Das Wittgenstein’sche Sprachspiel als Mittel praxisdienlicher und didaktikbezogener Reflexion

MARTIN BRUNNER, LIENZ

***Zusammenfassung**: Das Wittgenstein‘sche Sprachspiel wird immer wieder in theoretischen Aufsätzen mit mathematikdidaktischer Ausrichtung als Instrument zur Deutung von Bedeutungsbildungsprozessen eingesetzt. Im vorliegenden Aufsatz wird die Praxistauglichkeit des Wittgenstein‘schen Sprachspiels als Mittel gewinnbringender didaktikrelevanter Reflexion in verschiedenen Kontexten anhand von praktischen Beispielen unter Beweis gestellt. Die Ergebnisse derartiger Reflexionen können als Grundlage für die didaktische Aufbereitung mathematischer Inhalte genutzt werden.*

***Abstract:** The Wittgenstein language game is used frequently in theoretical mathematical didactic articles as an instrument for the interpretation of meaning-forming processes. In this article, the practicality of the Wittgenstein language game as a means of profitable didactic-relevant reflection in various contexts is demonstrated by means of practical examples. The results of such reflections can be used as a basis for the didactic preparation of mathematical content.*

1. Einleitung

Wittgensteins „Sprachspiel“ scheint auf den ersten Blick ein theoretisches Gebilde zu sein, welchem man im Zusammenhang mit dem Mathematikunterricht höchstens im Hinblick auf einen philosophischen Diskurs Relevanz zusprechen würde. Die Intention des vorliegenden Aufsatzes ist es, im Widerspruch zu dieser Sichtweise, dieses Konzept für die Praxis nutzbar zu machen. Es werden konkrete Vorschläge im Hinblick auf den Umgang mit mathematischen Zeichen unterbreitet. Im Gegensatz zu aktuellen Ansätzen sollte weniger auf abstrakte mathematische Objekte, sondern auf den regelbestimmten Gebrauch der involvierten Zeichen fokussiert werden.

Das Wittgenstein’sche Sprachspiel wurde bereits mit unterschiedlichen mathematikdidaktischen Bezügen als Analysemittel eingesetzt. Relevante Arbeitsfelder und darin wichtige Arbeiten sind exemplarisch: Der Bereich der Begriffsbildung (z. B. Brunner, 2015, 2017; Dörfler, 2013, 2014; Meyer, 2010, 2015), die Analyse von Unterrichtsinteraktion (Bauersfeld, 1995; Schmid, 1998), die Rekonstruktion von Kommunikation aus mathematikdidaktischer Perspektive (Sfard, 2008). Ist man mit dem Wittgenstein‘schen Sprachspiel und mit seiner mathematikdidaktischen Einsetzbarkeit vertraut, so kann mit diesem Konzept die Relevanz und Zweckmäßigkeit didaktischer, methodischer und sprachlicher Aufbereitung von mathematischen Inhalten qualifiziert analysiert und beurteilt werden. Natürlich ist hier noch Forschungsarbeit zu leisten. Der vorliegende Aufsatz ist ein Beitrag dazu. Nach der eingenommenen Betrachtungsweise ist gut vorstellbar, dass Lehrende bei entsprechender Vertrautheit mit dem Konzept, dieses als Hilfsmittel der eigenen Unterrichtsgestaltung nutzen können. Das Wittgenstein’sche Bedeutungskonzept erscheint in diesem Sinne praxistauglich.

Im vorliegenden Artikel dient das Wittgenstein’sche Sprachspiel als spezielle Perspektive auf Unterrichtsmittel. Anhand von zwei praxisnahen Beispielen werden erforderliche Begriffs- und Bedeutungsbildungsprozesse beleuchtet und erläutert. Beim ersten Beispiel geht es um die Visualisierung von Brüchen und Probleme, die im Zusammenhang mit einer empiristischen Verwendung von Anschauungsmitteln entstehen können. Beim zweiten Beispiel geht es um Eigenheiten der üblichen sprachlichen Aufbereitung mathematischer Inhalte und Schwierigkeiten, welche aus dem üblichen Sprachgebrauch resultieren können. „Üblich“ bedeutet hier begründet durch akzeptierte didaktische Theorien. Am Schluss des Aufsatzes werden die unter dem Gesichtspunkt der Praxistauglichkeit gewonnenen Kenntnisse zusammengefasst.

2. Mathematik als Sprach- bzw. Zeichenspiel

Nach Wittgenstein haben Wörter und Sätze keine Bedeutung an sich. Die Bedeutung eines Wortes ist durch seine Rolle im Sprachspiel bestimmt. Mit Rolle ist die Art und Weise gemeint, nach welcher im Sprachspiel mit dem Wort kalkuliert wird. Die dabei geltenden Verwendungsregeln sind durch das Sprachspiel bestimmt. Wittgenstein schreibt:

> Ich sagte, die Bedeutung eines Wortes sei die Rolle, die es im Kalkül der Sprache spiele. (Ich verglich es mit einem Stein im Schachspiel.) Und denken wir nun daran, wie mit einem Wort, sagen wir z. B. „rot“ kalkuliert wird. Es wird angegeben, an welchem Ort sich die Farbe befindet, welche Form, welche Größe der Fleck oder der Körper hat, der die Farbe trägt, ob sie rein oder mit anderen vermischt, dunkler oder heller ist, gleich bleibt oder wechselt, etc. etc. Es werden Schlüsse aus den Sätzen gezogen, sie werden in Abbildungen, in

> Handlungen übersetzt, es wird gezeichnet, gemessen und gerechnet. (Wittgenstein, 1984a, S. 67)

Wittgenstein definiert nicht, was er als Sprachspiel versteht. „Er gebraucht das Wort, indem er Beispiele anführt und den Umgang mit ihm beschreibt" (Meyer, 2010, S. 59). Beispiele für solche Sprachspiele sind nach Wittgenstein (2003, S. 26): „Herstellen eines Gegenstands nach einer Beschreibung (Zeichnung)", „Über den Hergang Vermutungen anstellen", „Ein angewandtes Rechenexempel lösen". Mathematik wird von Wittgenstein als Sprachspiel betrachtet. Trotz des Begriffes „Sprachspiel" ist Wittgenstein (1978, S. 171) aber nicht der Meinung, dass Mathematik in jeder Hinsicht ein Spiel ist. Betrachtet man aber bestimmte Aspekte, wie etwa Zeichengebrauch oder Regelfolgen, so ist Mathematik mit einem Spiel vergleichbar.

Lernprozesse erfordern Bedeutungsänderungen von Wörtern. Mit der Bedeutungsänderung eines Wortes ändert sich auch das Sprachspiel. Lernen impliziert daher „die Teilhabe an neuen und sich verändernden Sprachspielen" (Meyer, 2015, S. 100). Die Bedeutung eines Satzes resultiert aus dem Zusammenwirken einzelner Wörter und der daraus resultierenden Spielstellung. Wittgenstein schreibt:

> Es gibt auch keinen alleinstehenden Satz. Denn was ich Satz nenne ist eine Spielstellung in einer Sprache. (Wittgenstein, 1984a, S. 172)

Im Wittgenstein'schen Sinn wird also die Bedeutung der in der Mathematik verwendeten Sprechweisen durch den mathematiküblichen Gebrauch bestimmt. Wie steht es aber mit der Bedeutung der in der Mathematik verwendeten nonphonetischen Inskriptionen? Inskriptionen haben keine Bedeutung an sich. Eine Wellenlinie kann etwa als Zeichen für „Trennung von oben-unten", „auf und ab", „Vagheit", „Bewegung", „Wellen", „Wasser" usw. gebraucht werden. Man kann sie aber mithilfe entsprechender Regeln auch als „Sinusfunktion" verwenden. Auch im Zusammenhang mit nonphonetischen Inskriptionen wird also die Bedeutung durch den Gebrauch im jeweiligen Zeichenspiel bestimmt. Der Begriff „Zeichenspiel" geht ebenfalls auf Wittgenstein zurück (vgl. etwa Wittgenstein, 1984b, S. 257). Der Übergang vom „Sprachspiel" zum „Zeichenspiel" ist im Folgenden ein fließender. Geht es eher um phonetische Inskriptionen und Sprechweisen, so wird der Begriff „Sprachspiel" verwendet, geht es eher um nonphonetische Inskriptionen, der Begriff „Zeichenspiel". Beispiel: Geht es etwa um eine mit Wörtern formulierte Gesetzmäßigkeit wie „Bruch als Anteil", so wird von einem Sprachspiel gesprochen, geht es um Brüche als Kalkül, von einem Zeichenspiel. Auf Basis des Wittgenstein'schen Sprachspiels kann dem Bedeutungsbegriff eine prägnante sprachliche Form gegeben werden: *„Die Bedeutung eines Zeichens ist sein Gebrauch"*.

Dieser Gebrauch wird durch Regeln bestimmt. Im Sinne von Wittgenstein werden Regeln „nicht durch die logische Summe ihrer Beispiele explizit definiert" (Hoffmann, 2007, S. 1). Hoffmann schreibt weiter:

> Die Regel wird durch eine nicht weiter hintergehbare Ähnlichkeit gegeben, die unter den zu ihrer Definition angegebenen Beispielen besteht. Diese Ähnlichkeit wird durch jedes neu hinzukommende Beispiel fortgeschrieben, verengt, verändert oder auch erweitert. […] Das Erlernen von Regeln beinhaltet daher immer zwei Punkte: Einerseits die Erkennung ihrer Anwendungskriterien in konkreten Situationen, d. h. die Subsumption einer Erfahrung unter der jeweiligen Regel. Andererseits die spezifische Fortschreibung, die Veränderung, die Verengung oder Erweiterung der Regel aufgrund jeder neuen Erfahrung. (Hoffmann, 2007, S. 1)

Korrekte Regelanwendung ist im Zusammenhang mit Mathematik nicht einfach. Man muss beispielsweise wissen, welche Regeln in welchen Kontexten der Verwendung von Zeichen überhaupt Gültigkeit besitzen. Zusätzlich muss man erkennen, welche Anwendungskriterien in einer konkreten Situation die Verwendung einer bestimmten Regel rechtfertigen. Darüber hinaus ist im Zusammenhang mit Mathematik die Beachtung von Regeln alleine schon aufgrund der vielen möglichen Beispiele, die alle zumindest partiell verschiedene Regelverwendung verlangen, nicht einfach. Regeln müssen also ständig nicht nur fortgeschrieben sondern auch verengt oder erweitert werden. Regelanwendung ist zudem selbst nicht durch eine allgemein gültige Regel beschreibbar. Es gibt nicht nur Regeln, welche den Gebrauch der Wörter, Sätze und Inskriptionen im Zusammenhang mit so genannten mathematischen Darstellungen und Theoremen determinieren. Es gibt auch Regeln, welche das Sprachspiel „Mathematikunterricht" bestimmen (Meyer, 2015, S. 103). Meyer nennt als Beispiele für solche Regeln Interaktionsmuster und Routinen wie das „Muster der inszenierten Alltäglichkeit", die Voigt (1984) herausgearbeitet hat.

