andererseits der Begriff des

Handelns nicht technisch-funktionalistisch, sondern ethisch ausgelegt wird (Kaulbach 1982). Noch die einfachste aller *Anwendungen* der Mathematik setzt voraus, dass die formalen Operationen mathematisch korrekt sind (so, wie die einfachste technische Anwendung der Physik die Richtigkeit der physikalischen Einsicht voraussetzt). Die *Qualität* einer mathematischen Operation hängt *nicht* von der lebensweltlichen *Bedeutung* des Problems ab – *sondern umgekehrt: Die Qualität der Anwendung hängt von der Qualität der mathematischen Operation ab:* Wer als Verkäufer einem Kunden Wechselgeld richtig und aufrichtig herausgeben will, muss zuallererst richtig rechnen können. Er kann aber auch ohne Beispiel richtig rechnen lernen. Die *logische* Bedingung für die Anwendung von Regeln ist die Kenntnis der Regeln. (Psychologisch betrachtet kann das durchaus anders sein: Wir können aus Gewohnheiten Regeln einhalten oder analog Regeln bilden, ohne das Tertium der Analogate formal artikulieren zu können.)

Die Qualität einer Wissenschaft lässt sich nicht durch die lebensweltliche Bedeutung bestimmen. *Mathematische* Bildung kann daher nicht darin bestehen, Anwendungen zu trainieren und auf Transfer des Trainierten zu hoffen. Vielmehr ist es notwendig, Mathematik stets so zu lehren, dass es in seinem Spezifischen erfasst und erweitert werden kann. *Proprium des Mathematikunterrichts ist nicht die Anwendung von Regeln, sondern die Regelhaftigkeit der Regeln*. Die Anwendung von Mathematik setzt mathematisches Denken voraus. Die Aufnahme und Erweiterung eines Faches ist Grundlage des bildenden Fachunterrichts – nicht das Training von Teilfähigkeiten, *deren Zusammenhang mit dem Ganzen nicht erkennbar d. h. explizit reflexiv gemacht wird.*

Zusammengefasst kann festgestellt werden: Dem am Beispiel reflektierten Konzept liegen zwei Verkürzungen zugrunde. Einmal verkürzt es die Idee der Bildung auf die Idee einer Ausbildung; zum anderen verkürzt es das Proprium der Mathematik auf eine allein auf Anwendung zielende (mithin technische) (Hilfs-)Wissenschaft.

2.4 Epistemische Reflexion: Mathematik als Gegenstand

Es war eingangs darauf hingewiesen worden, dass die Mathematik (schon seit der Antike) nicht mehr als Letztbegründung für lebensweltliches Handeln allgemein anerkannt ist, sondern selbst der Begründung bedarf. Damit steht die mathematische Erkenntnis als eine Erkenntnis*art* neben anderen Erkenntnisarten, unterlägen sie nun naturwissenschaftlichen oder kulturwissenschaftlichen Interessen. Mathematische Erkenntnis folgt ihrer je eigenen Verfasstheit (Fragen und Methoden), aber sie kann mit dieser eigenen Verfasstheit – wie übrigens alle anderen Wissenschaften auch – ihre Bedeutsamkeit *nicht* begründen. Die Chemie kann chemisch nicht erklären, warum sie bedeutsam ist; die Linguistik kann mit linguistischen Methoden nicht begründen, warum sie bedeutsam ist usw. Es muss also zu allen Wissenschaften ein eigener Diskurs hinzukommen, der begründet, warum man die in Frage stehende Wissenschaft betreiben (erhalten, ausbauen und lehren) soll.

Aber wie kann die Mathematik ihre Bedeutsamkeit begründen? Zuerst einmal ist zu bestimmen, *wofür* die Bedeutung der Mathematik bestimmt werden *soll*. Wird sie daraufhin geprüft, ob sie für die Technik bedeutsam ist oder für die soziale Kommunikation eines Landes oder für die Bildung des Menschen?

