Um- und Neudeuten – Prozesse beim Deuten von Darstellungen

ANNA BREUNIG, KÖLN & MICHAEL MEYER, KÖLN

***Zusammenfassung**: Wenn Schüler*innen mathematische Aufgaben bearbeiten, kann ein Darstellungswechsel z. B. dazu verhelfen, dass sie neue Bearbeitungswege erkennen. Mithilfe der Abduktion wird untersucht, inwiefern Lernende bereits entwickelte Bearbeitungsideen (mit oder ohne Änderungen) auf andere Darstellungen übertragen können. Ausgehend von Situationen, in denen ein Wechsel der Darstellung nicht wie erwartet zu gelingen scheint, werden hierfür denkbare Erkenntnisprozesse beim Darstellungswechsel rekonstruiert. Im Fokus steht die Herausarbeitung der Prozesse des Umdeutens und Neudeutens beim Darstellungswechsel.*

***Abstract:** When students are asked to work on mathematical tasks, a change of representation e. g. can help them to perceive new solution processes. The abduction schema is used to investigate how learners can transfer their developed ideas to alternative representations, either with or without changes. Based on situations in which a change of representation does not initially appear to work as expected, conceivable processes involved in changing representation are reconstructed. The focus is on examining the processes of re-interpretation and new-interpretation in changing representations.*

1. Einleitung

> We teach mathematics most effectively when we understand the effects on students' learning of external representations and structured mathematical activities. (Goldin & Shteingold, 2001, S. 19)

Zu Beginn sei eine Interviewsequenz zum Umgang mit Darstellungen, bei der Bearbeitung von Aufgabe A, näher betrachtet.

> AUFGABE A
>
> Warum ist es beim Plusrechnen egal, ob ich 3 + 5 oder 5 + 3 rechne? Ist das bei anderen Zahlen auch egal? – Begründe.

Bei der Bearbeitung nutzt die Schülerin Peggy gelbe und blaue Holzwürfel (enaktive Darstellungsform) und es entwickelt sich die der Tabelle 1 zu entnehmende Interaktion.[1] Peggy verwendet drei blaue und fünf gelbe Holzwürfel, um die (symbolisch) gegebene Aufgabe damit darzustellen (enaktive Darstellungsform). Nachdem sie mit der einen Hand die blauen und mit der anderen Hand die gelben Würfel umschließt, schiebt sie alle Würfel farbig gemischt zusammen. Anschließend trennt sie die Würfel wieder nach Farbe räumlich voneinander und nimmt erneut alle blauen in die eine und alle gelben Würfel in die andere Hand. Währenddessen hat sie die Seiten, auf denen die farbigen Würfel liegen, getauscht. Die Abfolge der Materialhandlungen ist nachgestellt in Abbildung 1 zu erkennen.

1.1 Peggy	ja okay, dann mache ich das gerade mit den Steinen. *(nimmt sich 3 blaue und 5 gelbe Würfel aus der Materialkiste)* ich nehme mir jetzt <u>drei</u> von den blauen *(hält sie in der rechten Hand)* .. und <u>fünf</u> von den gelben *(legt sie einzeln auf den Tisch, s. Abb. 1a, 6 sec)* so. *(umschließt je die Steine einer Farbe mit einer Hand, rechts blau, links gelb, hebt sie je kurz an)* ich habe die <u>drei</u> und die <u>fünf</u>.
1.2 - I	mhm
1.3 Peggy	und wenn ich die <u>zusammen</u> lege- *(schiebt die Würfel zusammen, s. Abb. 1b)* … sind es- ist es- wird es ja dasselbe rauskommen. wenn ich- *(sortiert die Würfel nach Farbe, indem sie die blauen Würfel nach links legt, s. Abb. 1c, 2 sec)* die <u>blauen</u> plus die <u>gelben</u> Steinchen, wird ja die <u>acht</u> *(schiebt beide Mengen etwas zur Seite)* rauskommen, weil es-, die <u>Menge</u> verändert sich ja dadurch nicht.
1.4 - I	mhm
1.5 Peggy	und wenn ich die <u>gelben</u> *(hebt die blauen an, schiebt die gelben nach links)* plus die blauen Steinchen (*legt sie rechts neben die gelben; schiebt sie dann leicht zusammen, s. Abb. 1a)* wird ja auch- auch acht entstehen. *(hält die Würfel wieder farblich getrennt unter den Händen, nun mit getauschten Farben im Vergleich zur Situation zuvor)* .. die Menge wird ja nicht vertauscht.

Tab. 1: Peggys Lösungsansatz mittels der „enaktiven Karte"[2]

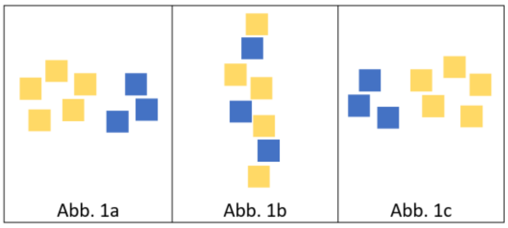

Abb. 1: Nachgestellte Materialhandlung von Peggy

Peggy wählt also vermutlich für die verschiedenen Summanden der Terme aus der Aufgabenstellung je Würfel in einer anderen Farbe. Die Operation der Addition kann als Zusammenschieben der Würfel zu einer Gesamtmenge, als Grundvorstellung des Vereinigens, verstanden werden. In dem Vorgehen, dass die Steine danach wieder farblich getrennt werden, aber in umgekehrter Anordnung (Wechsel, welche Farbe links bzw. rechts vor ihr liegt), lässt sich das Vertauschen der Summanden erkennen. Insgesamt bleiben es gleich viele Steine („die Menge wird ja nicht vertauscht“ T1.5) – wodurch das gleiche Ergebnis verdeutlicht sein könnte.

Abb. 2: Karte mit ikonischem Bearbeitungsansatz

Im weiteren Interviewverlauf erhält Peggy eine ikonische Darstellung (s. Abb. 2) und soll mit dieser erneut die Aufgabe bearbeiten. Aus fachlicher Perspektive könnte hier eine analoge Bearbeitungsidee naheliegen: Pro Reihe der verschiedenfarbigen Kästchen könnten die Summanden drei und fünf (obere Reihe) sowie fünf und drei (untere Reihe) erkannt werden. Diese tauschen in der unteren im Vergleich zur oberen Reihe die Seiten in ihrer Anordnung und werden je Reihe addiert, indem man sie zusammen als Reihe betrachtet. Entsprechend des vorherigen Vorgehens (Würfelmengen farblich von einer zur anderen Seite zu wechseln) ließe sich erwarten, dass Peggy ihre vorher generierte Idee auf die neue Darstellung überträgt. Peggy scheint ihre Bearbeitungsidee hingegen *nicht* auf die ikonische Darstellung zu übertragen, denn sie äußert dazu: „man nimmt, *(deutet auf die hellen, dann auf die dunklen Kästchen)* die-, die helleren Zahlen plus oder die dunkleren Zahlen plus“ (T2.1). Sie entscheidet sich für die helleren und somit für die Aufgabe „drei plus drei“ (T2.1). Die von Peggy zuvor selbst eingebrachte Idee, die Summanden als Mengen aus verschiedenfarbigen Elementen darzustellen (gelbe und blaue Steine), wird in der Auseinandersetzung mit der „ikonischen Karte“ (Abb. 2) also explizit nicht mehr genutzt. Auch wenn ein vergleichbares Vorgehen mit den hell- und dunkelgrauen Kästchen fachlich gesehen nahezu identisch möglich wäre. Mit dem Wechsel der Darstellung scheint hier eine Änderung der Bearbeitungsidee einherzugehen.

Ausgehend von solchen Phänomenen, in denen beim Wechsel von Darstellungen innerhalb eines Bearbeitungsprozesses eine aus fachlicher Sicht gesehen naheliegende Übertragung einer beobachtbaren Bearbeitungsidee[3] nicht realisiert wird, werden Erkenntnisprozesse im Darstellungswechsel betrachtet. In der mathematikdidaktischen Diskussion wird dem Wechsel und der Vernetzung von Darstellungen als Lernprinzip und Hilfsmittel im Mathematikunterricht eine große Bedeutung beigemessen; nicht zuletzt aufgrund der Abstraktheit des Faches Mathematik und der darin enthaltenen Inhalte und Begriffe (s. u. a. Duval, 2006; Meyer & Tiedemann, 2017; Prediger & Wessel, 2012; Shvarts & Chumachenko, 2011). Auch das Einstiegszitat von Goldin und Shteingold (2001) weist auf die hohe Relevanz des Einsatzes von Darstellungen für effektives (wenn auch nicht zwangsläufig das effektivste) Lernen hin. Gleichzeitig muss beim Einsatz von Darstellungen beachtet werden, dass dieser mit Anforderungen seitens der Lernenden verbunden ist, da beispielsweise die zu nutzenden mathematischen Strukturen zunächst darin erkannt werden müssen. Dies gilt insbesondere, da Darstellungen (wie auch Materialien) verschieden deutbar und auch nutzbar sind (u. a. Lorenz, 1993; Meyer & Tiedemann, 2017; Pape & Tchoshanov, 2001; Schipper, 2003; Shvarts & Chumachenko, 2011). Neben der mathematischen Deutung der (vorgegebenen) Darstellung selbst ist auch die Beziehung der Darstellung zur jeweiligen Situation (z. B. mathematisches Thema/Begriff, Aufgabenstellung, mathematisches Argument o. Ä.) zu erkennen, was ebenfalls als komplex anzusehen ist (s. u. a. Prediger & Wessel, 2012; Schipper, 2003; Shvarts & Chumachenko, 2011; Voigt, 1993). Mit dem Wechsel der Darstellung gehen also komplexe Prozesse einher.

In der vorliegenden Studie wurde der Einsatz von verschiedenen Darstellungen als möglicher Unterstützungsansatz für die Bearbeitung von Aufgaben gewählt. Mit Blick auf die beschriebene Komplexität im Umgang mit Darstellungen ergibt sich der Fokus, im Wechsel von der einen zur anderen Darstellung(sform) die Bearbeitungsprozesse näher zu betrachten. Dafür werden die Reaktionen der Lernenden rekonstruiert und hinsichtlich möglicher unterscheidbarer Erkenntnisprozesse im Umgang mit verschiedenen Darstellungen und deren Einfluss auf den bisherigen Arbeitsprozess analysiert. Dazu wird im Theorieteil die Unterscheidung von Darstellungsformen und der Einsatz von Darstellungen samt deren Wechsel und Vernetzung theoretisch diskutiert (s. u. a. Bruner, 1973; Meyer & Tiedemann, 2017; Prediger & Wessel, 2012). Zur Rekonstruktion und möglichen Unterscheidung der Bearbeitungsprozesse wird die Abduktion als Schlussform sowie das Schema der Abduktion verwendet (s. Meyer, 2015, 2021). Nach den theoretischen Darlegungen wird die Ausgangssequenz beispielhaft näher analysiert und interpretiert, um die Unterscheidung der verschiedenen Prozesse daran anschaulich zeigen zu können.

2. Theoretischer Hintergrund

Im Folgenden werden die Unterscheidungen sowie die Bedeutungen verschiedener Darstellungsformen und der Wechsel und die Vernetzung von Darstellungen als mathematikdidaktischer Hintergrund präsentiert. Daran anschließend wird die Abduktion als logische Schlussform (und in Abgrenzung zur Deduktion und Induktion) aus philosophisch-logischer Perspektive zur Rekonstruktion von Deutungsprozessen (zunächst der Lernenden beim Erkennen mathematischer Strukturen in Darstellungen und später in Abschnitt 3 der Interpret*innen bei ihrer Arbeit) eingeführt.

2.1 Darstellungsformen, -wechsel und -vernetzung

Mathematische Objekte sind abstrakt und bedürfen Repräsentanten, um sie (be-)greifbar zu machen (u. a. Duval, 2006). Die hierfür genutzten Darstellungen können wiederum verschiedenen Darstellungsformen zugeordnet werden und so beispielsweise als konkrete Gegenstände/Handlung mit diesen, als Bilder oder Symbole auftreten. Hinsichtlich verschiedener Darstellungsformen unterscheidet Bruner (1973) „drei Systeme der Informationsverarbeitung […], mittels derer sich die Individuen Modelle ihrer Welt entwerfen, nämlich mittels Handlung, bildlicher Darstellung und Sprache“ (S. 49). Er bezeichnet diese „Arten der Repräsentation […] als enaktive, ikonische und symbolische Repräsentation“ (S. 53). Unter die symbolische Darstellungsform fallen nach Bruner Darstellungen von „Dinge[n] durch Zeichengebilde“ (1973, S. 53). Die symbolische Darstellungsform umfasst für ihn neben der Sprache in Form von Worten auch mathematische Symbole (Bruner, 1973). Diese recht weit gefasste symbolische Darstellungsform lässt sich „ausdifferenzier[en] in *symbolisch-numerische*, *symbolisch-algebraische* und *verbale* Darstellungsformen“ (Prediger & Wessel, 2012, S. 28). Im Kontext des Funktionsbegriffs trennt auch Laakmann (2013) die sprachlich/narrative von der symbolischen Darstellungsform, indem er „textlich, graphisch, tabellarisch und symbolisch“ (S. 1) als für die Mathematik relevante Darstellungsformen nennt und zudem auf die Rolle der Handlungsorientierung hinweist, wodurch ebenfalls der enaktive Aspekt von ihm berücksichtigt wird. In diesem Beitrag wird insbesondere die Trennung zwischen mathematischen Zeichen (auch numerisch) als symbolische Darstellungsform und Worten, Phrasen, etc. als sprachlich/narrative Darstellungsform genutzt. Somit wird hier zwischen enaktiver, ikonischer, symbolischer und sprachlich/narrativer Darstellungsform unterschieden. Aber auch innerhalb derselben Darstellungsform kann es verschiedene Darstellungen geben (z. B. enaktiv mit verschiedenen Gegenständen oder ikonisch als zwei unterschiedliche Bilder).

Die Sprache hat dabei eine doppelte Funktion: Zum einen kann die Sprache selbst als (verbale, narrative) Darstellungsform für die Repräsentation mathematischer Objekte gesehen werden. Zum anderen kommt die Sprache in der Auseinandersetzung mit Darstellungen zum Tragen, da sie als „Lernmedium“ (Meyer & Tiedemann, 2017, S. 39) aufgefasst werden kann und als Vermittler oder Bindeglied in der Beschäftigung mit (verschiedenen) Darstellungen und damit als notwendige Voraussetzung gilt (s. a. Laakmann, 2013; Meyer & Tiedemann, 2017; Prediger & Wessel, 2012). Dies wird später dahingehend relevant, da es um eine Interviewsituation mit hohem sprachlichem Anteil geht. Der Einsatz von und der Wechsel zwischen Darstellungen können zudem wiederum eine Entlastung der Sprache und somit eine mögliche Hilfestellung in der Auseinandersetzung mit und der Kommunikation über mathematische Objekte sein. Denn es kann auf Bilder, Material, Handlungen o. Ä. verwiesen werden oder diese können in der Kommunikation über mathematische Inhalte genutzt werden.

