

# Vielfältige Perspektiven auf die Entwicklung Funktionalen Denkens

ULRIKE DREHER, LANDAU; MARCEL KLINGER, ESSEN & MICHAELA LICHTI, LANDAU

## Zum Themenheft

Der Funktionsbegriff ist grundlegender Inhalt des Mathematikunterrichts. Seit den Meraner Lehrplan-Reformen 1905 um Felix Klein steht vor allem das Schlagwort „Erziehung zum Funktionalen Denken“ für eine flächendeckende curriculare Verbreitung des Begriffs mit all seinen Facetten im Mathematikunterricht (Gutzmer, 1908). Hierbei gilt es, Lernenden ein reichhaltiges und ebenso perspektivenreiches Bild von Funktionen und ihren inner- wie außermathematischen Anwendungsmöglichkeiten zu vermitteln. Lernende sollen in Funktionen denken lernen, d. h. Funktionales Denken entwickeln (vgl. z. B. ebd.; Oehl, 1965; Vollrath, 1986, 1989; Krüger, 2000). Gerade in den letzten Jahren gibt es innerhalb der deutschsprachigen mathematikdidaktischen Community vielfältige Forschungsprojekte, die sich der Entwicklung Funktionalen Denkens bei Lernenden widmen. Dies lässt sich beispielsweise anhand der großen Anzahl einschlägiger bereits publizierter Dissertationsschriften festmachen (z. B. Nitsch, 2015; Klinger, 2018; Lindenbauer, 2018; Rolfes, 2018; Lichti, 2019; Zindel, 2019; Dreher, 2020). Um solchen Projekten eine gemeinsame Plattform zu geben und voneinander zu profitieren sowie den nationalen fachdidaktischen Forschungsstand zum Funktionalen Denken zu vernetzen, wurden einerseits verschiedene Tagungsformate (F3-Tagung vom 22. bis 23. März 2019 in Landau) und Symposien (insbesondere im Rahmen mehrerer Tagungen der GDM) angeboten.

Andererseits soll gerade ein Themenheft wie das vorliegende einen Ausschnitt der vielfältigen Forschungsaktivitäten abbilden und gemeinsam sichtbar machen. In diesem Sinne adressiert das vorliegende Themenheft der *mathematica didactica* vielfältige Aspekte im Bereich des Funktionalen Denkens. Diese reichen von der weiteren theoretischen Konzeptualisierung des Begriffs über die Erforschung von individuellen Lernprozessen bei der Entwicklung Funktionalen Denkens, die deskriptive Beschreibung der Fähigkeiten im Bereich Funktionen für große Stichproben bis hin zur Erforschung notwendiger fachdidaktischer Expertise bei angehenden Lehrkräften. Eine gemeinsame theoretische Basis aller Projekte bilden dabei stets die drei Aspekte nach Vollrath (1989) (1) Zuordnung, (2) Änderungsverhalten bzw. Kovariation und (3) Funktion als Ganzes bzw. Objekt (Malle, 2000), die sich in den Grundvorstellungen des Funktionalen Denkens

entsprechend wiederfinden (von Hofe, 2003). Hinzu kommen weitere Gemeinsamkeiten, etwa der Fokus auf unterschiedliche Darstellungsarten wie Funktionsterm, Funktionsgraph, Wertetabelle und eine ggfs. zugrundeliegende situative Beschreibung (vgl. Janvier, 1978; Swan, 1982).