Man wird zu je unterschiedlichen Aussagen über die Bedeutung der Mathematik kommen. Aussagen, die zudem nicht miteinander verrechenbar sind. Die technische Bedeutung der Mathematik – etwa in den Ingenieurwissenschaften – muss keineswegs ihrer sozialen Bedeutung entsprechen: Obwohl Technik heute ohne Mathematik nicht möglich ist, ist ihr soziales Ansehen (Akzeptanz) diffus.[18]

- Zudem muss zuvor – logisch „früher" also – bestimmt werden: Was umfasst die Mathematik? Wo etwa liegt die Differenz zur philosophischen Logik?
- Davor liegt logisch die Frage: Was ist Mathematik? Nur das, was sich selbst Mathematik nennt – oder gibt es einen Wesenskern, den man bestimmen kann?
- Und logisch davor liegt die Frage: Wie ist Mathematik überhaupt möglich – anthropologisch, historisch, sozial – oder aber erkenntnistheoretisch? Bildet Mathematik Wirklichkeit ab oder konstruiert sie sie und ihre eigene Wirklichkeit?

Die Mathematik ist also auf Selbstvergewisserung angewiesen. Reflektiert werden müssen (1) das Selbstverständnis, (2) das System und (3) die Bedingung der Möglichkeit der Mathematik. Diese Reflexion über Mathematik gehört *in* den bildenden Mathematik*unterricht* – weil der Gegenstand, das Mathematische, *sich selbst* sonst gar nicht begreift. (So, wie man über Geschichte nachdenkt, wenn man in der Geschichtsstunde historische Ereignisse bespricht: Wonach fragen wir? Was ist das Besondere unserer Frage? Wozu wollen wir das wissen? Wie bekommen wir heraus, was wir wissen wollen? Wie ist historisches Wissen möglich?) Das Mathematische darf – wenn es denn bildend sein soll – nicht nur vollzogen, vielmehr muss der Vollzug explizit betrachtet werden. Nur dann, wenn die Schüler das Selbstverständnis, das System und die Möglichkeitsbegründung der Mathematik zu reflektieren gelernt haben, können sie begründet die Mathematik vor sich und anderen vertreten.

Diese Reflexion über das Fach kann nun weder erst nach einem Studium der Mathematik stattfinden, noch kann es allem Lernen vorausgehen: Reflexion über das Fach ist vielmehr bei allen mathematischen Prozessen involviert. Sie muss allen Unterricht begleiten. Das Nachdenken *über* Mathematik ergibt sich aus Anlass einfacher oder allererster mathematischer Operationen: Die Erfahrung, dass Grundschüler vom Zählen zum Rechnen kommen, wäre nicht nur zu beobachten – son-

---

[18] Berühmt ist das Buch von Dieter Schwanitz (1999), das die Naturwissenschaften und die Mathematik „übersehen" hatte.

dern an- und auszusprechen. Warum muss man beim Spiel mit zwei Würfeln die Punkte der beiden Würfel nicht einzeln zusammenzählen, sondern kann sie als Zahlen gedanklich addieren? Das Erstaunen über die eigenen Fähigkeiten wäre vielleicht auch eine Motivation für jene, die von sich behaupten, sie wären für Mathematik nicht begabt: Sie könnten, anlässlich dieser einfachen Selbstbeobachtung, das Gegenteil erfahren. Sie sind schon längst von dem befangen, was sie angeblich nicht können. Sich selbst hinter dem zu erkennen, was man zu sein glaubte, war schon immer eine Aufgabe der Bildung.

3 Was heißt mathematische Bildung?

Gehört Mathematik zur Bildung? Eine pragmatische Beantwortung dieser Frage ist ebenso wenig ausreichend wie die Reflexion über die Bedingungen der Möglichkeit von Mathematik allein.

Es war versucht worden zu zeigen, dass nicht nur jeder Mensch grundsätzlich mathematisch denken *kann* – sondern es immer schon *tut*, wenn er Sprache gebraucht. (Jeder Plural setzt zählen und addieren voraus.) Wenn man Bildung allgemein bestimmt als Prozess der gültigen Selbsterkenntnis und Selbstbestimmung im Gang durch ein Wissen außer sich selbst – dann gehört Mathematik zum Menschen. Denn Mathematik ist die Reflexion auf das eigene Denken im Hinblick auf Zahlen und Figuren. Dieser Denkanlass ist mit der Sprache jedem Menschen gegeben – und jeder Mensch kann sich zu seinem eigenen Sprechen in Distanz setzen, es also von außen betrachten. Dieses eigene Denken zu erkennen ist ein Akt der Selbsterkenntnis. Damit aber ist jedem Menschen die Aufgabe gestellt, diese seine Fähigkeit *angemessen* zu kultivieren. *Das eigene Denken kennen zu lernen, ist eine Aufgabe, die mit dem Menschsein selbst aufgegeben ist*. Es ist der Inhalt jeder Bildung. Und Mathematik ist die regelhafte Analyse und Weiterentwicklung regelhaften Denkens im Hinblick auf Zahlen und Figuren. Ein Mensch, der nicht Rechenschaft über seine Denkmöglichkeiten ablegt, schöpft nicht das aus, was den Menschen zum Menschen macht. Das ist die Begründung der bildenden Bedeutung der Mathematik.

