

Identifikation von Teilprozessen des situationsbezogenen funktionalen Denkens in der Sekundarstufe I

CARINA ZINDEL, DORTMUND

Zusammenfassung: In diesem Artikel werden zu lernende Teilprozesse des situationsbezogenen funktionalen Denkens für die Sekundarstufe I identifiziert, um funktionales Denken gezielt fördern zu können. Dazu wird zwischen „Funktionen“ als mathematischen Objekten und „funktionalen Zusammenhängen“ als Phänomen in der Welt unterschieden, um die verschiedenen Teilprozesse des funktionalen Denkens hinsichtlich des Mathematisierens und Interpretierens funktionaler Abhängigkeiten genauer beschreiben zu können. Anhand empirischer Daten wird aufgezeigt, welche der durch die Aufgabe geforderten Teilprozesse bei Lernenden der Jahrgangsstufe 9 auftreten.

Abstract: This article identifies sub-processes of functional thinking for lower secondary grades in order to foster functional thinking pointedly. The article distinguishes “functions” as mathematical objects and “functional relationships” as phenomena in the world in order to identify sub-processes of functional thinking with regard to mathematizing and interpreting functional dependencies that can be directly targeted through task design. The empirical insights show which of the sub-processes occur with students of grade 9.

1. Einleitung

Funktionales Denken ist eine der fundamentalen Ideen (Heymann, 1996, S. 278) und damit ein langfristiges Ziel des Mathematikunterrichts, das sich durch alle Jahrgangsstufen zieht. Obwohl die Lernenden im Verlauf der Sekundarstufe I verschiedene Funktionstypen und verschiedene Darstellungen kennenlernen, scheint vielen auch am Ende der Jahrgangsstufe 10 noch ein grundlegendes Funktionsverständnis und damit auch die Fähigkeit zum funktionalen Denken zu fehlen (Klinger, 2018; Wilhelm, 2016). Daraus lässt sich die Schlussfolgerung ziehen, dass funktionales Denken – und damit das „Denken in Zusammenhängen“ (Vollrath, 1989, S. 39) – noch gezielter im Unterricht gefördert werden sollte.

Zum Lehren und Lernen von Funktionen gibt es bereits zahlreiche Studien (z. B. Breidenbach, Dubinsky, Hawks & Nichols, 1992; Oehrtman, Carlson & Thompson, 2008; Vinner & Dreyfus, 1989; vgl. auch Niss, 2014). In diesem Themenbereich treten dabei in Studien immer wieder verschiedene Be-

grifflichkeiten auf: funktionales Denken, Funktionsverständnis, funktionale Zusammenhänge, funktionale Abhängigkeiten, Vorstellungen zum Funktionsbegriff usw. Die Verwendung der Begriffe hängt dabei in der Regel mit unterschiedlichen Zielsetzungen der Studie zusammen: Dies kann beispielsweise die Rekonstruktion von Lernschritten zum Aufbau von Funktionsverständnis (Oehrtman et al., 2008), die Rekonstruktion von (mathematischen) Dimensionen des Funktionsbegriffs (Dreyfus & Eisenberg, 1984), oder Identifikation unterschiedlicher Fehlertypen beim Umgang mit bestimmten Funktionen (für ein Review vgl. Leinhardt et al. 1990) sein.

Die Vielfalt an Begrifflichkeiten und damit an bestehenden Konzeptualisierungen legt nahe, dass funktionales Denken in seiner Gesamtheit eine sehr komplexe und umfangreiche Fähigkeit ist. Um diese Fähigkeit des funktionalen Denkens genauer durch Teilprozesse beschreiben zu können, wird in diesem Artikel analytisch zwischen der „Funktion“ als mathematischem Objekt und dem „funktionalen Zusammenhang“ als Phänomen in der Welt unterschieden, wobei die Vorstellung einer „funktionalen Abhängigkeit“ für die Übersetzungsprozesse notwendig ist (siehe Abschnitt 2).

Die Fähigkeit zum funktionalen Denken ist eine „Denkweise, die typisch für den gedanklichen Umgang mit Funktionen ist“ (Vollrath, 2014, S. 117). Vollrath (2014) erläutert in diesem Zusammenhang, dass zu Funktionen weit mehr zu lernen ist als die Kenntnis einer Definition:

„Was eine Funktion ist, lernt niemand wirklich durch eine Definition. Vielmehr bilden sich Vorstellungen über Funktionen durch das Kennenlernen einzelner Funktionen und Funktionstypen und der verschiedenen Darstellungsweisen sowie der typischen Fragestellungen und Einsichten in das ‚Wesen‘ der Funktionen.“ (Vollrath, 2014, S. 121 f.).

Vollrath beschreibt hier, dass der Aufbau von Vorstellungen zu Funktionen über das Kennenlernen verschiedener Funktionstypen und Darstellungsweisen erfolgt. Allerdings besteht die Gefahr, dass hierbei unter Umständen nur bestimmte Eigenschaften einzelner Darstellungen fokussiert werden und nicht das dahinterliegende Konzept einer funktionalen Abhängigkeit interpretiert werden kann (vgl. z. B. Swan, 1985, S. 6). Ein ähnliches Phänomen beschreibt auch Niss (2014):

„One important issue that arises in this context is the fact that functions can be given several different representations (e.g., verbal, formal, symbolic (including algebraic), diagrammatic, graphic, tabular), each of which captures certain, but usually not all, aspects of the concept. This may obscure the underlying commonality – the core – of the concept across its different representations, especially as translating from one representation to another may imply loss of information. If, as often happens in teaching, learners equate the concept of function with just one or two of its representations (e.g., a graph or a formula), they miss fundamental features of the concept itself.“ (Niss, 2014, S. 240)

Eine gezielte Förderung von Verständnis zum gemeinsamen Kern von verschiedenen Funktionstypen und Darstellungen wäre also notwendig. Dazu wird das funktionale Denken in diesem Artikel genauer ausdifferenziert, indem Teilprozesse identifiziert werden, die einzeln gefördert werden können und so sukzessive die Fähigkeit zum funktionalen Denken erweitert werden kann.

Funktionales Denken kann innermathematisch wie außermathematisch erforderlich sein. Dieser Artikel fokussiert das *situationsbezogene* funktionale Denken, d. h. das funktionale Denken im Hinblick auf Übersetzungsprozesse zwischen Mathematik und (reale) Situationen in der Welt.

Das „funktionale Denken“ umschreibt ganzheitlich den Lerngegenstand. Eine solche ganzheitliche Konzeptualisierung liefert allerdings noch wenig Anknüpfungspunkte für eine gezielte Förderung. Es bedarf hier also einer genaueren Spezifizierung der Teilprozesse des funktionalen Denkens, wenn dieses gezielt gefördert werden soll. Diese sollte nicht nur das Erfassen von Lernendenvorstellungen, sondern vor allem die Förderung funktionalen Denkens erlauben.

Diese Aufschlüsselung in verschiedene Teilprozesse soll zum einen ermöglichen, die unterschiedlichen Anforderungen bei der Bearbeitung verschiedener Aufgaben zum funktionalen Denken präziser zu beschreiben, und zum anderen Anknüpfungspunkte zur Förderung zu liefern, indem durch die Anregung und Unterstützung der Teilprozesse das funktionale Denken insgesamt gezielt gefördert werden kann.

Daraus ergeben sich für diesen Artikel zwei Forschungsfragen:

- 1) Welche Teilprozesse des situationsbezogenen funktionalen Denkens lassen sich identifizieren?
- 2) Welche Teilprozesse des funktionalen Denkens zeigen die Lernenden in dem entwickelten Lehr-Lern-Arrangement? Welche Hürden und Potenziale lassen sich in den Bearbeitungsprozessen

hinsichtlich des funktionalen Denkens rekonstruieren?

Die erste Forschungsfrage wird zunächst theoretisch bearbeitet. In einem zweiten Schritt wird ein Ausschnitt eines Lehr-Lern-Arrangements zum funktionalen Denken vorgestellt und illustriert, welche unterschiedlichen Teilprozesse des funktionalen Denkens durch die Aufgaben angeregt bzw. unterstützt werden sollen. Anschließend wird empirisch untersucht, welche Teilprozesse bei den Lernenden tatsächlich angeregt werden und welche Hürden und Potenziale in den Bearbeitungsprozessen zu verzeichnen sind.

2. Theoretischer Hintergrund

Im Folgenden werden in Abschnitt 2.1 zunächst die begrifflichen Grundlagen eingeführt, mit deren Hilfe im Anschluss die verschiedenen Teilprozesse des funktionalen Denkens identifiziert und unterschieden werden. Anschließend wird in Abschnitt 2.2 eine Konzeptualisierung von Funktionsverständnis präsentiert, auf deren Grundlage in Abschnitt 2.3 das funktionale Denken in seine Teilprozesse ausdifferenziert wird. Grundlegend dabei wird die Idee sein, funktionales Denken als die Anwendung von Funktionsverständnis auf die jeweilige Situation aufzufassen.

2.1 Begriffliche Grundlagen

Funktionales Denken wird oft als das „Denken in Zusammenhängen“ (Vollrath, 1989, S. 39) bzw. „eine Denkweise, die typisch für den gedanklichen Umgang mit Funktionen ist“ (Vollrath, 2014, S. 117) beschrieben. Es stellt sich dabei die Frage, was diese „typische Denkweise“ kennzeichnet bzw. welche Teilprozesse dazugehören.

Vollrath (1989) hebt in diesem Zusammenhang drei Aspekte hervor, die „als charakteristisch für das Arbeiten mit Funktionen und damit für funktionales Denken“ (ebd., S. 6) sind:

„(1) Durch Funktionen beschreibt oder stiftet man Zusammenhänge zwischen Größen: einer Größe ist dann eine andere zugeordnet, so dass die eine Größe als abhängig gesehen wird von der anderen.“ (Vollrath, 1989, S. 7)

„(2) Durch Funktionen erfasst man, wie Änderungen einer Größe sich auf eine abhängige Größe auswirken.“ (Vollrath, 1989, S. 12)

„(3) Mit Funktionen betrachtet man einen gegebenen oder erzeugten Zusammenhang als Ganzes.“ (Vollrath, 1989, S. 16)

Diese Aspekte sind heute auch als Grundvorstellungen zu Funktionen bekannt (vom Hofe, 1995).

Da die Grundvorstellungen auch gerade als ‚Übersetzungsscharniere‘ zwischen Mathematik und Welt fungieren, wären sie ein mögliches Modell, um situationsbezogenes funktionales Denken zu beschreiben. Mit der Vorstellung einer funktionalen Abhängigkeit – ausdifferenziert durch die Verstehenselemente zum Kern des Funktionsbegriffs – wird in dieser Studie jedoch ein alternatives Modell genutzt, um die Teilprozesse funktionalen Denkens so weit auszudifferenzieren, dass sie einzeln und gezielt gefördert werden können. Die Ausdifferenzierung der Verstehenselemente wird auch eine differenziertere Beschreibung von Teilprozessen des funktionalen Denkens ermöglichen, wofür sich die Grundvorstellungen für diese Arbeit als zu grob erwiesen hatten. Das alternative Modell zur Konzeptualisierung der Vorstellung einer funktionalen Abhängigkeit wurde in Zindel (2019) entwickelt mit dem Fokus auf dem Aufbau einzelner Verstehenselemente zum Funktionsbegriff. In diesem Artikel wird auf die dort gewonnenen Erkenntnisse aufgebaut und die Theorie erweitert, indem der Fokus nun auf den Teilprozessen des funktionalen Denkens und ihrer Förderung liegt. Beide Modelle (der Grundvorstellungen und der Verstehenselemente) könnten in einem nächsten Schritt aber vermutlich auch gewinnbringend kombiniert werden, um weitere Teilprozesse zu identifizieren.

Um die allgemeine Definition des (situationsbezogenen) funktionalen Denkens ausschärfen zu können, wird im Artikel die in Zindel (2019) eingeführte analytische Trennung zwischen den Begriffen Funktion (als dem mathematischen Objekt), funktionaler Zusammenhang (als Phänomen in der Welt) und funktionale Abhängigkeit (hier die Vorstellung eines gerichteten funktionalen Zusammenhangs) aufgegriffen und im Folgenden auch an Beispielen erläutert (Abb. 1; vgl. Zindel, 2019, S. 9 ff.).