Die Betonung des Nutzens von verschiedenen Darstellungsformen und des Wechselns zwischen ihnen ist beispielsweise aus der Behandlung des Funktionsbegriffs bekannt (dort häufig als Tabelle, Graph und Gleichung benannt, für einen Überblick s. Müller-Philipp, 1994; s. a. Laakmann, 2013). Nach Leisen (2005) kann sich der Einsatz von Darstellungen und insbesondere der „Wechsel der Darstellungsformen […] als der didaktische Schlüssel zum fachlichen Verstehen [erweisen] und ist ein Anlass zur fachlichen Kommunikation“ (S. 10). Wie die bisherigen

Beschreibungen zeigen, sind Darstellungen „einerseits Träger mathematischer Begriffe, andererseits sind sie Mittel der Kommunikation in und über Mathematik“ (Laakmann, 2013, S. 23) und bieten sich darüber hinaus auch als Werkzeuge für Erklärungen oder Begründungen an (u. a. Pape & Tchoshanov, 2001; Schipper, 2003). Das Nutzen von verschiedenen Darstellungsformen bietet Lernenden die Möglichkeit, mathematische Zusammenhänge über verschiedene Wege zu erkennen, indem sie sich über die Darstellungen (wie beispielsweise Hinzunahme von Bildern u. a. Noll et al., 2020) aktiv mit mathematischen Inhalten auseinandersetzen. Der Einsatz von verschiedenen Darstellungen wird somit als hilfreich in der Literatur hervorgehoben.

Prediger und Wessel (2011) verwenden bevorzugt den Begriff „Darstellungsvernetzung“ statt -wechsel, „um dem Facettenreichtum der darin zusammengefassten Tätigkeiten und Kompetenzen besser gerecht zu werden, auf die in bisherigen Forschungen ein unterschiedlicher Fokus gesetzt wurde. Darstellungsvernetzung umfasst demnach die Kompetenzen bzw. Tätigkeiten *Unterscheiden, Übersetzen, Wechseln, Zuordnen, in Beziehung setzen* von bzw. zwischen unterschiedlichen Darstellungen“ (S. 168). So können der Wechsel zwischen und erst recht das Vernetzen von Darstellungen als Quellen für eine neue Auseinandersetzung mit dem Inhalt und/oder für ein tieferes und flexibleres (mathematisches) Verständnis bei Lernenden angeführt werden (s. a. Duval, 2006; Laakmann, 2013; Prediger & Wessel, 2012). Goldin und Shteingold (2001) weisen zudem darauf hin, dass Darstellungen nicht isoliert zu verstehen sind, was die Notwendigkeit des Einsatzes mehrerer Darstellungen und Darstellungsformen und somit auch des Wechselns und Vernetzens betont. „Beispielsweise ermöglichen es die grafischen Darstellungen, mathematische Strukturen und Beziehungen zu erfassen und erst dann sprachlich auszudrücken“ (Meyer & Prediger, 2012, S. 6). Dadurch wird die Möglichkeit gegeben, den mathematischen Inhalt mit anderen Aspekten oder Begriffen als den Fachworten zu verstehen. So kann die Vernetzung z. B. von ikonischen und sprachlichen Darstellungen gewinnbringend eingesetzt werden. Aber auch für die Vermittlung zwischen mathematischen Symbolen (etwa Zahlen) und der Erfahrungswelt von Kindern bedarf es Darstellungen (bzw. Veranschaulichungsmitteln) und Darstellungswechseln (Steinbring, 1994).

Es sei angemerkt, dass in diesem Artikel primär der Begriff des Darstellungswechsels verwendet wird, da im Arrangement der Erhebungssituation explizit zwischen verschiedenen Darstellungen (insbesondere zwischen verschiedenen Darstellungsformen) gewechselt wird (s. Sektion 3). Inwiefern dabei auch Aspekte der Darstellungen miteinander vernetzt werden, steht nicht im Fokus der Betrachtung.

Darüber hinaus stellen Darstellungen auch gewissermaßen einen Lerngegenstand und ihre Deutung eine Herausforderung dar, was beim Einsatz von Darstellungen zu berücksichtigen ist. Denn sie „sprechen“ eine *mehrdeutige Sprache* (s. für theoretische und empirische Mehrdeutigkeit u. a. Steinbring, 1994; Voigt, 1993). Gleichzeitig bedarf es dieser *Mehrdeutigkeit* für den Einsatz, Wechsel und/oder das Vernetzen von Darstellungen, denn um Darstellungen beispielsweise für den Mathematikunterricht nutzen zu können, müssen sie als an sich reale Objekte/Zeichnungen/… inhaltsspezifisch mathematisch deutbar sein und auch von Lernenden so gedeutet werden (z. B. Hinzufügen von Gegenständen als Addition) (Steinbring, 1994; Voigt, 1993). Es existiert aber „nicht die einzige oder die richtige Auslegung“ (Steinbring, 1994, S. 16) für eine Darstellung. Voigt (1993) betont bei dem Lesen von Darstellungen die Möglichkeit eines „Anders-Verstehen[s]“ (S. 150) von insbesondere bildlichen Darstellungen seitens der Lernenden. Andere Deutungen können dann andere mathematische Deutungen, aber auch außermathematische Deutungen sein. So können beispielsweise Oberflächenmerkmale (wie z. B. die Farbe) bis hin zu mathematischen Beziehungen erkannt werden (Gudladt, 2023). Anders formuliert: Da das Deuten von Darstellungen ein aktiver Prozess ist, können in der sozialen Gemeinschaft auch (viele) andere Deutungen entstehen. Ähnlich, wie der Umgang bzw. Einsatz von Arbeitsmaterialien und Anschauungsmitteln erst erlernt werden muss, gilt dies ebenfalls für den Einsatz von (anderen) Darstellungen (Lorenz, 1993; Pape & Tchoshanov, 2001; Schipper, 2003; Voigt 1993). Eine Darstellung „lesen“ bzw. „verstehen“ zu können und das in der jeweiligen Situation, in der sie eingesetzt bzw. genutzt wird oder werden soll, ist also ein komplexer Prozess (Meyer, 2021; Müller-Philipp, 1994; Prediger, 2013).

Die Leistung des Deutens von Darstellungen hinsichtlich des aktuellen mathematischen Inhaltes wird umso größer, wenn wie in diesem Beitrag mehrere verschiedene Darstellungen betrachtet werden. Denn in solchen Situationen werden Prozesse des einzelnen Deutens, aber auch des aufeinander Beziehens von Deutungen verschiedener Darstellungen relevant (u. a. Prediger & Wessel, 2012).

Mit dem Fokus dieses Artikels auf Phänomene beim Wechsel von Darstellungen, sollen die dabei rekonstruierbaren Erkenntnisprozesse herausgearbeitet und unterschieden werden, um die damit verbundenen Anforderungen besser nachvollziehen zu können.

2.2 Die Abduktion als Schlussform – Erkenntnistheoretische Perspektive

Die Abduktion ist in Anlehnung an Meyer (2021) eine Schlussform, die es ermöglicht, Entdeckungsprozesse bzw. den kreativen Anteil in Bearbeitungsprozessen zu beschreiben und damit besser fassen zu können. In Abgrenzung dazu lässt die Induktion hingegen eine Prüfung statt einer Entdeckung beschreiben und die Deduktion lässt eine Begründung beschreiben (s. hierzu Meyer, 2021). Letztere beiden werden zur besseren Abgrenzbarkeit kurz vorgestellt, bevor der Fokus auf die Abduktion gelegt wird (für Details zu den Schlussformen s. Meyer, 2007, 2021).

In allen drei Schlussformen spielen die Elemente „Fall", „Gesetz[4]" und „Resultat" eine entscheidende Rolle – die Unterscheidung liegt darin, was gegeben ist bzw. worauf geschlussfolgert wird (Meyer, 2010, S. 38ff). Das Gesetz, welches in der Analyse im Fokus stehen wird, lässt sich pointiert in konditionaler Form umgangssprachlich als „Wenn …, dann …"-Formulierung notieren. Im Antezedens (ugs. „Wenn-Teil"; formal: $F(x_j)$) wird ein Prädikat F auf alle Subjekte einer bestimmten Grundmenge bezogen. Im Konsequens (ugs. „Dann-Teil"; formal: $R(x_j)$) wird das Prädikat R ebenso auf alle Subjekte der betreffenden Grundmenge bezogen. Im Fall $F(x_0)$ und Resultat $R(x_0)$ wird dann das konkrete Subjekt x_0 in den Blick genommen (s. Abb. 3). Soll beispielsweise das Kommutativgesetz entdeckt werden, so könnte das konkret betrachtete x_0 das Zahlenpaar 3 und 5 sein (als Elemente aus der Grundmenge der natürlichen Zahlen – zumindest bezogen auf den ersten Kontakt mit diesem Gesetz). Das Fallprädikat könnte dann lauten „die Reihenfolge von … wird verändert" und das Resultatsprädikat „das Ergebnis der Addition von … bleibt gleich".

Die Deduktion beschreibt den logischen „Schluss von einem Fall und einem gegebenen Gesetz zu einem Resultat" (Meyer, 2010, S. 38). Ist das Kommutativgesetz bekannt, so ließe es sich deduktiv anwenden, indem die Aufgaben $3+5$ und $5+3$ zu berechnen sind. Das bekannte, bereits zu den Aufgaben assoziierte Kommutativgesetz verhilft nun die Ergebnisgleichheit von $3+5$ und $5+3$ zu folgern.

„Bei der Induktion handelt es sich um den Schluss von einem gegebenen Fall und einem gegebenen Resultat zu einem Gesetz" (Meyer, 2010, S. 40). Das erweckt den Anschein, dass man ein neues Gesetz entdeckt. Eine „genauere Analyse des Schemas hilft jedoch, diese Auffassung zu widerlegen. Denn um das Gesetz aus Fall und Resultat schließen zu können, bedarf es der Kenntnis des Zusammenhangs zwischen diesen beiden Prämissen" (Meyer, 2010, S. 40). Anders formuliert: Dass das Vertauschen der Reihenfolge der Summanden (Fall) ursächlich für das gleichbleibende Ergebnis (Resultat) ist, muss zuvor erkannt worden sein, um dies als Prämissen eines Schlusses zusammenbringen zu können. Die Abduktion (s. u. und in der Analyse in Sektion 4) wird zeigen, dass bereits hiermit das Erkennen eines Gesetzes als Zusammenhang zwischen den Prämissen vollzogen wird und die Rolle der Induktion nicht auf die Generierung oder Assoziierung von Gesetzen bezogen werden kann. „Der Nutzen einer Induktion besteht [hingegen] darin, dass man hiermit bereits vorhandene Gesetze überprüfen kann" (Meyer, 2010, S. 41).

Die Abduktion, verstanden als kognitiver Prozess, beginnt bei der Beobachtung eines überraschenden, zunächst erklärungsbedürftigen Phänomens (beim Mathematiklernen bspw. das gleiche Ergebnis 8 zweier Additionsaufgaben $3+5$ und $5+3$). Bezogen auf das Abduktionsschema (s. Abb. 3) liegt zunächst, mit Fokus auf die zugrundeliegende *kognitive Generierung*, nur das Phänomen als gegebene Prämisse vor. Mit der Suche nach einer das beobachtete (erklärungsbedürftige) Phänomen potenziell erklärenden Ursache werden anschließend hypothetische Überlegungen angestellt (hier bspw., dass lediglich die Reihenfolge der Summanden vertauscht wurde). Dabei tauchen, bezogen auf das Abduktionsschema, Gesetz und Fall zur Erklärung des Phänomens quasi zeitgleich auf: Der Fall $F(x_0)$ ist zum einen bereits im Antezedens $F(x_j)$ des Gesetzes (als Bestandteil der betrachteten Grundmenge) enthalten und wird zum anderen durch das Gesetz erschlossen. Bezogen auf das Beispiel könnte ein mögliches Gesetz lauten: *„Wenn man bei der Addition zweier Summanden die Reihenfolge der Summanden tauscht, dann ändert sich das Ergebnis nicht*". Darin enthalten wäre der Fall, dass *„die Zahlen 3 und 5 in den Termen* $3+5$ *und* $5+3$ *vertauscht sind*".

Wenn das Gesetz erkannt ist, lässt sich das vormals erklärungsbedürftige Phänomen als ein Resultat $R(x_0)$ des Gesetzes realisieren: Die Ergebnisgleichheit von $3+5$ und $5+3$ ist eine konkrete Realisierung der Ergebnisgleichheit bei der Vertauschung beliebiger Summanden. Somit bekommt das Phänomen relativ zum Gesetz einen neuen logischen Status und wird als Resultat bezeichnet. Um diesen Prozess der Relation von Phänomen und Gesetz zu berücksichtigen, werden in nachfolgenden Abduktionsschemata stets beide Begriffe verwendet. Dieser Wechsel von Phänomen zum Resultat lässt sich im Abduktionsschema zudem durch eine Verschiebung des Schlussstriches darstellen (s. Abb. 3 – gestrichelte Linie bzw. durchgezogenen Linie).

Wurde das Phänomen als Realisierung des Konsequens des Gesetzes identifiziert, so stellt die Abbildung nicht mehr die kognitive Generierung bzw. den (möglichen) „Gedankengang desjenigen […], der eine Abduktion vollzieht, sondern vielmehr die Rationalität der sich in der Interaktion öffentlich zeigenden Darstellung einer Abduktion: Die Plausibilisierung einer Hypothese“ (Meyer, 2010, S. 47) dar. „Die Abduktion ermöglicht es also, eine [hypothetische] Erklärung ausgehend von beobachteten Phänomenen zu finden“ (Meyer, 2010, S. 43). In solchen Situationen nutzen wir das Gesetz quasi als Prämisse, um den Fall als Erklärung plausibel zu machen.

Phänomen / Resultat:	$R(x_0)$
Gesetz:	$\forall j: F(x_j) \Rightarrow R(x_j)$
Fall:	$F(x_0)$

Abb. 3: Schema der *kognitiven Generierung* (gestrichelte Linie; das beobachtete Phänomen ist die einzige gegebene Prämisse) sowie der *öffentlichen Plausibilisierung* (durchgezogene Linie; der Schlussstrich befindet sich unter dem Gesetz, das Phänomen wurde bereits als Resultat des Gesetzes identifiziert) einer Abduktion (s. Meyer, 2010, 2015)

In der vorliegenden Studie benötigen wir beide Varianten der Abduktion: Zunächst werden Äußerungen von Schüler*innen rekonstruiert, die das Gesetz als Prämisse bei der öffentlichen Plausibilisierung von Entdeckungen verwenden (s. Meyer, 2007). Anschließend werden potentielle Erkenntnisprozesse rekonstruiert, in denen das Gesetz zunächst noch nicht den Status einer Prämisse hat. Diese Prozesse werden aus Forschungsperspektive dargestellt, um mögliche Erkenntnisprozesse zur Aufgabengabenlösung zu verdeutlichen. In letztgenannten Situationen wird das Gesetz also nicht als Prämisse betrachtet, während es in erstgenannten Situationen (der Rekonstruktion von Peggys Äußerungen) eine Prämisse zur Plausibilisierung des erklärenden Falles darstellt. Zur Gewährleistung einer besseren Übersichtlichkeit wird in beiden Situationen von *Phänomen/Resultat* gesprochen.

Anders als bei der Deduktion handelt es sich bei der Abduktion nicht um einen sicheren Schluss, da die herangezogenen Gesetze hypothetisch sind und das Phänomen möglicherweise auch mit anderen Gesetzen erklärbar ist, die wiederum zu anderen Fällen führen können (Meyer, 2007).

Die Abduktion in Abbildung 4 wäre beispielsweise fachlich naheliegend, wenn folgendes Set an Additionsaufgaben vorliegt:

$3+5=$	$5+7=$
$5+3=$	$7+5=$

Phänomen / Resultat:	Das Ergebnis der Aufgaben in der linken Spalte ist jeweils 8 und in der rechten Spalte ist es jeweils 12.
Gesetz:	Wenn ich die Reihenfolge der Summanden in einer Additionsaufgabe tausche, dann bleiben die Ergebnisse gleich.
Fall:	Die Reihenfolge der Summanden 3 und 5 sowie 5 und 7 wurde je vertauscht.