Die Vermittlung von Wissen geschieht nach Wittgenstein innerhalb von Sprachspielen (Meyer, 2015, S. 98). Wie bereits erwähnt gibt Wittgenstein (2003, S. 26) eine Vielzahl von Beispielen für solche Sprachspiele wie etwa: „Beschreiben eines Gegenstands nach dem Aussehen, oder nach Messungen." Im Zusammenhang mit Begriffsbildung betont Meyer (2015, S. 104) den Begründungsaspekt im Hinblick auf die Festlegung des Wortgebrauchs. Dieser zeigt sich etwa in der Struktur potentieller Verwendungsweisen von Wörtern. Als Beispiele führt Meyer (ebd., S. 104) die konditionale Struktur

(„Wenn …, dann …“), Definitionen (als eine elementare Grundlage eines Begriffs) oder Äquivalenzrelationen (bikonditional – „Genau dann …, wenn …“) an. Auch Brunner (2017) führt solche Beispiele an. Hier drei davon: Ein Zeichenspiel wie

$$|x| = x \text{ für } x \geq 0 \text{ und } |x| = -x \text{ für } x < 0$$

regelt etwa die Verwendung der Betragsstriche (Brunner, 2017, S. 153). Bei Zeichenspielen wie

$$\frac{2-z}{4-z^2} = \frac{1}{2+z} \sim \frac{a-c}{a^2-c^2} = \frac{1}{a+c} \sim \frac{2a-b}{4a^2-b^2} = \frac{1}{2a+b} \sim \frac{4+(-b-c)}{16-(b+c)^2} = \frac{1}{4+(b+c)}$$

usw. müssen die Lernenden letztlich selbst in der Lage sein, die entsprechenden Verwendungsregeln zu decodieren (Brunner, 2017, S. 156). Ein Zeichenspiel wie dieses ist gut mit dem „*token-type*“-Konzept nach Peirce beschreibbar (Brunner, 2013). Auch der Ausbau des Zahlbegriffs erfolgt u. a. mithilfe von Zeichenspielen (Brunner, 2017, S. 154). Ein Zahlzeichen wie etwa „5“ ist anfänglich nur durch seine Rolle im Zeichenspiel „0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...“ bestimmt. Es ist Nachfolger des Zahlzeichens „4“ und Vorgänger des Zahlzeichens „6“. Mithilfe von Ersetzungs- und Operationsregeln und dem Ausbau des Zeichenspiels mithilfe von Inskriptionskombinationen kann das Dezimalsystem auf die bekannte Art und Weise ausgebaut werden. Es gelten Inskriptionsersetzungen wie $5 = 6 - 1 = -2 + 7 = 40 : 8 = 4{,}7 + 0{,}2 + 0{,}1 = \frac{17}{3} - \frac{2}{3} = 6{,}6 - 1{,}6 =$ usw. Die Rolle „5“ kann nun auf viele Arten „beschrieben“ werden. Lernen von Mathematik kann in diesem Sinne als Gebrauchserwerb im Zusammenhang mit mathematischen Zeichen gesehen werden. Weitere Aspekte des Gebrauchs des Wittgenstein‘schen Sprachspiels im Zusammenhang mit mathematikdidaktischen Fragestellungen werden in den folgenden Abschnitten angesprochen.

3. Beispiel 1: Visualisierungen als Erklärungsmittel

Der relationale Gebrauch der involvierten Inskriptionen ist nicht nur eine Notwendigkeit, sondern auch eine Schwierigkeit des regelkonformen mathematischen Tuns. Verwendet man Inskriptionen rein figürlich, so wird im Sinne von Dawydow (1977) und Dörfler (1988) der Übergang von der empirischen zur theoretischen Begriffsbildung erschwert. Verwendet man etwa einen Kreis rein als Figur, so ist er etwa bei Verwendung der Maximumsmetrik von einem Quadrat nicht unterscheidbar. Ein Kreis ist mathematisch durch eine Relationalität bestimmt: Er ist die Menge aller Punkte einer Ebene, die einen konstanten Abstand zu einem vorgegebenen Punkt dieser Ebene (dem Mittelpunkt) haben. Ohne theoretische Begriffsbildung ist es nach Dawydow (1977) nicht möglich, mathematische Begriffe zu bilden. Wie das obige Beispiel der Wellenlinie zeigt, können Inskriptionen fast beliebig verwendet werden. Will man feststellen, nach welcher Bedeutung Inskriptionen verwendet werden, so muss man wissen, wonach man sucht. Dawydow schreibt:

> Setzt man das Allgemeine als echte Grundlage für die Wahl der Gegenstände nicht voraus, muss ein solcher Vergleich rein willkürlich bleiben, und dann ist es völlig belanglos, was verglichen wird. […] Man kann auch, wie LOTZE bemerkt, Kirschen und Fleisch zur Gruppe der roten, saftigen, eßbaren Dinge zählen […] (Dawydow, 1977, S. 62)

Verwendet man etwa eine Brücke, einen Lichtbogen oder Wasserspritzer als typische Einführungsbeispiele für eine quadratische Funktion, so können Lernende an dieser Stelle nicht wissen, wonach sie suchen sollen. Die quadratische Funktion ist keine „Eigenschaft“ derartiger Phänomene der „Wirklichkeit“.

Im Zusammenhang mit der angeführten Gebrauchsunterscheidung (relational – figürlich) wurde ich von einem Kollegen mit folgenden zwei Fragestellungen konfrontiert:

Fragestellung 1: Bei der häufig verwendeten Visualisierung von Brüchen mithilfe von „Figuren“ (vgl. Abb. 1) werden diese Anschauungsmittel rein figürlich verwendet. Dennoch erweisen sich diese Visualisierungen als hilfreich im Hinblick auf die angestrebte theoretische Begriffsbildung. Wie kann man sich das erklären?

Fragestellung 2: Man hat bei entsprechenden Versuchen mit verschiedenen Visualisierungen gleicher Brüche (vgl. Abb. 2) die Beobachtung gemacht, dass Visualisierungen nicht in jeder Hinsicht verständnisfördernd sind. Manche Lernende werden dazu verleitet, beim Addieren von Brüchen nicht nur die Zähler, sondern auch die Nenner zusammenzuzählen. Wie kann man dieses Phänomen mithilfe des Wittgenstein‘schen Bedeutungsbegriffs erklären?

Der Wittgenstein‘sche Bedeutungsbegriff erlaubt einen klaren Blick auf Fragestellung 1. Wie bereits ausgeführt, haben Inskriptionen keine Bedeutung an sich. Sie erhalten Bedeutung durch ihren Gebrauch nach Regeln. Die so genannte Mehrdeutigkeit mathematischer „Darstellungen“ ist also mithilfe des Wittgenstein‘schen Bedeutungsbegriffs leicht verstehbar. Die jeweiligen Zeichenspiele und die regelkonforme Verwendung der Inskriptionen bedingen einander. Eine Inskription wie „2431“ wird etwa im Fünfersystem nach anderen Regeln verwendet als im Sechsersystem. Eine Inskription wie ○ kann als „Kreis“, „runde Scheibe“ (das Innere beinhaltend), „rundes Loch“ (das Innere nicht beinhaltend), „Kegelschnitt“,

„Jordankurve" usw., also jeweils nach anderen Regeln, verwendet werden. Auch die Inskriptionen von Anschauungsmitteln können nach unterschiedlichsten Regeln gebraucht werden und damit auf unterschiedlichste Art und Weise Bedeutung erhalten.

Abb. 1: Die angeführten Inskriptionen sind nur dann eine Visualisierung des Bruchs $\frac{3}{4}$, wenn man in der Lage ist, sie nach den Regeln des Bruchs zu verwenden.

„Figuren" wie Abb. 1 sind nur dann Visualisierungen von Brüchen wie hier $\frac{3}{4}$, wenn man in der Lage ist, die involvierten Inskriptionen nach den Regeln des Bruchs zu verwenden. Man muss dabei die Regeln des Bruchs auf die „Figur" anzuwenden imstande sein. Für Padberg und Wartha (2017, S. 24) ist diese Verwendungsweise „Grundvorstellung 1, Teilaspekt 1" (Bruch als Anteil eines Ganzen). Für Padberg und Wartha (ebd.) bieten Kreise den Vorteil, „dass so das Ganze als besonders prägnant erscheint". Es ist aber nicht selbstverständlich, dass Lernende die obige Figur automatisch nach den Regeln dieser Verwendungsweise zu gebrauchen imstande sind. Es gibt häufig mehrere Möglichkeiten, „Figuren" wie die angeführte als Visualisierung eines Bruches zu verwenden. Beispielsweise könnte die angeführte „Figur" etwa im Sinne des Umfangs, der Fläche oder des Zentriwinkels nach den Regeln des Bruchs $\frac{3}{4}$ verwendet werden. Man könnte auch Punkte einzeichnen und die „Figur" nur im Hinblick auf diese Punkte nach den Regeln des Bruchs verwenden. Visualisierungen bedürfen also der Festlegung eines Gebrauchs. Dieser Gebrauch muss erläutert werden. Bedeutungsbestimmend ist dabei immer die relationale Verwendung des Bruchs. Dies bedeutet etwa: Die „Figur" muss im Hinblick auf die jeweilige Verwendung (z. B. Umfang, Fläche, Punkteanzahl) als Ganzes betrachtet werden. Von besonderer Bedeutung ist dabei die Ersetzungsregel „das Ganze = 1". Durch die Zuordnung von „das Ganze = 1" erfolgt eine Normierung. Natürlich kann eine Figur auch in Abänderung dieser Grundregel anders betrachtet werden. Dies muss aber vermittelt werden. Der Nenner des Bruchs bestimmt die Anzahl der Teile. Entscheidend ist nun, dass das „Ganze" in gleich große Teile geteilt wird. Der Nachweis der Gleichheit der Teile ist nicht erforderlich. Er ist Teil der Verwendungsregeln des Bruchs. Man benötigt daher etwa keinen theoretischen Umfangs- oder Flächenbegriff. Insofern hat der Kollege mit seiner Einschätzung der Zweckmäßigkeit der rein figürlichen Verwendung der Anschauungsmittel Recht. Im Sinne der angeführten geometrischen Begriffe kann das Anschauungsmittel hier rein figürlich benutzt werden. Im Hinblick auf den Bruchbegriff (das ist hier der relevante Begriff) muss die Figur aber relational und damit nach den Regeln des theoretischen Begriffs verwendet werden. Damit stimmt die Einschätzung des Kollegen wiederum nicht. Nach den Regeln des Bruchs muss der Zähler der Anzahl der markierten Teile entsprechen. Es versteht sich von selbst, dass für Nenner und Zähler die gleiche Teilungsweise zu wählen ist. Man könnte also nicht den Nenner im Hinblick auf Flächenteilungen und den Zähler auf eine davon divergierende Einteilung (etwa eingezeichnete Punkte) anwenden. Für den gleichen Bruch können übrigens häufig verschiedene Markierungen der gleichen Art gewählt werden. Bei einer „Figur" wie Abb. 1 können etwa unterschiedliche Viertelkreise als Visualisierung des gleichen Bruchs markiert werden. Gleichheit im Sinne eines Bruchs bedeutet also nur Gleichheit in den betrachteten und nicht in allen Aspekten usw. Es gibt also eine Fülle von Verwendungsregeln, die von den Lehrenden bedacht und erläutert werden müssen, um gegebenenfalls „Fehlverwendungen" der Visualisierungen durch Lernende erkennen und vermeiden zu können. Abschließend kann in Beantwortung von Frage 1 also gesagt werden, dass die jeweilige „Figur" nur im Hinblick auf die Verwendungsregeln des visualisierten Bruchs und nicht in jeder Hinsicht relational verwendet werden muss.

Der Begriff „Fehlverwendung" bedarf einer Erläuterung. Er formuliert hier lediglich, dass Verwendungsregeln der Inskriptionen der entsprechenden Visualisierungen von festgelegten Regeln abweichen. Es wird also ein Regelkonflikt formuliert. Der Begriff „Fehlverwendung" ist nicht ideal, er wird aber im Folgenden beibehalten.

Im Zusammenhang mit Fragestellung 2 kann zunächst die Erfahrung des Kollegen durch eine eigene Beobachtung bestätigt werden. Nach einer ersten Erarbeitung des Begriffs „Brüche" in einer 2. Klasse einer Primarstufe eines Gymnasiums (6. Schulstufe), bei welcher ebenfalls Visualisierungen wie die angeführten verwendet wurden, führte ich im Zusammenhang mit der Addition von Brüchen folgende „Abstimmung" durch: Anhand von Visualisierungen wie Abb. 2 (es waren 2 Kreisfiguren aber jeweils in Viertelkreise geteilt) mussten die Lernenden entscheiden, ob das Ergebnis der Addition $\frac{3}{4} + \frac{2}{4}$ a) $\frac{5}{4}$ oder b) $\frac{5}{8}$ sei. Von den 21 Schülern*innen stimmten 11 für das

Ergebnis a) die restlichen 10 für das Ergebnis b). Als Begründung führten die Lernenden der zweiten Gruppe ziemlich übereinstimmend an, dass „das Ganze“ ja 8 Teile habe und von diesen 5 Teile markiert seien. Wenn dieses Experiment so den Standards einer wissenschaftlichen Untersuchung auch nicht entspricht, so kann es doch als Indiz für die Richtigkeit der Beobachtungen des Kollegen gewertet werden.

