Entwicklungsforschung im Lehr-Lern-Labor – Lernangebote für heterogene Lerngruppen am Beispiel der Fibonacci-Folge

CHRISTIAN RÜTTEN, ESSEN; PETRA SCHERER, ESSEN; STEPHANIE WESKAMP, ESSEN

Zusammenfassung*: Im Lehr-Lern-Labor ‚Mathe-Spürnasen' besuchen Grundschulklassen (4. Schuljahr) die Universität und arbeiten in heterogenen Kleingruppen zu einem ausgewählten Thema der Mathematik in Form von substanziellen Lernumgebungen, die den Lernenden unterschiedliche Zugänge und Strategien ermöglichen sollen. Die Lernumgebungen werden im Lehr-Lern-Labor entwickelt, erprobt und im Sinne eines Design-Research-An-satzes weiterentwickelt. Auch Studierende werden in den Entwicklungsprozess integriert, z. B. im Rahmen des Berufsfeldpraktikums oder von Abschlussarbeiten. Einzelne Lernumgebungen werden darüber hinaus in weiteren Lehrveranstaltungen aufgegriffen, wodurch der Design-Research-Ansatz, z. B. durch die Analyse von Studierendenbearbeitungen, vielfältig bereichert wird.*

Am Beispiel der Lernumgebung ‚Fibonacci-Folge' wird die Entwicklungsforschung im Lehr-Lern-Labor vorgestellt. Die konkreten Fragen beziehen sich u. a. auf Untersuchungen des Aufgabenverständnisses, der Strategieentwicklung und der Argumentationsprozesse. Der Beitrag skizziert den Entwicklungsprozess der gesamten Lernumgebung, um dann auf die Einführung und eine kombinatorische Vertiefung zu fokussieren und daran spezifische Design-prinzipien und -prozesse zu konkretisieren.

Abstract: *In the teaching-learning-lab ‚Good Noses Mathematics' primary classes (grade 4) visit the university and work in heterogeneous groups on a specific mathematical topic in form of substantial learning environments that should offer different approaches and strategies to the students. The learning environments are developed and tried out in the teaching-learning-lab, followed by a further development according to a design-research-approach. Also teacher students are integrated in the developmental process, for example when absolving practical studies or when writing their BA- or MA-theses. Moreover, selected learning environments are taken up in further teacher education courses, which enlarges the design-research-approach, for example by analyzing teacher students' work.*

In the contribution, exemplary, for the learning environment ‚Fibonacci Sequence' the developmental research of the teaching-learning-lab will be presented. The concrete research questions include for example the investigation of the understanding of the given problems, the development of strategies and the processes of argumentation. The contribution sketches the developmental process for the complete learning environment, then putting specific design principles as well as design processes into concrete terms for the introductory unit and a combinatorial unit.

1. Einleitung

Im Lehr-Lern-Labor ‚Mathe-Spürnasen' der Universität Duisburg-Essen besuchen Grundschulklassen des 4. Schuljahres an einem Vormittag die Universität, um in Kleingruppen ausgewählte mathematische Themen zu erforschen. Die Lernangebote und Problemstellungen sollen in Form substanzieller Lernumgebungen im Sinne einer natürlichen Differenzierung (vgl. Krauthausen & Scherer, 2014) vielfältige Zugänge und Strategien ermöglichen, um so in besonderer Weise einer heterogenen Schülerschaft gerecht zu werden.

Im vorliegenden Beitrag werden die konzeptionellen Grundlagen des Projekts, insbesondere zur Entwicklung von Lernumgebungen mit entsprechender Begleitforschung vorgestellt, eine exemplarische Lernumgebung konkretisiert sowie Perspektiven für das Projekt aufgezeigt.

2. Konzeptionelle Grundlagen des Lehr-Lern-Labors

2.1 Grundidee

Das Lehr-Lern-Labor ‚Mathe-Spürnasen' versteht sich als außerschulischer Lernort, an dem für Schülerinnen und Schüler mathematische Lerngelegenheiten und für Studierende Möglichkeiten der Erfahrung und Reflexion mathematikdidaktischer Praxis angeboten werden. Konkret werden in komplexitätsreduzierten Lernsettings bzw. Lernumgebungen re-ale Interaktionen ermöglicht. Zugleich wird dadurch Raum für mathematikdidaktische Entwicklungsforschung eröffnet (vgl. auch Abschnitt 2.3.; zu weiteren Schwerpunkten und Ausgestaltungen von Lehr-Lern-Laboren vgl. z. B. Brüning, 2017; Scherer & Rasfeld, 2010).

In schulischen wie auch außerschulischen Kontexten sollen mathematische Inhalte möglichst in einem konstruktivistischen Verständnis von Lernen und Lehren behandelt werden (vgl. z. B. Wittmann, 1995a). Im Lehr-Lern-Labor ‚Mathe-Spürnasen' wird dies durch das Angebot substanzieller Lernumgebungen (im Folgenden SLU) angestrebt (vgl. Wittmann, 1995a; siehe auch Krauthausen & Scherer, 2014). Ausgangspunkt für das Design der konkreten Lernumgebungen für Klasse 4 ist jeweils die Auswahl eines substanziellen mathematischen Gegenstands im Sinne mathematischer Grundideen, um daran verschiedene Zielsetzungen umzusetzen (vgl. Abschnitt 2.2).

Konkret bedeutet dies, dass ein bestimmtes mathematisches Thema unter verschiedenen Perspektiven bearbeitet wird. Die Umsetzung eines Themas erfolgt dabei in einführenden und vertiefenden Aktivitäten zu einer bestimmten Lernumgebung im Sinne von ‚Lernumgebungen innerhalb einer Lernumgebung' (vgl. Abschnitt 3.3). Auf diese Weise sollen für die Schülerinnen und Schüler vielfältige Vernetzungen und anschlussfähige Lernprozesse ermöglicht werden. Der außerschulische Lernort kann dabei spezifische Lernerfahrungen, u. a. als *hands-on*-Aktivitäten (vgl. Abschnitt 3.2) bieten und so Interesse und Motivation für die Mathematik steigern (vgl. auch Scherer & Rasfeld, 2010).

Bislang wurden die folgenden SLU entwickelt und erprobt: ‚Platonische Körper', ‚Fibonacci-Folge' (vgl. Rütten & Weskamp, 2015; Hähn, Rütten, Scherer & Weskamp, 2018), ‚Pascal'sches Dreieck' (vgl. Weskamp, 2015, 2016), ‚Quadrat' (vgl. Hähn & Scherer, 2017), ‚Würfel' (vgl. Baltes, Rütten Scherer & Weskamp, 2014; Rütten & Scherer, 2015), und ‚Kreis' (vgl. Hähn, 2016, 2017). Im vorliegenden Beitrag wird in Abschnitt 4 die SLU ‚Fibonacci-Folge' genauer vorgestellt.