Abb. 4: Abduktionsschema einer fachlich „naheliegenden“ Entdeckung von Lernenden

Wenn Lernende das Kommutativgesetz an solchen Aufgaben erst noch „entdecken“ sollen, könnten sie zur Erklärung des beobachteten Phänomens der Ergebnisgleichheit auch andere (hypothetische) Gesetze heranziehen oder daran herleiten. Beispielsweise könnte die Gleichheit der Ergebnisse auch mit der Existenz der Zahl 5 in beiden Aufgabensets erklärt werden (s. Abb. 5 linkes Beispiel). Oder Lernende erkennen anstelle des Kommutativgesetzes gar ein anderes erklärungsbedürftiges Phänomen, wie z. B. dass die Ergebnisse 8 und 12 gerade sind. Damit können die Lernenden ebenfalls über andere (hypothetische) Gesetze auf andere, das beobachtete Phänomen erklärende Fälle kommen, wie beispielsweise, dass je beide Summanden in den Aufgabensets ungerade sind (s. Abb. 5 rechtes Beispiel).

Die Abduktionsschemata in Abbildung 5 zeigen, dass sowohl zum gleichen Phänomen verschiedene (hypothetische) Gesetze und Fälle erklärend herangezogen werden können, als auch andere Phänomene erkannt werden können. Ein anderes Phänomen kann dann ebenfalls zu anderen herangezogenen Gesetzen und auch zu anderen Fällen führen.

Phänomen / Resultat:	Das Ergebnis der Aufgaben in der linken Spalte ist jeweils 8 und in der rechten Spalte ist es jeweils 12.	Die vorkommenden Ergebnisse 8 und 12 sind gerade.
Gesetz:	Wenn in beiden Additionsaufgaben eine 5 enthalten ist, dann bleibt das Ergebnis gleich.	Wenn die beiden Summanden einer Additionsaufgabe ungerade sind, dann ist das Ergebnis gerade.
Fall:	In $3+5$, $5+3$ und auch in $5+7$, $7+5$ ist je die Zahl 5 enthalten.	3 und 5 sowie 5 und 7 sind je zwei ungerade Zahlen.

Abb. 5: Abduktionsschemata zweier alternativer Abduktionen

Die Abduktion verhilft auch, mathematische Beziehungen in Darstellungen zu erkennen. So muss das Ergebnis der Rechnungen $5+3$ und $3+5$ nicht (per Taschenrechner) ausgerechnet werden, um die Gleichheit der Ergebnisse als erklärungsbedürftiges Phänomen zu erkennen. Beispielsweise können auch Cuisenaire-Stäbe aneinandergelegt werden und die Gleichheit der Gesamtlänge kann dann den Anlass dazu geben, das Kommutativgesetz zu erkennen. Der erklärende Fall würde sich dann vermutlich daraus ergeben, dass (nur) die Reihenfolge der Stäbe verändert wurde. Das Abduktionsschema kann helfen, verschiedene Bearbeitungsmöglichkeiten zu einer gegebenen Aufgabe zu rekonstruieren und den Blick dahingehend zu öffnen, dass im Unterricht mit einer gegebenen Aufgabe mehrere (auch fachlich unpassende) Lösungsmöglichkeiten denkbar sind (s. Abb. 5).

Die Abduktion lässt sich darüber hinaus nach Eco (1985) in drei Arten unterteilen: Die Unterscheidung liegt darin, ob das zur Klärung der Phänomene herangezogene Gesetz bereits bekannt ist und (1) entweder *quasi auf der Hand liegt*, sich also „automatisch oder halb-automatisch [ergibt]“ (S. 299). Eco spricht dann von einer *„übercodierten Abduktion“* (S. 299f.). Oder (2) das Gesetz zwar bekannt ist, aber „aus einer Folge von gleichwahrscheinlichen Gesetzen ausgewählt“ (S. 300) werden muss, es somit *nicht direkt auf der Hand liegt*, was Eco eine *„untercodierte Abduktion“* (S. 300f.) nennt. Ist das Gesetz hingegen noch nicht bekannt und wird erst neu generiert, so ist dies (3) eine *„kreative Abduktion“* (S. 301). Jeweils wird das Gesetz herangezogen oder generiert, um dem Phänomen einen ursächlichen Fall zuordnen zu können (Meyer, 2010).

Bezogen auf die Abduktion in Abbildung 4 zu Summen mit vertauschten Summanden, wäre dann theoretisch unterscheidbar, ob

- das Gesetz zum Gleichbleiben des Ergebnisses beim Vertauschen der Summanden bereits bekannt ist und zur Lösung der Aufgabe (als Erklärung für das Phänomen) *quasi auf der Hand liegt* und genutzt werden kann (übercodierte Abduktion) oder
- konkurrierende Gesetze zur Verfügung stehen (wie beispielsweise das Gleichbleiben des Ergebnisses beim gegensinnigen Verändern), sodass das Gesetz zum Vertauschen der Summanden als eines von passenden Gesetzen ausgewählt wurde und somit *nicht auf der Hand liegt* (untercodierte Abduktion) oder
- zuvor keine Ursache für das Phänomen bekannt war, sodass Gesetz und Fall zum Vertauschen der Summanden als Ursache für das gleiche Ergebnis neu generiert werden mussten (kreative Abduktion).

In allen drei aufgezählten Varianten passt die Abduktion aus Abbildung 4 als möglicher zugrundeliegender Erkenntnisprozess. Der Unterschied ist, inwiefern das herangezogene Gesetz bereits bekannt, mit anderen konkurrierend oder neu zu generieren ist. Die theoretische Unterscheidung der „Herkunft“ der Gesetze zu rekonstruierten Abduktionen lässt sich empirisch schwer treffen und ist zumeist nur relativ zur gegebenen Situation entscheidbar.

Die theoretischen Hintergründe zu Darstellungen und der Abduktion zusammenfassend, lässt sich der Forschungsschwerpunkt des Artikels herausarbeiten: Darstellungen verhelfen der Repräsentation mathematischer Strukturen. Das Erkennen mathematischer Strukturen in Darstellungen ist ein Deutungsprozess und Darstellungen sind daher prinzipiell mehrdeutig. Mit anderen Worten: Der abduktive Schluss zum Erkennen eines Gesetzes ist kein notwendiger, sondern nur ein hypothetischer. Wenn nun mehrere Darstellungen, womöglich inklusive eines Wechsels der Darstellungsform, betrachtet werden, so sind auf verschiedenen Ebenen Entdeckungsprozesse notwendig: Wenn die Lernenden in der ersten Darstellung nicht die notwendige mathematische Struktur erkannt haben, so womöglich in der zweiten. Wenn sie die Struktur schon in der ersten erkannt haben, so wäre beispielsweise fraglich, ob sie dies in der zweiten ebenso machen würden.

Uns sind keine Untersuchungen bekannt, die sich mit der Interaktion am Zeitpunkt des Wechsels von Darstellungen (womöglich inklusive eines Wechsels der Darstellungsform) beschäftigt haben. Konkret für den Anlass dieses Artikels stellte sich uns die Frage: Welche Erkenntnisprozesse werden im Wechsel von Darstellungen öffentlich? Zur Rekonstruktion dieser Erkenntnisprozesse wird die Abduktion verwendet.

3. Methode und Methodologie

In diesem Artikel wird ausgehend von (erklärungsbedürftigen) Phänomenen aus der Empirie des Mathematiklernens mit Hilfe bekannter Theorien (u. a. der Abduktion) auf neue Erkenntnisse geschlossen (u. a. Erkenntnisprozesse beim Darstellungswechsel). Das Abduktionsschema und die Arten der Abduktion werden u. a. für die Unterscheidung nötiger und möglicher Prozesse beim Darstellungswechsel genutzt. Es werden entstehende Herausforderungen für Lernende fokussiert, in der Bearbeitung einer Aufgabe eine Passung zwischen bisherigen Bearbeitungsideen/-ansätzen und einer neuen Darstellung zu finden. Das soll helfen, den nötigen kreativen Prozess zu analysieren, in dem Lernende (gleiche) Strukturen zwischen verschiedenen Darstellungen in der Aufgabenbearbeitung erkennen sollen.

Dem methodischen Vorgehen liegt eine sozial konstruktivistische Perspektive auf Lernen zugrunde (s. u. a. Bauersfeld, 2000; Cobb & Yackel, 1998; von Glasersfeld, 1995): Demzufolge kann Wissen nicht passiv aufgenommen werden, vielmehr findet eine aktive Auseinandersetzung statt. Im Sinne des sozialen Konstruktivismus wird zudem die Relevanz des sozialen Austausches für die Erkenntnisgenerierung betont: Das bedeutet, dass es neben Lerngelegenheiten auch insbesondere Interaktionspartner*innen bedarf, um im Austausch Erkenntnisse zu generieren, anzupassen und zu erweitern. Wissen basiert also auf „Erfahrungen […] in einem Kontext, in einer konkreten Situation" (Bauersfeld, 1985, S. 11), sodass Wissen kontextgebunden in sogenannte „Subjektive Erfahrungsbereiche [SEB]" (Bauersfeld, 1985, S. 11) gespeichert wird. „Die entscheidende Grundlage für die Bildung eines SEB sind die Handlungen des Subjekts und der von ihm konstruierte Sinnzusammenhang, genauer: deren Ausformungen in der sozialen Interaktion. Gerade im Mathematikunterricht beziehen sich die subjektiv bedeutsamen Handlungen eng auf die angebotenen konkreten Veranschaulichungsmittel" (Bauersfeld, 1985, S. 14). Daher wurde für die Erhebung der Einsatz von und die Auseinandersetzung mit (konkreten) Darstellungen in verschiedenen Darstellungsformen gewählt. Zudem wurde in der Analyse mit Hilfe der interpretativen Unterrichtsforschung der Fokus auf die Interaktionen gerichtet, um entsprechende Erkenntnisprozesse näher zu untersuchen.

Mit Hilfe der Theorie des Konstruktivismus und der Abduktion lässt sich die bei diesem Vorgehen zu berücksichtigende Mehrdeutigkeit von Darstellungen erklären: Denn (mathematische) Zusammenhänge müssen ausgehend etwa von Elementen der Darstellung aktiv vom Subjekt konstruiert werden und diese Konstruktionen sind abhängig von bisherigen Erfahrungen und dem jeweiligen Kontext. Lernende bringen auf der einen Seite stets Vorerfahrungen mit (SEB) – auf der anderen Seite ist zu betonen, dass selbst wenn Lernende gewisse Erkenntnisse in anderen Situationen bereits erworben haben, diese nicht automatisch in jeder Situation abgerufen und angewendet werden können (Bauersfeld, 1985). Aufgrund der Mehrdeutigkeit ist es eine wichtige Aufgabe in der nachfolgenden Analyse der Situation, den Blick für verschiedene mögliche Deutungen zu öffnen.

3.1 Datenerhebung und -auswahl

Für diesen Artikel wird auf eine Erhebungssituation zurückgegriffen, in der insgesamt 29 Lernende der Jahrgangsstufe 5 aus einer integrierten Gesamtschule einzeln oder in kleinen Gruppen teilgenommen haben. Sie sollten je zwei Mathematikaufgaben jeweils mit zusätzlicher Hilfe durch vier verschiedene, vorgegebene Bearbeitungsansätze in verschiedenen Darstellungsformen bearbeiten. Diese Bearbeitungsansätze wurden auf verschiedenen Karten dargelegt. Die Lernenden saßen dafür nacheinander mit einer Interviewerin in einem separaten Raum.

Kern der eingesetzten Aufgabe A war die Begründung des Kommutativgesetzes (Aufgabenstellung: Warum ist es beim Plusrechnen egal, ob ich 3 + 5 oder 5 + 3 rechne? Ist das bei anderen Zahlen auch egal? – Begründe.[5]). Die Aufgabe ist bewusst vom Schulstoff aus niedrigeren Klassenstufen gewählt, damit der Analysefokus vermehrt auf der Präsentation der Aufgabenbearbeitung und insbesondere auf der Begründung liegen kann und weniger darauf, ob die Aufgabe gelöst werden kann. Bei der Bearbeitung von Aufgabe A soll von den Lernenden als mögliche Unterstützung wiederholt ein Wechsel der Darstellung vollzogen werden. Diese Darstellungswechsel wurden mit Karten, welche je einen Bearbeitungsansatz[6] zur Aufgabe enthalten, initiiert. Dabei sind die Darstellungsformen (s. Sektion 2.1) wie folgt den Karten zuzuordnen:

- Enaktiv: Aufforderung, die Aufgabe mit Hilfe von Material darzustellen (Wendeplättchen und kleine Holzwürfel in vier verschiedenen Farben standen zur Verfügung)
- Ikonisch: bildliche Darstellung als Bearbeitungsansatz der Aufgabe (s. Abb. 2)
- Symbolisch: Beginn einer möglichen Termumformung zur Aufgabe („$3+5=(1+1+1)+(1+1+1+1+1)=\ldots$“ und „$5+3=\ldots$“; für diesen Artikel nicht näher im Fokus)
- Verbal/narrativ: Bereitstellung von Worten, die zur Verbalisierung einer Aufgabenbearbeitung genutzt werden können (z. B.: „zerlegen“, „zusammen“, „vertauschen“; für diesen Artikel nicht näher im Fokus)

Die Lernenden bekamen zur Bearbeitung ausreichend Platz für eigene Notizen und Zeit, sich mit der Aufgabe auseinanderzusetzen, um den mathematischen Zusammenhang zunächst selbst zu erkennen und anschließend zu begründen. Nach der eigenen Bearbeitung wurden die Karten mit möglichen Bearbeitungsansätzen als mögliche Hilfen in den verschiedenen Darstellungsformen vorgelegt. Die Lernenden durften anschließend selbst auswählen, welche Karte sie als nächstes unterstützend hinzuziehen wollen, sie wurden dabei gefragt, welche Karte ihnen (noch) bei der Bearbeitung der Aufgabe helfen könnte. Nach und nach sollten sie alle Karten nutzen und somit die Aufgabe entweder nochmals mittels einer anderen Darstellung bearbeiten, die bisherige Idee weiter ausbauen, ändern oder mithilfe dieser Darstellung überhaupt auf eine Idee für die Bearbeitung kommen, sofern dies vorher noch nicht geschehen war.

Mit dem Wechsel der Karten wurde ein Wechsel der Darstellung und auch der Darstellungsform initiiert. Dieser Wechsel hätte bei den Lernenden zu einem Vernetzen der Darstellungen führen können. Dies wurde in der Erhebungssituation nicht explizit forciert. Angeleitet wurde die Situation jeweils von einer Interviewerin, die sich an diesen zuvor beschriebenen Ablauf und an Leitfragen (z. B. „Welche Karte könnte dir (noch) bei der Bearbeitung der Aufgabe helfen?“) orientiert hat, sodass das Vorgehen als halbstandardisiertes Leitfadeninterview eingeordnet werden kann (s. u. a. Helfferich, 2019; Selter & Spiegel, 2007).