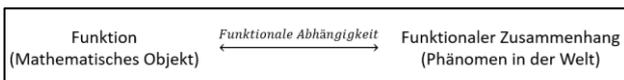


Abb. 1: Zusammenhang der Begriffe Funktion, funktionaler Zusammenhang und funktionale Abhängigkeit

Mithilfe dieser begrifflichen Unterscheidung lassen sich zwei verschiedene Typen von Textaufgaben im Themenbereich Funktionen unterscheiden. Die Aufgabe FlatGuck1.0 (Abb. 5) ist ein Beispiel für eine Aufgabe, in der eine Funktion (als mathematisches Objekt) gegeben ist und die für die Bearbeitung der Aufgabe im Kontext interpretiert werden muss. Damit geht einher, dass die funktionale Abhängigkeit sprachlich expliziert wird, beispielsweise durch Sprachmittel wie „in Abhängigkeit von“ oder „wird zugeordnet“. In diesem Fall wird hier von einer gegebenen *verbalen Darstellung* einer Funktion. Die Streaming-Angebote (Abb. 8) hingegen beschreiben

ein Phänomen in der Welt, das (mehrere mögliche) funktionale Zusammenhänge enthält. Um solche Streaming-Angebote zu vergleichen, könnte man sie mathematisieren. In diesem Fall kann gemäß der hier vorgenommenen begrifflichen Unterscheidung nicht von einer *verbalen Darstellung* einer Funktion gesprochen werden, da es sich nicht um eine (bereits mathematisierte) Funktion handelt. In solchen Fällen wird in diesem Artikel von *Situationsbeschreibungen* gesprochen. Diese Unterscheidung wird in Abschnitt 2.3 noch genauer erläutert.

In diesem Artikel steht das situationsbezogene funktionale Denken im Fokus. Unter dieser Einschränkung können sowohl das Mathematisieren funktionaler Zusammenhänge als auch das Interpretieren von Funktionen zwei Teilprozesse des funktionalen Denkens aufgefasst werden:

Funktionales Denken umfasst das flexible Wechselspiel zwischen Mathematik und Welt, d. h. die Fähigkeit, funktionale Zusammenhänge zu mathematisieren und Funktionen zu interpretieren.

Im Folgenden wird sich auf diese beiden Aufgabentypen konzentriert. Aufgrund der Komplexität des Funktionsbegriffs und damit des funktionalen Denkens war diese Einschränkung hilfreich, um erste Teilprozesse in der Tiefe analysieren zu können. In einem weiteren Schritt wäre es aber auch denkbar, das hier vorgestellte Modell auch auf andere Aufgabentypen zu übertragen.

Wenn funktionales Denken also als die Fähigkeit aufgefasst wird, funktionale Zusammenhänge zu mathematisieren und Funktionen zu interpretieren, ist offensichtlich, dass hierzu *Funktionsverständnis* erforderlich ist. Mit Funktionsverständnis ist hier vor allem die in Abschnitt 2.1 angesprochene *Vorstellung einer funktionalen Abhängigkeit* gemeint. Funktionales Denken kann daher aufgefasst werden als das Anwenden von Funktionsverständnis auf die Situation:

Funktionales Denken umfasst das Anwenden von Funktionsverständnis auf die jeweilige Situation.

In Zindel (2019) wird dargelegt, wie Verständnis zum Kern des Funktionsbegriffs aufgebaut werden kann, indem einzelne Verstehenselemente spezifiziert und gezielt adressiert werden. Diese Prozesse könnten als erste Teilprozesse des funktionalen Denkens auf der Ebene der Verstehenselemente aufgefasst werden, da es hier um den von Vollrath angesprochenen Umgang mit Funktionen und die damit einhergehende Denkweise geht. Darauf aufbauend geht es in diesem Artikel darum, weitere Teilprozesse des situationsbezogenen funktionalen Denkens (auch auf anderen Ebenen, vgl. Abb. 2) zu

identifizieren, die bislang nicht (explizit) im Fokus standen.

Um die jeweiligen Teilprozesse genauer beschreiben zu können, wird im Folgenden auf das bereits ausgearbeitete Drei-Ebenen-Modell („Verstehensmodell“) zur Konzeptualisierung von Funktionsverständnis aufgebaut (Abb. 2; vgl. Zindel, 2019).

2.2 Konzeptualisierung von Funktionsverständnis

Sowohl für die Mathematisierung funktionaler Zusammenhänge als auch für die Interpretation (bereits mathematisierter) Funktionen benötigen Lernende Funktionsverständnis, d. h. die Vorstellung einer funktionalen Abhängigkeit. In Anlehnung an die kognitions-psychologische Theorie des Auffaltens und Verdichtens von Verstehenselementen (Drollinger-Vetter, 2011) wird im Folgenden ein Verstehensmodell zum sog. „Kern“ des Funktionsbegriffs (Abb. 2; Zindel, 2019, S. 39 f.; vgl. auch Prediger & Zindel, 2017) genutzt, in dem die Vorstellung einer funktionalen Abhängigkeit genauer ausdifferenziert wird. Dies ermöglicht eine gezielte und fokussierte Förderung von Funktionsverständnis und damit auch des funktionalen Denkens.

2.2.1 Auffalten und Verdichten im Verstehensmodell

Um einen Förderansatz zum Aufbau von Funktionsverständnis entwickeln zu können, ist zunächst zu erläutern, wann ein Begriff wie der Funktionsbegriff „verstanden“ ist. Ein mathematischer Begriff kann als verstanden aufgefasst werden, wenn er Teil eines mentalen Begriffsnetzes ist (z. B. Hiebert & Carpenter, 1992, S. 67) und Lernende sich in diesem Netz flexibel bewegen können (vgl. Drollinger-Vetter, 2011). Nach Aebli (1981) wird ein Begriff von Lernenden aufgebaut, indem bereits vorhandene Begriffe zu einem neuen Begriff „verdichtet“ werden. Drollinger-Vetter betont zusätzlich den Aspekt, diese „verdichteten“ Verstehenselemente bei Bedarf auch wieder in die einzelnen Verstehenselemente „aufzufalten“. Drollinger-Vetter (2011) hat daher in ihrem Verstehensmodell drei Ebenen unterschieden: die der Begriffsnetze, die der Darstellungen und die der Verstehenselemente.

Diese Idee wurde in Zindel (2019) aufgegriffen und ein Verstehensmodell mit dem Fokus auf den Kern des Funktionsbegriffs entwickelt (Abb. 2, Abb. 3). Die Prozesse des Auffaltens und Verdichtens sind im Verstehensmodell als Pfeile zwischen den Ebenen dargestellt.

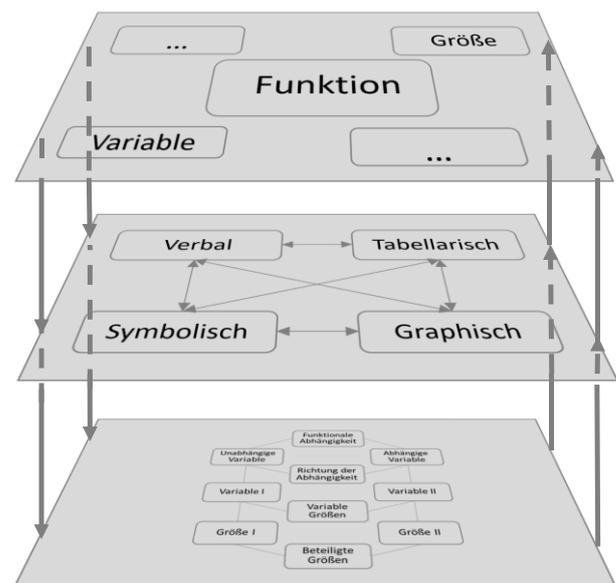


Abb. 2: Verstehensmodell mit Verstehenselementen zum Kern des Funktionsbegriffs (Zindel, 2019, S. 45; siehe auch Abb. 3)

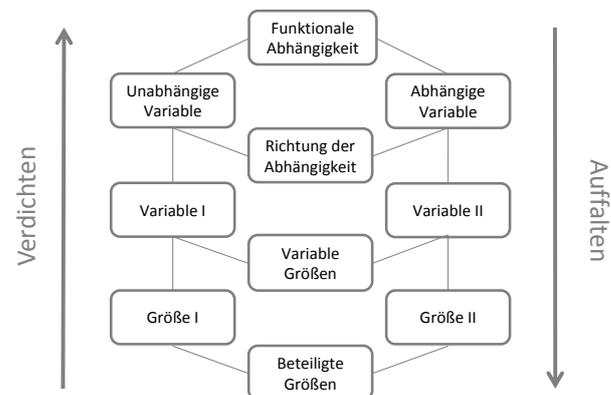


Abb. 3: Facettenmodell mit Verstehenselementen zum Kern des Funktionsbegriffs (Zindel, 2019, S. 39)

Auch auf der (unteren) Ebene der Verstehenselemente sind im Facettenmodell (Abb. 3) die Prozesse des Auffaltens und Verdichtens durch Pfeile dargestellt. Das Facettenmodell differenziert die (verdichtete) Vorstellung einer funktionalen Abhängigkeit durch die weiteren (aufgefalteten) Verstehenselemente aus. Die enthaltenen Verstehenselemente benötigt man sowohl für das Mathematisieren funktionaler Zusammenhänge als auch für das Interpretieren gegebener Funktionen. Ob das Modell bei der Beschreibung von Lernprozessen von „oben nach unten“ gelesen und als Auffaltungsprozess verstanden werden kann oder ob das Modell „von unten nach oben“ gelesen und als Verdichtung verstanden werden kann, hängt von der Aufgabe und dem Bearbeitungsweg von Lernenden ab. Hierauf wird in Abschnitt 2.2.3 genauer eingegangen.

2.2.2 Rollen von Darstellungsvernetzungen

In Abschnitt 2.1 wurde bereits das Verhältnis von Mathematik und Welt und insbesondere das Mathematisieren funktionaler Zusammenhänge und das Interpretieren von Funktionen als Teilprozesse des situationsbezogenen funktionalen Denkens hervorgehoben. Die Funktionen als mathematische (abstrakte) Objekte sind dabei nur über ihre Darstellungen zugänglich (vgl. Duval, 2006; Abb. 4). Dies sind bei Funktionen die symbolische, tabellarische, graphische und verbale Darstellung (vgl. beispielsweise Herget, 2013; zur Bedeutung von Darstellungsvernetzungen für das Funktionsverständnis vgl. z. B. Bossé, Adu-Gyamfi & Cheetham, 2011; Leinhardt, Zaslavsky & Stein, 1990; Swan, 1985; zur besonderen Rolle der verbalen Darstellung siehe Abschnitt 2.3).

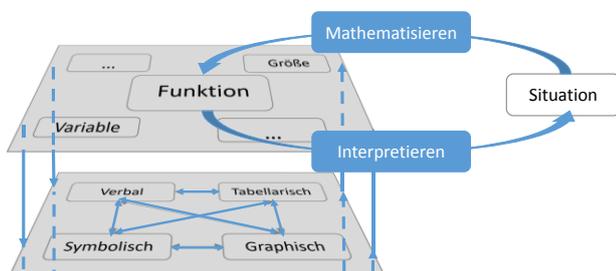


Abb. 4: Funktionsverständnis (Vorstellung einer funktionalen Abhängigkeit) als Brücke zwischen der Funktion und des funktionalen Zusammenhangs in der Situation

Eine Anforderung einer Textaufgabe könnte beispielsweise das Mathematisieren einer Situation sein. Dazu müsste zunächst ein funktionaler Zusammenhang in der Situation identifiziert werden, bevor er in einem zweiten Schritt durch eine Funktion mathematisiert wird (siehe Abb. 4). Um den funktionalen Zusammenhang zu mathematisieren, wird dann eine Darstellung der Funktion konstruiert.

Die Aktivitäten des Mathematisierens funktionaler Zusammenhänge und des Interpretierens von Funktionen lassen sich vor diesem Hintergrund genauer in Teilprozesse auf der Ebene der Darstellungen aufschlüsseln:

- Mathematisieren eines funktionalen Zusammenhangs durch Konstruktion einer Tabelle
- Mathematisieren eines funktionalen Zusammenhangs durch Konstruktion einer Funktionsgleichung
- Mathematisieren eines funktionalen Zusammenhangs durch Konstruktion einer verbalen Darstellung
- Mathematisieren eines funktionalen Zusammenhangs durch Konstruktion eines Graphen

- Interpretieren einer durch eine tabellarische Darstellung gegebene Funktion im Kontext
- Interpretieren einer durch eine symbolische Darstellung gegebene Funktion im Kontext
- Interpretieren einer durch eine graphische Darstellung gegebene Funktion im Kontext
- Interpretieren einer durch eine verbale Darstellung gegebene Funktion im Kontext

Diese Aufschlüsselung möglicher Teilprozesse beim Mathematisieren oder Interpretieren *einer* Darstellung erfasst aber noch nicht die Teilprozesse des funktionalen Denkens, die bei der Vernetzung zweier (oder mehrerer) Darstellungen auftreten. In verschiedenen Studien wird aber auf die Notwendigkeit hingewiesen, mit den verschiedenen Darstellungen von Funktionen umgehen zu können (z. B. Niss, 2014; Oehrtman et al., 2008). Ebenso wurden bereits mögliche Hürden mit verschiedenen Darstellungen von Funktionen breit beforscht (z. B. Leinhardt, Zaslavsky & Stein, 1990; Moschkovich, Schoenfeld & Arcavi, 1993; Nitsch et al., 2015). Der Umgang mit verschiedenen Darstellungen kann also als wichtiger Bestandteil funktionalen Denkens aufgefasst werden, der nicht selbstverständlich, sondern ein eigener Lerngegenstand ist:

Funktionales Denken umfasst das flexible Wechselspiel zwischen Darstellungen, d. h. die Fähigkeit, eine funktionale Abhängigkeit in verschiedenen Darstellungen zu identifizieren und diese zu vernetzen.