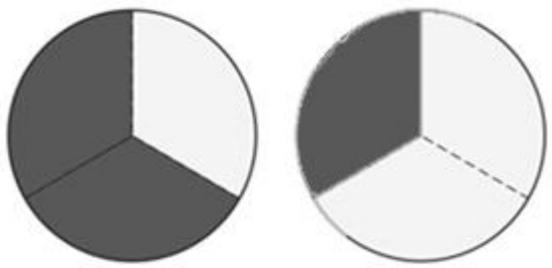

Abb. 2: Je nach Verwendungsweise können die Inskriptionen als Visualisierungen der Brüche $\frac{3}{3}$ oder $\frac{3}{6}$ dienen.

Gibt es nun eine Verwendungsweise von „Figuren“ wie Abb. 2 mit welcher man die oben beobachtete „Fehlverwendung“ im Zusammenhang mit der Addition von Brüchen (es werden nicht nur die Zähler, sondern auch die Nenner addiert) erklären kann? Wie bereits ausgeführt, können Inskriptionen von Visualisierungen wie jene der Abb. 2 auf unterschiedlichste Art und Weise verwendet werden. Verwendet man bei Abb. 2 eine einzelne Kreisfigur im Hinblick auf die „Fläche“ als Ganzes, so kann man die angeführte „Abbildung“ wegen der Normierung „das Ganze = 1“ als Visualisierung der Bruchaddition $\frac{2}{3} + \frac{1}{3}$ verwenden. Gebraucht man hingegen beide Kreisfiguren zusammen als Ganzes, so kann man die angeführte „Abbildung“ wegen der Normierung „das Ganze = 1“ als Visualisierung des Bruches „$\frac{3}{6}$“ verwenden: von 6 gleichen Teilen sind 3 markiert. Bei Padberg und Wartha (2017, S. 28) ist das Grundvorstellung 1, Teilaspekt 2 (Anteil mehrerer Ganzer). Padberg und Wartha schreiben:

> Der zweite Teilaspekt ist für Lernende deutlich komplizierter als der erste […]. Die Lernenden müssen nämlich hierbei einsehen, dass mehrere Ganze – zum Beispiel drei Stücke Streuselkuchen – das neue Ganze bilden […] (Padberg & Wartha, 2017, S. 28)

Es stehen also zwei Verwendungen mit unterschiedlichen Regeln zur Verfügung. Welcher der Vorzug zu geben ist, hängt vom jeweiligen Kontext ab. Will man Operationen wie die Addition von Brüchen mithilfe solcher Kreisfiguren visuell veranschaulichen, so muss es möglich sein, mehrere „Ganze“ zugleich „darzustellen“. In dieser Hinsicht ist die zuletzt angeführte Verwendungsweise eine „Fehlverwendung“. Derartige „Fehlverwendungen“ können aber, so wie Irrtümer generell, als Chance für den Mathematikunterricht gesehen werden. Baruk (1989) hält den Irrtum für einen normalen Denkvorgang. Sie schreibt etwa:

> Der Irrtum ist die Bewegung des Geistes. Diese Bewegung verhindern heißt, die Denkbewegung verhindern […] und damit die Möglichkeit versperren, dass sich ein mathematisches Denkvermögen aufbauen kann. (Baruk, 1989, S. 9)

Prediger (2004, S. 12) wirbt dafür, solche Irrtümer dann aufzugreifen und zu besprechen, wenn sie im Lernprozess auftauchen. Es kann damit verhindert werden, dass sich diese „epistemologischen Denkhürden“ verfestigen. „Epistemologische Denkhürden“ sind für sie unter Berufung auf Winter (1999), Brousseau (1983) oder Hefendehl-Hebeker (1989) „Grundvorstellungen“, die erschüttert werden, wie etwa „Muliplizieren vergrößert“, wenn man aus dem Bereich der natürlichen Zahlen in den der Bruchzahlen übergeht. Söbbeke (2005, S. 371) schlägt vor, die Mehrdeutigkeit der Anschauungsmittel für „produktive kognitive Konflikte“ zu nützen. Durch eine entsprechende Unterrichtskultur soll das bewusste Umdeuten von Strukturen gezielt gefördert werden. Die Schüler*innen müssen so „die theoretische Mehrdeutigkeit von Anschauungsmitteln immer wieder neu und bewusst entdecken und durchdringen“ (ebd., S. 378). Söbbeke (2009) beschreibt vier verschiedene Ebenen der „visuellen Strukturfähigkeit“ ausgehend von einer „Ebene konkret empirischer Deutungen“ bis hin zu einer „Ebene strukturorientierter, relationaler Deutungen, mit umfassender Nutzung von Beziehungen und flexiblen Umdeutungen“, durch welche im Verlauf eines Interaktionsprozesses Anschauungsmittel für Lernende einer neuen Sinngenerierung unterzogen werden können. Der Zeichengebrauch der Anschauungsmittel kann so, durch ein „ins Gespräch mit den Lernenden kommen“ (Söbbeke, 2009, S. 8), zu einem Thema des Unterrichts gemacht werden.

Aus Sicht des Wittgenstein‘schen Bedeutungsbegriffs geht es bei „Fehlverwendungen“ wie der angeführten lediglich um einen Regelkonflikt und nicht um einen Konflikt zwischen Regeln und Wirklichkeit. Wittgenstein schreibt (zitiert bei Gerrard, 1991, S. 132): „contradiction is between one rule and another, not between rule and reality“. In einem Ausverhandlungsprozess kann Zeichen ein Gebrauch und damit Bedeutung zugeschrieben werden. Es ist nun die Kunst der Lehrenden, mithilfe reflektierender Vergleiche, d. h. durch das Sichtbarmachen verschiedener Verwendungsmöglichkeiten, der dabei geltenden Regeln und der jeweiligen Auswirkungen die adäquate Verwendungsweise herauszuarbeiten. Dabei ist die Einnahme einer „Vorschauperspektive“ (Gallin & Ruf, 1998) von besonderer Bedeutung. Die Lehrenden müssen in der Lage sein, Stoffgebiete nicht aus der Position der Rückschau, sondern – eben wie die Lernenden – aus jener der Vorschau zu betrachten. Dies betrifft die geltenden Verwendungsregeln in hohem Maße. Die Lehrenden verfügen bereits über sie, die Lernenden nicht. Hier kann durch Sorgfalt (aufmerksames Zusehen und Zuhören – Zeichengebrauch der Lernenden als Rückmeldung; durchdachtes Explizitmachen von Regeln; Sorgfalt bei der Planung des Lehrens im Hinblick auf Detail und „Ganzes“, usw.) eine Überforderung der Lernenden vermieden werden.

Die angeführte „Fehlverwendung“ ist für die Fragestellung 2 von entscheidender Bedeutung. Verwendet man Visualisierungen wie Abb. 2, um damit Lernenden die Verwendungsregeln der Bruchaddition zu erklären, und kommt es in der Folge bei Lernenden zu solchen „Fehlverwendungen“, so können diese zum Problem werden. Es kann dann plausibel erscheinen, nicht nur die Zähler, sondern auch die Nenner zu addieren. Die Anzahl der Teile des „falsch“ gedeuteten „Ganzen“ entspricht bei dieser Deutungsweise ja der Summe der Nenner. Bestehen zusätzlich bei Lernenden Verständnisdefizite im Zusammenhang mit dem Teilen, hier etwa von Flächen, – wurde etwa noch nicht verstanden, dass Teilungen durch k zu anderen Flächengrößen als Teilungen durch l führen (l ungleich k; l, k $\in$ IN, ungleich 0), – so kann es sein, dass bei der Addition von ungleichnamigen Brüchen die oben beschriebene „Fehlverwendung“ einfach beibehalten wird. Dies wäre eine mögliche Erklärung für das in Fragestellung 2 hinterfragte Phänomen (Addieren von Brüchen durch Zusammenzählen der Nenner, nicht nur der Zähler).

Generell tritt hier folgendes Problem zutage: Werden Visualisierungen empirisch verwendet, d. h. wird versucht, mithilfe von Beobachtungen an Visualisierungen auf die regelkonformen Inskriptionsverwendungen der zugeordneten bedeutungsgebenden mathematischen Zeichenspiele rückzuschließen, so kann dies zu „Fehlverwendungen“ von Inskriptionen in den mathematischen Zeichenspielen selbst führen. Es sind immer die mathematischen Zeichenspiele, welche die Inskriptionsverwendungen in den zugeordneten Visualisierungen bestimmen, und nicht umgekehrt. Setzt man den theoretischen Begriff und damit die Inskriptionsverwendungen des mathematischen Zeichenspiels nicht voraus, so kann man nicht wissen, wonach man suchen bzw. worauf man achten soll. Visualisierungen können nur dann als erklärende Analogien dienen, wenn Lernende aufgrund einer vorausgehenden oder begleitenden Beschäftigung mit dem bedeutungsgebenden Begriff zu einem reflektierenden Vergleich von Zeichenspielen und Visualisierungen in der Lage sind. Im konkreten Fall bedeutet dies: Es muss erläutert werden, wie die Verwendungsregeln eines Bruchs auf die Visualisierung anzuwenden sind. Bedeutungsbestimmend bleiben dabei immer die Verwendungsregeln des Bruchs. Bauersfeld formuliert dies so:

> Jede Veranschaulichung eines mathematischen Sachverhalts, so treffend, isomorph und ablenkungsfrei Experten sie auch einschätzen mögen, muß gelernt werden. Und das heißt, ihre Bedeutung muß in der angeleiteten Auseinandersetzung mit der Sache vom lernenden Subjekt konstruiert werden. In der Regel stützt nicht die Veranschaulichung das mathematisch Gemeinte, sondern umgekehrt: Die Mathematik gibt der Veranschaulichung einen (bestimmten) Sinn. (Bauersfeld, 2000, S. 119)

In diesem Sinn gilt die Umkehrung nicht: Man kann nicht einfach von beobachteten Verwendungsregeln im Zusammenhang mit Visualisierungen auf die regelkonforme Verwendung von Brüchen schließen. Es können aber im reflektierenden Vergleich zwischen Bruch und Visualisierung Verwendungsregeln von Brüchen und deren Anwendung erläutert und bewusst gemacht werden.

4. Beispiel 2: Sprachspiele an einem Schulbuchkapitel beobachtet

Mithilfe des Wittgenstein‘schen Bedeutungsbegriffs können mathematikübliche Sprachspiele an mathematischen bzw. schulmathematischen Texten sichtbar gemacht werden. Dies entspricht der eingangs erwähnten Intention des Aufsatzes: Es soll gezeigt werden, dass mithilfe des Wittgenstein‘schen Sprachspiels die Relevanz und Zweckmäßigkeit didaktischer, methodischer und sprachlicher Aufbereitung von mathematischen Inhalten qualifiziert analysiert und beurteilt werden kann. Im Folgenden sind einige beobachtbare Sprachspiele am Kapitel 1.1 „Stammfunktionen“ des in Österreich in der 12. Schulstufe verwendeten Mathematikbuches „Mathematik verstehen 8“ (Malle, Ramharter, Ulovec und Kandl, 2007 bzw. Malle, Woschitz, Koth und Salzger, 2016) veranschaulicht. Diese Sprachspiele sind im Zusammenhang mit dem Lernen und Lehren von Mathematik von Relevanz (z. B. Brunner, 2015, 2017; Dörfler, 2013, 2014; Meyer, 2010, 2015). Meyer (2015, S. 5) belegt diese Relevanz etwa im Zusammenhang mit der Beschreibung und dem Verstehen von Begriffsbildungsprozessen. Bedeutung kann im Zusammenhang mit mathematischen Zeichen generell referentiell oder nicht referentiell gesehen werden. „Üblicherweise“ ist in der Mathematik und der Mathematikdidaktik die Perspektive eine referentielle: Mathematische Zeichen werden als Darstellungen von implizit existierenden abstrakten Objekten (Gegenständen) betrachtet. Eine Vielzahl von Strömungen in der Philosophie der Mathematik unterstützen diese Sichtweise (Platonismus, Empirismus, Mentalismus usw.). Dem gegenüber ist die Wittgenstein‘sche Sicht eine nicht referentielle: Mathematische Zeichen „erhalten“ ihre Bedeutung durch deren Gebrauch nach Regeln.