An dieser Stelle sei angemerkt, dass das Vorgehen der Erhebungssituation primär von wissenschaftlichem Interesse, im Sinne eines mathematikdidaktischen Erkenntnisgewinns, und nicht von fachdidaktischem Interesse, mit Ziel einer optimalen Lernumgebung, geprägt war. So wurde die Aufgabe forschungslogisch ausgewählt, um die Bearbeitung dieser im Zusammenhang mit den verschiedenen Darstellungen zu untersuchen. Es wird kein Fokus darauf gelegt, inwiefern dies eine geeignete Aufgabe für den Mathematikunterricht darstellt. Genauso ist das Vorgehen, alle dargebotenen Darstellungen nacheinander zur Bearbeitung zu nutzen, forschungslogisch begründet. Es zielt darauf ab, verschiedene Darstellungswechsel zu initiieren, um diese Prozesse näher in den Blick nehmen zu können. Somit ergibt sich der Schwerpunkt des Artikels: Welche Prozesse lassen sich im Wechsel der Darstellungen während der Bearbeitung einer Aufgabe hinsichtlich der Übertragbarkeit und Anpassung oder Änderung der Bearbeitungsidee rekonstruieren und differenzieren? Rekonstruierbar wird die Bearbeitungsidee mit Hilfe des Abduktionsschemas und darin insbesondere der Gesetze als der Bearbeitung zugrundeliegender übergeordneter *Ideen*.

3.2 Analysemethoden

Die Auseinandersetzung mit der Aufgabe wurde videografiert. Anschließend wurden solche Sequenzen ausgewählt und transkribiert, die Irritationen, Unvereinbarkeiten mit einer fachlichen Perspektive, interne Widersprüche o. Ä. enthalten, um diese Phänomene näher zu betrachten und zu analysieren. Der Grund für die Wahl solcher Szenen ist, dass Irritationen, Widersprüche, etc. bedingen, dass explizite Aushandlungsprozesse zwischen den an der Interaktion beteiligten Personen oder auch nur von einer Person in der Auseinandersetzung etwa mit der Darstellung stattfinden. Diese Aushandlungsprozesse erlauben es, durch die ausführlicheren Äußerungen tiefere Einblicke in die Bearbeitungsprozesse zu erhalten. Ansonsten zumeist implizit bleibende Aspekte (z. B. Routinen, s. Voigt 1984) können scheinbar nicht einfach angewendet werden. So wurde auch die zu Beginn dieses Artikels präsentierte Sequenz als ein überraschendes empirisches Phänomen ausgewählt, für welches aus einer Forschungsperspektive im Sinne der Abduktion nach einer Erklärung gesucht werden soll. Anhand des Transkriptes soll der Deutungsprozess, der durch einen Darstellungswechsel innerhalb der vorgestellten Aufgabe initiiert wird, analysiert werden.

Der in der nachfolgenden Sektion dargestellten Analyse liegt eine Interaktionsanalyse zugrunde, mit der das Phänomen orientiert an der Interpretativen Unterrichtsforschung nach Voigt (1984) betrachtet wird. Folgende Aspekte werden in der Analyse berücksichtigt (für eine ausführlichere Darstellung s. Voigt, 1984; s. a. Jungwirth, 2003):

1) Die forschende Person betrachtet die Transkriptausschnitte zunächst mit dem alltäglichen Verstand (Voigt, 1984), um sich der eigenen subjektiven Deutung bewusst zu werden und sich dann von dieser möglichst zu lösen, um vorschnelle Schlussfolgerungen zu vermeiden und um möglichst neue, kreative Deutungen zu vollziehen.

2) Die ausgewählten Transkripte werden sequenzanalytisch interpretiert. Mit dieser „extensiven Interpretation“ (Jungwirth, 2003, S. 194) der Einzeläußerungen „wird [zum einen] versucht, die subjektiven Deutungen der Schüler*innen zu erfassen, zum anderen wird zudem versucht, den objektiven Sinnzusammenhang zu rekonstruieren“ (Meyer, 2021, S. 115), um „mehr“ (Be-)Deutung zu erlangen. Hierbei wird die interviewte Person in Auseinandersetzung mit der Aufgabe, den Darstellungen u. a. auf den Karten, und mit der Interviewerin betrachtet. Die einzelnen Äußerungen (Turns) werden schrittweise analysiert.
   Die gewonnenen Hypothesen ermöglichen Vorhersagen über die nachfolgenden Äußerungen und diese werden schrittweise unter Einbezug der tatsächlichen Folgeäußerungen geprüft. Treten notwendige oder mögliche Konsequenzen ein, so wird die Hypothese bestätigt. Dieses Vorgehen wird als „turn-by-turn-Analyse“ (Voigt, 1984, S. 113) bezeichnet.

3) Im letzten Schritt werden die rekonstruierten Deutungen, die sich im Verlauf der Interaktion bewährt haben – die sogenannten „Deutungshypothese[n]“ (Voigt, 1984, S. 114) – zusätzlich mit Hilfe der dargestellten Theorie der Abduktion (s. Sektion 2.2) zusammengebracht. Das heißt, anhand der Deutungshypothesen werden mögliche Abduktionen rekonstruiert, welche die öffentlich gewordenen Entdeckungsprozesse wiederspiegeln. Die Ergebnisse dieses Schrittes finden sich in Sektion 4.

Um die Prozesse im Wechsel der Darstellungen näher untersuchen zu können, wird also zunächst die turn-by-turn-Analyse inklusive daraus rekonstruierter Abduktionen über die Auseinandersetzung mit einer Karte bzw. Darstellung dargelegt. Anschließend werden folgende Schritte in der Analyse durchgeführt:

4) Zunächst wird hypothetisch ergründet, inwiefern sich die rekonstruierten Abduktionen aus der ersten Sequenz (im Sinne möglicher Aufgabenbearbeitungen mit Hilfe einer Karte) aus theoretischer bzw. fachlicher Perspektive auf eine andere Karte (mit einer anderen Darstellung) übertragen lassen. Dieser Schritt geschieht also losgelöst von der konkreten Situation und ist wichtig, um zu prüfen, ob das rekonstruierte Vorgehen (also die rekonstruierten Gesetze und Fälle) potenziell auf die andere Darstellung übertragbar wäre.

5) Anschließend werden auch in der zweiten Sequenz, der die Auseinandersetzung mit einer anderen Karte zugrunde liegt, mögliche Abduktionen rekonstruiert und in Einbezug der vorherigen Überlegungen geprüft, welche möglichen Gesetze und Fälle sich anhand der Interaktion als auf die neue Darstellung übertragbar erweisen oder nicht.

   Durch diese Vergleiche (fachlich/theoretisch) möglicher und aus der Interaktion rekonstruierbarer Übertragungen von Gesetzen und Fällen sollen die Prozesse im Wechsel der Darstellungen näher beschrieben, unterschieden und verstanden werden können.

Bei den Rekonstruktionen der Abduktionen gibt es einen gewissen Deutungsspielraum, weil die Prozesse a) von den Forscher*innen interpretiert und b) von den Beteiligten/Lernenden nicht nach dem Schema bewusst vollzogen werden und insbesondere die dahinterliegenden Gesetze der Abduktionen in der Interaktion meist implizit bleiben (u. a. Meyer, 2010). Somit gibt es verschiedene mögliche zum rekonstruierten Phänomen passende Gesetze und Fälle, die auch unterschiedlich kombiniert werden und dennoch als plausibel für die Erklärung gelten können. Daher werden in der Analyse insbesondere bei Schritt (4) und (5) verschiedene *Spielarten* von potenziell möglichen Gesetzen und Fällen und wie sie sich gegenseitig implizieren beziehungsweise ausschließen betrachtet. Es werden also beispielhaft verschiedene mögliche Abduktionen beschrieben, quasi ‚durchgespielt‘, weshalb von *Spielarten* die Rede ist.

Es sei angemerkt, dass es sich um empirische z. T. aus der Interaktion rekonstruierbare Prozesse handelt. „Die Rekonstruktionen von Entdeckungen mittels des Schemas der Abduktion können die

Rationalität[7] des öffentlichen Entdeckungsprozesses aufzeigen […]. Der [tatsächliche] kognitive Prozess beim Erkennen mathematischer Zusammenhänge (der ‚Geistesblitz') bleibt hingegen der Mystik überlassen. Denn die rekonstruierte Rationalität muss natürlich nicht der Rationalität des Schülers entsprechen, der den mathematischen Zusammenhang veröffentlicht" (Meyer, 2010, S. 53). In diesem Artikel geht es um das Herausarbeiten verschiedener *Spielarten* möglicher Gesetze und Fälle, die ein Phänomen erklären können. Dadurch soll der Blick im Anschluss an die Analyse hin zu verschiedenen, von der Situation losgelösten, möglichen Erkenntnisprozessen beim Darstellungswechsel geöffnet werden. In dem Herausarbeiten verschiedener *Spielarten* soll dargelegt werden, welche verschiedenen Gesetze und damit einhergehenden Fälle ein Phänomen erklären können und wie sich dies im Erkenntnisprozess gegenseitig bedingt. Im Fokus steht, was ein anderes Gesetz oder ein anderer herangezogener Fall jeweils füreinander bedeuten und welche Erkenntnisprozesse[8] dafür bei den Lernenden nötig wären. Dies wird insbesondere beim Wechsel der Darstellung interessant.

4. Analyse der Interviewsequenz

In der nachfolgenden Analyse wird die in Sektion 1 dargestellte Sequenz mit Peggy, in der sie Aufgabe A zum Kommutativgesetz bearbeitet, aufgegriffen und näher betrachtet.

Aufgabenbearbeitung mittels „enaktiver Karte"

Peggy scheint in enaktiver Darstellungsform die Aufgabe mit „den Steinen" dargestellt zu haben („dann mache ich das gerade mit den Steinen" (T1.1)), weil da „ja dasselbe rauskommen" (T1.3) wird. Dabei könnte sich „das", was mit den Steinen dargestellt wird, auf den ersten Term „$3+5$" aus der Aufgabenstellung beziehen oder auch auf die komplette Bearbeitung der Aufgabe mithilfe der Steine und der nachfolgenden Handlung. Zur zweiten Interpretation passt, dass Peggy blaue und gelbe Holzwürfel nimmt und damit „die drei und die fünf" (T1.1) als Mengen zunächst nebeneinander legt mit rechts blau und links gelb. Anschließend schiebt sie die Holzwürfel zu einer Menge zusammen und legt sie dann wieder getrennt nebeneinander in getauschter Anordnung hin (vgl. Abb. 1 in Sektion 1). Dazu äußert sie: „die blauen plus die gelben Steinchen, wird ja die acht rauskommen […] und wenn ich die gelben plus die blauen Steinchen wird ja auch acht entstehen" (T1.3; 1.5). Im Zusammenspiel dieser Handlung und den Äußerungen lässt sich vermuten, dass sie mit dem Material die Terme „$3+5$" und „$5+3$" der Aufgabenstellung legt. Zudem scheint sie die Summe, als Gesamtmenge der Holzwürfel, durch das Zusammenschieben aller Würfel darzustellen. In Bezug auf die in der Aufgabe geforderte Begründung zur Vertauschbarkeit der Zahlen in der Addition, lassen sich anhand der Sequenz unter anderem folgende mögliche Vorgehensweisen rekonstruieren, auch wenn sie z. T. fachlich (noch) keine allgemeine Begründung[5] darstellen:

- Für das Aufgabenbeispiel $3+5$ und $5+3$ wird mit fünf gelben und drei blauen Holzwürfeln gezeigt, dass es zusammen 8 sind, egal ob die gelben oder blauen Holzwürfel links bzw. rechts liegen. Denn es werden von Peggy konkret diese Mengen an Holzwürfel gewählt und auch verbalisiert (T1.1).
- Betrachtet man die nachfolgenden Turns (T1.3; T1.5), in denen nur noch von „die blauen plus die gelben Steinchen" bzw. „die gelben plus die blauen Steinchen" gesprochen wird, so lässt sich interpretieren, dass das konkret dargestellte Beispiel stellvertretend für beliebige Mengen gelber und blauer Holzwürfel angesehen werden kann. Dadurch kann der Gebrauch eines allgemeinen Gesetzes angenommen werden.
- Darüber hinaus könnten neben den konkreten Mengen auch die konkreten Farben oder das konkrete Material nur stellvertretend genutzt worden sein: Denn beide Mengen werden mit je einer Hand umfasst (T1.5) und könnten so auch zwei beliebig große Mengen von beliebigen Gegenständen darstellen. Die Anordnung der Mengen kann nun vertauscht werden, ohne die Gesamtmenge zu verändern. Das würde zur allgemeinen Äußerung von „die Menge" (T1.3; T1.5) passen, die nicht verändert wird. Also ändern sich weder die einzelnen Mengen noch die Gesamtmenge an Elementen, wenn man die Anordnung verändert. Dies könnte somit als Begründung losgelöst von dem konkret genutzten Material interpretiert werden.

Zwar bleibt unklar, wie konkret das Vorgehen an das Material und das Zahlenbeispiel gebunden ist, jedoch scheint über ein Zusammenfügen und Trennen der Holzwürfel das Gleichbleiben der Ergebnisse/Mengen dargestellt zu sein. Rekonstruiert mit Hilfe der Abduktion (s. Sektion 2.2 und 3.2) ergeben sich folgende Überlegungen eines möglichen Erkenntnisprozesses in der Situation:

Als Ausgangspunkt und somit als *Phänomen / Resultat* (R_e) lässt sich die mit der Aufgabe A gestellte

Begründungsaufforderung, dass die Reihenfolge der Zahlen für die Summe keine Rolle spielt, betrachten. Beziehungsweise wird in der Handlung schon konkret (enaktiv) mithilfe der Holzwürfel dargestellt, dass deren Anordnung keine Rolle spielt und die Menge (als Ergebnis) gleichbleibt (s. T1.3: „die Menge verändert sich ja dadurch nicht“). Dieses Phänomen lässt sich damit erklären, dass es sich um zwei unterschiedlich gefärbte Mengen an Holzwürfeln handelt, die zusammengefügt werden (s. T1.3: „wenn ich die zusammen lege-“) – rekonstruierbar ist dieses Zusammenfügen der Würfel als möglicher, das Phänomen erklärender *Fall* (F_e1). Das entsprechend der Theorie der Abduktion zugehörige *Gesetz*, welches hier nicht expliziert wird, könnte lauten: Wenn ich zwei Mengen mit unterschiedlich gefärbten Elementen zusammenfüge, dann spielt die Anordnung der Elemente keine Rolle und das Ergebnis (der zugrundeliegenden Additionsaufgabe) ist dasselbe (G1). Zusammen ergibt sich eine *mögliche* Abduktion als Peggys Bearbeitung potenziell zugrundeliegender Prozess (s. Abb. 6).

Phänomen / Resultat: (enaktiv - e)	R_e: Die Anordnung der Holzwürfel spielt keine Rolle und die Menge (als das Ergebnis der Addition) bleibt gleich. (vgl. Aufgabe A u. T1.3)
Gesetz:	G1: Wenn ich zwei Mengen mit unterschiedlich gefärbten Elementen zusammenfüge, dann spielt die Anordnung der Elemente keine Rolle und das Ergebnis[9] ist dasselbe.
Fall:	F_e1: Zwei Mengen mit unterschiedlich gefärbten Holzwürfeln werden zusammengefügt. (vgl. T 1.3+1.5)

Abb. 6: Mögliche Abduktion zu Peggys Aufgabenbearbeitung mit der „enaktiven Karte“

Wie dargestellt, wird der erklärende Fall F_e1 (s. Abb. 6) in der Interaktion nur angedeutet und auch das Gesetz bleibt vorrangig implizit. Entsprechend soll nun zunächst versucht werden, verschiedene *Spielarten* der Abduktion zu finden, die sowohl theoretisch (aus fachlicher Perspektive) als auch empirisch (anhand der öffentlich werdenden Interaktion) zur Sequenz passen. Es ließen sich auch andere Fälle und Gesetze rekonstruieren. Diese *Spielarten*, als verschiedene mögliche Abduktionen, die quasi ‚durchgespielt‘ werden, sollen ausschnitthaft den Deutungsspielraum möglicher stattfindender Prozesse beleuchten und lassen sich wie folgt rekonstruieren:

Es lässt sich zu dem beschriebenen Gesetz G1 (s. Abb. 6) auch folgender Fall (F_e2) rekonstruieren, welcher die Farben der Holzwürfel in den Blick rückt:

F_e2: Eine Menge mit gelben und eine Menge mit blauen Holzwürfeln wird zusammengefügt. Denn gelbe und blaue Holzwürfel wären, wie in G1 gefordert, zwei Mengen mit unterschiedlich gefärbten Elementen.