Entsprechend kann die obige Liste noch erweitert werden:

- Vernetzen von verbaler und symbolischer Darstellung
- Vernetzen von verbaler und tabellarischer Darstellung
- Vernetzen von symbolischer und tabellarischer Darstellung
- usw.

Einige Darstellungsvernetzungen könnten von Lernenden allerdings auch ohne funktionales Denken im obigen Sinne vollzogen werden. Dies gilt zum Beispiel für das Übersetzen einer tabellarischen Darstellung in eine graphische Darstellung. Dieses Problem beschreibt Swan (1985) wie folgt:

„Many pupils are well acquainted with graphs, tables of numbers, and algebraic expressions and can manipulate them reasonably accurately – but remain quite unable to interpret the global features of the information contained within them. [...] Like any language, it involves learning new symbolic notations,

and new 'grammatical rules' by which these symbols may be manipulated. Unfortunately, in mathematics, it is possible to learn these rules without understanding the underlying concepts to which they refer, and this often results in mathematics becoming a formal, dull, and virtually unusable subject.“ (Swan, 1985, S. 6)

Es sollte also möglichst immer die funktionale Abhängigkeit hinter der Darstellungsvernetzung expliziert werden, um entsprechende Lerngelegenheiten für funktionales Denken nicht ungenutzt zu lassen. Ein solches Explizieren kann insbesondere durch die Sprache erfolgen. Daher sind hier gerade die Darstellungsvernetzungen interessant, bei der eine verbale Darstellung beteiligt ist oder bei denen eine beliebige Darstellungsvernetzung zusätzlich verbalisiert wird.

Bei einer Aufgabe wie FlatGuck1.0 (Abb. 5) sind sowohl eine symbolische Darstellung als auch eine verbale Darstellung gegeben. Um die Aufgabe zu bearbeiten, ist zunächst die Interpretation der verbalen Darstellung notwendig, um die $\|unabhängige\|$ Variable und $\|abhängige\|$ Variable (mit $\|...\|$ werden im Folgenden die Verstehenselemente gekennzeichnet, vgl. Abb. 3) zu identifizieren (hier ist die Anzahl der gekauften Filme die unabhängige Variable und der Preis in einem Monat die abhängige Variable). Diese Informationen müssen anschließend auf die symbolische Darstellung übertragen und so die Bedeutung der Variablen x und $f(x)$ in der symbolischen Darstellung rekonstruiert werden. Dies ist die Voraussetzung, um den richtigen Platzhalter für die in den Aufgabenteilen a) und b) angegebenen Werte zu finden.

FlatGuck1.0

Beim Streaming-Anbieter FlatGuck1.0 können für einen bestimmten monatlichen Grundpreis unbegrenzt viele Filme ausgeliehen werden. Zusätzlich gibt es die Möglichkeit, Filme dauerhaft zu kaufen. Durch die Funktionsgleichung $f(x) = 4,5x + 9,99$ wird der Anzahl der gekauften Filme der Preis in einem Monat zugeordnet.

- Wie viele Filme hat Sina gekauft, wenn sie 45,99 € bezahlen muss?
- Was zahlt Sina, wenn sie 5 Filme gekauft hat?

Abb. 5: FlatGuck1.0 als Aufgabe zur Standortbestimmung in der ersten Fördersitzung hinsichtlich des Umgangs mit einem kontextuell gegebenen funktionalen Zusammenhang

In diesem Fall sind zur Bearbeitung der Aufgabe also mehrere Teilprozesse des funktionalen Denkens erforderlich. Als eine Schlüsselstelle zeigt sich die Vernetzung der symbolischen und verbalen Darstellung zur Rekonstruktion der Bedeutung der unabhängigen und abhängigen Variablen in beiden Darstellungen. Dieses Phänomen wirft die Frage auf, welche Verstehenselemente bei den jeweiligen kog-

nitiven Aktivitäten des Mathematisierens und Interpretierens erforderlich sind bzw. welche Verstehenselemente die Brücke zwischen dem mathematischen Objekt und der realen Situation bilden. Um diese Frage beantworten zu können, werden im folgenden Abschnitt verschiedene Verstehenselemente zum Funktionsbegriff vorgestellt, bevor diese im Anschluss wieder mit den Prozessen des Mathematisierens funktionaler Zusammenhänge und des Interpretierens von Funktionen in Zusammenhang gebracht werden.

2.2.3 Verstehenselemente zum Funktionsbegriff

In diesem Artikel werden die Verstehenselemente thematisiert, die in allen Darstellungen gleichermaßen vorkommen und die für alle Funktionstypen der Sekundarstufe I relevant sind. Diese Verstehenselemente bilden den sogenannten „Kern des Funktionsbegriffs“ der Sekundarstufe I (Zindel, 2019, S. 17).

In Zindel (2019, S. 18 ff.) werden durch eine Nachzeichnung der historischen Entwicklung des Funktionsbegriffs verschiedene zentrale Entwicklungsschritte herausgearbeitet. Dabei liegt die Idee zugrunde, dass in individuellen Begriffsbildungsprozessen ähnliche Schritte verfolgt werden (sollten), wie sie auch in der historischen Entwicklung gegangen wurden (Freudenthal, 1983, zitiert nach Bakker & Gravemeijer, 2006, S. 149). Die rekonstruierten historisch wichtigen Einsichten werden zudem verknüpft mit Ergebnissen verschiedener Studien zum Lehren und Lernen des Funktionsbegriffs, um Verstehenselemente für den Kern des Funktionsbegriffs zu identifizieren (Zindel, 2019, S. 25 ff., synthetisiert im Facettenmodell auf S. 39 ff.).

Konkrete Verstehenselemente werden im Folgenden mit $\|...\|$ gekennzeichnet. Die verdichtete Facette $\|funktionale\|$ Abhängigkeit lässt sich auffalten in die Verstehenselemente der $\|unabhängigen\|$ Variablen und der $\|abhängigen\|$ Variablen. Wenn man die $\|Richtung\|$ der Abhängigkeit nicht mitberücksichtigt, können diese auch als einfache beteiligte $\|Variable\|$ I und $\|Variable\|$ II aufgefasst werden. Wenn auch die Variabilität der Größen in der Situation nicht entscheidend ist, können diese Variablen als beteiligte $\|Größe\|$ I und $\|Größe\|$ II aufgefasst werden. Analog könnten in einer anderen Situation auch die Facetten von unten nach oben „verdichtet“ werden.

Mit dem Facettenmodell auf der unteren Ebene im Verstehensmodell lassen sich insbesondere auch Darstellungsvernetzungsprozesse (auf der mittleren Ebene) präzise beschreiben, indem Darstellungsvernetzungsprozesse aufgefaltet werden in Vernet-

zungsprozesse der in den Darstellungen codierten Verstehenselemente.

Neben den Verstehenselementen zum Kern des Funktionsbegriffs gibt es aber natürlich auch noch zahlreiche weitere Verstehenselemente zum Funktionsbegriff, die spezifisch für bestimmte Darstellungen oder Funktionstypen wichtig sind. Hierzu gehört beispielsweise das Verstehenselement der $\|\text{Steigung}\|$, das bei linearen Funktionen sehr bedeutsam, bei quadratischen Funktionen in der Sekundarstufe I aber in der Regel noch nicht nachvollziehbar und insbesondere auch nicht direkt an der Funktionsgleichung ablesbar ist (vgl. Zindel, 2019, S. 75).

Um Darstellungen von Funktionen zu vernetzen, müssen beide Darstellungen hinsichtlich der relevanten Verstehenselemente aufgefaltete und über diese Verstehenselemente vernetzt werden (z. B. über die Bedeutung der $\|\text{unabhängigen und abhängigen Variablen}\|$). Auch diese Prozesse können als Teil des situationsbezogenen funktionalen Denkens aufgefasst werden:

Funktionales Denken erfordert das flexible Auffalten und Verdichten von Verstehenselementen (zum Kern des Funktionsbegriffs).

2.2.4 Verstehenselemente beim Interpretieren und Mathematisieren

Mithilfe der Ausdifferenzierung der Verstehenselemente kann nun die analytische Trennung der Begriffe Funktion, funktionaler Zusammenhang und funktionale Abhängigkeit (Abb. 1) im Hinblick auf das Interpretieren und Mathematisieren präzisiert werden:

- *Funktionen* als mathematische Objekte beschreiben bereits mathematisierte Zusammenhänge (d. h. die $\|\text{beteiligten Größen}\|$ und die $\|\text{Richtung der Abhängigkeit}\|$ sind bereits determiniert).
- *Funktionale Zusammenhänge* hingegen sind noch mathematisierungsbedürftig (d. h. die $\|\text{Richtung der Abhängigkeit}\|$ und ggf. auch die $\|\text{beteiligten Größen}\|$ sind noch nicht determiniert, sondern müssen noch festgelegt werden).
- *Funktionale Abhängigkeit* ist die Vorstellung, die die Verstehenselemente zum Kern des Funktionsbegriffs umfasst und somit das Mathematisieren funktionaler Zusammenhänge und das Interpretieren von Funktionen ermöglicht.

Es fällt auf, dass beim Mathematisieren teilweise andere Verstehenselemente benötigt werden, in erster Linie zwar auch die Verstehenselemente zum Kern, aber um eine Darstellung im Mathematisie-

rungsprozess neu zu konstruieren, müssten auch die Konstanten berücksichtigt werden (bei linearen Funktionen beispielsweise die Steigung). Beim Interpretieren reicht es oft, auf $\|\text{beteiligte Größen}\|$ und $\|\text{Richtung der Abhängigkeit}\|$ zu fokussieren. Alles andere muss nicht im Detail interpretiert werden, solange nicht explizit danach gefragt ist.

Als möglicher Ansatzpunkt für eine gezielte Förderung von Funktionsverständnis zum Kern des Funktionsbegriffs und damit auch des funktionalen Denkens ergibt sich die Idee, das Auffalten und Verdichten von Verstehenselementen gezielt anzuregen.

2.2.5 Zusammenfassung der Teilprozesse des funktionalen Denkens

Ausgehend von der Grundannahme, dass funktionales Denken als das Anwenden von Funktionsverständnis auf eine Situation aufgefasst werden kann, wurden in diesem Abschnitt entlang der drei Ebenen des Verstehensmodells zum Funktionsbegriff drei Aspekte des funktionalen Denkens herausgearbeitet:

- 1) Funktionales Denken umfasst das flexible Wechselspiel zwischen Mathematik und Welt, d. h. die Fähigkeit, funktionale Zusammenhänge zu mathematisieren und Funktionen zu interpretieren.
 - a) Funktionale Zusammenhänge mathematisieren (Hier müssen $\|\text{beteiligte Größen}\|$, $\|\text{Richtung der Abhängigkeit}\|$ und ggf. weitere Facetten festgelegt und zu Darstellungen verdichtet werden.)
 - b) Funktionen interpretieren (Hier müssen gegebene Darstellungen aufgefaltete werden hinsichtlich der $\|\text{beteiligten Größen}\|$ und der $\|\text{Richtung der Abhängigkeit}\|$.)
- 2) Funktionales Denken umfasst das flexible Wechselspiel zwischen Darstellungen, d. h. die Fähigkeit, eine funktionale Abhängigkeit in verschiedenen Darstellungen zu identifizieren und diese zu vernetzen.
 - a) Mathematisieren eines funktionalen Zusammenhangs durch Konstruktion einer Tabelle
 - b) Mathematisieren eines funktionalen Zusammenhangs durch Konstruktion einer Funktionsgleichung
 - c) Mathematisieren eines funktionalen Zusammenhangs durch Konstruktion einer verbalen Darstellung
 - d) Mathematisieren eines funktionalen Zusammenhangs durch Konstruktion eines Graphen

- e) Interpretieren einer durch eine tabellarische Darstellung gegebene Funktion im Kontext
 - f) Interpretieren einer durch eine symbolische Darstellung gegebene Funktion im Kontext
 - g) Interpretieren einer durch eine graphische Darstellung gegebene Funktion im Kontext
 - h) Interpretieren einer durch eine verbale Darstellung gegebene Funktion im Kontext
 - i) Vernetzen von verbaler und symbolischer Darstellung
 - j) Vernetzen von verbaler und tabellarischer Darstellung
 - k) Vernetzen von tabellarischer und graphischer Darstellung
 - l) ... usw.
- 3) Funktionales Denken erfordert das flexible Auf- und Zurfalten und Verdichten von Verstehenselementen (zum Kern des Funktionsbegriffs).
- a) Die ||beteiligten Größen|| benennen.
 - b) Die ||Richtung der Abhängigkeit|| explizieren.
 - c) ... u. v. m.