Das Projekt startete 2012 mit der Entwicklung erster Themen und Erprobungen und ging zum Wintersemester 2015/16 in einen regulären Betrieb über, in dem während des Semesters einmal wöchentlich Schulklassen die Universität besuchen. Seit dem Projektstart haben mehr als 60 Schulklassen (ca. 1500 Schülerinnen und Schüler) das Angebot wahrgenommen. Daneben wurden ausgewählte Aktivitäten auch bei weiteren fakultäts- bzw. universitätsinternen oder -übergreifenden Veranstaltungen angeboten, wie bspw. am Tag der offenen Tür, auf der Bildungsmesse Didacta oder bei der WissensNacht Ruhr.

2.2 Ziele

Im Lehr-Lern-Labor werden verschiedene vernetzte Zielsetzungen verfolgt (vgl. Abb. 1). Aus diesen allgemeinen Zielsetzungen ergeben sich folgende Schwerpunkte bezüglich der Entwicklung und Erforschung der SLU, die insbesondere auch für den Umgang mit Heterogenität relevant sind:

- Verbindung inhaltlicher und allgemeiner prozessbezogener Kompetenzen (vgl. KMK, 2005);
- Verknüpfung verschiedener inhaltlicher Leitideen: Ermöglicht werden soll dies durch eine aktive Wissenskonstruktion, wobei Lernen als ein konstruktiver, aktiv-entdeckender und auf Verstehen ausgerichteter, anschlussfähiger Prozess gesehen wird (vgl. Walther, Selter & Neubrand, 2008, S. 22);
- Vernetzung inner- und außermathematischer Bereiche durch den Einbezug naturwissenschaftlicher Phänomene, Alltagssituationen oder die Geschichte der Mathematik (vgl. Winter, 1995).

Das allgemeine Ziel einer praxisorientierten Lehrerbildung wird durch die Einbindung in konkrete fachliche wie auch fachdidaktische Lehrveranstaltungen angestrebt: So werden Praktikumsplätze für das Berufsfeldpraktikum im Lehr-Lern-Labor angeboten, so dass einerseits Lernprozesse der Schülerinnen und Schüler beobachtet und analysiert, andererseits auch die eigenen Lehrerfahrungen reflektiert werden können. Darüber hinaus werden regelmäßig Abschlussarbeiten im Rahmen der ‚Mathe-Spürnasen' angefertigt, thematisch bislang in den Feldern ‚Heterogenität', ‚Interaktionsprozesse' und ‚Strategieentwicklung' angesiedelt, jeweils auf konkrete Lernumgebungen bezogen.

Insgesamt soll so für die Lernenden – Schülerinnen und Schüler sowie Studierende – Interesse und Motivation für die Mathematik gefördert werden. Dabei können die flexiblen Rahmenbedingungen eines außerschulischen Lernorts, wie bspw. das Arbeiten in Kleingruppen oder der Einbezug geeigneter Materialien, unterstützen.

Abb. 1: Zielsetzungen im Lehr-Lern-Labor ‚Mathe-Spürnasen'

2.3 Forschung

Entsprechend der zuvor genannten Ziele findet im Projekt mathematikdidaktische Forschung im Bereich der Stoffdidaktik, der erkenntnistheoretischen und lernpsychologischen Forschung und der praxisorientierten Entwicklungsforschung unter den Perspektiven ‚Mathematik am außerschulischen Lernort (Perspektive Grundschulkinder und Lehrperson)' und ‚Mathematik im Lehramtsstudium Grundschule (Perspektive Studierende)' statt (vgl. auch Hefendehl-Hebeker, 2004).

Konkrete Forschungsprojekte verbinden dabei die Bereiche bzw. vernetzen die Perspektiven und verknüpfen damit Theorie und Praxis:

- Entwicklung von SLU im Rahmen eines Design-Research-Ansatzes,
- zusätzliche Erprobung verschiedener SLU an schulischen und außerschulischen Lernorten,
- Untersuchung inhalts- und prozessbezogener Kompetenzen von Lernenden im Rahmen ausgewählter SLU (u. a. Identifikation von Problemlösestrategien, Analyse des Argumentationsverhaltens),
- Einsatz einer SLU in Schule und Hochschule (u. a. vergleichende Analyse der Bearbeitungen von Grundschulkindern und Studierenden),
- Entwicklung und Erforschung des Konzepts vernetzter Lernumgebungen ‚Lernumgebungen in einer Lernumgebung'.

Das Projekt wird damit auch in substanzieller Weise in die Lehrerbildung integriert, einerseits in Fachveranstaltungen, andererseits in fachdidaktische Lehrveranstaltungen: So werden Lern- und Unterrichtsprozesse, sowohl hinsichtlich der Schüler- als auch der Studierendenperspektive (als Lernende oder Lehrende), etwa im Berufsfeldpraktikum oder im Rahmen von Abschlussarbeiten reflektiert. Diese Umsetzungen werden im Projekt u. a. auch für den Design-Research-Zyklus genutzt.

Für die detaillierte Erforschung der Lernprozesse der Lernenden, insbesondere zur Schülerperspektive, finden unterschiedliche Schwerpunkte ihre forschungsorientierte Anwendung: z. B. Rekonstruktion von Lernerstrategien (vgl. Rütten & Weskamp, 2015), Argumentationen (vgl. Rütten & Scherer, 2015), Interaktionen in inklusiven Settings (vgl. Hähn, 2017), oder Analyse verschiedener SLU in heterogenen Gruppen (vgl. Weskamp, 2015).

3. Design der Lernumgebungen

3.1 Lernumgebungen im Rahmen fachdidaktischer Entwicklungsforschung

Für empirische Forschung bieten SLU großes Potenzial und dienen im Rahmen von Unterrichtsexperimenten „nicht nur als Forschungswerkzeuge, sondern sind auch selbst Forschungsobjekte" (Wittmann, 1998, S. 339). In diesem Zusammenhang sind auch im Umfeld von Lehr-Lern-Laboren, bspw. hinsichtlich besonders begabter Schülerinnen und Schüler, bereits umfangreiche Entwicklungsforschungsarbeiten vorhanden (vgl. z. B. Bauersfeld, 2006; Käpnick, 2010).

SLU liefern zum einen Erkenntnisse hinsichtlich der Lern- und Lehrprozesse, zum anderen können diese Erkenntnisse nützlich sein, um SLU weiterzuentwickeln. Hierzu sind in der internationalen Literatur zahlreiche Begriffsdefinitionen und Begriffsbestimmungen zu verzeichnen, die Forschungsansätze zur (Weiter)Entwicklung von Artefakten und deren Erforschung beschreiben. International sind u. a. Bezeichnungen, wie Design Experiments (z. B. Collins, 1992), Design-Based Research (z. B. TDBRC, 2003), Design Research (z. B. van den Akker, Gravemeijer, McKenney & Nieveen, 2006), Research-Based Educational Design (z. B. McKenney & Reeves, 2012) und Action Research (z. B. Elliott, 1991) zu finden.