Dieser alternative Fall (F_e2) zu G1 würde allerdings auch zu folgendem Gesetz (G2) passen, welches bereits eine Spezifizierung der Farben der Elemente beinhaltet:

G2: Wenn ich eine Menge mit gelben und eine mit blauen Elementen zusammenfüge, spielt die Anordnung der Elemente keine Rolle und das Ergebnis ist dasselbe.

F_e1 würde jedoch nicht mehr zu G2 passen, da die Farben der Elemente in G2 festgelegt sind, in F_e1 hingegen nicht. Das Phänomen / Resultat (R_e) ließe sich auch durch einen dritten Fall erklären, der nicht auf die Farbe der Holzwürfel fokussiert:

F_e3: Beliebige zwei Mengen an Holzwürfel werden zusammengefügt.

Das könnte beispielhaft bzw. stellvertretend mit drei blauen und fünf gelben Holzwürfeln demonstriert werden (s. Peggys Handlung T1.1-5). Ein solcher Fall F_e3 bedürfte wiederum eines anderen Gesetzes, in welchem ebenfalls von der Farbe der Elemente abstrahiert wird:

G3: Wenn ich zwei Mengen an Elementen zusammenfüge, spielt die Anordnung der Elemente keine Rolle und das Ergebnis ist dasselbe.

Dieses Gesetz könnte auch zu den beiden zuvor genannten Fällen (F_e1 & F_e2) führen, da dort die beiden zusammengefügten Mengen lediglich hinsichtlich ihrer Farbe spezifiziert sind, während G3 unabhängig der Farbgebung, also allgemeiner, ist.

Diese kleine Auswahl soll zeigen: Peggys Handlung am Material zur Bearbeitung der Aufgabe können verschiedene das Phänomen erklärende (meist implizit verbleibende) Gesetze und somit auch verschiedene potenzielle Fälle zu Grunde liegen. Zudem können diese Fälle auch verschieden kombiniert sein, da zu einem Gesetz auch verschiedene Fälle passen können und umgekehrt (zusammengefasst in Abb. 7). Alle rekonstruierten funktionalen Elemente des Abduktionsschemas finden nahezu gleichermaßen Bezugspunkt an der Interviewrealität. Insofern ist die Frage einer „besseren Passung“ nicht zu klären, sondern nur am weiteren Verlauf des Interviews rekonstruierbar.

Phänomen / Resultat: (enaktiv - e)	R_e: Die Anordnung der Holzwürfel spielt keine Rolle und die Menge (als Ergebnis) bleibt gleich.
Gesetz:	G1: Wenn ich zwei Mengen mit unterschiedlich gefärbten Elementen zusammenfüge, dann spielt die Anordnung der Elemente keine Rolle und das Ergebnis ist dasselbe.
	G2: Wenn ich eine Menge mit gelben und eine mit blauen Elementen zusammenfüge, spielt die Anordnung der Elemente keine Rolle und das Ergebnis ist dasselbe.
	G3: Wenn ich zwei Mengen an Elementen zusammenfüge, spielt die Anordnung der Elemente keine Rolle und das Ergebnis ist dasselbe.
Fall:	F_e1: Zwei Mengen mit unterschiedlich gefärbten Holzwürfeln werden zusammengefügt. (passend zu G1, G3)
	F_e2: Eine Menge mit gelben und eine Menge mit blauen Holzwürfeln wird zusammengefügt. (passend zu G1, G2, G3)
	F_e3: Zwei Mengen an Holzwürfeln werden zusammengefügt. (passend zu G3)

Abb. 7: Mögliche zu Grunde liegende Abduktionen zu Peggys Lösungsansatz mit Hilfe der „enaktiven Karte“

In der Sequenz zur Auseinandersetzung mit der Aufgabe mittels der „enaktiven Karte“ lassen sich also (auch unter Berücksichtigung verschiedener Interpretationsmöglichkeiten) verschiedene Bearbeitungen der Aufgabe rekonstruieren. Die verschiedenen Gesetze in den *Spielarten* zeigen verschiedene potenzielle Bearbeitungsideen. Im Folgenden wird betrachtet, inwiefern die Bearbeitungsideen auf eine andere Darstellung übertragbar sind.

Vorhersagen zum weiteren Interviewverlauf

Da im weiteren Verlauf der Erhebungssituation die „ikonische Karte“ vorliegt bzw. diese von Peggy genutzt wird, werden nachfolgend zunächst, entsprechend der dargelegten methodischen Schritte, Vorhersagen aufgestellt, ob und wie sich die angestellten Interpretationen zur Aufgabenbearbeitung mit Hilfe der enaktiven Darstellung (s. Abb. 7) theoretisch auf die ikonische Darstellung übertragen lassen. Dazu wird zunächst ein zu Abbildung 7 analoges Abduktionsschema (s. Abb. 8) für die ikonische Darstellung (s. Abb. 2 in Sektion 1) erstellt. Dafür müssen Phänomen und Fall konkret an die Situation und somit auf die konkrete Darstellung bezogen angepasst werden (Änderungen im Schema unterstrichen hervorgehoben). Da die Gesetze unabhängig von konkreten Eigenschaften der Würfel sind, werden diese im Abduktionsschema übernommen, um ihre potenzielle Anwendbarkeit in der neuen Situation zu prüfen.

Phänomen / Resultat: (ikonisch - i)	R_i: Die Anordnung der Kästchen spielt keine Rolle und die Menge (als Ergebnis) bleibt gleich.
Gesetz:	G1: Wenn ich zwei Mengen mit unterschiedlich gefärbten Elementen zusammenfüge, dann spielt die Anordnung der Elemente keine Rolle und das Ergebnis ist dasselbe.
	G2: Wenn ich eine Menge mit gelben und eine mit blauen Elementen zusammenfüge, spielt die Anordnung der Elemente keine Rolle und das Ergebnis ist dasselbe.
	G3: Wenn ich zwei Mengen an Elementen zusammenfüge, spielt die Anordnung der Elemente keine Rolle und das Ergebnis ist dasselbe.
Fall:	F_i1: Zwei Mengen mit unterschiedlich gefärbten Kästchen werden zusammengefügt. (passend zu G1, G3)
	F_i2: Eine Menge mit gelben und eine Menge mit blauen Kästchen wird zusammengefügt. (passend zu G1, G2, G3)
	F_i3: Zwei Mengen an Kästchen werden zusammengefügt. (passend zu G3)

Abb. 8: Abduktionen zur Vorhersage einer Übertragung auf die „ikonische Karte“

Phänomen und Fall variieren je neuer Situation (hier: je neuer Darstellung) zwangsläufig, da sie konkret auf die Situation bezogen sind. Beim Wechsel der Darstellung und gleichzeitigem Beibehalten einer Bearbeitungsidee zur Aufgabe müsste die zuvor erkannte Regelmäßigkeit (im Abduktionsschema das Gesetz) aber gleichbleibend sein. Denn die mögliche Bearbeitungsidee wird in der Rekonstruktion mit

Hilfe der Abduktion abhängig vom Gesetz bzw. darauf beruhend festgemacht.

Mit Blick darauf, wo im auf die ikonische Darstellung übertragenen Abduktionsschema (s. Abb. 8) nach wie vor eine Passung herrscht, fällt auf, dass die Gesetze G1 und G3 sowie die an die Situation analog angepassten Fälle F_i1 und F_i3 ohne weitere Änderungen auf die ikonische Darstellung übertragbar wären. Denn in der ikonischen Darstellung (s. Abb. 2 in Sektion 1) sind beispielsweise pro Reihe je zwei Mengen mit (unterschiedlichen) Elementen zu sehen, die zusammengefügt zu einer Reihe je dasselbe ergeben (in Bezug auf die Gesamtmenge/-länge).

Bei Gesetz G2 aus Abbildung 8 hingegen ist keine Passung mehr gegeben, da in der ikonischen Darstellung die Farben gelb und blau nicht auftauchen. Das Gesetz müsste also entsprechend angepasst werden, damit es zur ikonischen Darstellung passt oder die Darstellung müsste umgefärbt werden, damit sie zum Gesetz G2 passt. Damit kommt auch Fall F_i2 in der Form (ohne Änderung am Gesetz oder der Darstellung) nicht mehr in Frage.

Je nach zugrundeliegender Abduktion könnten hier beim Wechsel der Darstellung also Gesetze und damit verbundene Fälle beibehalten werden oder nicht. Ausgehend von den vorherigen Interpretationen wäre es damit denkbar, dass Peggy die ikonische Abbildung nachfolgend nutzt, um ein bisheriges Gesetz erneut aufzugreifen (z. B. Gesetze wie G1 oder G3). Allerdings muss dies nicht notwendig so sein, wie beispielsweise Gesetz G2 verdeutlicht.

Aufgabenbearbeitung mittels „ikonischer Karte"

Nachdem einige mögliche Konsequenzen dargelegt wurden, die die vorliegende Rekonstruktion zur Aufgabenbearbeitung mittels „enaktiver Karte" für den weiteren Verlauf der Situation bei Hinzunahme der „ikonischen Karte" haben könnten, wird nun mit Blick auf die Äußerungen des Kindes in der Auseinandersetzung mit der „ikonischen Karte" betrachtet, welche Konsequenzen realisiert zu werden scheinen. Es wird also analysiert, inwiefern die mittels „ikonischer Karte" rekonstruierbare(n) Bearbeitungsidee(n) zu denen der „enaktiven Karte" von zuvor passen (können). Dazu wird der weitere Verlauf des Interviews betrachtet:

Peggy bietet als Reaktion auf die ikonische Darstellung zwei Möglichkeiten einer Bildinterpretation an, von denen sie sich dann für die erste Variante entscheidet: „entweder […] die helleren Zahlen plus oder die dunkleren Zahlen plus. ich nehme jetzt mal die helleren" (T2.1). Anhand der Äußerungen, dass sie „Zahlen plus" nehmen und „vertauschen" möchte und diese Addition „auch dasselbe" ist, „wenn ich die vertausche" bzw. „das gleiche- selbe herauskommen" wird, wird deutlich, dass sie die Darstellung als zugehörig zur zu bearbeitenden Aufgabe zu identifizieren scheint (T2.1). Denn neben der Rechenoperation und dem Vertauschen der Summanden, bezieht sie sich damit wahrscheinlich auch auf das gleichbleibende Ergebnis.

2.1 Peggy	… ähm .. entweder man nimmt es so, man nimmt, *(deutet auf die hellen, dann auf die dunklen Kästchen)* die-, die <u>helleren</u> Zahlen plus oder die <u>dunkleren</u> Zahlen plus. <u>ich</u> nehme jetzt mal die helleren-, drei plus drei-, sind sechs. da ist auch dasselbe, wenn ich die vertausche *(überkreuzt die Hände)* .. ja da wäre es jetzt das gleiche, aber- … *(bewegt die Handflächen übereinander hin und her)* es wird das gleiche- selbe herauskommen.

Tab. 2: Peggys Reaktion zur ikonischen Darstellung

Ihre in der Äußerung eröffnete Möglichkeit, verschiedene Aufgaben „nehmen" zu können, deutet darauf hin, dass sie das Kommutativgesetz losgelöst von den in der Aufgabenstellung vorgegebenen Termen „$3 + 5$ oder $5 + 3$" zu begründen versucht bzw. als gültig zu erkennen scheint. Obwohl Peggy zuvor selbst aus der Materialkiste pro Elementmenge eine Farbe an Würfeln herausgesucht hat, scheint sie im Bild auf der Karte (Abb. 2) die Addition nun in Bezug auf Elemente der gleichen Farbe zu deuten. Das kann daran liegen, dass für sie nicht direkt klar zu sein scheint, wie sie die Darstellung für die Lösung der Aufgabe nutzen kann bzw. soll. Festmachen lässt sich diese Interpretation von Unsicherheit seitens Peggys an den zwei verschiedenen Möglichkeiten der Nutzung der Abbildung (entweder hell oder dunkel – T2.1) sowie den Sprechpausen. Statt eine Unsicherheit zu identifizieren, kann man die Sequenz aber auch so deuten, dass Peggy das Kommutativgesetz auch aufgabenunabhängig erkennen kann und in der Abbildung dafür verschiedene Möglichkeiten erkennt und sich für eine entscheidet.

Mit Blick auf die oben rekonstruierten Gesetze in der Auseinandersetzung mit dem Material (enaktiv, s. Abb. 7) wäre eine Übertragung der bisherigen Vorgehensweise im Sinne von Gesetz G1 und G2 für Peggy notwendig mit Änderungen verbunden: Aus „zwei Mengen mit unterschiedlich gefärbten Elementen" (G1) bzw. aus „einer Menge mit gelben und einer mit blauen Elementen" (G2) müssten schlicht „zwei Mengen" werden. Dann wäre es auch auf zwei gleich gefärbte Mengen anwendbar – was zu Peggys Äußerungen in T2.1 passen würde. Nur mit Blick auf Gesetz G3 (s. beispielhaft rekonstruierte Gesetze) könnte Peggy ihre Vorgehensweise beibehalten. G3 könnte daher als ein der Vorgehensweise möglicherweise (implizit) zu Grunde liegendes Gesetz ohne Änderung direkt auf die ikonische Abbildung und das Vorgehen, entweder die hellen oder die dunklen Kästchen zu betrachten, angewendet werden. Denn auch für die Addition von den von ihr fokussierten je drei hellen Kästchen pro Reihe, als „zwei Mengen an Elementen“ (G3), die man zusammenfügt, bleibt das Ergebnis gleich, wenn man die Mengen vertauscht, auch wenn es sich in diesem konkreten Beispiel um zwei gleiche Mengen handelt. Mit ihrer kurzen Anmerkung zu dem Beispiel drei plus drei – „ja da wäre es jetzt das gleiche“ (T2.1) – gibt sie darüber hinaus den Anlass zur Interpretation, dass ihr der Sonderfall dieses Beispiels von zwei gleichen Mengen bewusst zu sein scheint und es also womöglich als ein stellvertretendes Zahlenbeispiel zu sehen ist. Obwohl Peggy also zunächst anders auf die Darstellung reagiert, als sich fachlich vermuten ließe, lässt sich mit G3 ein mögliches, der Bearbeitung Peggys zugrundeliegendes Gesetz rekonstruieren, welches sich von der Bearbeitung mittels der „enaktiven“ zur „ikonischen Karte“ beibehalten ließe. Aber auch Änderungen bisher zugrundeliegender Gesetze können, wie beschrieben, möglich sein.