## Zu den Beiträgen des Themenheftes

Der Beitrag von Zindel nimmt in Form eines Überblicksartikels eine Gegenüberstellung der Begriffe „Funktion“, „Funktionaler Zusammenhang“ und „Funktionale Abhängigkeit“ vor, um eine weitergehende Konzeptualisierung des Funktionalen Denkens zu leisten. Hierbei identifiziert Zindel den Bedarf zur empirisch-gestützten Weiterentwicklung des Konzepts „Funktionales Denken“. Ihr Ansatz verfolgt dabei das Ziel, nicht nur das Erfassen von Lernendenvorstellungen, sondern vor allem auch die Förderung eines grundlegenden Funktionsverständnisses zu ermöglichen. Funktionales Denken wird oft als das „Denken in Zusammenhängen“ (Vollrath, 1989, S. 39) bzw. „eine Denkweise, die typisch für den gedanklichen Umgang mit Funktionen ist“ (Vollrath, 2014, S. 117) beschrieben. Um diese Definitionen ausschärfen zu können, wird im Artikel die analytische Trennung zwischen den bereits oben genannten Begriffen Funktion (als dem mathematischen Objekt), funktionaler Zusammenhang (als Phänomen in der Welt) und funktionale Abhängigkeit (hier die Vorstellung eines gerichteten funktionalen Zusammenhangs) vorgeschlagen und an empirischen Beispielen erläutert. Sowohl für den Umgang mit Funktionen als auch für den Umgang mit funktionalen Zusammenhängen benötigen Lernende die Vorstellung einer funktionalen Abhängigkeit. In Anlehnung an die kognitionspsychologische Theorie des Auffaltens und Verdichtens von Verstehenselementen (Drollinger-Vetter, 2011), wird ein Drei-Ebenen-Modell („Verstehensmodell“) entwickelt, das zu der Ebene der Begriffe und der Ebene der Darstellungen die Ebene der Verstehenselemente ergänzt und darin ein Facettenmodell zum sog. „Kern“ des Funktionsbegriffs präsentiert (vgl. Prediger & Zindel, 2017; Zindel, 2019). Hiermit lassen sich Teilprozesse des situationsbezogenen Funktionalen Denkens differenzierter und über die drei Aspekte nach Vollrath (1989) hinausgehend beschreiben. Zindel erörtert weitergehend verschiedene Prozesse bei der Darstellungsvernetzung und hebt die Rolle der verbalen Darstellung im Kontext verschiedener Textaufgaben hervor. Im Artikel werden

außerdem verschiedene Verstehenselemente zum Funktionsbegriff vorgestellt, um diese mit dem Prozess des Mathematisierens funktionaler Zusammenhänge und des Interpretierens von Funktionen in Verbindung zu bringen. Hierbei lässt sich zeigen, dass sich die Anforderungen, die diese beiden Prozesse an Schülerinnen und Schüler stellen, maßgeblich unterscheiden, sodass entsprechende Lerngelegenheiten gezielt geschaffen werden sollten.

Der sich anschließende Beitrag von Lindenbauer fokussiert auch auf individuelle Lernprozesse von Schülerinnen und Schülern. Hierbei zeigt die Autorin Potentiale von interaktiven Arbeitsblättern für den Lernprozess von Schülerinnen und Schülern im Rahmen einer Intervention zur Förderung des Funktionalen Denkens auf. In der vorliegenden qualitativen Studie bezieht sie Lernende des 7. Jahrgangs ein, da diese sich noch in einer frühen Phase der Ausbildung des Funktionalen Denkens befinden. Hierbei erfahren der Zuordnungs- und der Kovariationsaspekt nach Vollrath (1989) eine besondere Bedeutung. In ihrem Artikel geht Lindenbauer zunächst auf die klassischen Konzepte/Vorstellungen und Fehlvorstellungen (und die daraus resultierenden Schwierigkeiten) beim Funktionalen Denken ein, um diese im Anschluss bei der Entwicklung der interaktiven Arbeitsblätter in GeoGebra berücksichtigen zu können. Insbesondere der Darstellungswechsel zwischen Situation und Funktionsgraph wird mittels dynamischer Materialien fokussiert. Hierbei wird untersucht, inwiefern durch die Nutzung dynamischer Medien intuitive Vorstellungen zum Funktionalen Denken beeinflusst werden können. In diesem Rahmen kann Lindenbauer unter anderem eine Diskrepanz zwischen dem mathematischen Inhalt solcher Arbeitsblätter und der Wahrnehmung des Materials durch die Schülerinnen und Schüler aufzeigen. Diese lassen sich auf entsprechendes (nicht vorhandenes) Vorwissen und individuelle Erfahrungen mit einschlägigen Darstellungsformen zurückführen. Es lässt sich ableiten, dass gerade jene Schülerinnen und Schüler, die bereits eine tragfähige intuitive Vorstellung funktionaler Abhängigkeit besitzen, von der eigenständigen Erarbeitung mithilfe dynamischer Arbeitsblätter profitieren, wohingegen schwächere Lernende auf eine gezielte Anleitung durch die Lehrkraft angewiesen sind, damit die durch dynamische Arbeitsblätter angebotene Visualisierung nicht fehlinterpretiert wird.