Häufig werden die Bezeichnungen synonym verwendet oder unter dem Oberbegriff (Educational) Design Research oder Design-Based Research zusammengefasst (vgl. McKenney & Reeves, 2012). Van den Akker et al. (2006, S. 5) beschreiben Gemeinsamkeiten einiger Forschungsansätze unter dem Label Design Research anhand folgender Merkmale:

- Der Forschungsprozess verläuft *iterativ in Zyklen* (Design, Evaluation und Re-Design).
- Dabei erfolgt der Einsatz eines Designs und entsprechender Interventionen in realen Settings.
- Angestrebt wird die *Verbesserung eines Designs bzw. der Interventionen*, wobei vor allem die Nachvollziehbarkeit des Entwicklungsprozesses gewährleistet sein soll.
- Für den Entwicklungsprozess ist zudem eine *Nutzungs- und Theorieorientierung* von großer Bedeutung, d. h. zum einen sollte das konzipierte Design für Nutzer leicht anwendbar sein, zum anderen basiert das entsprechende Design auf Theorie und liefert zugleich einen Beitrag zur Theorieentwicklung.

Trotz Gemeinsamkeiten lassen sich unterschiedliche Schwerpunktsetzungen bspw. hinsichtlich der Ziele erkennen (vgl. Link, 2012; Prediger & Link, 2012): So zielt Research-Based Design eher auf die Entwicklung eines Produkts oder Programms ab und nicht unbedingt auf explizite Theorieentwicklung (vgl. McKenney & Reeves, 2012, S. 28 f.). Auch Action Research strebt in erster Linie die Verbesserung der Unterrichtspraxis durch die Professionalisierung von Lehrpersonen und weniger die Entwicklung von Theorien an (vgl. Elliott, 1991, S. 49; Matter, 2017, S. 101). Die Generierung von Wissen in Form lokaler Theorien und die (Weiter)Entwicklung von Unterrichtsaktivitäten wird im Rahmen eines Design-Research-Ansatzes verknüpft, wobei z. B. die theorieorientierte Entwicklung von Lernumgebungen und die systematische Erforschung von Lernprozessen fokussiert werden (vgl. TDBRC, 2003; s. a. Collins, 1992; Gravemeijer & Cobb, 2006).

Die theorieorientierte Entwicklung und Erforschung von SLU im Sinne eines Design-Research-Ansatzes ist zentraler Bestandteil des Projekts ‚Mathe-Spürnasen'. Ziel ist es zum einen, konkrete SLU für den Einsatz im Lehr-Lern-Labor bzw. im Mathematikunterricht der Grundschule zu entwickeln und aufzubereiten (vgl. Abschnitt 2.2), zum anderen sollen auf der Forschungsebene lokale Theorien als Beitrag zur Mathematikdidaktik als Design Science (weiter)entwickelt werden, die Aufschluss über Lehr-Lern-Prozesse geben (vgl. Hußmann, Thiele, Hinz, Prediger & Ralle, 2013; Wittmann, 1995b).

Im Folgenden werden der dem Projekt ‚Mathe-Spürnasen' zugrundeliegende Forschungsansatz sowie diesbezügliche Auswahl- und Designprinzipien näher erläutert.

3.2 Designprinzipien

Ausgangspunkt der Konstruktion und Erforschung der SLU ist die Mathematik als Wissenschaftsdisziplin selbst. Hierbei geht es um die mathematische Substanz eines bestimmten Themas, welche den Kern der Lernumgebung bildet (vgl. Wollring, 2009, S. 14). Dabei erfolgt zunächst die Auswahl substanzieller Inhalte unter Berücksichtigung mathematischer Grundideen (vgl. Wittmann, 2004, S. 54). Nach der Auswahl eines substanziellen mathematischen Themas erfolgt die Aufbereitung der Inhalte im Sinne der Entwicklung einer SLU (vgl. ebd., S. 54).

Die im Lehr-Lern-Labor ‚Mathe-Spürnasen' entwickelten SLU sollen Lernenden unterschiedliche mathematische Perspektiven hinsichtlich eines ausgewählten Themas bieten (vgl. Baltes et al., 2014; vgl. auch Abschnitt 2). Neben der Berücksichtigung zentraler Grundideen und eines Facettenreichtums der mathematischen Inhalte, geht es darüber hinaus um fächerübergreifende Aspekte (vgl. ebd.). Im Hinblick auf den Lernprozess ist es von großer Bedeutung, Beziehungen zwischen verschiedenen inhaltlichen Aspekten zu erkennen (vgl. Roth, 2013). Derartige Beziehungen werden u. a. im Rahmen einer Mathematik als Wissenschaft von Mustern und Strukturen bzw. mit Mustern und Strukturen als fachliches Grundkonzept sichtbar (vgl. Wittmann & Müller, 2008, S. 42 ff.; siehe auch MSW, 2008; Roth, 2013).

Damit Muster und Strukturen bzw. Zusammenhänge verschiedener inhaltlicher Aspekte überhaupt entdeckt werden können, bedarf es einer inhaltlichen Offenheit des Lernangebots gegenüber unterschiedlichen Schwerpunkten eines mathematischen Themas. Mit Offenheit ist hier die fachliche Rahmung gemeint, in der die Lernenden diverse entdeckte Aspekte gemeinsam betrachten und verschiedene Perspektiven im Hinblick auf den mathematischen Gegenstand einnehmen können (vgl. Krauthausen & Scherer, 2014, S. 47; Wittmann, 1996; siehe auch Hähn & Scherer, 2017, S. 232).

Diese inhaltliche Offenheit ist ein wichtiger Aspekt für den Umgang mit Heterogenität und wird ergänzt durch eine didaktische Flexibilität: SLU sollen an die spezifischen Gegebenheiten einer Lerngruppe angepasst werden können, um u. a. ein Spektrum an mathematischen Fragestellungen und Aktivitäten zu ermöglichen (vgl. Krauthausen & Scherer, 2014, S. 110 f.).

Die mathematischen Aktivitäten im hier vorgestellten Projekt umfassen sowohl *Hands-on*-Aktivitäten als auch kognitive Aktivitäten, welche im Zusammenspiel und in Bezug auf ein konstruktivistisches Lernverständnis nachhaltiges Lernen ermöglichen (vgl. Beutelspacher, 2017, S. 4; Krauthausen & Scherer, 2014). *Hands-on*-Aktivitäten können Lernenden Einsichten in Zusammenhänge ermöglichen und Erkenntnisse liefern (vgl. Beutelspacher, 2017, S. 4). Die eingesetzten Materialien sollten nicht zuletzt dadurch allen Lernenden – auch Schülerinnen und Schülern mit Lernschwierigkeiten – einfache Zugangsweisen bieten und der mathematischen Substanz gerecht werden (vgl. Beutelspacher, 2017, S. 4 f.; vgl. auch Abschnitt 2):

> Der Einsatz adäquater Materialien bietet Schülerinnen und Schülern mit Lernschwierigkeiten eine niedrige Eingangsschwelle zu einem mathematischen Thema. Ebenso können Materialien helfen, verbale Darstellungsschwierigkeiten zu überwinden, indem Handlungen mit dem Material verbale Äußerungen ergänzen oder ersetzen. Werden diese von anderen dann verbalisiert, wird ein Beitrag zur fachlichen Sprachförderung geleistet. Durch das Material können ebenso logisch erschlossene, verbale Argumentationen konkret dargestellt und deren Inhalt so für andere zugänglich gemacht werden. (Hähn & Scherer, 2017, S. 230)