Aber Menschen müssen nicht nur lernen – sie müssen auch handeln. Handeln setzt die Fähigkeit zu bestimmender und reflektierender Urteilskraft voraus: Angesichts von durch Wertentscheidung bestimmten Lebensaufgaben ist zu beurteilen, welche der möglichen Wissenssysteme – einzeln oder in Kombination – zur Bewältigung dieser Aufgaben so heranzuziehen sind, dass die Lösungen sachlich richtig und moralisch zu verantworten sind. Der Handelnde muss den Bezug von einer Wissensart zu einer anderen Wissensart herstellen können, um zu entscheiden, auf *welches* Wissen er in *welchem* Zusammenhang *wie* und *inwieweit* handlungsleitend zurückgreift. Die gewählte Handlung muss *sachlich* angemessen sein, *sittlich* zu verantworten und für den Einzelnen einen *Sinn* ergeben. Der Sinn einer Handlung liegt dabei nicht einfach in ihrem Zweck (ihrer Funktion) begriffen, da sich alle Handlungszwecke (Funktionen) wiederum auf ihre Zweckmäßigkeit (Funktionalität) befragen lassen. Der philosophische Sprachgebrauch nimmt, um hier keinen Regress ins Unendliche auszulösen, eine Unterscheidung vor: Zwecke sind zu etwas *gut* – dieses Gute aber ist selbstzweckhaft (Aristoteles 1972, 55 f.) und wird von der *praktischen Vernunft* reflektiert: „Die von der praktischen Vernunft entworfene Handlungswelt gibt den Orientierungsrahmen und die Maßstäbe für das Erkennen jeweils einzelner Zwecke ab, zu deren Verwirklichung sich der Handelnde entscheidet.“ (Kaulbach 1982, 75) Im Deutschen hat sich für dieses selbstzweckhafte Gut, den Zweck der Zwecke, u. a. das Wort *Sinn* eingebürgert (Darlegung in Ladenthin 2001). Die Interferenz von Sachlichkeit, Sittlichkeit und Sinnhaftigkeit zu thematisieren ist die Bildungsaufgabe. Nicht nur zweckmäßig, sondern in der weiteren Reflexion und Abwägung möglicher Zwecke *sinnvoll* zu handeln, ist die logisch letztmögliche Bestimmung des Menschen. Alle anderen Bestimmungen (und Zwecke) sind dieser letzten Bestimmung untergeordnet. Der Zweck (*Sinn*) des Menschen ist es, sich selbst Zwecke setzen zu können.

So sehr bildungstheoretisch die Fokussierung des Mathematikunterrichts auf volkstümliche Rechenübungen oder aber den Funktionalismus einer mathematischen Literacy als bildungstheoretische und mathematiktheoretische Verkürzung zu bewerten ist, so sehr wäre daher andererseits auch eine Begrenzung des Mathematikunterrichts auf innerszientifische Erkundung aus bildungstheoretischer Sicht als Verkürzung zu bewerten.

Es geht in Bildungsprozessen nicht allein um die Anwendung von Mathematik, sondern darum, mathematisches Denken in Abgrenzung und Bezug zu anderem Denken zu stellen – und zwar nicht nur zum Alltag oder zur Lebenswelt, zu den Techniken und den Naturwissenschaften, sondern auch zur Lebenshermeneutik, zur Ethik und schließlich zu Fragen des eigenen Lebenssinns. Es geht im Hinblick auf die Mathematik darum, zu prüfen, wann, wie, wie weit und wozu mit welcher Mathematik die Aufgabe bewältigt werden kann, *sinnvoll* zu handeln, d.h. das Leben *gelingen* zu lassen.