Im Rahmen der interpretativen Unterrichtsforschung wird in Anlehnung an die Methode der primär gedanklichen Vergleiche nun wie folgt vorgegangen (Jungwirth, 2003, S. 193 ff.): Es werden zunächst Auszüge des Schulbuchtextes vorgestellt und deren Anbindung an gängige Theorien des aktuellen didaktischen Diskurses belegt. Der vorgestellte Schulbuchtext erscheint in diesem Sinne als üblich. Des Öfteren sind dabei die angeführten theoretischen Belege mit Anmerkungen im Hinblick auf die Wittgenstein‘sche Perspektive versehen. Im Anschluss daran werden mittels einer alternativen, auf dem Wittgenstein‘schen Bedeutungsbegriff fußenden Sichtweise typische Sprachspiele des Schulbuchtextes sichtbar gemacht. Im Gegensatz zum beobachtbaren bzw. unterstellbaren üblichen referentiellen Sprachgebrauch wird eine Perspektive auf Bedeutungs- und Begriffsbildung erkennbar, welche ohne die übliche Metaphysik nicht wahrnehmbarer abstrakter Objekte auskommt. Nach Mühlhölzer (1999) sollte dies generell ein Bestreben der Mathematik sein. Im Sinne der Lernenden müsste dies auch ein Bedürfnis der Mathematikdidaktik sein. Wie Kvasz (2015, S. 53) betont, können die gleichen mathematischen Inhalte verschieden ausgedrückt werden. Dies gilt auch für deren schulmathematische Aufbereitung. Kvasz spricht in diesem Zusammenhang von den „Potenzialitäten der Sprache“ (ebd., S. 53). Mithilfe der angeführten Untersuchung sollen Problembereiche der mathematischen und „schulbuchüblichen“ Sprache sichtbar gemacht werden.

Zunächst eine kurze Darstellung eines Teils des angeführten Kapitels. Im angesprochenen Lehrbuch steht nach der Überschrift 1.1 „Stammfunktionen“ der folgende Satz:

> In diesem Abschnitt lernen wir, wie man zu einer Ableitungsfunktion die ursprüngliche Funktion finden kann. (Malle et al., 2007, S. 6)

Es geht also zunächst um regelkonformes Tun. Man lernt, Ableiten rückgängig zu machen. Nach zwei einleitenden Aufgaben[1] (einer physikalischen und einer innermathematischen) stehen nach der Überschrift „Der Begriff der Stammfunktion“ der folgende Satz und die folgende Definition:

> In den letzten beiden Aufgaben haben wir jeweils zu einer gegebenen Funktion eine weitere Funktion gesucht, deren Ableitung die gegebene Funktion ist. Eine Aufgabenstellung dieser Art kommt in der Mathematik häufig vor. Dies rechtfertigt den gesuchten Funktionen einen Namen zu geben.
>
> Definition: Sind f und F reelle Funktionen mit derselben Definitionsmenge A und gilt
>
> $$F`(x) = f(x) \text{ für alle } x \in A,$$
>
> dann heißt F eine *Stammfunktion von f*. (Malle et al., 2007, S. 7)

Die didaktische Aufbereitung des angeführten Abschnitts kann so gesehen werden: Der Begriff „Stammfunktion“ wird mithilfe von einführenden Aufgaben und einer Begriffsidee „Rückgängigmachen des Ableitens“ konzeptuell vorbereitet. Die Definition des Begriffs (Objekts, Gegenstands) „Stammfunktion“ wird als Namensgebung gerechtfertigt. Die angeführte Vorgangsweise und die Sprache des Schulbuchauszugs entsprechen akzeptierten didaktischen Theorien. Eine solche ist etwa jene des „learning with understanding“ (z. B. Aebli, 1980, 1983; Hiebert & Carpenter, 1992). Schneeberger schreibt dazu:

> Der Lernende muss die mathematische Idee mindestens in einem gewissen Ausmass verstehen, bevor sie (von der Lehrperson) einen Namen erhält, der diese Idee „repräsentiert“ und bevor schliesslich dieser etikettierte mathematische Zusammenhang, den Aebli (1983) „Begriff“ nennt in einer neuen Situation angewendet werden kann (Transfer). (Schneeberger, 2009, S. 230)

Dieses Konzept des „learning with understanding“ sieht Sfard nach Schneeberger so:

> Unter „learning with understanding“ versteht Sfard die kognitionspsychologische Idee der ständigen Perfektionierung“ der neuen mentalen Strukturen, die aus alten hervorgegangen sind, was nach ihr zu einem einseitigen Bild des „mind“ als „well-filled toolbox“ (Lave, 1988, S. 24) führt. (Schneeberger, 2009, S. 230)

Für Sfard ist die „Einführung neuer Namen und Signifikanten (Signifikant, Bezeichnetes) nicht das Ende, sondern der Beginn des Lernprozesses (Primat der Symbolisierung)“ (Schneeberger, 2009, S. 230). Auch für Steinbring (Steenpaß, 2014, S. 27) ist die Begriffsidee bei der Objektgenerierung von großer Bedeutung. Er beschreibt Begriffsbildung im Umgang mit mathematischen Darstellungen „als mitgesteuert durch eine bereits vorhandene, relativ unabhängig existierende, konzeptuelle Begriffsidee“. Ob die hier diagnostizierte Begriffsidee „Rückgängigmachen des Ableitens“ als „relativ unabhängig“ gesehen werden kann, wäre eigens zu diskutieren.

Die Begriffsidee wird mithilfe von einführenden Aufgaben, darunter eine deskriptive „Problemlösungsaufgabe“, erläutert. Es geht dabei um den Bezug zur Lebenswelt der Lernenden und die daraus resultierende Sinngebung für die mathematische Bildung. Auch hier folgen die Schulbuchautoren*innen gängigen mathematischen Theorien. Lengnink und Prediger betonen diesen Bezug (übrigens ohne referentieller Konnotation):

> Darüber hinaus ist es jedoch wesentlich für einen Mathematikunterricht, der nicht vor der Frage nach Sinn und Bedeutung von Mathematik für die Lebenswelt der Lernenden kapitulieren will, nicht nur mögliche direkte Anwendungsfelder, sondern auch die Analogie von Denkhandlungen, die Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen Mathematik und Alltagsdenken, bewußt zu machen. Sie müssen im Lernprozeß aktiviert werden, so daß Mathematik als eine Konventionalisierung alltäglicher Denkhandlungen erfahren werden kann. Insbesondere auch den Schülerinnen und Schülern, die heute keinen Zugang zur Mathematik finden, könnte dies ein Anknüpfungspunkt sein. In der Mathematikdidaktik ist dieser Gedanke immer wieder angeklungen, aber selten weiter verfolgt worden. (Lengnink & Prediger, 2001, S. 9)

Fischer und Malle betonen im Zusammenhang mit Begriffsbildung den Ausgangspunkt einer Problemlösung aus einem nichtmathematischen Bereich und damit die Notwendigkeit der Rechtfertigung der einzuführenden Begriffe:

> Ausgangspunkt ist ein mehr oder minder „praktisches“ Problem, das aus einem nichtmathematischen Bereich stammt, etwa aus einer anderen Wissenschaft. Es sollen Methoden entwickelt werden, um das Problem und verwandte Probleme (diese bilden eine „Problemklasse“) zu lösen. Die Begriffe treten als Werkzeuge bei der Problemlösung auf. (Fischer & Malle, 1985, S. 152)

Der angeführte Schulbuchauszug ist auch vor diesem theoretischen Hintergrund gerechtfertigt.

Mit der konzeptuellen Vorbereitung, der Namensgebung und Definition erscheint im Schulbuch der Begriff „Stammfunktion“ vorerst auf den Weg gebracht. Natürlich kann das Schulbuch die erforderlichen Lern- und Interaktionsprozesse im Klassenzimmer nicht steuern oder widerspiegeln. Der Sprachgebrauch repräsentiert aber eine bestimmte Sicht auf die Begriffsbildung. Im vorliegenden Fall kann er als Ausdruck einer referentiellen Sicht auf so genannte mathematische Darstellungen gesehen werden: Mathematische Zeichen werden als Repräsentationen von abstrakten Objekten gesehen. Diese referentielle Grundposition wird an verschiedenen Stellen des Schulbuchtexts zunächst an Begriffen wie „Funktion“ oder „Ableitung“, ab der Definition auch anhand des Begriffs „Stammfunktion“ beobachtbar: Man spricht von „Funktionen“ oder „Stammfunktionen“ und meint wohl das abstrakte Objekt. Dann spricht man von Objekttypen. Man spricht von „Stammfunktionen“ von „konstanten Funktionen“, von „Polynomfunktionen“, von „rationalen Funktionen“, von „Winkelfunktionen“ usw. Interessant ist hier, dass man den Objekttyp an der zugehörigen Funktion festmachen muss. Man tut so, als dürfe man das abstrakte Objekt und seine Repräsentationen ja nicht verwechseln. Man kann sie aber gar nicht verwechseln. Die abstrakten Objekte sind nicht wahrnehmbar. Wie bei beobachtbaren Gegenständen geht es um „Eigenschaften“ wie etwa die „Form“:

> Alle Stammfunktionen sind von der Form $F_0 + c$.
>
> F + G ist eine Stammfunktion von f + g.
>
> Eine Stammfunktion der Funktion sin ist die Funktion –cos.
>
> Eine Stammfunktion der Funktion f mit f(x) = e^x ist die Funktion f selbst. (Malle et al., 2007 bzw. 2016, S. 7 ff.)

Man spricht dann wieder vom „Grafen der Stammfunktion“, vom „Funktionsterm der Stammfunktion“ oder von der „Funktionsgleichung der Stammfunktion“ und meint damit wohl „Darstellungen“ des abstrakten Objekts. Im Zusammenhang mit konkreten Stammfunktionen verwendet man aber einfach Inskriptionen nach Regeln. Inskriptionsverwendungen wie das „Rückgängigmachen des Ableitens“ werden als Techniken des Findens von Objekten gesehen. Beispiel (Malle et al., 2007, S. 9): „In einigen Fällen kann man eine Stammfunktion finden, wenn man den Funktionsterm in geeigneter Weise umformt, wie die nächste Aufgabe zeigt.“

Die angeführte referentielle Sicht wird durch Theorien der Objektbildung (Begriffs-, Gegenstandsbildung) gestützt. Hier einige davon: Bei Sfard sind solche Objekte mental konstruiert. Über verschiedene Abstraktionsstufen – Sfard (1991, S. 18) nennt sie „interiorisation“, „condensation“ und „reification“ – werden Handlungsroutinen durch ihre Ergebnisse ersetzt. Als Beispiel führt Fischer, A. (2006, S. 184) die negativen ganzen Zahlen an. In Überschreitung der in der Grundschule üblichen Regel, dass der Minuend nicht kleiner als der Subtrahend sein darf, wird hier eine neue Objektklasse aus der bereits entwickelten Repräsentation abgeleitet. Die neue Objektklasse wird durch eine Klasse neuer Zeichen repräsentiert. Nach Sfard benötigen Zeichen einen Referenten, auf den sie verweisen. Am Anfang der Begriffsbildung liegt nach Sfard aber das Bezeichnende (Signifikanten) ohne Bezeichnetes (Signifikat) vor (Schneeberger, 2009, S. 150). Sfard ist wie Wittgenstein und Foucault der Meinung, dass Diskurse ihre Objekte selbst erzeugen (ebd., S. 150). Sie schreibt:

> Before a symbol enters language and becomes a fully-fledged element of the discourse, there is simply no object to talk about. (Sfard, 1991, S. 56)

Eine ähnliche Ansicht vertritt Bauersfeld. Er betont die individuelle Ausformung dieses Objekts:

> In every case it is our personal activity that defines what “it” is for us. There is no direct access to the “it”. (Bauersfeld, 1995, S. 275)