Entsprechend kann nun auf jeder dieser Ebenen aufgeschlüsselt werden, welche Teilprozesse beim Mathematisieren funktionaler Zusammenhänge und beim Interpretieren von Funktionen jeweils dazugehören und insbesondere wie die Teilprozesse auf den unterschiedlichen Ebenen zusammenhängen können (für konkrete Beispiele vgl. Abschnitt 4):

- Das Mathematisieren funktionaler Zusammenhänge (d. h. Funktionen in Situationen „hineinsehen“) erfordert die *Konstruktion* einer Darstellung. Dabei müssen ||beteiligte Größen|| und ||Richtung der Abhängigkeit|| festgelegt bzw. gesetzt werden, z. B. durch Überlegungen, was im Kontext sinnvoll ist. Insbesondere muss man aber wissen, dass man sich diese beiden Fokusfragen zu den Verstehenselementen überhaupt stellen muss.
- Das Interpretieren von Funktionen erfordert eine *situationsangemessene Adressierung* von Verstehenselementen. Je nach Situation kann es auch erforderlich sein, dabei mehrere Darstellungen zu vernetzen, indem beide Darstellungen hinsichtlich derselben Verstehenselemente aufgefaltet werden (für Beispiele siehe Abschnitt 4 und Zindel, 2019). Eine gelungene Darstellungsvernetzung zeigt sich in der tragfähigen Adressierung derselben Verstehenselemente in den beteiligten Darstellungen (vgl. Zindel, 2019).

Da die drei genannten Aspekte entlang der Ebenen im Verstehensmodell entstanden sind, liegt die Vermutung nahe, dass die Teilprozesse auf der Ebene der Verstehenselemente grundlegend für die Teilprozesse auf der Ebene der Darstellungen und diese wiederum grundlegend für die Teilprozesse im Umgang mit Funktionsbegriff im Ganzen sind. In Abschnitt 5 wird zum Teil aufgezeigt, inwiefern sich diese vermuteten Zusammenhänge auch empirisch zeigen.

Das funktionale Denken zeigt sich also zum einen in der situationsangemessenen Anwendung einzelner Aspekte des Verstehensmodells und zum anderen in Vernetzungsprozessen innerhalb des Verstehensmodells (Abb. 6).

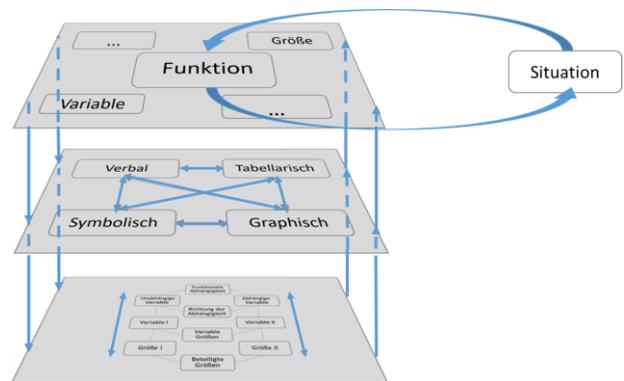


Abb. 6: Teilprozesse des funktionalen Denkens als Pfeile im Verstehensmodell

Die Teilprozesse des funktionalen Denkens beziehen sich hier auf diejenigen Prozesse, die in Bezug auf das Verstehen des Kerns des Funktionsbegriffs wichtig sind. Wenn weitere spezifische Eigenschaften einzelner Funktionstypen berücksichtigt werden, kommen möglicherweise weitere Teilprozesse hinzu.

2.3 Verschiedene Formen verbaler Beschreibungen

Bei den Darstellungen wurde unter anderem auch die verbale Darstellung als eine Variante benannt. Da es in der Literatur unterschiedliche Auffassungen davon gibt, was eine verbale Darstellung ist, wird in diesem Abschnitt erläutert, was in diesem Artikel darunter verstanden wird, und inwiefern eine verbale Darstellung einer Funktion von einer verbalen Beschreibung einer Alltagssituation abzugrenzen ist, da mit dieser Unterscheidung auch unterschiedliche Anforderungen hinsichtlich der geforderten Teilprozesse funktionalen Denkens identifizieren lassen.

Bossé et al. (2011) unterscheiden in diesem Zusammenhang zwischen „verbal situations“ und „verbal descriptions“. „Verbal situations“ sind sprachlich beschriebene Situationen und „verbal

descriptions“ die sprachliche Beschreibung von Darstellungen einer Funktion (ebd.). Im ersten Fall handelt es sich also um *funktionale Zusammenhänge* und im zweiten Fall um *Funktionen*, die beschrieben werden. Fokussiert werden in diesem Artikel nur die verbalen Beschreibungen, die die Bedeutung im Kontext ansprechen. Innermathematische Beschreibungen wie „Es handelt sich um eine lineare Funktion, die durch die Punkte (2/3) und (4/5) verläuft“ werden an dieser Stelle nicht berücksichtigt.

Insgesamt lassen sich somit drei Typen von verbalen Beschreibungen unterscheiden:

- 1) Beschreibungen einer Alltagssituation: Hier wird eine Situation beschrieben, in der ein oder mehrere funktionale Zusammenhänge enthalten sind, ||beteiligte Größen|| und ||Richtung der Abhängigkeit|| sind hier noch nicht determiniert.

Bsp.: Für eine Filmflat muss man im Monat 10 Euro bezahlen, aktuelle Filme kosten zusätzlich 5 Euro pro Film.

- 2) Beschreibungen einer Funktion (verbale Darstellung): Hier sind ||beteiligte Größen|| und ||Richtung der Abhängigkeit|| bereits determiniert.

Bsp.: Der Preis in einem Monat wird in Abhängigkeit von der Anzahl der gekauften Filme angegeben.

- 3) Beschreibungen einer Darstellung der Funktion: Hier sind die ||beteiligten Größen|| und die ||Richtung der Abhängigkeit|| implizit durch die jeweilige Darstellung determiniert (z. B. durch die Achsenbeschriftung in einem Graphen oder den Kopf einer Tabelle).

Je nachdem, welche Form verbaler Beschreibungen im Aufgabentext vorkommen, sind damit unterschiedliche Anforderungen verbunden (Zindel, 2019, S. 13):

„Diese Unterscheidung ist notwendig, um die damit einhergehenden verschiedenen Anforderungen zu differenzieren. Die Verwendung einer verbalen Darstellung im Sinne der oben genannten Definition beschreibt explizit den gerichteten funktionalen Zusammenhang, d. h. ein tragfähiger Umgang mit dieser Darstellung erfordert ihre Identifikation und Interpretation. Eine Situationsbeschreibung ohne Verwendung einer verbalen Darstellung, d. h. eines expliziten Sprachmittels, erfordert hingegen die Aktivierung von Kontextwissen, um die funktionale Abhängigkeit in die beschriebene Situation „hineinzusehen“. Das „Hineinsehen“ einer funktionalen Abhängigkeit in die Situation stellt eine andere Anforderung dar als das Identifizieren und Interpretieren einer bereits gegebenen [Anm. d. Aut.: Funktion].“ (Zindel, 2019, S. 13)

In diesem Artikel werden die ersten beiden Typen verbaler Beschreibungen, also die verbalen Darstellungen und die Situationsbeschreibungen genauer in den Blick genommen. Mit dieser Unterscheidung lassen sich auch die Anforderungen von Textaufgaben genauer ausdifferenzieren (vgl. Abschnitt 4).

Nach dieser theoretischen Spezifizierung von Teilprozessen des (situationsbezogenen) funktionalen Denkens stellt sich nun die Frage, inwiefern sich diese Unterschiede auch empirisch als relevant zeigen. In Abschnitt 5 wird daher der Frage nachgegangen, inwiefern sich die durch die Aufgabe intendierten Teilprozesse bei der Bearbeitung dieser Aufgaben bei Lernenden auch empirisch zeigen.

3. Methoden

Das Ziel des Artikels ist es, die Teilprozesse funktionalen Denkens zu identifizieren, um diese gezielt und somit das funktionale Denken insgesamt fördern zu können. Nachdem im vorherigen Abschnitt verschiedene Teilprozesse des funktionalen Denkens theoretisch identifiziert wurden, stellt sich die Frage, inwiefern sich die Ausdifferenzierung der Teilprozesse auch empirisch als relevant erweist, d. h. inwiefern sich mit dieser Ausdifferenzierung Unterschiede und Schwierigkeiten in Bearbeitungsprozessen von Lernenden zeigen. Die in der Einleitung aufgeworfene und im Folgenden empirisch zu beantwortende Forschungsfrage lautet daher:

- 2) Welche Teilprozesse des funktionalen Denkens zeigen die Lernenden in dem entwickelten Lehr-Lern-Arrangement? Welche Hürden und Potenziale lassen sich in den Bearbeitungsprozessen in den Lernprozessen hinsichtlich des funktionalen Denkens rekonstruieren?

Methoden der Datenerhebung

Den methodologischen Rahmen des übergreifenden Projekts (vgl. Zindel, 2019) bildet die fachdidaktische Entwicklungsforschung mit ihrer iterativen Verknüpfung von Entwicklung und Forschung (vgl. Prediger et al., 2012). Insgesamt haben in vier Designexperimentzyklen 39 Lernende der Jahrgangsstufen 8–10 an der Erhebung im Laborsetting und 57 Lernende der Jahrgangsstufe 9 an der Erhebung im Klassensetting teilgenommen (vgl. Zindel, 2019).

Die Datenbasis dieses Artikels stammt aus dem dritten Designexperimentzyklus, an dem 8 Lernende in jeweils drei Fördersitzungen beteiligt waren. In den Fördersitzungen sollten Verstehenselemente zum Kern des Funktionsbegriffs aufgebaut sowie Auffaltungs- und Verdichtungsprozesse angeregt werden. Dazu wurden verschiedene Designelemente

entwickelt und in Designexperimenten erprobt (vgl. Zindel, 2019). Die Lernenden haben die Aufgaben zu zweit bearbeitet und wurden durch Impulse der Förderlehrerin unterstützt. Diese Designexperimente wurden videographiert und die entstandenen schriftlichen Produkte der Lernenden eingesammelt.

Methoden der Datenauswertung

Die videographierten Designexperimente wurden vollständig transkribiert und qualitativ analysiert (ebd.). Dazu wurde das Facettenmodell (Abb. 3) zu einem Analyseinstrument ausgebaut (vgl. Zindel, 2019, S. 104 ff.), indem im Facettenmodell die von den Lernenden adressierten Verstehenselemente farblich markiert werden (tragfähig adressierte grün, nicht tragfähig adressierte Verstehenselemente rot). Die adressierten Verstehenselemente können mit den intendierten Verstehenselementen abgeglichen werden, um Schwierigkeiten im Bearbeitungsprozess aufzuzeigen (ebd.). Auf diese Art und Weise kann somit auch rekonstruiert werden, welche Teilprozesse des funktionalen Denkens die Lernenden vollziehen, wie tragfähig ihnen dies gelingt und inwiefern sich dies im Laufe der Designexperimente entwickelt. Im Unterschied zu Zindel (2019) stehen hier nun die Teilprozesse funktionalen Denkens im Fokus.

4. Ausschnitt des Lehr-Lern-Arrangements

Zur Beantwortung der Forschungsfrage 2 wird ein Ausschnitt eines fach- und sprachintegrierten Lehr-Lern-Arrangements präsentiert, das in Zindel (2019) im Hinblick auf den Aufbau von Verstehenselementen zum Kern des Funktionsbegriffs empirisch erprobt wurde. Im Fokus stehen vor allem Aufgaben, die das Mathematisieren oder Interpretieren einer funktionalen Abhängigkeit erfordern, d. h. die Anforderungen können dem situationsbezogenen funktionalen Denken im obigen Sinne zugeordnet werden.