3.3 Zyklus zur Entwicklung und Erforschung der SLU

Nach der Entscheidung für einen mathematischen Inhalt, der die Grundlage der SLU bildet, erfolgen eine erste Sichtung und erste Analysen zu möglichen Aufgaben und entsprechenden Materialien und Veranschaulichungen aus der Literatur (zur Konkretisierung vgl. Abschnitt 4.2). Dieses Vorgehen lässt sich in Anlehnung an den *theory-guided-bricolage*-Ansatz beschreiben (Gravemeijer, 1994, S. 447 f.). Dabei werden neue Artefakte theoriebasiert aus verfügbaren Mitteln entwickelt (vgl. Gravemeijer, 1994). Im Projekt ‚Mathe-Spürnasen' werden so ggf. bereits vorliegende Umsetzungen im Hinblick auf ihren Einsatz unter Berücksichtigung der Designprinzipien geprüft. Falls Aufgaben oder Umsetzungen im Bereich der Sekundarstufe I vorhanden sind, kann es ggf. hilfreich sein, eine Adaption auf Grundschulniveau vorzunehmen. Jedoch ist auch die Konzeption völlig neuer Lernarrangements denkbar. Bei alldem werden bereits fachliche und fachdidaktische Aspekte möglicher Umsetzungen sowie ggf. vorhandene Lernerperspektiven berücksichtigt (vgl. Prediger et al., 2012). An dieser Stelle wäre es ebenso möglich, ein mathematisches Thema aufgrund einer mangelnden Reichhaltigkeit an unterschiedlichen Perspektiven auf einen bestimmten Lerngegenstand zu verwerfen.

Der weitere Entwicklungs- und Forschungsprozess folgt einem iterativen Zyklus aus Design, Durchführung, Analyse sowie Re-Design (vgl. z. B. TDBRC, 2003; zur Konkretisierung vgl. Abschnitte 4.3 und 4.4.2). Ein mögliches Modell, um die Prozesse im Rahmen der fachdidaktischen Entwicklungsforschung zu beschreiben, ist das FUNKEN-Modell (Prediger et al., 2012; Hußmann et al., 2013). Hierbei werden die Spezifizierung und Strukturierung des Lerngegenstandes, die (Weiter)Entwicklung des Designs, die Durchführung und Auswertung der Design-Experimente sowie die (Weiter)Entwicklung lokaler Theorien als Phasen innerhalb eines iterativen Zyklus betrachtet (Prediger et al., 2012). In Anlehnung an dieses Modell können die Entwicklungs- und Forschungsprozesse im Projekt ‚Mathe-Spürnasen' beschrieben werden.

Die Spezifizierung des Lerngegenstandes zieht sich durch den gesamten Zyklus, da der mathematische Gegenstand in allen Phasen des Zyklus berücksichtigt wird. Um das mathematische Thema als SLU aufzubereiten, werden Aufgaben bzw. Umsetzungen strukturiert, indem mögliche Überlegungen zum Aufbau der entsprechenden Lernumgebung angestellt werden. Wie oben bereits angedeutet, bestehen die SLU im Projekt ‚Mathe-Spürnasen' jeweils aus einer Einführung und drei Vertiefungen zu einem mathematischen Thema. Die Einführung und Vertiefungen können dabei wiederum selbst als Lernumgebungen bezeichnet werden (‚Lernumgebungen innerhalb einer Lernumgebung'; zur Konkretisierung des Aufbaus der SLU ‚Fibonacci-Folge' vgl. Abschnitt 4.1). Durch den Aufbau der SLU soll die Betrachtung eines mathematischen Themas unter vielfältigen Perspektiven ermöglicht werden, sodass Möglichkeiten zur Vernetzung verschiedener inhaltlicher Bereiche und Anknüpfungsmöglichkeiten an diverse Voraussetzungen seitens der Lernenden geboten werden (vgl. hierzu Abschnitte 2.1 und 2.2). So ergeben sich individuell bspw. Vernetzungsmöglichkeiten bzgl. der Einführung und der jeweils bearbeiteten Vertiefung. Darüber hinaus kann perspektivisch ein Austausch über verschiedene Vertiefungen in einer Schulklasse im Anschluss an den Experimentiervormittag zur Vernetzung und Multiperspektivität bzgl. eines mathematischen Themas beitragen. In der Phase der konkreten Entwicklung der SLU erfolgt im Projekt die Anfertigung von Informationstexten zur Einführung bzw. zu den Vertiefungen der Lernumgebungen, die eine genaue Beschreibung des Ablaufs inkl. der Formulierung von Arbeitsaufträgen sowie der einzusetzenden Materialien enthalten, ggf. durch Verlaufspläne ergänzt. Dabei werden bereits zentrale Forschungsfragen in Bezug auf den Entwicklungs- und Forschungsprozess formuliert (z. B. Inwiefern ermöglichen die Arbeits- und Forschungsaufträge ein breites Bearbeitungsspektrum? Inwiefern unterstützen die eingesetzten Materialien die Bearbeitungsprozesse der Schülerinnen und Schüler? Wie nutzen Lernende die Arbeitsblätter zur Dokumentation im Bearbeitungsprozess?). Die formulierten Forschungsfragen beziehen sich auf unterschiedliche Ebenen der Design- und Theorieentwicklung (vgl. Hußmann et al., 2013). Die (Weiter)Entwicklung des Designs bzw. der Theorie erfolgt bspw. unter Berücksichtigung des mathematischen Gegenstands, eingesetzter Materialien sowie der Lehrerinterventionen (vgl. Weskamp, 2016). Dabei stehen die Ebenen der Design- und Theorieentwicklung sowie die jeweiligen Lernprozesse in Wechselbeziehungen zueinander (vgl. Hußmann et al., 2013).

Zur systematischen Untersuchung der Forschungsfragen erfolgt im Rahmen des Design-Research-Zyklus die Erprobung der konzipierten SLU am außerschulischen Lernort. Diese findet im Lehr-Lern-Labor an der Universität Duisburg-Essen statt. Geschulte studentische Hilfskräfte und z. T. auch Studierende im Rahmen von Lehrveranstaltungen bzw. Abschlussarbeiten werden als Lehrende in das Projekt miteinbezogen und übernehmen die Durchführung der SLU.

Die Datenerhebung erfolgt mittels multipler Methoden, wie Videoaufzeichnungen, teilnehmender Beobachtung und schriftlichen Dokumenten (vgl. z. B.

TDBRC, 2003; siehe auch Brown, 1992): So wird jede Kleingruppe während der gesamten Bearbeitung der Lernumgebung (Einführung und Vertiefung) ggf. aus unterschiedlichen Perspektiven videographiert. Zusätzlich erfolgt teilweise eine teilnehmende Beobachtung durch Projektmitglieder. Im Rahmen der Bearbeitung der SLU entstehen diverse Schülerdokumente und Tafelbilder, welche ebenfalls zur Auswertung genutzt werden.