Nach Steinbring (Steenpaß, 2014, S. 27) reguliert die begriffliche Idee die Mediation zwischen Symbolsystem und Referenzkontext. Die angesprochenen Referenzkontexte zur Bedeutungskonstruktion stellen nach Steinbring die Lernenden durch ihren kulturellen Hintergrund bereit (ebd., S. 23). Nach Steinbring wird die Bedeutung der Zeichen interaktiv verhandelt und ständig neu gedeutet (ebd., S. 23). Steinbring betont (2004, S. 191), dass die Nutzung der Zeichen den Lernenden nicht als eine Art Gebrauchsanweisung an die Hand gegeben werden kann. Die Zeichen selbst, ihre Deutung und ihre verallgemeinernde Nutzung entstehen durch den oben angeführten Mediationsprozess erst nach und nach. Steinbring (Fischer, A., 2006, S. 182) geht davon aus, dass Zeichen immer referentiell verstanden werden. Sie repräsentieren für Steinbring (Steenpaß, 2014, S. 28) abstrakte Objekte. Anmerkung: Auch aus der Wittgenstein‘schen Sichtweise kann die Nutzung der Zeichen nicht in Form einer Gebrauchsanweisung vermittelt werden. Der Gebrauch der Zeichen muss durch „Spielen des Spiels“ erworben werden. In diesem Sinn argumentiert auch Brunner (2013, 2015, 2017): Es gibt eine Fülle von Inskriptionsverwendungen wie etwa die Verwendung nach Relationen oder die Verwendung nach Typen, die von den Lernenden nach Einführungsbeispielen und entsprechenden Erläuterungen bzw. Korrekturen erst durch beständiges eigenständiges Tun erworben werden können. Es stellt sich im Zusammenhang mit Steinbrings Betrachtungsweise auch die Frage, ob die Bedeutungsbildungsprozesse im Zusammenhang mit den angeführten Begriffen „Symbolsystem“, „Referenzkontext“ und „Mediationsprozess“ nicht auch wieder als Gebrauchserwerb beschreibbar sind.

Fischer und Malle sehen die Fortsetzung der Begriffsbildung nach dem bereits angeführten Ausgangspunkt (Problemlösung in nichtmathematischen Kontexten) so:

> Die Mathematik bemüht sich um eine genauere Begründung der entwickelten Methoden, es wird nach Beweisen gesucht. […]
>
> Im Zuge der Bemühungen um Begründung stellt sich heraus, daß die grundlegenden Begriffe eigentlich ziemlich ungenau sind. Es werden nun die Begriffe selbst untersucht. Sie werden vom Werkzeug zum Gegenstand der Untersuchung. Dabei können die Begriffe als Werkzeuge entstehen, die auf einer späteren Entwicklungsstufe wiederum zu den Objekten der Betrachtung werden können. (Fischer & Malle, 1985, S. 152)

Nach R. Fischers „Materialisierungsthese ist Mathematik

> deswegen bedeutsam […], weil sie eine Materialisierung von Abstraktem darstellt […]. In Ergänzung zum reinen Denken bietet die Mathematik […] Zeichensysteme, die letzten Endes materiell verankert werden, mit denen Abstrakta dargestellt und manipuliert werden.“ Diese Materialisierung „erleichtert damit den Abstraktionsprozess und gibt dem Abstrakten Realität“. (Fischer, R., 2006, S. 12 f.)

Nach Fischer, R. (2006, S. 12) werden mithilfe solcher Materialisierungen Abstrakta, also nicht mit den Sinnen „Erfassbares“ einer Kommunikation zugänglich gemacht. Ein Begriff wie „reines Denken“ scheint aber schwer zu fassen. Nach Peirce haben wir „kein Vermögen, ohne Zeichen zu denken“ (z. B. Misak, 2004, S. 241). Ähnliches sagt Wittgenstein (Krämer, 2016, S. 315): „Wir können gar nicht anders denken als im Medium von Zeichen“. Nach Peirce und Wittgenstein erfolgt also alles Denken in Zeichen. Ist es damit im Sinne Fischers immer schon „materialisiert“?

Im Gegensatz zu den angeführten referentiellen Theorien vertritt Dörfler einen nicht referentiellen Ansatz:

> Die allgemeine Sichtweise scheint etwa die zu sein, dass mathematische Objekte sich analog zu materiellen Objekten beschreiben lassen (eine physikalische Sicht also). Allerdings sind es eben abstrakte Objekte und sind damit – wieder nach allgemeiner Zustimmung – den Sinnen nicht zugänglich, worin angeblich die eminente Schwierigkeit der Mathematik begründet ist. Das damit unüberwindbar scheinende Problem, wie die Mathematiker denn diese Objekte untersuchen und erforschen können, wird gerne dadurch umschifft, dass man auf die verfügbaren sogenannten Darstellungen der abstrakten Objekte verweist, denen der Charakter von Instrumenten zur Untersuchung der mathematischen Objekte zugesprochen wird (vgl. Brown, 1999). Auch das didaktische Problem des Lernens und Verstehens der abstrakten Objekte wird auf diese Weise „gelöst“ oder als lösbar erachtet: wir lernen über die abstrakten Objekte vermittels ihrer Darstellungen. (Dörfler, 2015, S. 35)

Dörfler (2015, S. 41) betrachtet die abstrakten Objekte als Sprechweisen über mathematische „Darstellungen“ und ihre Beziehungen zueinander. Es geht ihm aber nicht um ein „verkrampftes Vermeiden des Sprechens über mathematische Objekte“, sondern um ein „Sinnvoll-Machen der gängigen mathematischen Praxis“ (ebd., S. 46). So wie Krämer (1991) hält er die mathematischen Objekte für „symbolisch konstituiert“: Das Bezeichnete ist im Gebrauch der Zeichen mitgegeben, von diesem Gebrauch nicht trennbar (2015, S. 46). Im Sinne von Dörfler kann daher die Bedeutung eines „mathematischen Objekts“ wie etwa „Stammfunktion“ nicht von den entsprechenden mathematischen Inskriptionen („Darstellungen") und deren Gebrauch losgelöst betrachtet werden, selbst wenn man wie etwa Fischer und Malle (1985, S. 222) mathematische Gegenstände als Abstraktionen aus der Wirklichkeit auffasst. Sie entziehen sich gerade wegen des zugeschriebenen Charakters der Abstraktheit der sinnlichen Wahrnehmung. Es stehen immer nur die Inskriptionen der verschiedenen „Darstellungen" zusammen mit den regelkonformen Verwendungen zur Verfügung. Auch Fischer und Malle (1985, S. 222) räumen ein, dass Mathematiker ihre Abstraktionen nicht nur im Kopf durchführen, sondern dafür „Darstellungen" in materieller Form benötigen. Nach Wittgenstein ist eine Trennung von abstrakter mathematischer Realität und mathematischer Praxis nicht möglich. Er schreibt (zitiert bei Gerrard, 1991, S. 131): "Even God can determine something mathematical only bei mathematics". Für Gerrard (ebd., S. 131) gibt es kein Kriterium mathematischer Korrektheit außerhalb der mathematischen Praxis. Die Charakterisierung der Mathematik als abstrakt ist nach Dörfler (2006) übrigens eine der möglichen Ursachen der belegbaren Angst der Lernenden vor Mathematik. Nach Brunner (2015, 2017) verleitet der in mathematikdidaktischen Aufbereitungen mathematischer Inhalte häufig anzutreffende referentielle Denkansatz und das Fokussieren auf implizit existente abstrakte Objekte zur Annahme, dass man vieles nicht detailliert erklären muss. Ein Beispiel hierfür ist die so genannte multiple Repräsentation der abstrakten Objekte. Gemeint ist damit, dass es in der Regel mehrere Zeichenspiele gibt, die mathematisch aufeinander bezogen sind und nach einer referentiellen Sichtweise das gleiche abstrakte Objekt darstellen. Beispielsweise wird nach einer solchen Sichtweise das abstrakte Objekt „Komplexe Zahl" durch Zeichenspiele wie „a + bi", Gauß'sche Zahlenebene, Polarkoordinaten, Matrizendarstellung und Riemann'sche Zahlenkugel oder das abstrakte Objekt „Funktion" durch Zeichenspiele wie „Funktionsgleichung" oder „Funktionsgraf" repräsentiert. Nach der angeführten referentiellen Sichtweise scheint damit alles erklärt zu sein: Die verschiedenen Zeichenspiele sind aufgrund des gleichen implizit wirksamen abstrakten Objekts miteinander verbunden. Viele Phänomene – etwa jenes, dass man bei Operationen mit verschiedenen Darstellungen gleiche Ergebnisse erzielen kann – erscheinen damit erklärt. Im Gegenteil – man betrachtet solche Phänomene als Beleg für die Existenz implizit wirksamer abstrakter Objekte. Dem gegenüber kann und muss das Phänomen der multiplen Repräsentation aus nicht referentieller Sicht konstruktiv erklärt werden. Derartige konstruktive Erklärungen fußen auf einer detaillierten Beschreibung der Bedeutungskonstruktion mithilfe von Inskriptions-, Verwendungs- und Regelkombination (vgl. Brunner, 2013, 2015, 2017). So kann etwa das Zusammenwirken von Funktionsgraf und Funktionsgleichung wie bei einem Baukasten, Schritt für Schritt durch die Kombination von Strichen, Marken, Zahlzeichen und deren Rollen detailliert erläutert werden. Es kann die Herstellung neuer Bedeutungsaspekte wie „Punkt in der Ebene", „Winkel", „Vektor" usw. oder das bereits angesprochene Phänomen gleicher Ergebnisse bei Verwendung verschiedener Zeichenspiele (wie eben Funktionsgraf oder Funktionsgleichung) konstruktiv erklärt werden. Wie es Söbbeke (2005, S. 371) im Zusammenhang mit Anschauungsmitteln vorschlägt, können dabei auch die verschiedenen Zeichen und deren multiple Verwendbarkeit für „produktive kognitive Konflikte" genutzt werden. Beispielsweise könnten Punkte ja auch im Sinne von Euklid, Striche als Geraden im Sinne des Kontinuums und nicht als „Ort unendlich vieler Punkte" oder Koordinatenachsen nicht orthogonal verwendet werden. Vor- und Nachteile solcher Verwendungen können mit den Lernenden diskutiert werden. All dies ist natürlich auch im Falle einer referentiellen Sicht mithilfe der „Darstellungen" möglich. Es erscheint aber wegen des „Glaubens" an abstrakte Objekte überflüssig (vgl. Brunner, 2015).

Im Folgenden sind nun weitere Problembereiche des am Schulbuchkapitel beobachtbaren referentiellen Sprachgebrauchs angeführt. Zunächst zurück zur angeführten Namensgebung (Malle et al., 2007, S. 7): „Eine Aufgabenstellung dieser Art kommt in der Mathematik häufig vor. Dies rechtfertigt den gesuchten Funktionen einen Namen zu geben." Der Kern des theoretischen Begriffs – die Begriffsdefinition – wird hier als Namensgebung gesehen. Auch das Wort „Namen" ist nach Wittgenstein (2003, S. 40) durch seinen Gebrauch im Sprachspiel bestimmt. In manchen Fällen sieht Wittgenstein diesen Gebrauch durch die „hinweisende Geste" bestimmt. Wittgenstein schreibt:

> Man kann für eine *große* Klasse von Fällen der Benützung des Wortes „Bedeutung" – wenn auch nicht für *alle* Fälle seiner Benützung – dieses Wort so erklären: Die Bedeutung eines Wortes ist sein Gebrauch in der Sprache. Und die *Bedeutung* eines Namens erklärt man manchmal dadurch, daß man auf seinen *Träger* zeigt. (Wittgenstein, 2003, S. 40)

Auf den ersten Blick könnte die Definition des Begriffs „Stammfunktion" als Bedeutungsgebung im Sinne einer solchen Namensgebung gesehen werden. Nach der obigen sprachlichen Ausformung wird auf die „gesuchten Funktionen" verwiesen. Kann man im betrachteten Fall aber, so wie im angeführten Sprachspiel verlangt, überhaupt auf den „Träger" des Namens zeigen? Das Benennen selbst ist nach Meyer

> noch gar kein Zug im Sprachspiel, - so wenig wie das Aufstellen einer Schachfigur ein Zug im Schachspiel.