FlatGuck1.0

Beim Streaming-Anbieter FlatGuck1.0 können für einen bestimmten monatlichen Grundpreis unbegrenzt viele Filme ausgeliehen werden. Zusätzlich gibt es die Möglichkeit, Filme dauerhaft zu kaufen. Durch die Funktionsgleichung $f(x) = 4,5x + 9,99$ wird der Anzahl der gekauften Filme der Preis in einem Monat zugeordnet.

- a) Wie viele Filme hat Sina gekauft, wenn sie 45,99€ bezahlen muss?
- b) Was zahlt Sina, wenn sie 5 Filme gekauft hat?

Abb. 7: FlatGuck1.0 als Aufgabe zur Standortbestimmung in der ersten Fördersitzung hinsichtlich des Umgangs mit einem kontextuell gegebenen funktionalen Zusammenhang

DREAMSTREAM
Bei uns in der Online-Videothek DreamStream können Sie eine Film-Flat für nur 20€ im Monat buchen. Dafür kann man sich im Monat so viele Filme ausleihen, wie man möchte. Für die Anmeldung muss zusätzlich einmalig 5€ bezahlt werden.

STREAMOX3
Schauen Sie unser komplettes Film- und Serienangebot bequem an Ihrem Fernseher mit unserem neuen StreamoX3-TV! Für die TV-Box zahlen Sie einmalig 49€, die zugehörige Film-Flat erhalten sie bereits zu einem monatlichen Festpreis von nur 10€.

STREAM24
Für nur 10€ im Monat schauen Sie so viele Filme aus unserem Bestand, wie Sie möchten. Sie können dabei aus mehr als 8000 Filmklassikern wählen. Zusätzlich haben wir auch aktuelle Filme im Angebot. Für jeden aktuellen Film zahlen Sie zusätzlich nur 4,50€!

(1) Für welches Angebot würdet ihr euch entscheiden?

(2) Welches Angebot lohnt sich für welche Anzahl von Monaten?

(3) Was ist der Gesamtpreis nach 12 Monaten?

(4) Stellt eine Funktionsgleichung dazu auf.

(5) Welche der Formulierungen passt zu welchen Angeboten?

Anzahl Monate	Gesamtpreis

Anzahl gekaufter Filme	Preis in einem Monat

$f(x) = 20 \cdot x + 5$

$f(x) = 4,5 \cdot x + 10$

A: Die Funktionsgleichung gibt den Preis in einem Monat in Abhängigkeit von der Anzahl der gekauften Filme an.

$f(x) = 10 \cdot x + 49$

C: Die Funktionsgleichung gibt die Anzahl der Monate in Abhängigkeit von dem Gesamtpreis an.

B: Mit der Funktionsgleichung kann man in Abhängigkeit von der Anzahl der Monate den Gesamtpreis berechnen.

D: Mit der Funktionsgleichung kann ich den Gesamtpreis in Abhängigkeit von der Anzahl der Monate berechnen.

Abb. 8: Drei Streaming-Angebote mit Darstellungsvernetzungsaktivitäten und Lösungsansätzen (Zindel et al., 2018, S. 27)

In dem Lehr-Lern-Arrangement werden zum einen Aufgaben eingesetzt, die eine Interpretation einer gegebenen Funktion erfordern, die in diesem Fall immer auch durch eine verbale Darstellung gegeben sind (wie beispielsweise die Aufgabe FlatGuck1.0 in Abb. 7). Zum anderen wurden auch Aufgaben eingesetzt, die eine Mathematisierung funktionaler Zusammenhänge erfordern (wie bei den Streaming-Angeboten in Abb. 8).

Zunächst wurde die Aufgabe FlatGuck1.0 eingesetzt, um zu analysieren, inwiefern die Lernenden eine gegebene Funktion (hier gegeben durch eine verbale und eine symbolische Darstellung) interpretieren und dabei die Darstellungen vernetzen können. Der hier intendierte Teilprozess des funktionalen Denkens ist also:

- 1) Vernetzung von verbaler und symbolischer Darstellung

Im Anschluss daran haben sich die Lernenden mit den Streaming-Angeboten beschäftigt (Abb. 8). Dabei wurden folgende Teilprozesse des funktionalen Denkens durch die Aufgabe bzw. die Impulse der Förderlehrerin angeregt:

- 2) Mathematisieren eines funktionalen Zusammenhangs durch Konstruktion einer Tabelle
- 3) Konstruktion einer symbolischen Darstellung anhand der zuvor konstruierten Tabelle.
- 4) Vernetzung von verbalen und symbolischen Darstellungen.

Zur Unterstützung und Förderung dieser Teilprozesse wurden verschiedene Designelemente eingesetzt. Das erste Designelement besteht bereits in der Strukturierung der geforderten Teilprozesse. Die Vernetzung von verbaler und symbolischer Darstellung soll hier zum einen dadurch gefördert werden, dass die Lernenden die Funktionsgleichungen zunächst selbst aufstellen. In diesem Teilprozess legen sie die Bedeutung der ||unabhängigen und abhängigen Variablen|| selbst fest, sodass die anschließende Versprachlichung, welche Größe von welcher abhängt, erleichtert werden soll. Ein weiteres eingesetztes Designelement ist die Auseinandersetzung mit variierten Formulierungen (vgl. Zindel, 2013; 2019; Prediger, 2015), aus denen die Lernenden passende Formulierungen auswählen sollen. Die Formulierungen sind hinsichtlich der ||beteiligten Größen|| und der ||Richtung der Abhängigkeit|| variiert, um für diese Verstehenselemente zu sensibilisieren (vgl. Zindel, 2019, S. 126 f.).

Flohmarkt 1

Max verkauft Bücher auf dem Flohmarkt. Die folgende Funktionsgleichung gibt seinen Gewinn in Abhängigkeit von der Anzahl der verkauften Bücher an: $f(x) = 2x - 5$

- a) Wie viele Bücher muss Max verkaufen, um einen Gewinn von 15€ zu erzielen?
- b) Welchen Gewinn macht Max, wenn er 12 Bücher verkauft?

Flohmarkt 2

Max verkauft Bücher auf dem Flohmarkt. Die folgende Funktionsgleichung ordnet jedem Gewinn die Anzahl der Bücher zu, die er dafür verkaufen müsste: $f(x) = 0,5x + 2,5$

- a) Wie viele Bücher muss Max verkaufen, um einen Gewinn von 15€ zu erzielen?
- b) Welchen Gewinn macht Max, wenn er 12 Bücher verkauft?

Abb. 9: Flohmarkt-Aufgaben (Situationsvariation)

In den beiden Flohmarkt-Aufgaben (Abb. 9) werden zum einen die Richtung der Abhängigkeit und zum anderen das Sprachmittel variiert, mit dem die funktionale Abhängigkeit beschrieben wird. In Flohmarkt 1 wird der Gewinn in Abhängigkeit von der Anzahl der verkauften Bücher angegeben und in Flohmarkt 2 die Anzahl der zu verkaufenden Bücher in Abhängigkeit vom gewünschten Gewinn. Das Ziel ist, den Teilprozess „Vernetzen und Interpretieren gegebener verbaler und symbolischer Darstellung“ anzuregen und durch die Situationsvariation zu unterstützen.

Im Folgenden wird empirisch untersucht, inwiefern diese Prozesse wirklich angeregt werden und welche Hürden und Potenziale sich in den Bearbeitungsprozessen zeigen.

5. Empirische Einblicke

Anhand des Schülerpaares Fynn und Svenja wird dazu im Folgenden exemplarisch aufgezeigt, wie die Lernenden die unterschiedlichen geforderten Teilprozesse bewältigen. Im Fokus stehen dazu ebenfalls exemplarisch die in der Auseinandersetzung mit den in Abschnitt 4 präsentierten Ausschnitten des Lehr-Lern-Arrangements, d. h. FlatGuck1.0 (Abschnitt 5.1), Vergleich von Streaming-Angeboten (Abschnitt 5.2), und Flohmarkt-Aufgaben (Abschnitt 5.3) (für weitere Analysen mit Analysefokus auf der Ebene der Verstehenselemente vgl. Zindel, 2019; Prediger & Zindel, 2017).

In diesem Artikel werden nun mit einem ähnlichen Vorgehen die Teilprozesse funktionalen Denkens identifiziert. Dazu werden mit dem Drei-Ebenen-Modell die Lernprozesse beschrieben (vgl. Abschnitt 3). In jedem Abschnitt wird rekonstruiert, welche Teilprozesse des funktionalen Denkens vollzogen werden und inwiefern dies tragfähig gelingt.

Außerdem wird verglichen, inwiefern dies den durch die Aufgabe intendierten Teilprozessen entspricht.

5.1 Hürden und Potenziale beim Umgang mit Funktionen zu Beginn der ersten Fördersitzung

In diesem Abschnitt wird rekonstruiert, welche Teilprozesse des funktionalen Denkens Fynn und Svenja zu Beginn der ersten Fördersitzung zeigen und inwiefern ihnen dabei eine tragfähige Bearbeitung der Aufgabe FlatGuck1.0 (Abb. 7) gelingt (für ausführlichere bzw. weitere Analysen der Szenen in diesem Abschnitt mit Fokus auf den Aufbau von Funktionsverständnis vgl. Zindel 2019).

Gefordert wird hier eine Vernetzung der gegebenen symbolischen und verbalen Darstellung sowie deren Interpretation im Sachzusammenhang (Abb. 10)

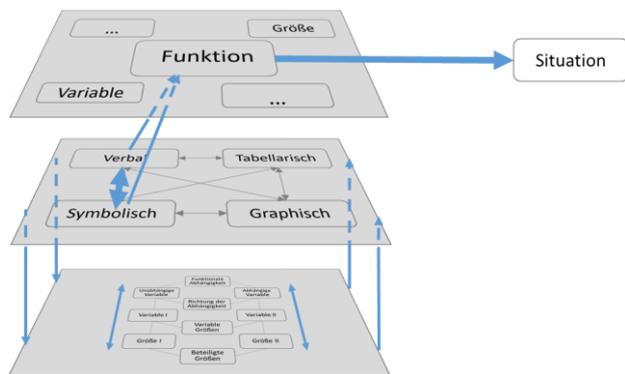


Abb. 10: Geforderter Teilprozess: Vernetzen von symbolischer und verbalen Darstellungen und Interpretation im Sachzusammenhang

In Abbildung 11 werden die schriftlichen Bearbeitungsansätze von Fynn und Svenja dargestellt.

FS1, Erklärung der eigenen Lösungsansätze zu „Flat-Guck1.0“

- 11 F Ich habe mir einfach nur mal eben so das Wesentliche rausgeschrieben.
- 12 S Ja, also ich habe mir halt die Funktionsgleichung rausgeschrieben und hm die Aufgabe, dass ich halt und dann auch drangeschrieben, zum Beispiel hier die Anzahl [zeigt auf das Wort „Anzahl“ in ihren Notizen] und der Preis [zeigt auf das Wort „Preis“ in ihren Notizen] der Filme, dass ich halt weiß, was was ist. Und dann wie man vielleicht rechnen könnte.
- 13 DE Was ist was?
- 14 S Hm einmal hier [zeigt auf die 9,99 in der von ihr abgeschriebenen Funktionsgleichung], das ist glaube ich der Preis von den Filmen [gleichzeitig] und die Anzahl [zeigt auf den ersten Summanden in der von ihr abgeschriebenen Funktionsgleichung].

1) Monatlicher Grundpreis \Rightarrow unendlich viele Filme ausgeleihen werden.
 2) Filme dauerhaft kaufen

$$f(x) = 4,5x + 9,99$$

FlatGuck 1.0
 2 Funktionsgleichung: $f(x) = 4,5x + 9,99$
 Frage: Wie viel muss Sina gekauft, wenn sie 45,99€ bezahlen muss.
 Anzahl ↑ Preis der Filme

Abb. 11: Verschriftete Bearbeitungsansätze von Fynn (oben) und Svenja (unten) zur Aufgabe Flat-Guck1.0

Fynn erklärt, dass er sich „das Wesentliche rausgeschrieben“ hat. Aus seinen Notizen (Abb. 11) wird deutlich, dass er damit Informationen aus dem Aufgabentext und die symbolische Darstellung meint. Allerdings zeigt er keinen Ansatz, die symbolische und verbale Darstellung zu vernetzen, wie es die Aufgabe eigentlich erfordert.