Zusammenfassend lässt sich anhand dieser Sequenz und aus Peggys Perspektive (Deutung der ikonischen Darstellung als Betrachtung von Mengen gleicher Farbe) mit Hilfe der Rekonstruktion bereits eine Trennung zweier möglicher Prozesse erkennen:

1) Eine potenzielle Bearbeitungsidee, die auf G3 basiert *(Vertauschen von zwei Mengen)*, lässt sich im Wechsel[10] von der „enaktiven“ auf die „ikonische Karte“ übertragen, ohne dass am (implizit genutzten) Gesetz etwas angepasst werden muss. Anpassungen werden lediglich in Bezug auf die Holzklötze hin zu den Kästchen auf Ebene vom Phänomen und den Fällen nötig – also in der konkreten Realisierung des Gesetzes.

2) Eine potenzielle Bearbeitungsidee, die auf G1 oder G2 basiert *(Vertauschen unterschiedlich bzw. gelb/blau gefärbter Mengen)*, lässt sich nur durch Änderungen der Gesetze auf die ikonische Darstellung übertragen, sofern man die Darstellung so deutet, dass immer gleichfarbige Elemente zusammen betrachtet werden. Die anhand dieser Gesetze rekonstruierten Vorgehensweisen der Bearbeitung wären also mit dieser Deutung nicht ohne Änderungen auf die neue Darstellung übertragbar.

Der für eine beobachtende Person (z. B. die Interviewerin) „irritierende“ Moment dieser Situation im Übergang von der einen zur anderen Darstellung – hier, dass Peggy ihre Bearbeitungsidee mit Hilfe der Holzklötze nicht auf die ikonische Darstellung zu übertragen scheint – lässt sich also mit Hilfe der Abduktion näher beschreiben und untersuchen.

5. Ergebnisse – Um-/Neudeuten

Im Folgenden wird zunächst auf allgemein erkennbare Aspekte in den Rekonstruktionen eingegangen, bevor die beiden in Sektion 4 herausgearbeiteten Prozesse beim Darstellungswechsel mit Hilfe der vorangestellten Theorie der Abduktion diskutiert werden.

Die Analysen haben gezeigt, dass der Umgang mit den Darstellungen auf mehreren Wegen fachlich zielführend sein kann. Somit ist die Mehrdeutigkeit der gegebenen Darstellungen sowohl die Voraussetzung für verschiedene (passende) Bearbeitungswege als auch ein Potential für fachliche Erkenntnisprozesse. In der Rekonstruktion möglicher Bearbeitungsprozesse mittels des Abduktionsschemas fällt auf (s. v. a. Abb. 6-8), dass sich beim Wechsel der Darstellung auch konkret auf diese eingelassen werden muss. In der Rekonstruktion mittels der Abduktion lässt sich dies als Phänomen verstehen: So muss im obigen Beispiel im Wechsel von der enaktiven zur ikonischen Darstellung von Holzwürfeln zu Kästchen gewechselt werden – in den Worten der Abduktion: Das Konsequens eines Gesetzes ($R(x_j)$ s. Abb. 3) muss in der neuen Darstellung exemplifiziert werden können, um ein Gesetz anzuwenden. Das Konsequens ist dann auch in der Rekonstruktion im Phänomen / Resultat $R(x_0)$ wiederzufinden. So ist also der erste wichtige Schritt, den konkreten Bezug der (neuen) Darstellung zur Aufgabe zu erkennen – also die Realisierung des vorherigen Phänomens in der neuen Darstellung. Lernende benötigen dafür die Idee, dass Aufgaben oder Aspekte von Aufgaben auf verschiedene Weise analog, z. B. mittels anderer Darstellungen oder einem anderen Zahlenbeispiel, umgesetzt werden können. Ein solcher Bearbeitungsprozess setzt Erfahrung in der Bearbeitung analoger Aufgaben voraus, welche beispielsweise durch die Bearbeitung sogenannter „schöner Päckchen“ (oder „Entdeckerpäckchen“ etc.) entstehen könnte, da auch dabei ein vorheriges Vorgehen ähnlich wieder anzuwenden ist.

Beim Nutzen einer Darstellung für den Bearbeitungsprozess geht es neben dem Erkennen des Bezuges der Darstellung zur Aufgabe auch darum, wie man die Darstellung für die Bearbeitung der Aufgabe nutzen kann. Während das Phänomen und entsprechend auch der Fall als Realisierungen des Gesetzes stets konkret an die Darstellung gebunden sind, lässt sich das Gesetz je nachdem mit oder ohne Änderungen auf andere Darstellungen/Darstellungsformen übertragen. So lässt sich im Beispiel oben ein Gesetz wie G2, welches konkret auf gelbe und blaue Elemente bezogen ist, nicht ohne Änderungen auf die grauen Kästchen übertragen, ein Gesetz wie G3 hingegen, welches auf zwei Mengen (ohne Farbvorgabe) bezogen ist, schon. Auch wenn die Gesetze im Bearbeitungsprozess meist implizit bleiben, sind sie in der Rekonstruktion für die Unterscheidung möglicher stattfindender Prozesse relevant, da sie als möglicher Anhaltspunkt für die Bearbeitungsidee der Lernenden gedeutet werden können.

Die Unterscheidung theoretisch möglicher Erkenntnisprozesse beim Wechsel einer Darstellung lässt sich mit den Begriffen „*Umdeuten*“ und „*Neudeuten*“ bezeichnen und begrifflich trennen sowie mit den Arten der Abduktion theoretisieren:

Umdeuten

Als *Umdeuten* wird eine *Übertragung* einer Bearbeitungsidee von einer zur anderen Darstellung verstanden. Dies zeichnet sich in der Rekonstruktion dadurch aus, dass die (implizit genutzten) Gesetze der Abduktion ohne weitere Anpassung auf die neue Darstellung angewendet werden können. Anpassungen werden lediglich auf Ebene von Phänomen und Fall nötig – also in der konkreten Realisierung des Gesetzes mit/in der Darstellung (hier in Bezug auf die konkreten Elemente – z. B. Holzklötze oder Kästchen). Dies kann sowohl bei einer unter- als auch bei einer übercodierten Abduktion zutreffen, da Gesetze beibehalten werden, also bereits bekannt sind – unabhängig davon, wie naheliegend das Gesetz in der spezifischen Situation zu sein scheint (naheliegendes, bekanntes Gesetz – übercodierte Abduktion) und ob es das einzige bekannte passende Gesetz ist (mehrere konkurrierende, bekannte Gesetze bzw. nicht naheliegendes Gesetz – untercodierte Abduktion).

Neudeuten

Als *Neudeuten* wird der Prozess verstanden, der sich durch das *Ändern* der Bearbeitungsidee anhand der neuen Darstellung auszeichnet. Das Neudeuten zeichnet sich somit in der Rekonstruktion der Abduktionen durch die Änderung vom Gesetz relativ zur vorherigen Aktivität aus. Bisherige rekonstruierbare Bearbeitungsideen lassen sich also nicht ohne Änderung der Gesetze auf die andere Darstellung als übertragbar erkennen. Dies kann bei tatsächlicher Neugenerierung eines Gesetzes in der Situation der Bearbeitung der zweiten Darstellung eine kreative Abduktion sein. Wenn das nun verwendete und im Vergleich zur Bearbeitung mit der vorherigen Darstellung andere, situativ „neue“ Gesetz hingegen bereits bekannt war, also das Gesetz zu einem anderen, aber dennoch „bekannten“ Gesetz geändert wird, kann auch eine untercodierte Abduktion vorliegen. Hier würden zumindest zwei bekannte Gesetze miteinander konkurrieren. Dass ein weiteres bekanntes Gesetz quasi auf der Hand liegt, ist aus fachlicher Sicht eher unwahrscheinlich, zumal das zuvor behandelte und das aktuell angewendete Gesetz zumindest miteinander konkurrieren müssten. Gleichwohl bleibt fraglich, ob sich dies auch aus der Perspektive von Lernenden so verhält.

Liegt also eine Situation vor, in der (innerhalb der Bearbeitung einer Aufgabe) die Darstellung gewechselt wird, so kann abhängig davon, ob das Gesetz mit oder ohne Änderungen „übernommen“ wird, zwischen den Prozessen des *Um*- und *Neudeutens* unterschieden werden. Anders formuliert kann beim Übergang zu einer anderen Darstellung:

- eine bisherige Bearbeitungsidee analog erneut umsetzbar sein.

  → Übertragung des Gesetzes bzw. der Gesetze und somit ist ein *Umdeuten* möglich.

- eine bisherige Bearbeitungsidee inhaltlich fortsetzbar/ausweitbar sein.

  → Ausweitung des Gesetzes bzw. der Gesetze und somit ist ein *Neudeuten* (auch wenn ggf. nur „kleine“ Ergänzungen/Anpassungen am Gesetz nötig sind) möglich bzw. nötig.

- eine zur vorherigen Aktivität *andere/neue* Bearbeitungsidee anwendbar/entwickelbar sein.

  → Wechsel des Gesetzes bzw. der Gesetze zu anderen bekannten oder neu generierten Gesetzen und somit ist ein *Neudeuten* erforderlich.

Dabei müssen die Situationen nicht wie im Beispiel von Peggy direkt im Anschluss aneinander erfolgen.

Diskussion der Ergebnisse

Die Unterscheidung von Um- und Neudeuten lässt noch keinerlei Aussage über die Güte dieser Prozesse zu (s. dazu Ausblick in Sektion 6). Es könnte zunächst der Anschein erweckt werden, dass das

Umdeuten „einfacher" als ein *Neudeuten* sei, da das Gesetz übernommen wird. Jedoch kann es für das *Umdeuten* (also das Beibehalten eines Gesetzes) nötig sein, die neue Darstellung a) anders zu deuten oder b) sogar zu ändern, um das Gesetz wieder anwenden zu können. Im Beispiel von Peggy wäre a) für ein *Umdeuten* von G1 (unterschiedlich gefärbte Elemente) nötig, dass in der ikonischen Darstellung statt entweder heller oder dunkler Kästchen zu nutzen, ein Zusammenfügen beider Farben (z. B. pro Reihe) betrachtet werden muss, die Darstellung also anders gedeutet werden muss, als ggf. zunächst getan. Oder b) in Bezug auf G2 (bezogen auf gelbe und blaue Elemente) wäre für ein *Umdeuten* nötig, dass im Bild die Kästchen von hell- und dunkelgrau auf gelb und blau umgefärbt werden und somit die Darstellung verändert wird, um ein Gesetz wie G2 beizubehalten. Diese komplexere Variante des Umdeutens (bezogen auf a) und b)) wird als *„situationsveränderndes Umdeuten"* bezeichnet. Es wird deutlich, dass der Prozess des *Umdeutens* auch in dem Sinne komplexer sein kann, als dass die Übernahme von Gesetzen wie beschrieben mit weiteren anderen Schritten (Ändern der Darstellung bzw. der Deutung dieser) verbunden sein kann. Somit muss dann in gewisser Weise die „Situation verändert" werden, um das Gesetz beizubehalten. Die Anforderungen an das *Neudeuten* können wiederum auch „niedriger" sein, als es zunächst den Anschein hat. Dies beispielsweise, wenn durch die neue Darstellung (auch) das Nutzen eines anderen als dem zuvor verwendeten Gesetz angeregt wird. Somit sei festgehalten, dass das Um-/Neudeuten zwei unterscheidbare Prozesse sind, deren Anforderungen je nach Situation und Individuum verschieden sein und im Vorfeld nicht qualitativ eingeordnet werden können.

Da für die Unterscheidung der Prozesse irrelevant ist, ob das je verwendete, in der Situation meist implizit bleibende Gesetz bereits bekannt ist oder nicht, lässt sich die Unterscheidung des *Um-* und *Neudeutens* mit Hilfe des Abduktionsschemas herausarbeiten, aber darüber hinaus von den Arten der Abduktion abgrenzen. Beim *Um-* und *Neudeuten* geht es fokussiert darum, ob im Vergleich zur Aktivität mit der vorherigen Darstellung eine Bearbeitungsidee (rekonstruierbar mittels der Gesetze in einer entsprechenden Abduktion) übertragen werden kann oder nicht. Dabei lässt sich unterscheiden, was potenziell übertragbar wäre und was vermeintlich von den Lernenden in der Situation übertragen zu werden scheint. Je nachdem, welches Gesetz der Bearbeitung zu Grunde liegt, hat dies also Einfluss auf die Prozesse beim Darstellungswechsel: Kann das verwendete Gesetz theoretisch überhaupt beibehalten werden oder muss es geändert werden? So kann es also auch Situationen geben, in denen ein *Umdeuten* gar nicht möglich und somit ein *Neudeuten* nötig wäre. Welche der beispielhaft rekonstruierten Gesetze hypothetisch übertragbar sind, wurde in Sektion 4 dargelegt. Daran wird deutlich, dass je nach genutztem Gesetz, dies Einfluss auf eine anschließende Übertragbarkeit auf eine andere Darstellung hat, da Gesetze auch verschieden „gut" übertragbar sind. Ein gelingender Darstellungswechsel setzt voraus, dass die der Deutung zugrundeliegenden Gesetze nicht untrennbar mit konkreten Materialeigenschaften verbunden sind. Gesetze können jedoch beispielsweise Farben, Formen o. Ä. von den betrachteten Elementen beinhalten. Entsprechend können sie verschiedene Allgemeinheitsgrade besitzen, die eine Übertragung auf andere Darstellungen beeinflussen und auch erschweren oder gar unmöglich machen können. Gesetze können auch auf verschiedene Strukturen verweisen, deren Deutung eine andere Darstellung möglicherweise nicht zulässt.

Da die verwendeten Gesetze zumeist implizit bleiben, entsteht, wie in Sektion 4 angedeutet, ein gewisser Deutungsspielraum in der Rekonstruktion möglicher Gesetze, der das theoretische Herausarbeiten dieser Prozesse wiederum ermöglicht. Unabhängig davon, ob bzw. dass ein *Um-/Neudeuten* möglich ist, müssen Lernende diese Prozesse auch umsetzen (können). Es ist zu erwähnen, dass ein Nicht-Beibehalten der Vorgehensweise eines Kindes (also: ein nicht gleichbleibendes Gesetz in der rekonstruierbaren Abduktion) nicht gleichbedeutend damit ist, dass die ursprüngliche Idee nicht auf die neue Darstellung übertragen werden kann. Auch andere Umstände der Situation können dazu führen, dass eine Bearbeitungsidee verändert oder neu generiert wird. Eine neue Darstellung kann beispielsweise sowohl bei theoretisch möglicher als auch bei nicht möglicher Übertragbarkeit von Gesetzen dazu anregen, neue Bearbeitungsideen zu generieren. Dies könnte auch in der Situation von Peggy erfolgt sein. An dieser Stelle soll jedoch nicht über die „Gründe" für ein Um-/Neudeuten spekuliert werden, sondern der Fokus auf der Unterscheidung dieser Prozesse liegen.

In Bezug auf die beispielhaft analysierte Sequenz lassen sich u. a. folgende konkreten Prozesse des Um-/Neudeutens als möglich andenken:

- Umdeuten:

  Gesetz G3 (hier: bezogen auf beliebige zwei Mengen) lässt sich von der enaktiven Darstellung der verschiedenen Anordnung gelber und blauer Holzklötze auf die Deutung der ikonischen Darstellung entweder die hellen oder die dunklen Kästchen zu betrachten übertragen. Es kann ein *Umdeuten* stattfinden.

- Neudeuten:

  Gesetz G2 (mit konkretem Farbbezug der gelben/blauen Holzklötze vs. hell-/dunkelgrauen Kästchen in der ikonischen Darstellung) kann nicht, ohne Änderungen an diesem Gesetz (hinsichtlich der Färbung der Elemente) vorzunehmen, von der enaktiven auf die ikonische Darstellung übertragen werden, sodass hier also ein *Neudeuten* nötig wäre.