> […] Mit dem Benennen ist noch *nichts* getan. Es *hat* auch keinen Namen, außer im Spiel. (Meyer, 2010, S. 59)

Namensgebung ist noch keine Beschreibung.

Am untersuchten Kapitel ist auch zu beobachten, dass in vielen Definitionen und Sätzen die jeweiligen Funktionen und Stammfunktionen selbst oft gar nicht auftreten (vgl. Dörfler, 2014, S. 40). Es wird nur auf sie verwiesen: „F + G sind Stammfunktionen von f + g“ oder „k·F ist eine Stammfunktion von k·f (wobei k ∈ IR)“ (Malle et al., 2007, S. 8). Auch in den zugeordneten Beweisen treten die konkreten Darstellungen der verwendeten Funktionen und Stammfunktionen selbst nicht auf:

> Beweis: Für alle x aus dem gemeinsamen Definitionsbereich gilt:
>
> (1) (F + G)\`(x) = F´(x) + G\`(x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x)
>
> (2) (k·F)\`(x) = k·F\`(x) = k·f(x) = (k·f)(x) (Malle et al., 2007, S. 9)

Eine Erklärung dieses speziellen Sprachspiels ist jene, dass man Regeln für das Zusammenwirken von Stammfunktionen und zugehörigen Funktionen auch ohne konkrete „Darstellungen“ festlegen bzw. herleiten kann. Soll aber im Zusammenhang mit einer speziellen Funktion eine entsprechende Stammfunktion hergeleitet werden, so benötigt man irgendeine konkrete „Darstellung“ dieser Funktion. Diese „Darstellung“ wird dann aber einfach nach Regeln verwendet. Im Falle von (1) etwa:

$$(e^x + \frac{x^4}{4})` = (e^x)` + (\frac{x^4}{4})` = e^x + x^3.$$

Für die Lernenden kann im Zusammenhang mit der oben angeführten sprachlichen Aufbereitung des Schulbuchkapitels nach der Definition des Begriffs „Stammfunktion“ auch folgendes Problem auftreten: Der Begriff „Stammfunktion“ steht für sie an dieser Stelle der Lehrstoffentwicklung immer noch für Tun, nämlich für das Rückgängigmachen von Ableiten. Im Sprachspiel des Schulbuchkapitels wird aber durch die Art des Sprachgebrauchs der Eindruck vermittelt, dass der neue Begriff sofort nach der Definition den Zeichengebrauch in den zugeordneten Zeichenspielen anzuleiten imstande sei. Im Sprachspiel übernimmt der Begriff „Stammfunktion“ quasi die Führung. Auch dieses Sprachspiel ist Ausdruck einer referentiellen Sicht auf mathematische Zeichenspiele. Mit den in den jeweiligen Definitionen eingeführten Begriffen scheinen Bilder aktivierbar zu sein, die in der Folge den Sinn der jeweiligen Inskriptionen zu bestimmen scheinen. Hat man aber nach Wittgenstein ein solches Bild gefunden, so hilft es nicht aus Schwierigkeiten, sie fangen erst an. Wittgenstein schreibt:

> Ein Bild wird heraufbeschworen, das *eindeutig* den Sinn zu bestimmen scheint. Die wirkliche Verwendung scheint etwas Verunreinigtes der gegenüber, die das Bild uns vorzeichnet. Es geht hier wieder, wie in der Mengenlehre: Die Ausdrucksweise scheint für einen Gott zugeschnitten zu sein, der weiß, was wir nicht wissen können; er sieht die ganzen unendlichen Reihen und sieht in das Bewußtsein der Menschen hinein. Für uns freilich sind diese Ausdrucksformen quasi ein Ornat, das wir wohl anlegen, mit dem wir aber nicht viel anfangen können, da uns die reale Macht fehlt, die dieser Kleidung Sinn und Zweck geben würde. In der wirklichen Verwendung der Ausdrücke machen wir gleichsam Umwege, gehen durch Nebengassen; während wir wohl die gerade breite Straße vor uns sehen, sie aber freilich nicht benützen können, weil sie permanent gesperrt ist. (Wittgenstein, 2003, S. 206)

Die angesprochenen Begriffe bzw. Bilder und damit die abstrakten Objekte scheinen darüber hinaus nicht nur in der Mathematik, sondern auch in der so genannten „Wirklichkeit“ und der Lebenswelt der Lernenden wirksam zu sein. Es erscheint daher unnötig, zwischen Mathematik und Anwendungskontext zu unterschieden. Dies ist auch im untersuchten Kapitel zu beobachten. Nach einer einführenden deskriptiven Aufgabe zum Zusammenhang der Geschwindigkeit eines Körpers zum Zeitpunkt t und der zugehörigen Zeit-Ort-Funktion (Malle et al., 2016, S. 6) heißt es: „Aufgabenstellungen dieser Art kommen in der Mathematik häufig vor“.

Nach dem Wittgenstein’schen Bedeutungsbegriff sollte der Zusammenhang zwischen Begriffen und den zugeordneten Zeichenspielen prinzipiell anders gesehen werden. Die Bedeutung mathematischer Begriffe kann nicht losgelöst vom Zeichengebrauch in den zugeordneten Zeichenspielen gedacht werden. Ein mathematischer Begriff wie hier „Stammfunktion“ kann nicht losgelöst von Zeichenspielen wie jenem des Ableitens oder ein Begriff wie „Stetigkeit“ nicht losgelöst von einem Zeichenspiel wie jenem der „Epsilon-Delta-Definition“ gedacht werden. Ohne diese Zeichenspiele würde es in der Mathematik die angeführten Begriffe gar nicht geben. Im untersuchten Kapitel fungiert das zentrale Zeichenspiel der oben angeführten Definition „F\`(x) = f(x)“ im Zusammenhang mit dem Begriff „Stammfunktion“ zunächst als eine Art von globaler „Verwendungsbeschreibung“. Alle Funktionen F(x), die sich so verwenden lassen, sind Stammfunktionen von f(x). Um den Gebrauch des neuen Begriffs „Stammfunktion“ erwerben zu können, benötigt man aber vielfältige Erfahrungen mit den durch „F\`(x) = f(x)“ indizierten Sprach- bzw. Zeichenspielen und den in ihnen verwendeten Inskriptionen und Regeln. Bedeutungsbildung ist daher im Zusammenhang mit solchen Begriffen immer mit dem Erwerb von Vertrautheit mit diesen Zeichenspielen gleichzusetzen. Man muss lernen, die Bedeutung des jeweiligen Begriffs nach den Regeln der jeweiligen Zeichenspiele zu konstruieren. Man kann es auch so sehen: Sprechweisen wie „F(x) = $\frac{x^{q+1}}{q+1}$ ist eine Stammfunktion der Funktion f(x) = x^q (q ∈ Q, q ungleich 1)" ist mit einem Zeichenspiel wie dem nachfolgenden grammatikalisch (d. h. vermittels Regeln zwischen Wörtern und Zeichen bzw. Zeichen und Zeichen) verbunden (Malle et al., 2007, S. 8): Für alle x∈IR gilt: F`(x) = $\frac{1}{q+1}$ (q+1) · $x^q = x^q$ = f(x). Es tritt also eine Bedeutungsumkehr gegenüber der referentiellen Sicht ein. Es kann nicht mithilfe der speziellen Sprechweise die Bedeutung des Zeichenspiels, sondern es muss mithilfe des Zeichenspiels die Bedeutung der speziellen Sprechweise konstruiert werden. Solche Zeichenspiele können natürlich wesentlich anspruchsvoller als das oben angeführte sein. Mathematische Begriffsbildung ist daher keine einfache Sache. Sie erfordert den regelkonformen Umgang mit vielen Spezialfällen und geschickte algebraische Transformationen. Jeder neue Spezialfall erfordert nicht nur Regelfortschreibungen, sondern auch Regelanpassungen und Regeländerungen. Die Bedeutung eines mathematischen Begriffs muss in diesem Sinne durch eigenständiges operatives Tun erschlossen werden. Gerade das Finden von Stammfunktionen erfordert im Zusammenhang mit vielen Spezialfällen Vertrautheit mit einer Fülle von konkreten handwerklichen Tricks. Der Weg zum Gebrauchserwerb des Wortes „Stammfunktion" ist daher im Zusammenhang mit vielen Spezialfällen ein konkret handwerklicher.

Natürlich geht es bei der Begriffsbildung auch um die Beziehungen der Begriffe zueinander. Wittmann betont dies in seinem „operativen Prinzip" unter Verwendung eines Sprachspiels von Objekten. Das „operative Prinzip" wird häufig auch als „verinnerlichtes Handeln" bezeichnet (Deutsches Zentrum für Lehrerbildung Mathematik, 2018). Es geht auf Lerntheorien von Piaget und Aebli zurück (ebd.). Wittmann hat dieses Prinzip in den 80er Jahren auf die Mathematikdidaktik ausgeweitet, „indem er es von den dynamischen Operationen auf die vermeintlich statischen Objekte ausdehnte (vgl. Wittmann, 1985)" (ebd.). Es heißt dort weiter:

> Nach Wittmann reicht es nämlich nicht aus, sich im Mathematikunterricht ausschließlich auf die Erforschung und das Verständnis der Operationen an sich zu beschränken, sondern er muß[2] ebenso auf die Objekte eingehen, auf welche die Operationen angewandt werden, um deren Eigenschaften und Beziehungen zueinander zu untersuchen, denn andernfalls kann auch von den Operationen nur ein unvollständiger Begriff aufgebaut werden (vgl. Wittmann 1983, S. 269). […] Daher muß man im Lern- und Erkenntnisprozeß in systematischer Weise: 1. untersuchen, welche Operationen ausführbar und wie sie miteinander verknüpft sind, 2. herausfinden, welche Eigenschaften und Beziehungen den Objekten durch Konstruktion aufgeprägt werden, 3. beobachten, welche Wirkungen Operationen auf Eigenschaften und Beziehungen der Objekte haben (was geschieht mit ..., wenn ...?) (Wittmann, 1985, S. 9)

Betrachtet man Begriffe (Objekte) als Sprechweisen über mathematische Kalküle („Darstellungen"), so geht der Prozess der Begriffsbildung mit dem Erwerb verschiedener Verwendungen dieser Sprechweisen einher. Die Definition ist dabei eine Gebrauchsanweisung des jeweiligen Begriffs (Meyer, 2015, S. 104). Die Verwendungen der Begriffe ändern sich u. a. durch Erfahrungen mit den zugeordneten Kalkülen. Für die Begriffe werden so stetig neue Verwendungen erworben. Weitere Sprechweisen kommen im Normalfall hinzu. Beispielsweise können beobachtbare Regularitäten und Invarianten der zugeordneten Kalküle als Eigenschaften der Begriffe gedeutet werden (vgl. Dörfler, 2006). Die Bedeutung von Begriffen wird darüber hinaus durch regelgebundene Verbindungen zu anderen Begriffen in einem Sprachspiel von Begriffen bestimmt.