Die Auswertung erfolgt i. Allg. mittels qualitativer Inhaltsanalyse (vgl. z. B. Mayring, 2010). So werden im Rahmen einer zusammenfassenden Inhaltsanalyse bspw. die Bearbeitungsstrategien der Lernenden kategorisiert (vgl. Abschnitt 4.4). Die Analyse kann dabei sowohl an Textdokumenten (Transkripte und Dokumentationen teilnehmender Beobachtung) als auch an Videosequenzen vorgenommen werden. Ergänzend werden auch die im Rahmen der Erprobung der SLU angefertigten Schülerdokumente einbezogen, sodass die verschiedenen Daten in der Analyse wechselseitig Berücksichtigung finden mit dem Ziel, möglichst umfassende und fundierte Erkenntnisse zu erhalten. Die Analyse erfolgt mit Bezug zum theoretischen Rahmen (vgl. z. B. McKenney & Reeves, 2012), der bereits bei der Konzeption der SLU von zentraler Bedeutung ist. Im Rahmen von Qualifikationsarbeiten oder Promotionsprojekten, die in das Projekt ‚Mathe-Spürnasen' eingebettet sind, können durchaus auch fokussierte Analysen (z. B. hinsichtlich der Interaktionen oder bzgl. Argumentationsstrukturen) erfolgen (vgl. z. B. Hähn, 2017).

Auf der Basis der Analysen können unter Berücksichtigung der verschiedenen Ebenen der Theorieentwicklung lokale Theorien (weiter)entwickelt und formuliert werden. Lokale Theorien können z. B. zentrale Erkenntnisse im Hinblick auf die Realisierung einer natürlichen Differenzierung bei eingesetzten SLU sein. Hierbei können u. a. Erkenntnisse bzgl. der Zugänglichkeit zu entsprechenden Aufgabenstellungen für unterschiedliche Lernende, der Herausforderung von Argumentationen oder der Möglichkeit zur Strategieentwicklung gewonnen werden. Dabei sind die lokalen Theorien nicht ohne Weiteres auf andere Lerngegenstände übertragbar. Allerdings sind sie in Bezug auf deren Anwendbarkeit in der Praxis von großer Bedeutung (vgl. Wittmann, 1998, S. 340). So können die in Bezug auf die jeweilige SLU entwickelten Theorien ggf. in der Lehrerausbildung genutzt bzw. weiterentwickelt werden, indem sie z. B. im Rahmen von Lehrveranstaltungen eingesetzt werden.

Neben der Theorieentwicklung erfolgt in Anlehnung an die Erkenntnisse aus den Analysen die (Weiter)Entwicklung des Designs unter Berücksichtigung verschiedener Fragestellungen. Das Re-Design kann sich u. a. auf eine (Weiter)Entwicklung der Arbeits- bzw. Forschungsaufträge sowie auf die eingesetzten Materialen beziehen. Darüber hinaus ist es denkbar, dass eine Lernumgebung (Einführung oder Vertiefung) selbst durch eine andere ersetzt wird, weil sie sich möglicherweise im Rahmen der Bearbeitungsprozesse bspw. als zu voraussetzungsreich erwiesen hat (vgl. Abschnitt 4.4).

Nach der Phase des Re-Designs erfolgen erneute Erprobungen bzw. Durchführungen der SLU. Diese können sowohl weiterhin im Lehr-Lern-Labor als auch in anderen Kontexten (bspw. in der Schule) stattfinden. Der weitere Verlauf des Entwicklungs- und Forschungsprozesses setzt sich in iterativen Zyklen fort, was exemplarisch in Abschnitt 4 illustriert wird.

4. SLU ‚Fibonacci-Folge'

4.1 Skizzierung der aktuellen SLU

Grundsätzlich werden im Projekt für eine SLU eine Einführung sowie drei verschiedene Vertiefungen konzipiert, die in Kleingruppen bearbeitet werden. Jede Kleingruppe bearbeitet dabei die Einführung sowie eine der Vertiefungen. Die unterschiedlichen Vertiefungen motivieren die Lernenden zum anschließenden Austausch in der Klassen (z. B. in der folgenden Unterrichtsstunde) und zur weiteren Vernetzung der verschiedenen Perspektiven auf den mathematischen Gegenstand der SLU. Entsprechend dem Projekt-Design (vgl. Abschnitt 3.3) besteht auch die SLU ‚Fibonacci-Folge' aus einer allen Gruppen gemeinsamen Einführung und drei verschiedenen Vertiefungen (vgl. Abb. 2). In der Einführung sollen die Schülerinnen und Schüler zunächst die Zahlenfolge bei der Bearbeitung des historischen Kaninchen-Problems entdecken. In arithmetischen, geometrischen und kombinatorischen Konkretisierungen rückt danach in den drei Vertiefungen die Struktur der Fibonacci-Folge stärker in den Fokus, wodurch eine Verallgemeinerung im Hinblick auf verschiedene Anwendungen eröffnet wird (vgl. Cofman, 1992). Im Sinne dieser Verallgemeinerung zielen die Vertiefungen auf einen horizontalen Transfer (vgl. BLK, 1998), indem Bezüge zwischen einzelnen Fachgebieten der Mathematik (Arithmetik, Geometrie, Kombinatorik, Algebra) sowie zu anderen Disziplinen (Naturwissenschaften) bzw. lebensweltliche Bezüge aufgezeigt werden.

In der Einführung wird zunächst das Kaninchen-Problem aus Fibonaccis Liber abaci (1202; vgl. Boncompagni, 1857) sowie dessen neuzeitliche Publikation durch Lucas (1877) historisch an einem zum Zeitstrahl umgedeuteten Zahlenstrahl verortet und zu den Lebensdaten der Lernenden in Beziehung gesetzt. Anschließend bearbeiten die Grundschulkinder in der Kleingruppe gemeinsam das Problem und reflektieren ihre Lösungen.

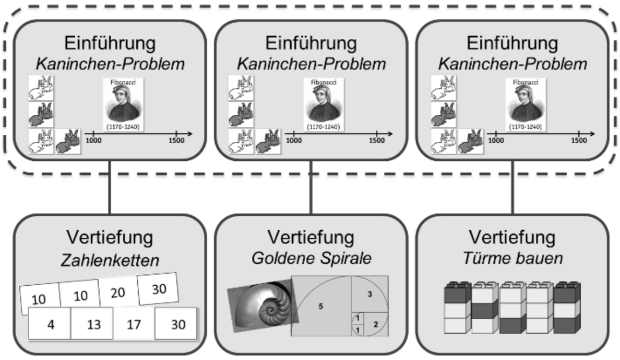


Abb. 2: Aufbau der SLU ‚Fibonacci-Folge'

Als *arithmetische Vertiefung* versuchen die Lernenden viergliedrige, der Struktur der Fibonacci-Folge entsprechende ‚Zahlenketten' mit der Zielzahl 30 als letztem Folgeglied zu finden (vgl. z. B. Scherer, 1996). Dabei reflektieren sie über Strategien sowie die Vollständigkeit der gefundenen Lösungen.