Svenja erklärt, dass sie „drangeschrieben“ habe, „die Anzahl und der Preis der Filme“, damit sie weiß „was was ist“. Im Gegensatz zu Fynn vollzieht sie damit diesen Teilprozess des Vernetzens von symbolischer und verbaler Darstellung. Allerdings hat Svenja Schwierigkeiten, die beiden Darstellungen tragfähig zu vernetzen. Dies wird auch im weiteren Verlauf deutlich, wenn die von Fynn und Svenja adressierten Verstehenselemente in dem gesamten Bearbeitungsweg der FlatGuck1.0-Aufgabe analysiert werden (Abb. 12).

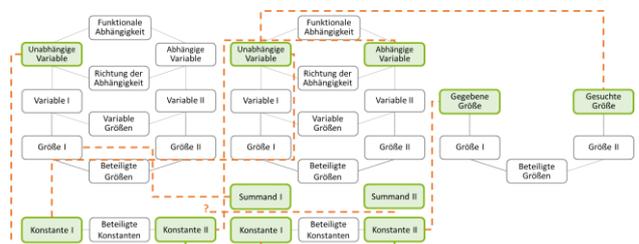


Abb. 12: Lernsituation I, F&S verbale D. \leftrightarrow symbolische D. \leftrightarrow Fragestellung (Zindel, 2019, S. 168)

Auffällig ist, dass sie fast ausschließlich nicht-tragfähige Bezüge zwischen den Verstehenselementen herstellen, wie in Abbildung 12 an den rot gestrichelten Verbindungen zwischen Verstehenselementen erkennbar ist. Dies illustriert, dass ihnen hier keine tragfähige Vernetzung der beiden Darstellungen gelingt.

Eine tragfähige Bearbeitung der FlatGuck1.0-Aufgabe erfordert aber die Vernetzung und Interpretation von verbaler und symbolischer Darstellung durch Auffalten hinsichtlich der Bedeutung der ||unabhängigen und abhängigen Variablen||.

5.2 Hürden und Potenziale beim Umgang mit funktionalen Zusammenhängen

In diesem Abschnitt wird rekonstruiert, welche Teilprozesse des funktionalen Denkens Fynn und Svenja beim Vergleich von Streamingdiensten und dem Mathematisieren der funktionalen Zusammenhänge zeigen (siehe Aufgabe in Abb. 8).

Hier muss zunächst entschieden werden, welche beiden ||beteiligten Größen|| in Bezug gesetzt werden sollen. Das kann, muss aber nicht, durch die Aufgabe vorgegeben sein. Außerdem muss hier explizit berücksichtigt werden, WIE die beiden Größen verknüpft werden, also durch welche weiteren Größen und welche Operationen. All diese Informationen müssen dann zu einer mathematischen Darstellung verdichtet werden.

Die verschriftlichten Bearbeitungsansätze von Fynn und Svenja sind in Abbildung 13 abgedruckt.

Dreamstream
 Film/Lab = 19,99€ pro Monat.
 Anmeldung = 5 € einmalig.

StreamoX3
 Einmalig 49€
 Festpreis = 9,99€ monatlich

Dreamstream 19,99€ monatlich 13Jahr 205€
 + 5€ Anmeldegebühr (einmalig)

StreamoX3 9,99€ monatlich 13Jahr 120€
 + 49€ einmalig 169€

Abb. 13: Verschriftlichte Bearbeitungsansätze von Svenja (oben) und Fynn (unten) zum Vergleich der Streamingangebote DreamStream und StreamoX3

FS1, Vergleich DreamStream und StreamoX3

- 129 S [12s] Erstmal die Gleichung aufschreiben, oder. [lacht]
 130 [notieren beide etwas, 148s]

Svenja schlägt vor, „erstmal die Gleichung“ (#129) aufzuschreiben. Anhand der Notizen (Abb. 13) wird

deutlich, dass sie hierzu zunächst die Informationen aus dem Text rausschreiben, die in einer Funktionsgleichung die Konstanten darstellen würden. Sie nehmen also noch nicht die ||beteiligten Größen|| in den Blick. Auf Nachfrage erläutern sie dann, für welches Angebot sie sich entscheiden würden.

- 134 F Auf den ersten Blick sieht es aus, dass das günstiger ist. [zeigt auf DreamStream]
 135 S Ja.
 136 F Stimmt nicht.
 137 DE Warum?
 138 F (...) berechnet diesen Betrag auf ein Jahr hoch, dass wären dann (...)
 139 S Mal 365 oder so, ne?
 140 F Nee. Nicht die Tage, die Monate.
 141 S Ach ja, man
 142 F Den Betrag mal 12. [zeigt auf die 19,99 in seinen Notizen] (...) sind 240 Euro.
 143 S Ja, das sind dann schon ...
 144 F Plus die fünf einmal. Hm, das sind dann (...) 245 (...). Also fassen wir das zusammen. In einem Jahr. [ergänzt etwas zu seinen Notizen]

Fynn rechnet den Betrag auf ein Jahr hoch, wie er erläutert. Svenjas Vorschlag, den Betrag dazu „mal 365“ (#139) zu rechnen, widerspricht er, indem er feststellt „nicht die Tage, die Monate“ (#140). Er betont hier also noch einmal, dass es sich um einen monatlichen Betrag und nicht um einen täglichen Betrag handelt, wodurch implizit auch die Bedeutung der einen beteiligten ||Größe I|| angesprochen wird. Sie stellen danach fest, dass StreamoX3 auf ein Jahr bezogen das günstigere Angebot ist, weshalb sie sich für dieses entscheiden würden.

Der Auftrag, die beiden Angebote zu vergleichen, erfordert eine Mathematisierung der funktionalen Zusammenhänge. Fynn und Svenja haben die funktionalen Zusammenhänge mathematisiert, indem sie Terme aufgestellt haben (als Teil einer symbolischen Darstellung, die hier aber nicht mit Variablen, sondern konkreten Werten formuliert wurden).

Im nächsten Schritt wird die Erstellung einer Tabelle eingefordert (Abb. 14).

FS1, Tabelle zu DreamStream ausfüllen

- 180 DE Mhm. Ok. könntet ihr das hier mal für DreamStream ausfüllen? [gibt Tabelle rein]
 181 F Ah. Zuordnungen.
 182 DE Bitte?
 183 F Ist das eine Zuordnungen?
 184 S (...) hier ist jetzt Anzahl von ...
 185 F (...)

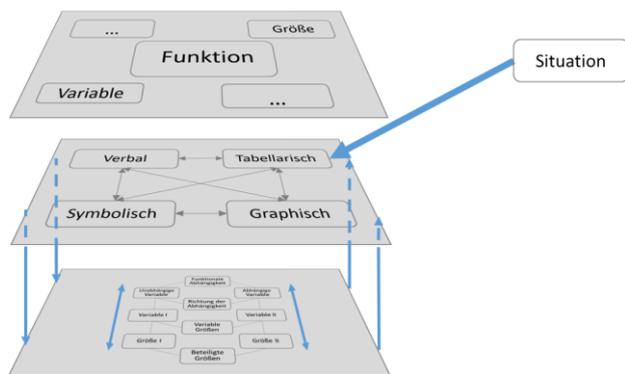


Abb. 14: Geforderter Teilprozess: Mathematisieren der Situation durch Konstruktion einer Tabelle

186 S ... (...) wie viel du im Monat bezahlst. (...) glaube ich. Also im ersten Monat -

187 F Ach so.

188 S Hm. [3s] (...) Wir nehmen das mit 20 so, würde man im ersten Monat 25 bezahlen, [gleichzeitig] weil man die Anmeldung noch dazu nehmen muss bei dem ersten Monat.

189 F [gleichzeitig] Ja, ja, klar. (...)

190 DE Genau.

191 S Aber dann zahlt man nur noch pro Monat [gleichzeitig] 19 Euro 99.

192 F [gleichzeitig] 20.

Für das Aufstellen der Tabelle ist ein „Mathematisieren des funktionalen Zusammenhangs“ erforderlich, dessen Ergebnis in einer tabellarischen Darstellung dokumentiert werden soll. Die Tabellenbeschriftung und damit die Festlegung der beiden ||beteiligten Größen|| ist hier bereits vorgegeben.

Fynn und Svenja haben dabei aber Schwierigkeiten, die Struktur der Tabelle zu verstehen, obwohl der Tabellenkopf bewusst vorgegeben wurde, um eine bestimmte funktionale Abhängigkeit zu mathematisieren. Die Designexperimentleitung erläutert ihnen daraufhin, wie der Aufbau der Tabelle zu verstehen ist.

193 DE (...) so gemeint, dass das der Gesamtpreis nach den Monaten- Der Gesamtpreis nach einem Monat, nach zwei Monaten-

194 F [gleichzeitig] Ah so.

195 DE [gleichzeitig] Dass ich sofort sehen kann von vorneherein, wenn ich jetzt nur drei Monate Mitglied sein werde dann [gleichzeitig] (...)

196 S [gleichzeitig] (...) Taschenrechner, geht schneller?

197 F Hm, warum einen Taschenrechner? [gleichzeitig] (...) im Kopf rechnen.

198 S [gleichzeitig] (...)

199 F Du musst doch nur- Du hast doch hier [zeigt auf die Tabelle] 25 Euro, ja das erste Monat. Dann hast du dann nicht hier 25, dann kommt wieder 20 Euro drauf, dann hat du 45. Dann hast du 65, dann hast du 85.

Nach dem Impuls der Designexperimentleitung haben sie die Tabelle korrekt ausgefüllt. Dabei sind sie zunächst rekursiv vorgegangen, indem sie von Zeile zu Zeile jeweils 20 addiert haben (#199). Analog haben sie im Anschluss auch die Tabelle zu StreamoX3 korrekt ausgefüllt. Im nächsten Schritt sollen nun Funktionsgleichungen aufgestellt werden, indem die Berechnung einzelner Werte verallgemeinert wird.

Für den Vergleich der Angebote nach 12 Monaten soll ein Perspektivwechsel von der spaltenweisen Betrachtung der Tabelle zu einer zeilenweisen Betrachtung stattfinden. Dazu fragt die Designexperimentleitung zunächst nach dem Preis nach 12 Monaten.

FS1, Funktionsgleichung zu DreamStream aufstellen

235 F Für 12 Monate? Man nimmt einfach das mal zwei und das dazu [zeigt auf die 100 und die 70 in der Tabelle zu StreamoX3] [3s] (...) ich denke, dass das für ein Jahr dann 270 Euro kostet.

236 DE Ok. Also wäre die Schlussfolgerung, wenn ich das für zehn Monate ausrechnen will, kann ich das einfach mal zwei nehmen? [zeigt auf die Zeile mit der 5 und der 100 in der Tabelle zu StreamoX3] Ne?

237 S [nickt]

238 F Ja.

239 DE Dann müsste das ja auch, wenn ich das nach zwei Monaten verdopple... [zeigt auf die Zeile mit der 2 und der 70]

240 F Nee, Moment.

241 DE ... müsste ich auf den Preis von vier Monaten kommen. [zeigt auf die 70 und die 90 in der StreamoX3-Tabelle] Ist das der Fall?

242 S [schüttelt den Kopf]

243 F Hm.

244 S [gleichzeitig] 70 plus 70 sind ja 140 und nicht 90.

245 F [gleichzeitig] Nee, nee, nee, nee, nee, nee. Boa, da musst du aufpassen. Wir sagen ja hier für ein halbes Jahr, ne? [gleichzeitig] Wenn wir das mal zwei nehmen-

246 S [gleichzeitig] (...)

247 F Wenn wir das mal zwei nehmen ist das 200, aber dann haben wir die Anmeldegebühr von dem Ding da zum Beispiel doppelt genommen. [zeigt auf die Tabelle von DreamStream] Also rechnen wir das ganze hm mal zwei minus die Anmeldegebühr [zeigt auf die Zeile mit der 5 und der 100] plus, nee- Ich muss mir das aufschreiben. [beginnt etwas aufzuschreiben] Hm. Hm (...) 100 mal 2. Dann nehmen wir 70 mal 2. (...) 200. 140. [schreibt weiter und spricht dabei leise]

Fynn schlägt zunächst vor, den Preis nach 5 Monaten zu verdoppeln und den Preis nach 2 Monaten zu addieren (#235). Als die Designexperimentleiterin darauf hinweist, dass der Preis nach 4 Monaten auch nicht das Doppelte des Preises nach 2 Monaten ist (#239, 241), fällt Fynn auf, dass die Anmeldegebühr

in diesem Fall doppelt berechnet wurde (#247). Er zieht daraus die Konsequenz, den Preis zu verdoppeln und die doppelt berechnete Anmeldegebühr einmal wieder abzuziehen. Ein Perspektivwechsel zur einer zeilenweisen Betrachtung der Zuordnung, wie er eigentlich intendiert war, wird von Fynn und Svenja hier also noch nicht vollzogen.