Sinn ist nicht identisch mit Funktion (Ladenthin 2001); und *Gelingen lassen* ist nicht identisch mit Erfolg haben (Ladenthin 2007): An dieser Stelle unterscheiden sich die tradierten Bildungstheorien (wie etwa die von Humboldt (1903), Herbart (Rekus 1993) bis hin zu Adorno 1970[19]) von funktionalen Bildungstheorien wie etwa der PISA-Initiative. Sie reduziert Sinn auf Funktion und Gelingen auf Erfolg.

---

19 „Erziehung wäre ohnmächtig und ideologisch, wenn sie (…) die Menschen nicht darauf vorbereitete, in der Welt sich zurechtzufinden. Sie ist aber genauso fragwürdig, wenn sie dabei stehenbleibt und nichts anderes als ‚well adjusted people‘ produziert, wodurch sich der bestehende Zustand, und zwar gerade in seinem Schlechten, erst recht durch-

Fasst man die vorstehenden Überlegungen zusammen, so lassen sich drei Fragen formulieren, die helfen, die Bildungsbedeutung der Mathematik zu erschließen:

Mathematische Bildung umfasst die Fähigkeit,

1. mathematisches Erkennen technisch, pragmatisch und theoretisch durchführen und weiterführen zu können;
2. die Eigenheit der Mathematik, ihre Systematik und ihre erkenntnistheoretischen Voraussetzungen reflektieren zu können;
3. die systematische Stellung der Mathematik unter der Perspektive des je gelingenden Lebens reflektieren zu können.

Operationalisiert für den Unterrichtsgebrauch ergeben sich so drei erschließende Fragen für alle Themen im Mathematikunterricht:

1. Hat das anstehende Unterrichtsthema Bedeutung für die innerszientifische (technische, pragmatische und theoretische) Entfaltung der Mathematik? (Proprium)
2. Welche Einsicht in die mathematikphilosophischen (grundlegenden, systematischen und erkenntnistheoretischen) Implikationen des anstehenden Themas kann explizit reflektiert werden? (Selbstreflexivität)
3. Welche pragmatischen, ethischen und/oder erkenntnistheoretischen Fragen (Möglichkeiten oder Konsequenzen) stellen sich bei der Korrelierung des anstehenden Themas mit anderen Wissensgebieten? (menschliche Gesamtpraxis)

Diese drei Fragen dimensionieren den Mathematikunterricht, wenn er denn bildend sein soll. Sie haben regulative Funktion, d.h. müssen nicht in jeder Stunde thematisiert werden, sondern ordnen das gesamte Feld für den bildenden Mathematikunterricht. Sie müssen und können altersgemäß appliziert werden. Dieses sind – das ist zu bedenken – *bildungstheoretische* Grundfragen. Welche *didaktischen* (Lehrplan) und *methodischen* Konsequenzen sich daraus ergeben, wurde noch gar nicht thematisiert.

Literatur

Adorno, T. W. (1970). Erziehung – wozu? In T.W. Adorno, *Erziehung zur Mündigkeit. Vorträge und Gespräche mit Hellmut Becker 1959-1969*, Hg. v. Gerd Kadelbach (S. 105–119). Frankfurt a. M.: Suhrkamp Verlag.

Aristoteles (1972): *Die Nikomachsche Ethik*. Übers. u. hg. V. Olof Gogon. München: Deutscher Taschenbuch Verlag.

Artelt, C.; Baumert, J.; Klieme, E.; Neubrand, M.; Prenzel, M.; Schiefele, U.; Schneider, W.; Schümer, G.; Stanat, P.; Tillmann, K.-J.; Weiß, M. (Hrsg.) (2001). *PISA 2000.*

setzt. Insofern liegt im Begriff der Erziehung zu Bewußtsein und Rationalität von vornherein eine Doppelschlächtigkeit. Vielleicht ist sie im Bestehenden nicht zu bewältigen; jedenfalls dürfen wir ihr nicht ausweichen.“ (109)