Auch der Beitrag von Dilling, Pielsticker und Witzke hat zum Ziel, mithilfe neuer – in diesem Fall jedoch nicht-digitaler – Medien die Entwicklung Funktionalen Denkens bei Lernenden zu fördern. In einer Interviewstudie wird hierbei der Umgang von Schülerinnen und Schülern mit 3D-gedruckten Mo-

dellen von Funktionsgraphen untersucht. Entsprechend steht hierbei der Umgang mit haptischen Modellen im Vordergrund. Es zeigt sich, dass Schülerinnen und Schüler beim Entlangfahren an solchen Graphenmodellen mit der Hand Änderungen der Funktionswerte unmittelbar haptisch wahrnehmen. Es lässt sich schließen, dass sich vor allem der Kovariationsaspekt, aber auch der Objektaspekt durch derartige Lernhilfen in den Vordergrund stellen lassen. Die empirische Untersuchung zieht für einen entsprechenden Nachweis drei Schülerpaare einer 10. Klasse eines Gymnasiums heran, welche im Interviewsetting die Unterschiede zwischen linearen und quadratischen Zusammenhängen erkunden. Dabei wird analysiert, welche subjektiven Erfahrungsbereiche (Bauersfeld, 1983) sich bei Lernenden beschreiben lassen, ob diese zusammenhängen und ob sich diese dem Kovariations- und Objektaspekt zuordnen lassen. Es zeigt sich, dass es den Schülerinnen und Schülern gelingt, die verschiedenen Erfahrungsbereiche (Funktionsgleichung, 3-D-Objekt, Stempeln des Funktionsgraphen mit einem eigens erzeugten Stempel) miteinander zu vernetzen. Des Weiteren werden zwei Kategorien identifiziert, welche die subjektiven Erfahrungsbereiche des Kovariationsaspekts betreffen: Die Wahrnehmung der Änderung der Funktionswerte und erste Vorstellungen zur Krümmung. Im Sinne des Objektaspekts lassen sich Aussagen identifizieren, die Symmetriebegründungen, Eigenschaften von Extrema sowie Drehungen und Verschiebungen des Objekts adressieren.

Während die vorgenannten Beiträge vor allem die Förderung und Entwicklung von Funktionalem Denken thematisieren, richtet Klinger den Blick auf den Ist-Zustand. Hierbei fokussiert er vor allem Geschlechterunterschiede, die sich im Kontext eines Leistungstests zum Funktionalen Denken, dem sogenannten FALKE-Test, aufzeigen. Untersucht werden hierbei Schülerinnen und Schüler der gymnasialen Oberstufe zum Zeitpunkt des Eintritts in die Oberstufe und nach Abschluss des ersten Oberstufenjahrs. Mittels eines Klassifikationsmodells (Klinger, 2018) wird sichergestellt, dass die verwendeten Testitems die wesentlichen Aspekte des Funktionalen Denkens umfänglich abbilden. Es zeigt sich, dass im Gesamttest zu beiden Messzeitpunkten männliche Testteilnehmer signifikant besser abschneiden als weibliche. Um die Ursachen für diesen Umstand genauer zu ergründen, wird eine vergleichende Itemanalyse vorgenommen, um einen vertieften Einblick in die genannten Leistungsunterschiede zu erhalten. Hierbei zeigt sich, dass die Stärke entsprechender geschlechtsspezifischer Effekte stark variiert. Gerade solche Items, die einen Darstellungswechsel eines funktionalen Zusammen-

hangs von der situativ-sprachlichen zur graphisch-visuellen Darstellungsform erfordern, zeigen sich hierbei besonders auffällig und tragen in diesem Sinne in besonderem Maße zum vergleichsweise besseren Abschneiden der männlichen Teilstichprobe bei. Zu besagten Items zählen insbesondere solche, die spezifisch auf das Fehlermuster „illusion of linearity“ zugespitzt sind (De Bock et al., 2007). Dahingegen zeigen sich geringe oder sogar umgekehrte Effekte bei Items, die im Wesentlichen prozedurale Kompetenzen zu ihrer Bearbeitung benötigen. Die Studie gibt somit einen auch nah am Lerngegenstand ausgerichteten Einblick in empirisch regelmäßig feststellbare geschlechtsspezifische Differenzen in mathematischen Leistungstests anhand eines konkreten Themenbereichs.