Dennoch sollen sie anschließend eine symbolische Darstellung konstruieren (Abb. 15).

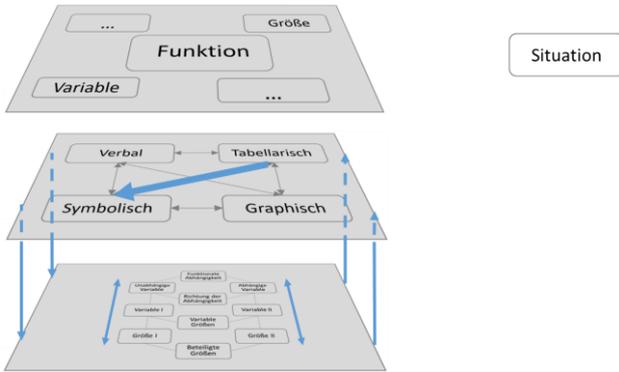


Abb. 15: Geforderter Teilprozess: Darstellungswechsel von Tabelle zur Funktionsgleichung

Hierzu bedarf es entweder einer Übersetzung der zuvor angefertigten tabellarischen Darstellung in eine symbolische Darstellung oder einer erneuten Mathematisierung des funktionalen Zusammenhangs durch Konstruktion der symbolischen Darstellung anhand der Situation. Im zweiten Fall wäre allerdings zu beachten, dass die ||beteiligten Größen|| und die ||Richtung der Abhängigkeit|| und somit die Bedeutung der ||unabhängigen und abhängigen Variablen|| in der Funktionsgleichung bereits durch die vorhandene Tabelle determiniert sind.

Beim Darstellungswechsel von der Tabelle zur symbolischen Darstellung äußert Svenja zunächst eine nicht-tragfähige Herangehensweise.

248 S Also hier oben. [zeigt auf DreamStream] Da wär- Da weiß ich nicht vielleicht würde das ja gehen, wenn man hm fünf als x sieht, weil das ist nur einmal diese Anmeldegebühr und dann plus diese 20 Euro, die man jeweils nehmen muss für jeden Monat, weil wenn man jetzt einmal x kann man ja einfach x lassen.

249 DE Kannst du das mal einmal aufschreiben, was du meinst.

250 S Hm. Ja, also so. [schreibt etwas zu Ende auf] x plus 20 so, weil wenn ich hm jetzt Anmeldung bezahle ich ja nur ein Mal.

Svenja schlägt vor, „fünf als x“ zu sehen „und dann plus diese 20 Euro, die man jeweils nehmen muss für jeden Monat“ (#248). Die Formalisierung gelingt ihr also noch nicht („x plus 20“, #250).

Die Designexperimentleitung bietet ihnen daraufhin zwei Varianten für eine Funktionsgleichung an, aus denen sie dann auch die passende auswählen. Die

Anforderung wurde also geändert von „Übersetzen in symbolische Darstellung“ zu „Vernetzen mit symbolischer Darstellung“. Diese Vernetzung gelingt Fynn und Svenja dann tragfähig.

Abschließend sollen die Lernenden noch die funktionale Abhängigkeit beschreiben, die durch die aufgestellte Funktionsgleichung beschrieben wird. Hier wird also der Teilprozess *Vernetzen von symbolischer und verbaler Darstellung* gefordert (Abb. 16).

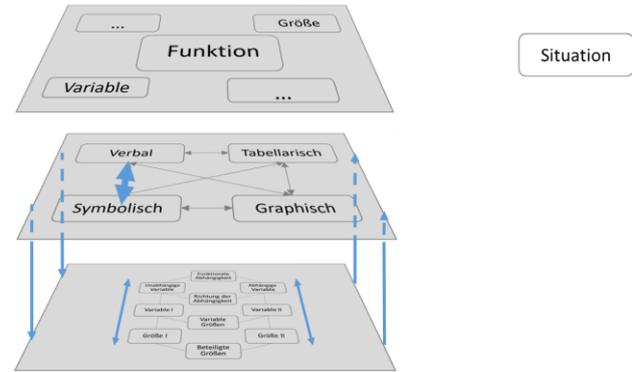


Abb. 16: Geforderter Teilprozess: Vernetzen von symbolischer und verbaler Darstellungen

Anstelle der ausführlichen Transkripte wird an dieser Stelle die Zusammenfassung der adressierten Verstehenselemente in den verbalen und symbolischen Darstellungen präsentiert (Abb. 17). Insgesamt (zeigt sich, dass Fynn und Svenja in dieser Lernsituation die verbale und symbolische Darstellung tragfähiger vernetzen. In der Auseinandersetzung mit der Formulierungsvariation scheint dieser Teilprozess des funktionalen Denkens gefördert worden zu sein.

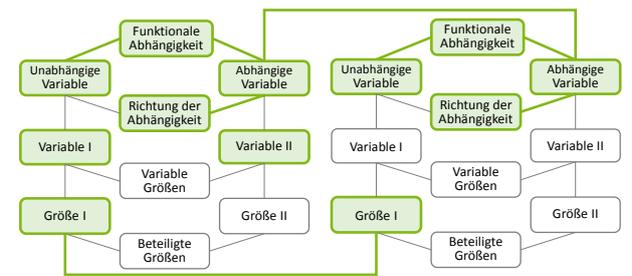


Abb. 17: Lernsituation II, F&S verbale D. ↔ symbolische D (Zindel, 2019, S. 206)

Dies könnte möglicherweise damit zusammenhängen, dass sie die gegebenen funktionalen Zusammenhänge zunächst selbst mathematisiert haben (zunächst durch eine Tabelle und dann eine Funktionsgleichung), bevor sie diese selbst aufgestellte Funktion wieder hinsichtlich ihrer Bedeutung im Kontext interpretiert haben. Inwiefern sie diesen Teilprozess des Interpretierens im nächsten Schritt auch auf gegebene Funktionen anwenden, wird im folgenden Abschnitt aufgezeigt.

5.3 Hürden und Potenziale beim Umgang mit Funktionen in der dritten Fördersitzung

Für eine tragfähige Bearbeitung der Flohmarktaufgaben (mit Situationsvariation) müssen die *||beteiligten Größen||* und die *||Richtung der Abhängigkeit||* in der mathematischen Darstellung identifiziert und in Bezug auf die reale Situation interpretiert werden. Dabei müssen beide gegebenen Darstellungen aufgefaltet und vernetzt werden (Abb. 18)

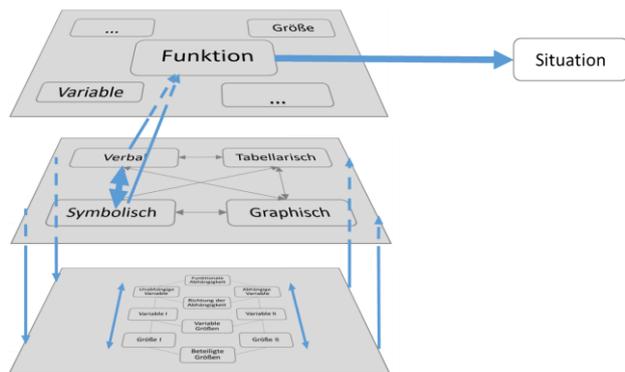


Abb. 18: Geforderter Teilprozess: Vernetzen von symbolischer und verbalen Darstellungen und Interpretation im Sachzusammenhang

FS3, Beginn der Bearbeitung der Flohmarktaufgaben

- 56 S [lacht] [48s] Keine Ahnung. Bei der ersten [Flohmarkt 1] würde ich, wenn ich es jetzt so sehe –
- 57 F Ja, da versteh ich das nicht. Hätte da jetzt plus gestanden, dann hätte ich das verstanden. Also dann hätte ich eine Idee.
- 58 DE Mhm.
- 59 S (...) Ich hätte jetzt was, warum man diese 5- wenn man diese 5 Euro sieht, so abziehen könnte, weil meistens auf manchen – so auf einem Flohmarkt also Trödelmarkt, die müssen eine Standgebühr bezahlen. Deswegen, dass man das davon abzieht, wie was der da mietet, so. Weil die meisten mieten ja den Platz. Also wollen- Deswegen-
- 60 DE Mhm.
- 61 S Wenn man das jetzt als 5 sieht und die 2 als 2 Euro pro Buch, dann x fürs Buch. Zwei für den Preis der Bücher. Minus 5 für diese Standgebühr, die man dann zahlen muss.
- 62 DE Mhm.
- 63 S Und das man dann sozusagen rausfinden muss, hm wie viel x man braucht, um die 15 Euro zu gewinnen. Also wie viel Bücher [gleichzeitig] (...)
- 64 F [gleichzeitig] das habe ich jetzt nicht gedacht.
- 65 S Ja, aber das ist mir letztens durch so eine Fernsehsendung ist mir das wieder eingefallen. Hm irgendwie Achtung Kontrolle oder und da ist mir das aufgefallen gerade so, weil der hatte auch so Tisch und dann war das alles zu lang und dann passt das mit dieser Standgebühr nicht mehr. Deswegen ist mir das gerade so

eingefallen, könnte vielleicht eine Standgebühr, die abgezogen wird, sein.

Fynn und Svenja versuchen hier die symbolische Darstellung zu interpretieren. Dazu fokussieren sie zunächst auf die Bedeutung der Konstanten. Hinsichtlich der Bedeutung der *||unabhängigen und abhängigen Variablen||* spricht Svenja nur die *||unabhängige Variable||* explizit an und erklärt „dann x fürs Buch“ (#61). Dies scheint sie aber aus der Bedeutung der Konstanten abzuleiten und nicht aus der gegebenen verbalen Darstellung. Weder Fynn noch Svenja vernetzen hier also explizit die symbolische und verbale Darstellung. Stattdessen scheinen sie die Bedeutung der Konstanten der symbolischen Darstellung im Kontext zu erklären. Auf diese Art und Weise können sie trotzdem passend die Tabelle zu Flohmarkt 1 ausfüllen (Abb. 19).

Preis Anzahl	Anzahl
- 3€	1
- 1€	2
1€	3
3€	4
5€	5
7€	6

Abb. 19: Lernsituation III, F&S Konstruktion einer Tabelle zu Flohmarkt 1

So können sie im weiteren Verlauf auch die Fragestellung der Aufgabe korrekt beantworten. Scheinbar mathematisieren sie hier einen funktionalen Zusammenhang neu, anstatt die gegebene Funktionsgleichung zu interpretieren und zu nutzen. Sie bearbeiten die Aufgabe mit einem anderen Teilprozess als dem intendierten.

5.4 Zusammenfassung

Bei den hier gezeigten empirischen Beispielen liegt der Fokus auf den Anforderungen „funktionale Zusammenhänge mathematisieren“ und „gegebene Funktionen interpretieren“. Es konnten dabei einige Hürden und Potenziale identifiziert werden. Dass die *Adressierung*, *Auffaltung* und *Verdichtung* von Verstehenselementen eine Hürde darstellen können, ist bereits aus Zindel (2019) bekannt. Hier konnte

zudem gezeigt werden, dass Lernende andere Teilprozesse als die intendierten vollziehen.

Bei der Bearbeitung von FlatGuck1.0 zeigen sich Hürden bei der Vernetzung und Interpretation der gegebenen verbalen und symbolischen Darstellung. Die Schwierigkeit liegt für Fynn vor allem darin, überhaupt den Ansatz zu finden, dass beide Darstellungen vernetzt werden sollten. Für Svenja liegt die Hürde darin, die beiden Darstellungen tragfähig hinsichtlich der ||unabhängigen und abhängigen Variablen|| aufzufalten. Somit gelingt auch ihr nicht die entsprechende Vernetzung. Die Bewältigung von Teilprozessen auf der Ebene der Verstehenselemente scheint zudem eine Voraussetzung für die erfolgreiche Bewältigung von Teilprozessen des funktionalen Denkens auf den anderen Ebenen im Drei-Ebenen-Modell zu sein.

Bei dem Vergleich der Streaming-Angebote wurden verschiedene Teilprozesse des funktionalen Denkens gefordert: das Mathematisieren funktionaler Zusammenhänge durch Konstruktion von Tabellen, Darstellungswechsel zu Funktionsgleichungen und Vernetzungen mit gegebenen verbalen Darstellungen. Bei dem Ausfüllen der Tabellen zeigt sich, dass Fynn und Svenja Schwierigkeiten haben, die Struktur der Tabelle zu verstehen. Außerdem fokussieren sie eine spaltenweise und damit rekursive Betrachtung der Tabelle, was die Verallgemeinerung des Zusammenhangs und somit das Aufstellen der Funktionsgleichung erschwert. Nachdem die Designexperimentleiterin die Anforderung von der „Konstruktion symbolischer Darstellungen“ zum „Vernetzen mit symbolischen Darstellungen“ änderte, konnten Fynn und Svenja die passende Funktionsgleichung auswählen. Die anschließende Vernetzung mit verbalen Darstellungen gelang weitestgehend tragfähig. In Zindel (2019) konnte zudem genauer aufgezeigt werden, wie das Designprinzip Formulierungsvariation für einzelne Verstehenslemente sensibilisieren kann, was vermutlich eine Voraussetzung für tragfähiges funktionales Denken auf dieser Ebene ist.