Über ein Puzzle aus Quadraten mit Viertelkreisbögen soll in der *geometrischen Vertiefung* die Goldene Spirale entdeckt werden: Setzt man zwei Quadrate mit Seitenlängeneinheit (LE) 1 aneinander und fügt an die längere Seite des entstandenen Rechtecks ein Quadrat mit LE 2 an, so entsteht bei Fortsetzung dieser Konstruktion mit entsprechenden Quadraten immer ein sog. goldenes Rechteck (vgl. Ladel, 2015, S. 10). In jedes dieser Quadrate kann ein Viertelkreisbogen mit Radius der Seitenlänge so eingezeichnet werden, dass eine spiralförmige Figur, die sog. goldene Spirale entsteht. Nach einer Erkundung der goldenen Spirale und anschließender Abgrenzung zur archimedischen Spirale untersuchen die Lernenden Fotos spiralförmiger Figuren aus der Umwelt (z. B. Perlboot, Blütenstände, Wolkenwirbel) und versuchen, goldene und archimedische Spiralen zu identifizieren.

In der *kombinatorischen Vertiefung* werden die Lernenden aufgefordert, alle Türme aus gelben und blauen Legosteinen (2x2) der Höhe 1, 2, 3 und 4 zu finden, wobei niemals blaue Steine unmittelbar übereinander gesteckt werden dürfen. Diese SLU sowie die Einführung werden zusammen mit deren Entwicklungen in den folgenden Abschnitten 4.3 und 4.4 ausführlicher vorgestellt.

4.2 Überblick über den gesamten Entwicklungsprozess

Der Wahl des Themas ‚Fibonacci-Folge' lagen verschiedene Aspekte zugrunde: Die Fibonacci-Folge bietet die Möglichkeit, einerseits die Vielfältigkeit mathematischer Beziehungen und andererseits Zusammenhänge zwischen einzelnen mathematischen Gebieten herauszustellen (vgl. Cofman, 1992, S. 157). Aus diesem Grund eignet sich das Thema im Rahmen der ‚Mathe-Spürnasen' als SLU mit einer Einführung und drei Vertiefungen (vgl. Abb. 2), in der unterschiedliche Facetten der Fibonacci-Folge aufgespannt und die Folge aus unterschiedlichen Perspektiven beleuchtet wird, wobei ein tieferes Verständnis der Struktur dieser Folge eröffnet wird.

Bei der Entwicklung der SLU wurde für zwei Vertiefungen zunächst auf die beiden erprobten Lernangebote ‚Zahlenketten' (vgl. Scherer, 1996; Scherer & Selter, 1996; Selter & Scherer, 1996) und ‚Wege legen' (vgl. Böttinger, 2006) zurückgegriffen und diese für das Projekt adaptiert. Dabei wurde die kombinatorische Vertiefung ‚Wege legen' im Laufe des Entwicklungsprozesses durch ein Lernarrangement zum isomorphen Problem ‚Türme bauen' (vgl. Rütten & Weskamp, 2015) ersetzt (vgl. Abschnitt 4.4).

Eine weitere Vertiefung sowie die Einführung waren im Projekt noch neu zu entwickeln. Als Gegenstand der Einführung wurde Fibonaccis Kaninchen-Problem (vgl. Boncompagni, 1857, S. 283 f.) ausgewählt, da sich dieses als zugänglicher Ausgangspunkt für die Erkundung der Fibonacci-Folge durch Grundschulkinder eignet und auch in unterschiedlichen Kontexten entsprechend genutzt wird (vgl. z. B. Jost, 1999, S. 34 ff.). Als weitere Vertiefung wurde eine SLU zur Goldenen Spirale (vgl. Abschnitt 4.1) entwickelt, da der Zusammenhang zwischen Spiralen und Fibonacci-Folge vielfach herausgestellt wird (z. B. Jost, 1999, S. 34 ff.) und sich zudem eine Vernetzung sowohl zwischen Arithmetischem und Geometrischem sowie von mathematischen Objekten und Alltagsphänomenen anbietet. Herausfordernd war es dabei allerdings, zu diesem mathematisch komplexen Gegenstand eine SLU für Grundschulkinder zu entwickeln.

Insgesamt ist die Entwicklung der verschiedenen Lernumgebungen zur ‚Fibonacci-Folge' (Einführung, Vertiefungen) in unterschiedlichen Zyklen verlaufen (vgl. Abb. 3). Ein erster Zyklus im Jahr 2012 verlief in allen Lernumgebungen parallel und beinhaltete die Entwicklung bzw. Adaption der Lernumgebungen für das Projekt sowie deren erste Erprobungen mit Schulklassen und zugehörige Analysen.

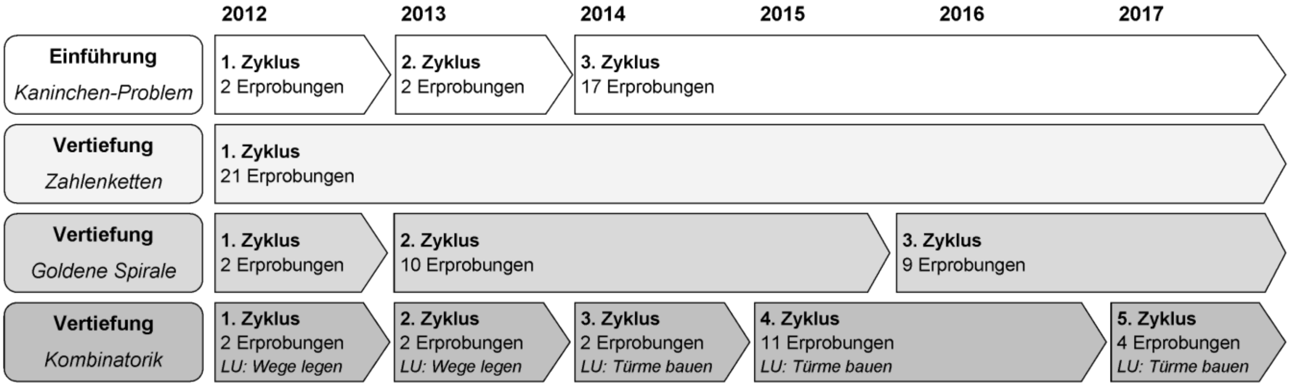


Abb. 3: Entwicklungsprozess der gesamten SLU ‚Fibonacci-Folge'

Dabei zeigte sich, dass bei der Vertiefung ‚Zahlenketten' vorerst keine weitere Revision notwendig erschien. Seit dem Jahr 2013 prägten in den anderen Lernumgebungen alternierende Zyklen aus Re-Design der Lernumgebungen, erneuten Erprobungen und Analysen den weiteren Entwicklungsprozess. Dabei liefen diese Zyklen zu den einzelnen Lernumgebungen innerhalb der Lernumgebung nicht immer parallel, sondern orientierten sich an den aus der Analyse erwachsenden Erfordernissen der Weiterentwicklung. Lediglich bei der Entwicklung der Einführung, der geometrischen und kombinatorischen Vertiefungen forderte die Analyse der Dokumente der teilnehmenden Beobachtung sowie der Videographien des ersten Zyklus zeitgleich ein Re-Design. Der weitere Entwicklungsprozess gestaltete sich dann in den einzelnen Vertiefungen und der Einführung durchaus unterschiedlich. Während Einführung und geometrische Vertiefung bislang drei Zyklen durchlaufen haben, wurde bei der kombinatorischen Vertiefung aufgrund einer umfassenderen Veränderung im Jahr 2013 eine differenzierte Entwicklung mit nunmehr fünf Zyklen notwendig (Abschnitt 4.4).