Hofmann und Roth wechseln schließlich die Perspektive und fokussieren in ihrer Studie Mathematiklehramtsstudierende und ihre sich entwickelnde Expertise im Bereich des Fehlerwissens zu funktionalen Zusammenhängen. Hierbei adressieren sie speziell den Repräsentationswechsel zwischen situativer Beschreibung und zugehörigem Funktionsgraph. Hierbei ist offenkundig, dass das Vornehmen einer adäquaten Diagnose von Fehlvorstellungen für angehende Lehrerinnen und Lehrer eine notwendige Kompetenz darstellt, um den Lernprozess von Schülerinnen und Schülern optimal unterstützen zu können. In diesem Sinne ist es das Ziel der vorgestellten Studie, entsprechende diagnostische Fähigkeiten zukünftiger Lehrkräfte in Bezug auf Fehlertypen und typische Denk- und Arbeitsweisen mit Funktionen zu analysieren und in einer Intervention zu fördern. Es zeigt sich, dass Mathematiklehramtsstudierende zu Beginn ihres Studiums auch nach dem Besuch einer einführenden Vorlesung zu Grundfragen des Mathematikunterrichts häufig noch nicht in der Lage sind, Fehlvorstellungen von Schülerinnen und Schülern der 7. oder 8. Jahrgangsstufe bei der Betrachtung authentischer Videos differenziert zu benennen. Erst nach einer sechswöchigen Intervention, in der die Studierenden mit Videovignetten innerhalb des Videotools ViviAn (vgl. <https://vivian.uni-landau.de>) trainiert haben, zeigt sich eine signifikante Verbesserung der diagnostischen Kompetenz, wenn auch die Effektstärke klein ausfällt. Wesentliche Zuwächse zeigen sich hierbei unter anderem bei der Diagnose eines Graph-als-Bild-Fehlers (z. B. Schlöglhofer, 2000). Der Beitrag macht deutlich, dass die Schulung der Diagnosefähigkeiten zukünftiger Lehrkräfte bereits im Studium sinnvoll ist und zielführend gestaltet werden kann.

Die in diesem Themenheft enthaltenen Beiträge zeigen somit in ihrem Querschnitt exemplarisch unterschiedliche wissenschaftliche Bestrebungen der deutschsprachigen Community im Bereich des

Funktionalen Denkens auf und spiegeln gleichzeitig deren Vielseitigkeit wider. Hierbei finden sich Arbeiten, die den aktuellen Stand darstellen und dabei gezielt auf etwaige Problemstellen verweisen. Hierzu zählen häufige Fehlvorstellungen, Geschlechterunterschiede sowie Optimierungsbedarfe innerhalb der LehrerInnenbildung. Gleichsam stellen andere Arbeiten innovative Konzepte und neue theoretische Fundierungen zur Vermittlung und letztlich erfolgreichen Entwicklung von Funktionalem Denken bei Lernenden auf. Dies schließt gegenständliche Materialien und neue (digitale) Lehr-Lern-Arrangements ein.

Insgesamt zeigt das vorliegende Heft sowohl bestehende Herausforderungen als auch existierende Möglichkeiten im Kontext der „Erziehung zum Funktionalen Denken“ auf. Mit ihrer Sichtbarmachung soll eine gewinnbringende Vernetzung dieser vielfältigen Perspektiven geleistet werden.

## Danksagung

Wir danken allen Beteiligten am Themenheft, die mit Ihren Beiträgen und Reviews diese Ausgabe der *mathematica didactica* bereichert haben. Ganz besonders danken wir dem ständigen Herausgeber Andreas Vohns, der das Themenheft maßgeblich begleitet hat und im Januar 2021 zu unserer großen Bestürzung unerwartet verstorben ist.