Bei den Flohmarktaufgaben zeigt sich, dass die beiden Lernenden hier wieder Kontextüberlegungen anstellen, anstatt auf die verbale Darstellung im Aufgabentext zu achten und diese zu interpretieren bzw. mit der symbolischen Darstellung zu vernetzen. Dies könnte damit zusammenhängen, dass sie versuchen zu mathematisieren anstatt zu interpretieren, wie es eigentlich gefordert ist. Bei einigen anderen Lernenden zeigte sich aber auch schon eine tragfähigere Herangehensweise beim Interpretieren. Einige Lernende wissen bei der Bearbeitung dieser Aufgabe inzwischen, wonach sie suchen müssen, nämlich nach Angaben zu den ||beteiligten Größen||

und der ||Richtung der Abhängigkeit||. Aber sie haben Schwierigkeiten die Richtung der Abhängigkeit korrekt zu identifizieren, wenn das Sprachmittel variiert und die verbale Darstellung die funktionale Abhängigkeit nicht mehr mit dem Sprachmittel „in Abhängigkeit von“, sondern mit dem Sprachmittel „zuordnen“ beschreibt (ebd.).

Auffalten und Verdichten zeigen sich sowohl beim Mathematisieren funktionaler Zusammenhänge und der Konstruktion von Darstellungen als auch beim Interpretieren von Funktionen und damit gegebenen Darstellungen als wichtige Prozesse. Allerdings zeigt sich, dass das Mathematisieren eher ein Verdichten und das Interpretieren eher ein Auffalten von Verstehenselementen erfordert. Dies lässt sich auch theoretisch erklären, da für einen Mathematisierungsprozess viele einzelne Informationen zusammengefasst werden müssen, wohingegen bei einer Interpretation die funktionale Abhängigkeit bereits verdichtet präsentiert wird. Daher ist es wichtig, die unterschiedlichen Anforderungen auch bewusst voneinander zu trennen, da sie strategisch unterschiedliche Herangehensweisen erfordern (Beim Interpretieren darf nicht anhand von Kontextüberlegungen entschieden werden, welche Richtung der Abhängigkeit sinnvoll ist, sondern es muss identifiziert werden, was die Aufgabe diesbezüglich vorgibt.)

6. Fazit und Ausblick

Funktionales Denken ist die „Denkweise die typisch für den Umgang mit Funktionen ist“ (Vollrath, 2014, S. 117). In diesem Artikel wurde spezifiziert, welche Teilprozesse zu dieser Denkweise gehören, wenn zunächst nur das situationsbezogene (und noch nicht das innermathematische) funktionale Denken betrachtet wird (siehe Abb. 6). Zur Identifizierung entsprechender Teilprozesse des funktionalen Denkens wurde auf einer Konzeptualisierung von Funktionsverständnis mit dem Fokus auf den Kern des Funktionsbegriffs (Zindel, 2019) aufgebaut, die wiederum auf der kognitionspsychologischen Theorie des Auffaltens und Verdichtens von Verstehenselementen (vgl. Drollinger-Vetter, 2011) basiert. Zur Differenzierung verschiedener Anforderungen in Textaufgaben, die grundlegend für eine Ausdifferenzierung des funktionalen Denkens war, wurde analytisch zwischen den Begriffen *Funktion* (als mathematischem Objekt), *funktionalem Zusammenhang* (als Phänomen in der Welt) und *funktionaler Abhängigkeit* (als der Vorstellung eines gerichteten funktionalen Zusammenhangs) getrennt. Diese begriffliche Trennung ermöglicht zum einen eine differenzierte Beschreibung von Anforderungen von Aufgaben, zum anderen aber auch eine differenziertere Beschreibung der Lernprozesse.

Welche Teilprozesse des funktionalen Denkens erforderlich sind, hängt von der Situation ab. Verschiedene Typen von Textaufgaben (wie in Abschnitt 4) stellen Lernende vor unterschiedliche Anforderungen, da sie verschiedene Teilprozesse des funktionalen Denkens erfordern. Beim Mathematisieren funktionaler Zusammenhänge werden Lernende vor andere Anforderungen gestellt als beim Interpretieren von Funktionen, wie sich auch empirisch gezeigt hat. In diesem Zusammenhang ermöglicht die Unterscheidung zwischen verbalen Darstellungen von Funktionen und Situationsbeschreibungen von funktionalen Zusammenhängen, diesbezüglich unterschiedliche Anforderungen in Textaufgaben wahrzunehmen. Die analytische Trennung zwischen den Begriffen Funktion, funktionalem Zusammenhang und funktionaler Abhängigkeit zeigt sich hier auch empirisch als relevant, da sie ermöglicht, die unterschiedlichen Anforderungen der Aufgaben zu beschreiben und die entsprechenden Bearbeitungsprozesse der Lernenden einzuordnen.

Als Konsequenz ergibt sich, dass die damit einhergehenden unterschiedlichen Anforderungen explizit thematisiert werden sollten, um bei Lernenden verschiedene Teilprozesse des funktionalen Denkens zu fördern.

Es hat sich gezeigt, dass die Fähigkeit, die Verstehenselemente zum Kern flexibel auffalten und verdichten zu können, grundlegend für das funktionale Denken zu sein scheint. Aus diesem Grund sollte auch das Verständnis zum Kern des Funktionsbegriffs explizit im Unterricht gefördert werden (für Möglichkeiten hierzu vgl. Zindel, 2019; Zindel et al., 2018).

In diesem Artikel lag der Fokus auf den Teilprozessen situationsbezogenen funktionalen Denkens, d. h. insbesondere auf den Teilprozessen im Zusammenhang mit dem Interpretieren von Funktionen und Mathematisieren von funktionalen Zusammenhängen. Dies sind im Drei-Ebenen-Modell gerade die Teilprozesse, die Bezüge zwischen der Funktion und der Situation herstellen. Hier nicht näher betrachtet wurden bislang die Teilprozesse, die ausschließlich innerhalb des Drei-Ebenen-Modells ablaufen, womit insbesondere innermathematische Prozesse gemeint sind. In einem weiteren Schritt wäre es denkbar, auch diese Teilprozesse noch genauer zu untersuchen.

Funktionales Denken zu lernen, erfordert das Kennenlernen verschiedener Funktionstypen und Darstellungsweisen (Vollrath, 2014, S. 121 f.). Mithilfe der hier vorgestellten Ausdifferenzierung von Teilprozessen des funktionalen Denkens kann dies gezielt unterstützt und gefördert werden, wenn auch

Lehrkräfte für die verschiedenen Teilprozesse und damit einhergehenden Anforderungen sensibilisiert sind.

Danksagung

Ich danke den gutachtenden Personen für die konstruktiven und hilfreichen Anmerkungen.

Literatur

- Aebli, H. (1981). *Denken: das Ordnen des Tuns. Band II: Denkprozesse. Denken.* Stuttgart: Klett-Cotta.
- Bakker, A. & Gravemeijer, K. P. E. (2006). An Historical Phenomenology of Mean and Median. *Educational Studies in Mathematics*, 62(2), 149–168.
- Bossé, M. J., Adu-Gyamfi, K. & Cheetham, M. R. (2011). Assessing the difficulty of mathematical translations: synthesizing the literature and novel findings. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 6(3), 113–133.
- Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J. & Nichols, D. (1992). Development of the Process Conception of Function. *Educational Studies in Mathematics*, 23(3), 247–285.
- Dreyfus, T. & Eisenberg, T. (1984). Intuitions on functions. *The Journal of Experimental Education*, 52, 77–85.
- Drollinger-Vetter, B. (2011). *Verstehenselemente und strukturelle Klarheit: Fachdidaktische Qualität der Anleitung von mathematischen Verstehensprozessen im Unterricht.* Münster, New York, NY, München, Berlin: Waxmann.
- Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103–131.
- Herget, W. (2013). Funktionen - immer gut für eine Überraschung. In H. Allmendinger, K. Lengnink, A. Vohns & G. Wickel (Hrsg.), *Mathematik verständlich unterrichten* (S. 47–61). Wiesbaden: Springer
- Heymann, H. W. (1996). *Allgemeinbildung und Mathematik. Studien zur Schulpädagogik und Didaktik: Vol. 13.* Weinheim u. a.: Beltz.
- Hiebert, J. & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Hrsg.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 65–97). New York, NY: MacMillan.
- Klinger, M. (2018). *Funktionales Denken beim Übergang von der Funktionenlehre zur Analysis.* Wiesbaden: Springer.
- Leinhardt, G., Zaslavsky, O. & Stein, M. K. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research*, 60(1), 1–64.
- Moschkovich, J., Schoenfeld, A. & Arcavi, A. (1993). Aspects of Understanding: On Multiple Perspectives and Representations of Linear Relations and Connections Among Them. In T. A. Romberg, E. Fennema & T. P. Carpenter (Hrsg.), *Studies in mathematical thinking and learning. Integrating research on the graphical representation of functions* (S. 69–100). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.
- Niss, M. A. (2014). Functions Learning and Teaching. In S. Lerman (Hrsg.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (S. 238–241). Dordrecht: Springer Netherlands

- Nitsch, R., Fredebohm, A., Bruder, R., Kelava, A., Naccarella, D., Leuders, T. & Wirtz, M. (2015). Students' Competencies in Working with Functions in Secondary Mathematics Education: Empirical Examination of a Competence Structure Model. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 13, 657–682.
- Oehrtman, M., Carlson, M. & Thompson, P. W. (2008). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' function understanding. In M. P. Carlson & C. Rasmussen (Hrsg.), *Making the connection: Research and practice in undergraduate mathematics* (S. 27–42). Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Prediger, S. (2015). Wortfelder und Formulierungsvariation: Intelligente Spracharbeit ohne Erziehung zur Oberflächlichkeit. *Lernchancen*, 104, 10–14.
- Prediger, S. & Zindel, C. (2017). School Academic Language Demands for Understanding Functional Relationships: A Design Research Project on the Role of Language in Reading and Learning. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 13, 4157–4188.
- Prediger, S., Link, M., Hinz, R., Hußmann, S., Thiele, J. & Ralle, B. (2012). Lehr-Lernprozesse initiieren und erforschen: Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell. *Der Mathematische Und Naturwissenschaftliche Unterricht*, 65(8), 452–457.
- Swan, M. (1985). *The language of functions and graphs: An examination module for secondary schools. Testing strategic skills*. Nottingham, Eng., Manchester, Eng.: Shell Centre for Mathematical Education; Joint Matriculation Board.
- Vinner, S. & Dreyfus, T. (1989). Images and Definitions for the Concept of Function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(4), 356–366.
- Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal Für Mathematik-Didaktik*, 10(1), 3–37.
- Vollrath, H.-J. (2014). Funktionale Zusammenhänge. In H. Linneweber-Lammerskitten (Hrsg.), *Reihe Lehren lernen. Fachdidaktik Mathematik: Grundbildung und Kompetenzaufbau im Unterricht der Sek. I und II* (S. 112–125). [Stuttgart], Seelze: Klett; Kallmeyer.
- Vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Texte zur Didaktik der Mathematik*. Heidelberg u. a.: Spektrum Akad. Verlag.
- Wilhelm, N. (2016). *Zusammenhänge zwischen Sprachkompetenz und Bearbeitung mathematischer Textaufgaben*. Wiesbaden: Springer.
- Zindel, C. (2013). Funktionale Abhängigkeiten in Textaufgaben erkennen und nutzen: Diagnose und Förderung (Unveröffentlichte Masterarbeit). TU Dortmund, Dortmund.
- Zindel, C. (2019). *Den Kern des Funktionsbegriffs verstehen – Eine Entwicklungsforschungsstudie zur fach- und sprachintegrierten Förderung*. Wiesbaden: Springer.
- Zindel, C., Brauner, U., Jungel, C. & Hoffmann, M. (2018). Um welche Größen gehts?: Die Sprache funktionaler Zusammenhänge verstehen und nutzen. *Mathematik Lehren*, 206, 23–28.

Anschrift der Verfasserin

Carina Zindel
Technische Universität Dortmund
Institut zur Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts (IEEM)
Vogelpothsweg 87
44221 Dortmund
carina.zindel@math.tu-dortmund.de