Exemplarisch wird im Folgenden auf den Entwicklungsprozess anhand der Design-Research-Zyklen von Einführung und kombinatorischer Vertiefung näher eingegangen.

4.3 Exemplarischer Entwicklungsprozess: Umsetzung des Kaninchen-Problems

Da die Thematisierung der Fibonacci-Folge über die Bearbeitung der historischen Aufgabe aus dem Liber abaci erfolgt, bestimmt die historische Einordnung auch den ersten Teil der Einführung. Dabei wurde im ersten Entwicklungszyklus sowohl eine geographische als auch zeitliche Einordnung vorgenommen.

Eine Konzentration auf die zeitliche Einordnung erwies sich aufgrund der empirischen Beobachtungen hinsichtlich der Komplexität sowie der Betonung mathematischer Aktivitäten als sinnvoll: Freudenthal (1981) weist darauf hin, dass 8- bis 9-jährige keine differenzierte Vorstellung der Vergangenheit besitzen, und schildert, wie sich Lernende der dritten Klasse im Rahmen einer Mathematikstunde den Zeitstrahl und damit eine strukturiertere Geschichtsauffassung durch Bezüge zur eigenen Familiengeschichte erarbeiten. In ähnlicher Form wird hier in der Einführung zunächst eine historische Einordnung des Kaninchen-Problems aus dem Liber abaci unternommen. Ein Zahlenstrahlausschnitt mit 100er-Skalierung von ca. 800 bis 2200 wird dabei als Zeitstrahl gedeutet, und die Lernenden werden aufgefordert, Zeitpunkte der individuellen Geschichte (eigenes Geburtsjahr, Geburtsjahr der Eltern oder Großeltern) daran zu zeigen. Dabei erfordert die Bestimmung einiger Zeitpunkte bereits die Berücksichtigung des Zusammenhangs von Zeitpunkten und Zeitspannen. So wird das Geburtsjahr der Eltern oder Großeltern (Zeitpunkt) oft mithilfe deren Alter (Zeitspanne) bestimmt. Nach solchen Übungen am Zeitstrahl, bei denen der Bezug von Zeitpunkt und Zeitspanne ggf. auch durch die Lehrperson herausgefordert wird, wird Leonardo von Pisa, genannt Fibonacci, als historische Person kurz vorgestellt. Anschließend sollen die Schülerinnen und Schüler das Entstehungsjahr 1200 (eigentlich 1202) des Kaninchen-Problems aus dem Liber abaci als Zeitpunkt am Zeitstrahl einordnen und die Zeitspanne angeben, die seitdem vergangen ist. Als weiterer Zeitpunkt in der Geschichte des Kaninchen-Problems wird Lucas angesprochen, der das Kaninchen-Problem erneut publizierte und auf Leonardo von Pisa als dessen Entdecker verwies (vgl. Lucas, 1877). Auch Lucas wird von den Lernenden am Zeitstrahl verortet, und es werden Überlegungen zu den Zeitspannen von Fibonacci bis Lucas und von Lucas bis in die Gegenwart unternommen. Auf diese Weise erfahren die Lernenden das im Folgenden behandelte Kaninchen-Problem als historische Fragestellung der Mathematik und lernen darüber hinaus mathematikhistorisch bedeutsame Personen kennen. Diese geschichtliche Einordnung der Problemstellung erwies sich durch die Orientierungsübungen am Zeitstrahl als wichtige mathematische Aktivität zu

Beginn der Lernumgebung und wurde im zweiten und dritten Design-Research-Zyklus der Lernumgebung unverändert beibehalten.

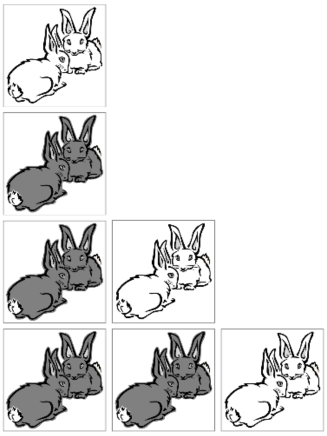


Abb. 4 Darstellung der Kaninchenpaare bis zum 4. Monat

Nach der historischen Einordung wird das Kaninchen-Problem in einer Adaption des historischen Originals präsentiert. Drei Regeln sind dabei für die Erkundung des Wachstums der Kaninchenpopulation leitend:

> (i) Jedes Kaninchenpaar wird im Alter von 2 Monaten gebärfähig.
>
> (ii) Jedes Paar bringt (von da an) jeden Monat ein neues Paar zur Welt.
>
> (∞) Alle Kaninchen leben ewig. (Beutelspacher & Petri, 1996, S. 87)

Diese Regeln wurden im Hinblick auf eine bessere Darstellbarkeit mittels Materials bereits im ersten Zyklus wie folgt modifiziert:

(1) Kaninchenkinder sind weiß und verfärben sich nach einem Monat grau.

(2) Alle grauen Kaninchenpaare bekommen im folgenden Monat ein weißes Kinderpaar.

(3) Alle Kaninchen leben ewig.

Anhand der Anzahl der Kaninchenpaare in den ersten drei Monaten erarbeiten die Schülerinnen und Schüler diese Regeln gemeinsam mit der Lehrperson. Die Anzahlen in den weiteren Monaten bestimmen die Lernenden eigenständig in der Kleingruppe. Dabei stehen seit dem ersten Zyklus Karten mit Darstellungen von weißen und grauen Kaninchenpaaren als Material zur Darstellung der Anzahlen in den jeweiligen Monaten (vgl. Abb. 4) sowie eine Tabelle in entsprechender Größe zur Verfügung.

Gab es im ersten und zweiten Zyklus noch hinreichend viele Karten, dass sich die Populationen bis zum 7. Monat vollständig darstellen ließen, wurde die Anzahl der verfügbaren Karten während des zweiten Zyklus bewusst reduziert. Es zeigte sich, dass die Lernenden durch die Beschränkung der Kartenanzahl neue Formen der Repräsentation entwickeln müssen: Dabei wurden selten rein ikonische, den Karten analoge Repräsentationen gewählt. Oft fand ein Wechsel zu ikonisch-symbolischen (vgl. z. B. Abb. 5, oben) oder rein symbolischen Darstellungen statt (vgl. z. B. Abb. 5, unten).