## Literatur

- Bauersfeld, H. (1983). Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehren. In H. Bauersfeld, H. Bussmann & G. Krummheuer (Hrsg.), *Lernen und Lehren von Mathematik* (S. 1-56). Köln: Aulis.
- De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2007). *The illusion of linearity: From analysis to improvement*. New York: Springer.
- Dreher, U. (2020). *Graphische und numerische Repräsentationen von Funktionen: Die Rolle der verschiedenen Spezifitätsebenen von Selbstwirksamkeitsüberzeugungen* (Dissertation, Pädagogische Hochschule Freiburg, Freiburg). Abrufbar unter <https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:frei129-opus4-8221> (02.03.2021).
- Drollinger-Vetter, B. (2011). *Verstehenselemente und strukturelle Klarheit: Fachdidaktische Qualität der Anleitung von mathematischen Verstehensprozessen im Unterricht*. Münster: Waxmann.
- Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V. & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis: Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe*. Heidelberg: Springer Spektrum.
- Gutzmer, A. (Hrsg.) (1908). *Meraner Lehrplan 1905: Bericht betreffend den Unterricht in der Mathematik an den neunklassigen höheren Lehranstalten*. Leipzig: Teubner.
- Janvier, C. (1978). *The interpretation of complex cartesian graphs representing situations: Studies and teaching*

- experiments* (Dissertation, University of Nottingham, Nottingham).
- Klinger, M. (2018). *Funktionales Denken beim Übergang von der Funktionenlehre zur Analysis: Entwicklung eines Testinstruments und empirische Befunde aus der gymnasialen Oberstufe*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Krüger, K. (2000). *Erziehung zum funktionalen Denken: Zur Begriffsgeschichte eines didaktischen Prinzips*. Berlin: Logos.
- Lichti, M. (2019). *Funktionales Denken fördern. Experimentieren mit gegenständlichen Materialien oder Computer-Simulationen*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Lindenbauer, E. (2018). *Students' conceptions and effects of dynamic materials regarding Functional Thinking* (Dissertation, Johannes Kepler Universität Linz, Linz). Abrufbar unter <https://resolver.obvsg.at/urn:nbn:at:at-ubl:1-26900> (02.03.2021).
- Malle, G. (2000). Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. *mathematik lehren*, 103, 8–11.
- Nitsch, R. (2015). *Diagnose von Lernschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammenhänge: Eine Studie zu typischen Fehlermustern bei Darstellungswechseln*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Oehl, W. (1965). *Der Rechenunterricht in der Hauptschule: Didaktisch-methodische Überlegungen und Hinweise für die tägliche Unterrichtsarbeit*. Hannover: Schroedel.
- Prediger, S. & Zindel, C. (2017). School academic language demands for understanding functional relationships: A design research project on the role of language in reading and learning. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 13, 4157–4188.
- Rolfes, T. (2018). *Funktionales Denken: Empirische Ergebnisse zum Einfluss von statischen und dynamischen Repräsentationen*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Schlöglhofer, F. (2000). Vom Foto-Graph zum Funktions-Graph, *mathematik lehren*, 103, 16–17.
- Swan, M. (1982). The teaching of functions and graphs. In G. van Barneveld & H. Krabbendam (Hrsg.), *Conference on functions: Report 1* (S. 151–165). Enschede: Foundation for Curriculum Development.
- Vollrath, H.-J. (1986). Search strategies as indicators of functional thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 17(4), 387–400.
- Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 10(1), 3–37.
- Vollrath, H.-J. (2014). Funktionale Zusammenhänge. In H. Linneweber-Lammerskitten (Hrsg.), *Fachdidaktik Mathematik: Grundbildung und Kompetenzaufbau im Unterricht der Sek. I und II* (S. 112–125). Seelze: Kallmeyer.
- Zindel, C. (2019). *Den Kern des Funktionsbegriffs verstehen: Eine Entwicklungsforschungsstudie zur fach- und sprachintegrierten Förderung*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

## Anschrift der Verfasser

Ulrike Dreher  
 Universität Koblenz-Landau  
 Institut für Mathematik  
 Fortstraße 7  
 76829 Landau  
[dreher@uni-landau.de](mailto:dreher@uni-landau.de)

Marcel Klinger  
 Universität Duisburg-Essen  
 Fakultät für Mathematik  
 Thea-Leymann-Str. 9  
 45127 Essen  
[marcel.klinger@uni-due.de](mailto:marcel.klinger@uni-due.de)

Michaela Lichti  
 Universität Koblenz-Landau  
 Institut für Mathematik  
 Fortstraße 7  
 76829 Landau  
[lichti@uni-landau.de](mailto:lichti@uni-landau.de)