- Situationsveränderndes Umdeuten:

  Um dieses Gesetz G2 doch beizubehalten, also für ein potenziell mögliches *Umdeuten*, müsste die Darstellung umgefärbt, also die konkret vorgegebene Situation verändert werden. Dies wäre dann im Sinne des *situationsverändernden Umdeutens* ein etwas komplexerer Prozess, aber dennoch dem *Umdeuten* zuzuordnen.

- Neudeuten trotz möglichem Umdeuten:

  Gesetz G1 (mit Bezug auf beliebige zwei Farben) zeigt, dass die Möglichkeit für ein *Umdeuten* (von zweifarbigen Holzklötzen auf zweifarbige Kästchen) zwar gegeben sein kann, aber dennoch ein *Neudeuten* nötig wird, wenn die Darstellung ggf. nicht entsprechend gedeutet wird, um dieses Gesetz übernehmen zu können (hier: Fokus vom Kind nur entweder auf helle oder dunkle Kästchen).

- Situationsveränderndes Umdeuten:

  Für ein *Umdeuten* von G1 müsste das Kind also seine Deutung der Darstellung anpassen und helle und dunkle Kästchen zusammen betrachten.

Da die Gesetze implizit bleiben, ist die konkrete Zuordnung der Prozesse in der Beobachtung schwierig. An dieser Stelle geht es allerdings zunächst primär um die theoretische Trennung dieser möglichen Prozesse, sodass der bestehende Deutungsspielraum dazu ausschnitthaft dargelegt und genutzt wird. Dies gilt unabhängig davon, welche Gesetze tatsächlich zur beobachtbaren Bearbeitung der Aufgabe geführt haben und auch ohne Wertung, welches der verwendeten Gesetze womöglich „besser“ ist. Die Prozesse des Um-/Neudeutens sind in diesem Artikel am Beispiel einer Sequenz herausgearbeitet worden, können aber unabhängig von der konkreten Aufgabe und deren Fachinhalt festgehalten werden. Somit ist eine Übertragbarkeit der Analyse und somit auch der Ergebnisse allgemein auf Aufgabensituationen mit Darstellungswechseln denkbar.

Zusammenfassend lassen sich folgende Ergebnisse dieser Studie festhalten:

- Die im Theorieteil festgestellten Elemente zum Umgang mit Mehrdeutigkeit von Darstellungen konnten in der Studie bestätigt werden. Siehe z. B., dass Mehrdeutigkeit im Umgang mit Darstellungen eine nötige Voraussetzung ist, aber auch Potenzial für verschiedene (passende) Bearbeitungswege bietet und so auch der Umgang mit den angebotenen Darstellungen auf mehreren Wegen fachlich zielführend sein kann.

- Relevante Aspekte im Darstellungswechsel sind dabei: das *Einlassen* auf (neue) Darstellungen, das *Erkennen* des Bezuges der Darstellung zur Aufgabe und wie die Darstellung bei der Bearbeitung helfen kann, sowie das *Exemplifizieren des Konsequens eines Gesetzes* – also das Anpassen des Phänomens an die Darstellung.

- *Umdeuten (inkl. ‚situationsveränderndem Umdeuten‘) und Neudeuten* lassen sich als relevante Prozesse im Wechsel der Darstellung in Abhängigkeit davon, ob eine Bearbeitungsidee übertragen oder geändert wird, herausstellen.

Im Zusammenhang mit den Prozessen des Um-/Neudeutens wurden zudem folgende Aspekte herausgearbeitet:

- Chancen und Hürden des Um-/Neudeutens sind abhängig von der individuellen Situation.

- Sensibilisierung für die Komplexität des Darstellungseinsatzes und des Darstellungswechsels anhand der Herausarbeitung der Prozesse des Um-/Neudeutens.

- Sensibilisierung hinsichtlich der Notwendigkeit verschiedener Deutungsprozesse.

Dabei ist insbesondere die Herausarbeitung der Prozesse des Umdeutens und Neudeutens als zentrales Ergebnis des Artikels hervorzuheben.

6. Fazit und Ausblick

Durch die vorliegende Studie kann nochmals bestätigt und verdeutlicht werden, welche entscheidende

Rolle die Mehrdeutigkeit von Darstellungen einnimmt: Der Umgang mit Darstellungen (aber auch Arbeitsmitteln, Veranschaulichungsmitteln, …) ist nicht auf das jeweilige Medium beschränkt, weshalb sie aus fachlicher Perspektive Einsatz finden können. Die Auseinandersetzung mit der Abduktion im Methodologieabschnitt zeigt, dass sich aktiv (und interaktiv) mit (Lern-)Angeboten auseinandergesetzt werden muss. Es müssen aktiv Beziehungen konstruiert und die Angebote erst so gedeutet werden, dass entsprechendes Wissen dazu abgerufen werden kann. Auch im Wechsel der Darstellung können Bearbeitungsideen zu Aufgaben verschieden übertragen oder geändert werden. Dies kann sowohl im Unterschied zu einer intendierten Deutung von Expert*innen bzw. einer fachlich möglichen Deutung, als auch individuell geschehen: So konnte in der vorgestellten Sequenz eine selbst eingebrachte Bearbeitungsidee (vermeintlich) nicht analog mittels einer anderen Darstellung fortgesetzt werden. Die Analyse hat jedoch gezeigt, dass im Horizont des Deutungsspielraums durchaus eine Übertragung einer Bearbeitungsidee stattgefunden haben kann, lediglich mit einem anderen als zunächst aus fachlicher Perspektive erwartbaren Gesetz.

Um solche Phänomene näher fassen zu können, wurden die Prozesse *des Um- und Neudeutens* als primär unterscheidbare Prozesse im Wechsel der Darstellung mit Hilfe der Abduktion theoretisch herausgearbeitet. Das Um- bzw. Neudeuten als Prozess bezieht sich dabei nicht auf den Umgang mit einzelnen Aspekten, die gedeutet werden, sondern ist je als Prozess der Übernahme bzw. des Wechsels der Bearbeitungsidee im Wechsel der Darstellung zu verstehen. In der Analyse hat sich dabei die Theorie der Abduktion sowohl als methodologische Grundlage des Vorgehens im Sinne der interpretativen Unterrichtsforschung bewährt, als auch in der Anwendung als Analysewerkzeug für die nähere Betrachtung des Bearbeitungsprozesses, um insbesondere über die Rekonstruktion möglicher Gesetze potenzielle Bearbeitungsideen ableiten zu können.

Für Lehrende lassen sich durch die Herausarbeitung der Prozesse des *Um-* und *Neudeutens* folgende Erkenntnisse festhalten:

- Der Darstellungswechsel eröffnet vielfältige Handlungsoptionen – sowohl für die Lernenden in der Realisierung, als auch für die Lehrenden im Erkennen der realisierten Optionen.
- Die Relevanz und auch die Herausforderung des Um-/Neudeutens als mögliche Prozesse im Darstellungswechsel sind zu berücksichtigen, um Lernprozesse gezielt zu gestalten.
- Der Wechsel von Darstellungen ist nicht selbstverständlich. Das Hinzuziehen und das Wechseln von Darstellungen können als mögliche Hilfestellung verschiedene Optionen für den Bearbeitungsprozess einer Aufgabe eröffnen, die hilfreich, aber auch hinderlich sein können.

Anhand einer beobachtbaren Interaktion zu erkennen, welche Gesetze (implizit) von Beteiligten genutzt werden und somit, ob tatsächlich relativ zum vorherigen Gesetz ein *Um-* oder *Neudeuten* stattfindet, ist wie beschrieben schwer bzw. in der Situation selbst kaum möglich. Folgende Szenarien sind mitunter zu berücksichtigen:

- Zuvor verwendete Gesetze können unter Umständen (auch fachlich) gar nicht auf andere Darstellungen übertragen werden, beispielsweise weil sie sich auf konkrete Eigenschaften von Elementen beziehen, die in der neuen Darstellung nicht gegeben sind. Dies macht ein *Neudeuten* nötig.
- Zudem können Gesetze auch trotz möglicher Übertragbarkeit im Wechsel der Darstellung geändert werden. Ein *Neudeuten* würde stattfinden, obwohl ein *Umdeuten* ebenfalls möglich ist.
- Außerdem können auch andere Gesetze dem Vorgehen zu Grunde liegen, als im Erwartungshorizont der beobachtenden Person existent sind.
- Es können darüber hinaus auch trotz fachlicher Möglichkeit zum zielführenden *Um-* und/oder *Neudeuten* Bearbeitungsprozesse abbrechen.
- Oder Bearbeitungen werden zu weniger zielführenden Wegen geändert. Ein *Neudeuten* findet statt, ist aber wenig zielführend.

Für beide Prozesse ist eine entsprechende Übernahme bzw. Änderung oder Wechsel von Gesetzen zunächst zu erkennen und dann umzusetzen. Das ist sowohl für das *Um-* als auch für das *Neudeuten* mit zahlreichen *Deutungsprozessen* verbunden. Darunter fallen:

- die Deutung der Darstellung,
- die Deutung der Passung der Darstellung zur Aufgabe,
- die Deutung der neuen Darstellung (zu der gewechselt wird),

- die Deutung der Passung der neuen Darstellung zur Aufgabe und
- die Deutung der Passung der neuen Darstellung zur bisherigen Vorgehensweise und den damit verbundenen Gesetzen.

Grundlage hierfür ist, dass die Bearbeitungsidee auf einem Gesetz beruht, welches in der Darstellung bzw. dem Umgang mit dieser exemplifiziert werden muss. Beim Exemplifizieren des Gesetzes sind, wie aufgelistet, verschiedene Deutungsprozesse nötig. Die Anforderung an solche Bearbeitungsprozesse bezieht sich also in den Worten der Abduktion gesprochen sowohl auf das Finden passender Gesetze zum Bearbeiten der Aufgabe als auch auf das Finden passender Phänomene und Fälle, um die Gesetze zur Lösung der Aufgabe auch konkret mit der Darstellung anwenden zu können. Entdeckungsprozesse können auch bei gleichen Phänomenen in unterschiedlichen Gesetzen münden (Meyer, 2021). Ebenso wie es verschiedene Gesetze geben kann, ist auch die Zuordnung des Falls zum Gesetz nicht eindeutig. Zwar wird der Fall gleichsam mit dem Gesetz assoziiert oder gebildet und bezieht sich ebenfalls auf das im Phänomen betrachtete Subjekt. Jedoch kann auch die im Gesetz betrachtete Eigenschaft zum Subjekt verschiedentlich im Fall auftauchen. Wenn beispielsweise im Gesetz „verschiedene Farben von Würfelmengen“ auftauchen, dann kann die im Fall vorgenommene Konkretisierung z. B. auf gelb und blau oder hell- und dunkelgrau hinauslaufen, es sind somit verschiedene Fälle zum gleichen Gesetz denkbar. Die Rekonstruktionen in Sektion 4 haben diese Offenheit im Erkenntnisprozess sowohl hinsichtlich verschiedener Gesetze als auch verschiedener Fälle bestätigt. Zum einen sind mehrere Gesetze und jeweils auch mehrere Fälle möglich und zum anderen muss ein zum Gesetz passender Fall auch zur vorliegenden neuen Darstellung passen bzw. in ihr realisierbar sein, um diese Darstellung entsprechend des bisherigen Gesetzes nutzen zu können. Neben der fachlich möglichen Realisierbarkeit eines zum Gesetz passenden Falles mit der gegebenen Darstellung, muss diese Passung entsprechend auch gedeutet werden.

Eine Unterscheidung der Prozesse in *Um*- oder *Neudeuten* legt neben der Frage, welcher Prozess „einfacher“ oder „schwieriger“ ist, auch die Überlegung nahe, welcher der Prozesse didaktisch bzw. fachlich betrachtet „besser“ ist. Beides lässt sich nicht pauschal beantworten. Hingegen lässt sich festhalten, dass a) das *Umdeuten* mit dem Beibehalten der Bearbeitungsidee und b) das *Neudeuten* mit dem Ändern der Bearbeitungsidee einhergehen. Damit ist für das *Umdeuten* das Vernetzen der Darstellungen relevanter als für das *Neudeuten*, denn wird beim Wechsel der Darstellung auch die Bearbeitungsidee geändert, lässt sich weniger von einer Darstellungsvernetzung sprechen. Über die Definition der Prozesse hinaus lässt sich auch andenken, inwiefern die Prozesse nützlich oder hinderlich sind.

Umdeuten – als notwendiger Prozess zum Beibehalten einer Bearbeitungsidee

- *Nützlich* – Das *Umdeuten* kann nützlich sein, wenn dadurch bestehende (zielführende) Bearbeitungsideen auf vielfältige Weise mittels verschiedener Darstellungen umgesetzt werden können. Dies kann für eine hohe *Flexibilität* und ein *tiefes Verständnis* sprechen (s. a. Duval, 2006; Laakmann, 2013; Prediger & Wessel, 2012).
- *Hinderlich* – Das *Umdeuten* kann hinderlich sein, wenn die Bearbeitungsidee fachlich weniger bis gar nicht zielführend und somit auch nicht beizubehalten ist.

Neudeuten – als notwendiger Prozess zum Ändern einer Bearbeitungsidee

- *Nützlich* – Das *Neudeuten* ist als nützlich einzuordnen, wenn zu einer anderen passenden Bearbeitungsidee gewechselt und dadurch das Repertoire an Bearbeitungswegen erweitert wird oder von einer weniger zielführenden zu einer fachlich zielführenden Bearbeitungsidee gewechselt wird (bzw. die Idee so angepasst wird, dass es zielführender ist). Ebenfalls nützlich ist das *Neudeuten*, wenn durch den Wechsel der Darstellung überhaupt eine erste Idee initiiert wird.
- *Hinderlich* – Das *Neudeuten* ist hinderlich, wenn beim Wechsel oder Ändern der Bearbeitungsidee fachlich zielführende Ideen durch weniger/nicht zielführende Bearbeitungen abgelöst werden.

Der Ausblick zeigt, dass auch die „Güte“ der Prozesse des *Um-/Neudeutens* immer nur relativ zur vorherigen Bearbeitungsidee und somit nur relativ zur individuellen Situation eingeordnet werden kann. Da die verwendeten Gesetze wie beschrieben zumeist implizit verbleiben und auch andere sein können als im Horizont der Sequenz erwartbar, ist sowohl die Identifikation, welcher Prozess stattfindet, als auch die Bestimmung, welcher Prozess in einer Situation der „bessere“ ist, lediglich relativ zu dem, was in der

Situation öffentlich erkennbar ist, zu treffen. Festzuhalten ist aber: Es lassen sich diese Prozesse im Wechsel der Darstellung unterscheiden und sie können beide nützlich oder hinderlich für die Aufgabenbearbeitung sein.

Zu berücksichtigen ist, dass eine fachlich mögliche Übertragbarkeit von Bearbeitungsideen auf andere Darstellungen nicht heißt, dass es Lernende auch entsprechend wahrnehmen bzw. deuten und umsetzen. Zudem lässt sich aufgrund des großen Deutungsspielraumes von einem (vermeintlichen) Fehlen/Ausbleiben einer Übertragung nicht darauf schließen, dass Bearbeitungsideen nicht übernommen werden können. Mögliche Gründe dafür können sein, dass ein anderes Gesetz dem Handeln zu Grunde liegen kann, als es in der öffentlichen Interaktion den Anschein hat, die Darstellung andere Ideen initiiert, Lernende abgelenkt sind u. v. m. Die Gründe wann und warum ein Um-/Neudeuten stattfindet oder nicht sind ebenfalls sehr von der Situation und dem Individuum abhängig und es kann höchstens spekuliert werden. *Neudeuten* soll und kann *nicht* gleichgesetzt werden mit einem missglückten oder nicht-gelingendem *Umdeuten*, sondern beide sollen als mögliche Prozesse verstanden werden, die (je nach bisheriger Vorgehensweise) fachlich zielführend oder hinderlich sein können. Darüber hinaus können die Prozesse auch bewusst oder unbewusst ablaufen: Im Sinne einer Anwendung einer Heuristik wie dem Anwenden von Bekanntem aus anderen Kontexten, kann ein Umdeuten beispielsweise sehr forciert stattfinden (für eine Übersicht zu Heuristiken s. u. a. Bruder, 2000).