Wie oben ausgeführt, kann man den Text des betrachteten Kapitels als stillschweigende Vergegenständlichung sehen. Es gibt den Gegenstand „Stammfunktion". Dieser Gegenstand hat nun offensichtlich ein Aussehen, eine „Form" (vgl. Zitate oben): „Alle Stammfunktionen sind von der Form $F_0 + c$" oder „Eine Stammfunktion der Funktion sin ist die Funktion –cos". Das neue Wort „Stammfunktion" kann aber kaum am „Aussehen" festgemacht werden. Die gleichen Inskriptionen können nämlich je nach Situation und Kontext eine Funktion, eine Ableitungsfunktion oder eine Stammfunktion „sein". Die gleichen Inskriptionen können nach unterschiedlichen Regeln verwendet werden. Mit den jeweiligen Verwendungsregeln muss man durch entsprechende Übung vertraut sein. Nur durch diese Vertrautheit kann man Inskriptionen wie „-cos", e^x oder $\frac{x^{q+1}}{q+1}$ als „Darstellungen" der abstrakten Objekte „Funktion", „Ableitungsfunktion" oder „Stammfunktion" verwenden (sofern man diese referentielle Sichtweise teilt). Der Begriff „Form" ist auch in anderer Hinsicht interessant. Man erhält den Eindruck, als wäre die herausgefundene „Form" der jeweiligen Stammfunktionen das entscheidende Merkmal. Kennt man die „Form" der Stammfunktion, so scheint man die entscheidende Information für den Zeichengebrauch gefunden zu haben. In Textpassagen wie der nachfolgend angeführten wird an die Bedeutung des Zeichens „Form" appelliert, als würde die „Form" die Bedeutung bereits in sich tragen:

> Dabei erhebt sich die Frage: Sind alle Stammfunktionen von f von der Form $F_0 + c$ oder gibt es noch weitere Stammfunktionen von f? Man kann beweisen, dass alle Stammfunktionen von f von der Form $F_0 + c$ sind, sofern der Definitionsbereich von f ein Intervall ist. Da der Beweis schwierig ist, führen wir ihn nicht durch. (Malle et al., 2007, S. 7)

Der Möglichkeit eines solchen Appells widerspricht aber Wittgenstein:

> In einem gewissen Sinn kann man in der Mathematik darum nicht an die Bedeutung der Zeichen appellieren, weil die Mathematik ihnen erst die Bedeutung gibt. (Wittgenstein, 1984b, S. 274)

Die herausgefundene „Form" ist nicht selbsterklärend. Man muss im Zusammenhang mit den gefundenen Inskriptionen erst einmal in der Lage sein, Bedeutung nach den Regeln der Mathematik zu bilden. Dies betrifft zunächst die Schreibregelkonformität[3]. Es sind die Inskriptionen den richtigen Schreibtypen zuzuordnen. In der Folge geht es um die „eigentliche" Bedeutungskonstruktion. Es geht hier um die Fähigkeit, die „herausgefundenen" Inskriptionen nach den konkret geltenden Regeln zu verwenden. Dabei ist wiederum der relationale Gebrauch der Inskriptionen von großer Bedeutung. Der kompetente Umgang mit einer Aussage wie „Alle Stammfunktionen sind von der Form $F_0 + c$" erfordert große Vertrautheit mit den entsprechenden algebraischen und geometrischen Zeichenspielen und deren Zusammenwirken. An der entsprechenden Stelle des untersuchten Kapitels steht:

> Die Graphen der Funktionen F mit $F(x) = \frac{x^3}{3} + c$ gehen durch Verschiebungen in Richtung der 2. Achse auseinander hervor (siehe nebenstehende Abbildung). Sie haben somit an jeder Stelle die gleiche Steigung. Also stimmen auch ihre Ableitungen an jeder Stelle 0 miteinander überein. (Malle et al., 2007, S. 7)

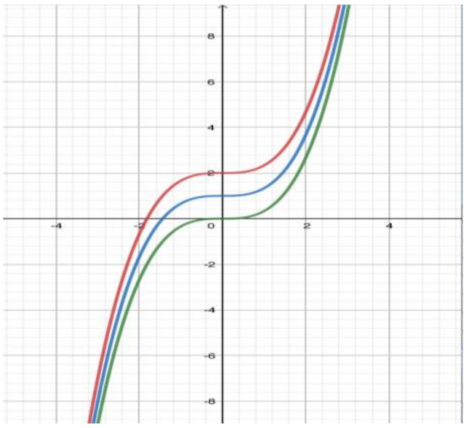

Abb. 3 Für eine adäquate theoretische Begriffsbildung muss man zur relationalen Verwendung des algebraischen Zeichenspiels $F(x) = \frac{x^3}{3} + c$ und des hier angedeuteten geometrischen Zeichenspiels imstande sein.

Der Text bezieht sich auf eine Abbildung wie Abb. 3. Der rein figürliche Gebrauch der Inskriptionen wird hier nicht zielführend sein. Eine adäquate theoretische Begriffsbildung erfordert die relationale Deutung von Aussagen wie „Verschiebung in Richtung der 2. Achse" oder „das Gleichbleiben von Steigungen" anhand der zugehörigen algebraischen und grafischen Zeichenspiele und dies einzeln und in ihrem Zusammenwirken.

Anhand des untersuchten Kapitels sind auch noch andere Besonderheiten des Sprachgebrauchs beobachtbar. Vor den Übungsaufgaben steht etwa ein Satz, der im Hinblick auf das implizite Sprachspiel ebenfalls Beachtung verdient. Es heißt dort:

> Wie man am Beispiel der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ sieht, muss eine Stammfunktion einer rationalen Funktion selbst keine rationale Funktion sein. (Malle et al., 2016, S. 9)

Auch hier ist eine referentielle Perspektive beobachtbar: Es werden offensichtlich Typen als Eigenschaften von implizit existierenden abstrakten Objekten betrachtet. „Typ zu sein" erscheint hier als Frage der Existenz und nicht der Betrachtung. Nach Brunner (2013) sind Typen Äquivalenzklassen über Inskriptionen, die im Hinblick auf deren regelkonforme Verwendung gebildet werden. Beispiel: $2 + 3i \sim 3 + 7i \sim a + bi$. Betrachtet man in diesem Sinne Typen als eine Art der Verwendung von Inskriptionen, so überrascht es nicht, dass unterschiedliche Inskriptionen im Hinblick auf verschiedene Verwendungen unterschiedlichen Äquivalenzklassen zugerechnet und damit unterschiedlich typisiert werden können. Die Inskription „ln|x|" und die Inskription „$\frac{1}{x}$" können nicht nach allen möglichen Verwendungsweisen zur selben Äquivalenzklasse gezählt werden. Beide können nach den Regeln für Funktionen, sie müssen aber nicht nach jenen für rationale Funktionen verwendet werden.

5. Zur Praxistauglichkeit

Es erscheint als Vorteil, dass dem Wittgenstein'schen Bedeutungsbegriff eine prägnante sprachliche Form wie etwa *„Die Bedeutung eines Zeichens ist sein Gebrauch"* gegeben werden kann. Lehrende werden das angeführte Bedeutungskonzept gerade wegen des „Merksatz-Charakters" gut im Gedächtnis behalten können. Durch den Wittgenstein'schen Bedeutungsbegriff und die damit verbundene nicht referentielle Sichtweise ergibt sich ein Perspektivenwechsel gegenüber der etablierten referentiellen Sicht, der Auswirkungen auf die mathematikdidaktische Praxis haben wird. Viele Phänomene des konkreten mathematischen und mathematikdidaktischen Arbeitens sowie des üblichen Sprachgebrauchs können auf Basis dieses Konzepts ohne Metaphysik erklärend beschrieben werden. Haben Lehrende Vertrautheit mit dem

Wittgenstein‘schen Sprachspiel und den entsprechenden methodisch-didaktischen Verwendungsmöglichkeiten aufgebaut, so erscheinen gewinnbringende Konsequenzen für den Unterricht ableitbar. Es wird ein Anliegen der mathematikdidaktischen Forschung sein müssen, die Konsequenzen der angeführten nicht referentiellen Perspektive auf die didaktische und methodische Praxis noch genauer zu beleuchten und diese durch die Entwicklung praxisnaher Konzepte für Lehrende griffig zu machen. Solche praxisnahen Konzepte existieren bereits. Im Folgenden sind nun exemplarisch einige für die Unterrichtspraxis bedeutsame Konsequenzen und Konzepte angeführt.

Eine Konsequenz der Wittgenstein‘schen Perspektive auf Bedeutungs- und Begriffsbildung ist die Konzentration auf mathematische Zeichen und deren Gebrauch im Gegensatz zu der in der Mathematik und Mathematikdidaktik üblichen Fokussierung auf abstrakte Objekte. Dies betrifft zunächst einmal den Sprachgebrauch im Mathematikunterricht. Sprechweisen der Zeichenverwendung wie „Wir verwenden etwas (Zeichen) so und so“ sind aus nicht referentieller Sicht gegenüber von Sprechweisen der Existenz abstrakter Objekte wie „Es existiert oder ist etwas so und so“ der Vorzug zu geben (vgl. Brunner, 2015). Die in der Mathematik und Mathematikdidaktik übliche Fokussierung auf abstrakte Objekte kann in diesem Sinne einfach als Sprechweise angesehen werden. Nach Dörfler (2015, S. 45) basiert dieser mathematikübliche Sprachgebrauch auf Vereinbarungen, die regeln, wie die Mathematiker*innen über mathematische Tätigkeiten sprechen wollen. Die mit dieser Sprechweise verbundene Problemlage sollte im Unterricht sichtbar gemacht und ein sinnvoller Umgang mit ihr vermittelt werden. Generell empfiehlt es sich aus der angeführten nicht referentiellen Perspektive, Lernen von Mathematik als Gebrauchserwerb im Zusammenhang mit mathematischen Zeichen und nicht als Lernen über abstrakte Objekte anzusehen. Bedeutungsbildung wird im Zusammenhang mit den üblichen mathematischen Sprechweisen (Begriffen) nicht losgelöst von den zugeordneten Kalkülen (Zeichenspielen) betrachtet werden können. Im Hinblick auf die Bedeutungsausdehnung der Sprechweisen (Begriffe) im Zusammenhang mit neuen Spezialfällen und Kontexten bedeutet dies, dass für diese Bedeutungsadaption Vertrautheit mit den zugeordneten Sprach- und Zeichenspielen erforderlich ist (vgl. Bedeutungsumkehr Abschnitt 4). Dem Erwerb von Vertrautheit mit den mathematischen Kalkülen (Zeichenspielen) muss daher auch im Hinblick auf die erforderlichen Begriffsbildungsprozesse entsprechende Aufmerksamkeit geschenkt werden. Mathematische Bedeutung wird nicht als „vorab“ rein sprachlich vermittelbar angenommen werden können. Die Gebrauchsvermittlung im Zusammenhang mit mathematischen Begriffen (Zeichen) kann an Wittgenstein‘schen Vorgangsweisen orientiert werden. Beispielsweise kann man den Gebrauch eines neuen Wortes oder generell eines Zeichens vermitteln, indem man Beispiele anführt und den Umgang mit ihnen erläutert (Meyer, 2010, S. 59, vgl. Abschnitt 2). Durch die Betonung des Zeichengebrauchs im Unterricht wird für Lernende leichter verstehbar, dass sich im Zuge des Lernprozesses mit jeder neuen Verwendung der Zeichen auch ihre Bedeutung ändert. Konstruktive Erklärungsweisen werden daher im Unterricht an Wichtigkeit gewinnen. Beispiele für solche Erklärungsweisen sind etwa die Methode der aktiven Sinngenerierung mittels reflektierender Vergleiche (Söbbeke, 2009, S. 8, vgl. Abschnitt 3), konstruktive Erklärungsweisen mithilfe von Inskriptions- und Rollenkombinationen (Brunner, 2013, 2015, 2017) oder Bedeutungsherstellung durch die Entflechtung mathematischer Zeichenspiele bzw. die Entkopplung von skripturalem Phänomen und Namen/Begriff (Brunner, 2015). Aus der Kenntnis, dass der Zeichengebrauch regelbestimmt ist und bei jedem noch so kleinen Zeichenspielwechsel Regeln nicht nur fortzuschreiben, sondern auch zu adaptieren bzw. zu ändern sind, wird eine andere praktische Auswirkung der bezogenen Perspektive die Fokussierung auf Regeln sein. Viele beobachtbare Probleme von Schülern*innen beim Lernen von Mathematik können als Probleme des Zeichengebrauchs und damit als Konflikte zwischen Regeln und nicht als Konflikte zwischen Regeln und „Realität“ gesehen werden. Begründungszusammenhänge dienen nach diesem Verständnis der Festlegung bzw. Aufschlüsselung des Zeichengebrauchs und nicht einem Abgleich mit der „Realität“. Der Erläuterung des Sinns, der Veranschaulichung und dem Explizitmachen von Regeln wird große Aufmerksamkeit geschenkt werden müssen. Der Einsatz erklärender Analogien aus der Lebenswelt der Lernenden (vgl. Brunner, 2017) kann hier exemplarisch als praxisnahes Konzept angeführt werden. Dem Zusammenwirken von Typübertragung und Regeldecodierung (Brunner, 2013, 2017) wird ebenfalls verstärkt Aufmerksamkeit geschenkt werden. Etablierte Lernmethoden und der übliche Gebrauch von Unterrichtsmitteln werden aufgrund der bezogenen nicht referentiellen Sichtweise manchmal auch einer Neuinterpretation unterzogen werden. Der vorliegende Aufsatz belegt diese These. Weitere Konsequenzen und daraus ableitbare Auswirkungen auf die Unterrichtspraxis sind im Zusammenhang mit der Wittgenstein‘schen Perspektive in vielen weiteren Bereichen denkbar. So etwa im Zusammenhang mit der praxisorientierten Aufschlüsselung der unterrichtsbezogenen Kommunikations- und Interaktionsprozesse, der Optimierung von lernstoffbezogenen

Aufgaben, der Konkretisierung von Lernerfordernissen oder der Aufschlüsselung des genauen Zusammenwirkens von Typen und Begriffen. Im Hinblick auf die Unterrichtspraxis eröffnet sich hier ein breites, noch zu bearbeitendes Feld von Gebrauchsweisen des Wittgenstein'schen Sprachspiels.