Zusammenfassung zentraler Befunde. Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung.
Bast, R. (1996). *Kulturkritik und Erziehung. Anspruch und Grenzen der Reformpädagogik*. Dortmund: Projekt Verlag.
Benner, D. & Brüggen, F. (2004). Bildsamkeit/Bildung. In D. Benner & J. Oelkers (Hrsg.), *Historisches Wörterbuch der Pädagogik* (S. 174–215). Weinheim/Basel: Beltz.
Böhm, W. (1997). Die Person als Maß der Erziehung. In W. Böhm, *Entwürfe zu einer Pädagogik der Person. Gesammelte Aufsätze* (S. 113–134). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.
Bohnsack, F. (2005). *John Dewey. Ein pädagogisches Portrait*. Weinheim: Beltz Verlag.
Bollnow, O. F. (1958). *Die Lebensphilosophie*. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer.
Botta, M. (1997). *Ethik des Bauens*. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser.
Capelle, W. (Hrsg.) (1968). *Die Vorsokratiker*. Stuttgart: Kröner Verlag.
Delahaye, J.-P. (2006). Sudoku oder die einsamen Zahlen. *Spektrum der Wissenschaft*, 3 , S. 100-106.
Dewey, J. (1951). *Wie wir denken. Eine Untersuchung über die Beziehung des reflektiven Denkens zum Prozess der Erziehung*. Zürich: Morgarten Verlag Conzett & Huber.
Dewey, J. (1963). Erfahrung und Erziehung. In W. Correll (Hrsg.), *Reform des Erziehungsdenkens. Eine Einführung in John Deweys Gedanken zur Schulreform* (S. 27–99). Weinheim: Julius Beltz Verlag.
Enzensberger, H. M. (1997). *Der Zahlenteufel: Ein Kopfkissenbuch für alle, die Angst vor der Mathematik haben*. Mit Bildern von R. S. Berner, München, Wien: Hanser.
Gethmann, C. F. (2010). Letztbegründung. In J. Mittelstraß, (Hrsg.) *Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie*, Bd. 4 (2. Auflage) (S. 549–552). Stuttgart: Metzler Verlag.
Glöckel, H. (1964). *Volkstümliche Bildung? Versuch einer Klärung. Ein Beitrag zum Selbstverständnis der Volksschule*. Weinheim: Verlag Julius Beltz.
Gräfrath, B. (2011). Leben: II metaphorisch – naturphilosophisch – praktisch. In P. Kolmer & A. G. Wildfeuer (Hrsg.), *Neues Handbuch philosophischer Grundbegriffe*, Bd. 2 (S. 1394-1404). Freiburg/München: Verlag Karl Alber.
Humboldt, W. von (1903). Theorie der Bildung des Menschen. Bruchstück. In W. v. Humboldt, *Gesammelte Schriften*. Hg. v. der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften. Erste Abteilung: *Wilhelm von Humboldts Werke* hg. v. Albert Leitzmann. Bd. I. (S. 282–287.) Berlin: B. Behr's Verlag.
Kant, I. (1983a). Kritik der reinen Vernunft. In I. Kant, *Werke in zehn Bänden*. Hg. v. W. Weischedel, Bd. III. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.
Kant, I. (1983b). Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft. In I. Kant, *Werke in zehn Bänden* (S. 7–135). Hg. v. Wilhelm Weischedel. Bd. VIII. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.
Kant, I. (1983c). Die Kritik der Urteilskraft. In I. Kant. *Werke in zehn Bänden* (S. 235–620). Hg. v. Wilhelm Weischedel. Bd. VIII. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.
Kaube, J. (o. J.). *Zwei mal drei macht vier, widewidewitt und drei macht neune ...Eine Schwerpunktgruppe aus neun Fellows geistes- und sozialwissenschaftlicher Provenienz widmet sich in diesem Jahr der Welt der sozialen Zahlen*. http://www.wiko-berlin.de/no-cache/wikothek/koepfe-und-ideen/?tx_ki_ki[article]=3&tx_ki_ki[issue]=17&tx_ki_ki[action]=show&tx_ki_ki[controller]=Article&cHash=9ff7fb542f2e70de59756075d94d75e5 [letzter Zugriff: 27.09.2015]