Die in Sektion 4 vorgestellte Sequenz zeigt, dass eine vorgegebene Darstellung auch anders als didaktisch intendiert und dennoch fachlich zielführend genutzt werden kann und dabei verschiedene *Um-/Neudeutungsprozesse* eine Rolle spielen können – auch wenn die Prozesse nicht unbedingt eindeutig in der Situation identifizierbar sind. Somit ergibt sich für Lehrkräfte zu den oben aufgelisteten Konsequenzen dieser Studie noch Folgendes:

- Lehrkräfte sollten neben dem Blick auf die Prozesse des *Um-* und *Neudeutens* generell offen für andere Deutungen und Vorgehensweisen von und mit Darstellungen sein und sich dem in Sektion 4 angedeuteten Deutungsspielraum, der durch die Mehrdeutigkeit (u. a. durch die implizit verbleibenden Gesetze) entsteht, bewusst sein (s. zur Kreativität von Kindern auch Selter & Spiegel, 2007).
- Didaktisch intendierte Übertragungen von Ideen auf andere Darstellungen seitens der Lehrenden bedürfen der Voraussetzung, dass entsprechende Gesetze auch schon in der Darstellung davor von Lernenden erkannt und genutzt wurden bzw. ein zuvor genutztes Gesetz überhaupt übertragbar ist. Die Übertragbarkeit von Gesetzen setzt wie beschrieben voraus, dass das Gesetz in der jeweiligen Darstellung exemplifizierbar ist (also entsprechend Phänomen und Fall gefunden werden können) und dies auch von den Lernenden erkannt wird.

Abschließend lässt sich festhalten, dass sich ausgehend von empirisch herausgearbeiteten erklärungsbedürftigen Phänomenen, über die Anwendung der Theorie der Abduktion, mit Blick auf potenziell nötige Änderungen der Bearbeitung, beim Wechsel der Darstellung mit dem *Umdeuten* und *Neudeuten* verschiedene Erkenntnisprozesse theoretisch herausarbeiten und unterscheiden lassen. Es lässt sich auch erkennen, dass der Darstellungseinsatz, -wechsel und die -vernetzung nicht automatisch hilfreich oder hinderlich sind.

Anmerkungen

[1] Alle Transkriptausschnitte in den Tabellen entstammen einer Interviewsituation und sind für bessere Lesbarkeit leicht geglättet. Die Turnangaben (im Text später z. B. als T1.3 markiert) sind je Tabelle durchnummeriert. Die beiden Transkriptausschnitte folgen nicht nahtlos aufeinander. I steht abgekürzt für die Interviewerin.

[2] Gemeint ist eine Karte, auf der mit den Worten „baue / lege" zusammen mit verfügbaren Holzwürfeln und Plättchen eine enaktive Handlung zur Bearbeitung der Aufgabe angeregt werden soll – daher kurz „enaktive Karte" (ähnliches gilt für die anderen Darstellungsformen).

[3] Mit Bearbeitungsidee ist die der Bearbeitung bzw. dem Bearbeitungsprozess zugrundeliegende (inhaltliche) Idee gemeint. Rekonstruierbar wird die potenzielle Bearbeitungsidee der Lernenden mit Hilfe des Gesetzes der Abduktion, als der Bearbeitung (implizit) zugrundeliegender übergeordneter *Idee*, welche potenziell auf andere Darstellungen übertragen werden kann.

[4] „Gesetz" ist im Sinne der Abduktion als logische, allgemeine Regelmäßigkeit zu verstehen und muss kein mathematisches oder gar juristisches Gesetz sein. „Gesetze" sind auch in alltäglichen sozialen Interaktionen als kausale, allgemein gültige Abhängigkeiten verstehbar.

[5] An der Stelle sei in Bezug auf die eingesetzte Aufgabe kurz erwähnt, dass in Anlehnung an Schwarzkopf (u. a. 2001) ein relativ weit gefasster Begründungsbegriff zugrunde gelegt wird, sodass bereits der Versuch einen explizierten Begründungsbedarf zu befriedigen in die Betrachtung der Aufgabenbearbeitung mit eingeschlossen wird – selbst wenn es fachlich möglicherweise keine (mathematische) Begründung darstellt. Somit sind u. a. auch inhaltlich-anschauliche, experimentelle, beispielgebundene Begründungen mitgedacht (s. u. a. Wittmann & Müller, 1988).

[6] In den nachfolgenden Transkriptausschnitten in Sektion 4 werden die dort fokussierten Karten kurz mit abgebildet.

[7] Zur Rationalität menschlichen Handelns s. u. a. auch Abels, 2010; Garfinkel, 1987; Meyer, 2021.

[8] Es geht also um mögliche und nötige kognitive Prozesse – nicht um tatsächlich vollzogene.

[9] Gemeint ist in allen Gesetzen das Ergebnis der zugrundeliegenden Additionsaufgabe.

[10] Ob Peggy den Wechsel als Wechsel versteht, bleibt fraglich. Dadurch, dass ihr eine neue Darstellung gegeben wird, findet ein Wechsel der Darstellung in der Interaktion statt. Ob Peggy selbst zwischen enaktiver und ikonischer Darstellung wechselt oder von der symbolischen Darstellung (in Form der gegebenen Aufgabe $5 + 3$ und $3 + 5$) zunächst zur enaktiven und dann von der symbolischen wieder zur ikonischen Darstellung wechselt, kann hier nicht weitergehend betrachtet werden, zumal sich hierfür keine Anzeichen im Transkript wiederfinden.

Danksagung

Wir danken den gutachtenden Personen für die hilfreichen und konstruktiven Anmerkungen und Kommentare.

Literatur

Abels, H. (2010). *Interaktion, Identität, Präsentation: Kleine Einführung in interpretative Theorien der Soziologie* (5. Aufl.). VS Verlag für Sozialwissenschaften. https://doi.org/10.1007/978-3-531-92048-1

Bauersfeld, H. (1985). Ergebnisse und Probleme von Mikroanalysen mathematischen Unterrichts. In W. Dörfler (Hrsg.), *Empirische Untersuchungen zum Lehren und Lernen von Mathematik: Beiträge zum 4. Internationalen Symposium für „Didaktik der Mathematik" in Klagenfurt vom 24. Bis 27.9.1984* (S. 7–25). Internationales Symposium für Didaktik der Mathematik, Wien. Hölder-Pichler-Tempsky.

Bauersfeld, H. (2000). Radikaler Konstruktivismus, Interaktionismus und Mathematikunterricht. In E. Begemann (Hrsg.), *Lernen verstehen – Verstehen lernen: Zeitgemäße Einsichten für Lehrer und Eltern- Mit Beiträgen von Heinrich Bauersfeld* (S. 117–145). Peter Lang GmbH, Internationaler Verlag der Wissenschaften.

Bruder, R. (2000). Akzentuierte Aufgaben und heuristische Erfahrungen—Wege zu einem anspruchsvollen Mathematikunterricht für alle. In L. Flade & W. Herget (Hrsg.), *Mathematik: Lehren und Lernen nach TIMSS. Anregungen für die Sekundarstufen* (1. Aufl, S. 69–78). Volk-und-Wissen-Verl.

Bruner, J. (1973). Der Verlauf der kognitiven Entwicklung. In D. Spanhel (Hrsg.), *Schülersprache und Lernprozesse* (1. Aufl., S. 49–83). Schwann, Pädagog. Verl.

Cobb, P. & Yackel, E. (1998). A Constructivist Perspective on the Culture of the Mathematics Classroom. In F. Seeger, J. Voigt & U. Waschescio (Hrsg.), *The Culture of the Mathematics Classroom* (1. Aufl., S. 158–190). Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511720406

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1–2), 103–131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Eco, U. (1985). Hörner, Hufe, Sohlen. Einige Hypothesen zu drei Abduktionstypen. In U. Eco & T. A. Sebeok (Hrsg.), *Der Zirkel oder im Zeichen der Drei: Dupin, Holmes, Peirce* (S. 288–320). Fink.

Garfinkel, H. (1987). *Studies in ethnomethodology*. Polity press.

Goldin, G. & Shteingold, N. (2001). Systems of Representations and the Development of Mathematical Concepts. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Hrsg.), *The roles of representation in school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.

Gudladt, P. (2023). Deskriptive Grundvorstellungen von Lernenden zum Prozentbegriff: Eine qualitative Untersuchung zu Eigenproduktionen von ikonischen Darstellungen. *Journal für Mathematik-Didaktik,* *44*(1), 171–195. https://doi.org/10.1007/s13138-022-00212-y

Helfferich, C. (2019). Leitfaden- und Experteninterviews. In N. Baur & J. Blasius (Hrsg.), *Handbuch Methoden der empirischen Sozialforschung* (S. 669–686). Springer Fachmedien. https://doi.org/10.1007/978-3-658-21308-4_44

Jungwirth, H. (2003). Interpretative Forschung in der Mathematikdidaktik—Ein Überblick für Irrgäste, Teilzieher und Standvögel. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *35*(5), 189–200. https://doi.org/10.1007/BF02655743

Laakmann, H. (2013). *Darstellungen und Darstellungswechsel als Mittel zur Begriffsbildung: Eine Untersuchung in rechnerunterstützten Lernumgebungen*. Springer Fachmedien Wiesbaden.

Leisen, J. (2005). Wechsel der Darstellungsformen. Ein Unterrichtsprinzip für alle Fächer. *Der fremdsprachliche Unterricht. Englisch*, *39*(78), 9–11.

Lorenz, J. H. (1993). Veranschaulichungsmittel im arithmetischen Anfangsunterricht. In J. H. Lorenz (Hrsg.), *Mathematik und Anschauung* (S. 122–146). Aulis-Verl. Deubner.

Meyer, M. (2007). Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht—Zur Rolle der Abduktion und des Arguments. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *28*(3–4), 286–310. https://doi.org/10.1007/BF03339350

Meyer, M. (2010). Logik und Mystik des (entdeckenden) Lernens. *mathematica didactica,* *33*, 32-57. https://doi.org/10.18716/OJS/MD/2010.1096

Meyer, M. (2015). *Vom Satz zum Begriff: Philosophisch-logische Perspektiven auf das Entdecken, Prüfen und Begründen im Mathematikunterricht*. Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-07069-4

Meyer, M. (2021). *Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht: Von der Abduktion zum Argument*. Springer Fachmedien Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-32391-2

Meyer, M. & Prediger, S. (2012). Sprachenvielfalt im Mathematikunterricht – Herausforderungen, Chancen und Förderansätze. *Praxis der Mathematik in der Schule*, *54*(45), 2–9.

Meyer, M. & Tiedemann, K. (2017). *Sprache im Fach Mathematik*. Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-49487-5

Müller-Philipp, S. (1994). *Der Funktionsbegriff im Mathematikunterricht: Eine Analyse für die Sekundarstufe I unter Berücksichtigung lernpsychologischer Erkenntnisse und der Einbeziehung des Computers als Lernhilfe*. Waxmann.

Noll, A., Roth, J. & Scholz, M. (2020). Lesebarrieren im inklusiven Mathematikunterricht überwinden – visuelle und sprachliche Unterstützungsmaßnahmen im empirischen Vergleich. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *41*(1), 157–190. https://doi.org/10.1007/s13138-020-00158-z

Pape, S. J. & Tchoshanov, M. A. (2001). The Role of Representation(s) in Developing Mathematical Understanding. *Theory Into Practice*, *40*(2), 118–127. https://doi.org/10.1207/s15430421tip4002_6

Prediger, S. (2013). Darstellungen, Register und mentale Konstruktion von Bedeutungen und Beziehungen—Mathematikspezifische sprachliche Herausforderungen identifizieren und bearbeiten. In M. Becker-Mrotzek, K. Schramm, E. Thürmann & H. J. Vollmer (Hrsg.), *Sprache im Fach: Sprachlichkeit und fachliches Lernen* (S. 167–183). Waxmann.

Prediger, S. & Wessel, L. (2011). Darstellen—Deuten—Darstellungen vernetzen. Ein fach- und sprachintegrierter Förderansatz für mehrsprachige Lernende im Mathematikunterricht. In S. Prediger & E. Özdil (Hrsg.), *Mathematiklernen unter Bedingungen der Mehrsprachigkeit: Stand und Perspektiven der Forschung und Entwicklung in Deutschland* (S. 163–184). Waxmann.

Prediger, S. & Wessel, L. (2012). Darstellungen vernetzen—Ansatz zur integrierten Entwicklung von Konzepten und Sprachmitteln. *Praxis der Mathematik in der Schule*, *54*(45), 28–33.

Schipper, W. (2003). Lernen mit Material im arithmetischen Anfangsunterricht. In M. Baum, H. W. Wielpütz & H. Bauersfeld (Hrsg.), *Mathematik in der Grundschule: Ein Arbeitsbuch* (1. Aufl., S. 221–237). Kallmeyer.

Schwarzkopf, R. (2001). Argumentationsanalysen im Unterricht der frühen Jahrgangstufen—Eigenständiges Schließen mit Ausnahmen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *22*(3/4), 253–276.

Selter, C. & Spiegel, H. (2007). *Wie Kinder rechnen* (1. Aufl., 7. [Dr., Rechtschreibreform]). Klett-Grundschulverl.

Shvarts, A. & Chumachenko, D. (2011). Representations in the development of mathematical concepts. In B. Ubuz & International Group for the Psychology of Mathematics Education (Hrsg.), *Proceedings of the 35th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: Developing mathematical thinking*. Middle East Technical Univ.

Steinbring, H. (1994). *Die Verwendung strukturierter Diagramme im Arithmetikunterricht der Grundschule. Zum Unterschied zwischen empirischer und theoretischer Mehrdeutigkeit mathematischer Zeichen*. *15*(4), 7–19.

Voigt, J. (1984). *Interaktionsmuster und Routinen im Mathematikunterricht: Theoretische Grundlagen und mikroethnographische Falluntersuchungen*. Beltz.

Voigt, J. (1993). Unterschiedliche Deutungen bildlicher Darstellungen zwischen Lehrerin und Schülern. In J. H. Lorenz (Hrsg.), *Mathematik und Anschauung* (S. 147–166). Aulis-Verl. Deubner.

von Glasersfeld, E. (1995). *Radical Constructivism: A Way of Knowing and Learning*. Falmer Press Ltd.

Wittmann, E. C. & Müller, G. (1988). Wann ist ein Beweis ein Beweis? In P. Bender & H. Winter (Hrsg.), *Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis: Festschrift für Heinrich Winter* (S. 237–257). Cornelsen.

Anschrift der Verfasser:innen

Anna Breunig
Universität zu Köln
Institut für Mathematikdidaktik
Gronewaldstraße 2
50931 Köln
anna.breunig@uni-koeln.de

Michael Meyer
Universität zu Köln
Institut für Mathematikdidaktik
Gronewaldstraße 2
50931 Köln
michael.meyer@uni-koeln.de