Anmerkungen

[1] In Malle et. al (2016) wird nur eine physikalische Einführungsaufgabe verwendet.

[2] Im Zitat steht „er muß". Es müsste aber „man muß" heißen.

[3] Man kann Inskriptionen „Schreibtypen" zuordnen. Beispiel für einen Schreibtyp des Alphabets: a, **a**, a, a, a usw. Die Zuordnung der infrage kommenden Elemente zu Schreibtypen (Klassen) erfordert die Herstellung von Beziehungen (vgl. etwa Rosch, 1975 oder Lakoff, 1987). Für Krämer (2009, S. 101) geht es bei der Identifikation von empirisch vorkommenden Inskriptionen als Verkörperung eines generellen Typus um eine Wiedererkennungsleistung, die auf der Vernachlässigung von Aspekten der sinnlichen Erscheinung beruht.

Literatur

Aebli, H. (1980). *Denken: Das Ordnen des Tuns. Band I: Kognitive Aspekte der Handlungstheorie*. Stuttgart: Klett-Cotta.

Aebli, H. (1983). *Zwölf Grundformen des Lehrens. Eine Allgemeine Didaktik auf kognitionspsychologischer Grundlage*. Stuttgart: Klett-Cotta.

Baruk, S. (1989). *Wie alt ist der Kapitän? Über den Irrtum in der Mathematik*. Basel: Birkhäuser.

Bauersfeld, H. (1995). „Language games" in the mathematical classroom: Their function and their effects. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Hrsg.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (S. 271–292). Hillsdale NJ.: L. Erlbaum.

Bauersfeld, H. (2000). Radikaler Konstruktivismus, Interaktionsmus und Mathematikunterricht. In E. Begemann (Hrsg.), *Lernen verstehen – Verstehen lernen* (S. 117–145). Frankfurt: Peter Lang.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles epistemologigues et les problemes en mathematigues. *Revue de Didactigue des Mathematigues, 4*(2), 165–198.

Brown, J.R. (1999). Philosophy of mathematics. London: Routledge.

Brunner, M. (2013). Didaktikrelevante Aspekte im Umfeld der Konzepte *token* und *type*. *Journal für Mathematik-Didaktik, 34 (1)*, 53–72.

Brunner, M. (2015). Bedeutungsherstellung als Lehr- und Lerninhalt. *mathematica didactica, 38*, 199–223.

Brunner, M. (2017). Die Rollen der Inskriptionen als nützliche Sichtweise im Mathematikunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik, 38(2),* 141–165. doi: 10.1007/s13138-017-0114-z.

Dawydow, W. (1977). *Arten der Verallgemeinerung im Unterricht*. Berlin: Volk und Wissen.

Deutsches Zentrum für Lehrerbildung Mathematik (2018). *Das operative Prinzip (Piaget, Aebli, Wittmann)*. Abgerufen von https://kira.dzlm.de/unterricht-offen-und-zielorientiert/handeln-ist-nicht-gleich-handeln-%E2%80%93-das-operative-prinzip

Dörfler, W. (1988). Begriff als Tätigkeitsstruktur – Zur Unterscheidung von empirischem und theoretischem Begriff. In P. Bender (Hrsg.), *Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis* (S. 29–36). Berlin: Cornelsen.

Dörfler, W. (2006). Diagramme und Mathematikunterricht. *Journal für Mathematik–Didaktik, 27 (3/4)*, 200–219.

Dörfler, W. (2013). Was würden Peirce oder Wittgenstein zu Kompetenzmodellen sagen? In M. Rathgeb, M. Helmerich, R. Krömer, K. Lengnink & G. Nickel (Hrsg.), *Mathematik im Prozess. Philosophische, Historische und Didaktische Perspektiven* (S. 73–87). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Dörfler, W. (2014). Didaktische Konsequenzen aus Wittgensteins Philosophie der Mathematik. In H. Hahn (Hrsg.), *Anregungen für den Mathematikunterricht unter der Perspektive von Tradition, Moderne und Lehrerprofessionalität* (S. 68–80). Berlin: Franzbecker.

Dörfler, W. (2015). Abstrakte Objekte in der Mathematik. In Kadunz, G. (Hrsg.), *Semiotische Perspektiven auf das Lernen von Mathematik* (S. 33-49). Berlin Heidelberg: Springer.

Fischer, A. (2006). Der Einsatz von Zeichen als Werkzeuge zur mentalen Konstruktion abstrakter Objekte. *Journal für Mathematik-Didaktik, 27 (3/4)*, 180–199.

Fischer, R. & Malle, G. (1985). *Mensch und Mathematik,. Eine Einführung in Didaktisches Denken und Handeln*. Zürich: Bibliographisches Institut.

Gallin, P. & Ruf, U. (1998). *Sprache und Mathematik in der Schule*. Seelze: Kallmeyer

Gerrard, S. (1991). Wittgenstein's Philosophies of mathematics. *Synthese 87*, 125–142).

Hefendehl-Hebeker, L. (1996). Brüche haben viele Gesichter. *mathematik lehren, 78*, 20–48.

Hiebert, J., Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Hrsg.), *The handbook of research of mathematics teaching and learning* (S. 65–100). Mahwah NJ: L. Erlbaum.

Hoffmann, A. (2007). *Wittgensteins Regelbegriff*. Abgerufen von http://www.cse.unsw.edu.au/~achim/Research/Philosophie/node68.html.

Krämer, S. (1991). *Berechnende Vernunft*. Berlin: de Gruyter.

Krämer, S. (2009). Operative Bildlichkeit. Von der ‚Grammatologie' zu einer ‚Diagrammatologie'? Reflexionen über erkennendes ´Sehen`. In M. Hessler & D. Mersch (Hrsg.), *Logik des Bildlichen. Zur Kritik der ikonischen Vernunft* (S. 94–121). Bielefeld: transcript.

Krämer, S. (2016). *Figuration, Anschauung, Erkenntnis: Grundlinien einer Diagrammatologie*. Frankfurt a. M.: Suhrkamp.

Kvasz, L. (2015). Über die Konstitution der symbolischen Sprache der Mathematik. In G. Kadunz (Hrsg.), *Semiotische Perspektiven auf das Lernen von Mathematik* (S. 33–49). Berlin Heidelberg: Springer.

Lave, J. (1988). *Cognition in practice: Mind, mathematics, and culture in everyday life*. Cambridge: University Press.

Lakoff, G. (1987). *Women, fire and dangerous things. What categories reveal about the mind*. Chicago, London: The University of Chicago Press.

Lengnink, K. & Krömer, R. (2018). Materialisierung, System, Spiegel des Menschen. Historische und didaktische Bemerkungen zur Sozialanthropologie der Mathematik nach R. Fischer. In M. Rathgeb (Hrsg.), *Mathematik und Gesellschaft*. Wiesbaden: Springer.

Lengnink, K. & Prediger, S. (2001). Lebendiges Mathematiklernen: Der Blick der Themenzentrierten Interaktion auf die Mathematikdidaktik. *Bildung und Erziehung, 53*(3), 333–353.

Malle, G., Ramharter E., Ulovec A. & Kandl S. (2007). Mathematik verstehen 8. Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch.

Malle, G., Woschitz, H., Koth, M. & Salzger, B. (2016). *Mathematik verstehen 8*. Passau: Passavia.

Meyer, M. (2007). Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht – Zur Rolle der Abduktion und des Arguments. *Journal für Mathematik–Didaktik, 28* (3/4), 286–310.

Meyer, M. (2015). *Vom Satz zum Begriff*. Wiesbaden: Springer.

Misak, C. (2004). The Cambridge Companion to Peirce. Cambridge: University Press.

Mühlhölzer, F. (1999). Mathematik ohne Metaphysik. In J. Nida-Rümelin (Hrsg.), *Rationalität, Revision* (Vorträge des 3. Internationalen Kongresses der Gesellschaft für Analytische Philosophie vom 15. bis zum 18. September 1997 in München), 416-423. Berlin: Walter de Gruyter.

Mühlhölzer, F. (2012). On live and dead signs in mathematics. In M. Detlefsen & G. Link (Hrsg.), *Formalism and Beyond. On the Nature of Mathematical Discourses* (S. 183–208)*.* Frankfurt: Ontos Publisher.

Padberg, F. & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Bruchrechnung*. Berlin: Springer.

Prediger, S. (2004). Brüche bei den Brüchen – aufgreifen oder umschiffen. *mathematik lehren*, *123*, 10–13.

Rosch, E. (1975). Cognitive reference points. *Cognitive Psychology, 7*, 532–547.

Schmidt, S. (1998). Semantic Structures of Word Problems. In Alsina, C. (Hrsg.), *ICME 8* (S. 385-395). Sevilla: S.A.E.M.

Schneeberger, M. (2009). Verstehen und Lösen von mathematischen Textaufgaben im Dialog. Münster: Waxmann.

Sfard, A. (1991). Symbolizing mathematical reality into being – or how mathematical discourse and mathematical objects create each other. In P. Cobb, K. E. Yackel & K. McClain (Hrsg.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives and discourse, tools, and instructional design* (S. 37-98). Mahwah NJ: L. Erlbaum.

Söbbeke, E. (2005). *Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern – Epistemologische Grundlagen und empirische Fallstudien zu kindlichen Strukturierungsprozessen mathematischer Anschauungsmittel*. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Söbbeke, E. (2009). „Sehen und Verstehen" im Mathematikunterricht – Zur besonderen Funktion von Anschauungsmitteln für das Mathematiklernen. In É. Vásárhelyi (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2008*. Münster: WTM.

Steenpaß, A. (2014). Grundschulkinder deuten Anschauungsmittel. Eine epistemologische Kontext- und Rahmenanalyse zu den Bedingungen der visuellen Strukturierungskompetenz. Abgerufen von https://duepublico.uni-duisburg-essen.de/servlets/DerivateServlet/Derivate-37000/Steenpa%C3%9F_Dissertation.pdf.

Steinbring, H. (2004). *Die Konstruktion neuen mathematischen Wissens in der Unterrichtsinteraktion*. Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts: Universität Dortmund.

Voigt, J. (1984). Interaktionsmuster und Routinen im Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen und mikroethnographische Falluntersuchungen. Weinheim: Beltz.

Winter, H. (1999). *Mehr Sinnstiftung, mehr Einsicht, mehr Leistungsfähigkeit, dargestellt am Beispiel der Bruchrechnung*, Manuskript, RWTH Aachen. Abgerufen von http://www.matha.rwth-aachen.de/de/lehre/ss09/sfd/Bruchrechnen.pdf.

Wittgenstein, L. (1978). *Wittgensteins Vorlesungen über die Grundlagen der Mathematik*. Schriften Band 7. Frankfurt: Suhrkamp.

Wittgenstein, L. (1984a). *Philosophische Grammatik*. Herausgegeben von R. Rhees (2015), Werksausgabe Band 4. Frankfurt: Suhrkamp.

Wittgenstein, L. (1984b). *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Wittgenstein, L. (2003). *Philosophische Untersuchungen*. Frankfurt: Suhrkamp.

Anschrift des Verfassers

Martin Brunner
Bundesrealgymnasium Lienz
Maximilianstraße 11
A-9900 Lienz
martin.brunner1@gmx.at