Kaulbach, F. (1982). *Einführung in die Philosophie des Handelns*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.
Kehlmann, D. (2005). *Die Vermessung der Welt*. Reinbek: Rowohlt Verlag.
Krämer, H. & Ladenthin, V. (2009). Die Vielfalt der Fächer und die Einheit der Bildung. In G. Mertens, U. Frost, W. Böhm & V. Ladenthin (Hrsg.), *Handbuch der Erziehungswissenschaft*, Bd. II (S. 313–321). Paderborn, München, Wien, Zürich: Verlag Ferdinand Schöningh.
Krämer, W. (2008). *So lügt man mit Statistik*. München: Piper Verlag.
Ladenthin, V. (2001). Gut-gerecht-sinnhaft. Zur Struktur moralischer Urteile und den Möglichkeiten ihrer Lernbarkeit. *Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Pädagogik*, 77, S. 25-50.
Ladenthin, V. (Hrsg.) (2007). *Philosophie der Bildung*. Bonn: Denkmal Verlag.
Ladenthin, V. (2011). Wissenschaft und Bildung. In L. Honnefelder & G. Rager (Hrsg.), *Bildung durch Wissenschaft?* (S.101–120). Freiburg, München: Verlag Karl Alber.
Meyer, J. (2013). *Nachhaltige Stadt- und Verkehrsplanung: Grundlagen und Lösungsvorschläge*. Wiesbaden: Vieweg + Teubner Verlag / Springer Fachmedien.
Michels, R. (1928). *Sittlichkeit in Ziffern?* München, Leipzig: Duncker & Humblot.
OECD (Hrsg.) (2001). *Lernen für das Leben. Erste Ergebnisse der internationalen Schulleistungsstudie Pisa 2000*. Paris: OECD.
Prenzel, M., Sälzer, C., Klieme, E. & Köller, O. (Hrsg.) (2013). *PISA 2012. Fortschritte und Herausforderungen in Deutschland*. Münster, New York, München, Berlin: Waxmann.
Rekus, J. (1993). *Bildung und Moral. Zur Einheit von Rationalität und Moralität in Schule und Unterricht*. Weinheim, München: Juventa Verlag.
Rousseau, J.-J. (1971). Abhandlung über die Frage: Hat der Wiederaufstieg der Wissenschaften und Künste zur Läuterung der Sitten beigetragen? In J.-J. Rousseau, *Schriften zur Kulturkritik*, übers. und hrsg. von K. Weigand. (5. Aufl., S. 3–59). Hamburg: Felix Meiner Verlag.
Schadewaldt, W. (1978). *Die Anfänge der Philosophie bei den Griechen. Die Vorsokratiker und ihre Voraussetzungen*. Tübinger Vorlesungen, Bd. 1. Frankfurt a. M.: Suhrkamp Verlag.
Schwanitz, D. (1999). *Bildung. Alles, was man wissen muss*. Frankfurt a. M.: Eichborn Verlag.
Schwering, K. (1921). Mathematik. In O. Willmann & E. M. Roloff (Hrsg.), *Lexikon der Pädagogik*, Bd. III (S. 600–612). Freiburg: Herder & Co. Verlagsbuchhandlung.
Sextro, H. P. (1968). *Über die Bildung der Jugend zur Industrie. Ein Fragment.* Göttingen 1785. Unveränderter Nachdruck, hg. v. H.-J. Heydorn und G. Koneffke, Frankfurt a. M.: Sauer und Auvermann.
Sturma, D. (Hrsg.) (2001). *Person. Philosophiegeschichte – Theoretische Philosophie – Praktische Philosophie*. Paderborn: Mentis Verlag GmbH.
Winzen, M. (Hrsg.) (2011). *Kopf oder Zahl. Die Quantifizierung von allem im 19. Jahrhundert*. Oberhausen: Athena Verlag.

Ich danke dem Kollegen Thomas Jahnke, Potsdam, für zahlreiche (nicht nur bibliographische) Hinweise.

Anschrift des Verfassers

Prof. Dr. Volker Ladenthin
Rheinische Friedrich-Wilhelms Universität Bonn
Bildungswissenschaften / Historische und Systematische Erziehungswissenschaft
Poppelsdorfer Allee 15
53115 Bonn
v.ladenthin@uni-bonn.de

Eingang Manuskript: 11.05.2014
Eingang überarbeitetes Manuskript: 19.03.2015
Online verfügbar: 12.02.2016