Solche Darstellungen lenken den Blick der Lernenden bereits in der Phase der Problembearbeitung auf das zu entdeckende arithmetische Muster, während im ersten und zweiten Zyklus mit einer ausreichenden Kartenanzahl der Zugang zu diesem Muster in einer von der eigentlichen Problemlösung separierten und von der Lehrperson initiierten Phase der Reflexion der Aufgabenbearbeitung stattfand und eine stärkere Lenkung erforderte.

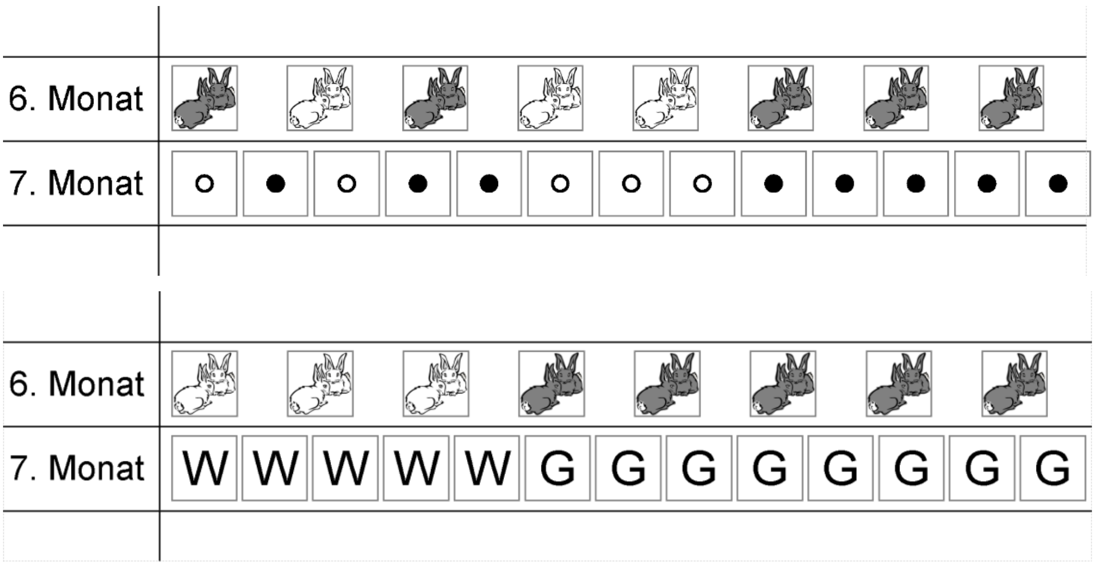


Abb. 5: Darstellungen der Kaninchenpaare im 6. und 7. Monat (nachgestellt, Erprobungen vom 17.05.2017, oben und 16.05.2018, unten)

Durch die Veränderung des Materials werden von den Lernenden weiterführende Aktivitäten gefordert, die gleichzeitig eine stärker eigenständige Durchdringung der Aufgabenstellung ermöglichen können und zudem unterschiedliche Aufgabenbearbeitungen (mit unterschiedlichen Darstellungen und Strategien) im Sinne einer natürlich differenzierenden SLU ermöglichen (vgl. Abb. 5).

4.4 Exemplarischer Entwicklungsprozess vom ‚Wege legen' zum ‚Türme bauen'

4.4.1 Designprinzipien bei kombinatorischen Problemstellungen

In der kombinatorischen Vertiefung liefert der rekursive Zusammenhang der Fibonacci-Folge ($F_{n-1} + F_n = F_{n+1}$) eine Strategie zur Lösung eines Abzählproblems. Einige entsprechende Probleme zeigt u. a. Rényi (1984).

Die Entdeckung einer Zählstrategie setzt i. d. R. das Aufzählen einer gewissen Anzahl von Möglichkeiten sowie dazu vorgenommene Strukturierungen voraus. Damit sind bei entsprechenden Abzählproblemen neben der zu findenden *Zählstrategie* auch *Strukturierungsstrategien* von zentraler Bedeutung. Letztlich besteht zwischen beiden eine Interdependenz (Höveler, 2014; Lockwood, 2013), da Zählstrategien einerseits darauf beruhen, dass eine vorhandene Struktur des zu zählenden Bereichs genutzt oder eine geeignete Strukturierung vorgenommen wird (vgl. Müller & Wittmann, 1984), andererseits häufig Hinweise auf effizientere Strukturierungen liefern, die als Grundlage für Begründungen und Beweise der entsprechenden Zählstrategien dienen können (vgl. Rütten & Weskamp, 2015). Die kombinatorische Vertiefung versucht daher, anhand der Fibonacci-Folge erste Einblicke in diesen Zusammenhang zwischen Strukturierungen und Zählstrategien zu eröffnen.

Allgemein zielt die Bearbeitung kombinatorischer Aufgaben mit Grundschulkindern weniger auf die Entwicklung kombinatorischer Figuren, die zum Lösen isomorpher Probleme genutzt werden können, sondern umfassender auf die Anregung von Kreativität im Hinblick auf den Problemlöseprozess, die Entwicklung von Strategiedenken und die Förderung der Argumentationsfähigkeit (vgl. z. B. Kütting, 1981). Damit sind diese Aspekte als spezifische Designprinzipien für die (Weiter)Entwicklung der kombinatorischen Vertiefung ausschlaggebend. Kombinatorische Probleme sollen somit eine systematische Organisation bei der Problemlösung, das Suchen nach Mustern sowie die Generalisierung von Entdeckungen fördern (vgl. Maher & Uptegrove, 2011, S. 10). Im Projekt liegt für die (Weiter)Entwicklung kombinatorischer Vertiefungen daher der Fokus bislang auf der Entwicklung des Strategiedenkens und andererseits der Förderung damit verbundener Argumentationsfähigkeiten. Dabei sind diese Designprinzipien im Kontext anderer kombinatorischer Lernarrangements hinreichend erforscht und die entsprechenden Erkenntnisse auch auf die Analyse der kombinatorischen Vertiefung anwendbar.

So untersuchte English (1991) das strategische Vorgehen von Kindern zwischen 4 und 10 Jahren beim Lösen kombinatorischer Aufzählprobleme zur Mächtigkeit des Kreuzproduktes. Dabei wurden sechs Lösungsstrategien identifiziert, die English (1996) drei Entwicklungsstufen der Strategiebildung zuordnete: Die erste Stufe wird bestimmt von einem unplanmäßigen Vorgehen (*nonplanning stage*), das lediglich über Versuch und Irrtum gesuchte Figuren ermittelt. Wird eine zugrundeliegende Struktur genutzt oder werden Strukturierungen vorgenommen, die allerdings nicht notwendig alle gesuchten Möglichkeiten generieren, ordnet English diese der zweiten Stufe zu, die sie als Übergangsstufe (*transitional stage*) beschreibt. Diese Stufe führt vom unplanmäßigen Vorgehen zur effizientesten Problemlösung *(final stage*), die bspw. im Falle von Aufzählproblemen zur Mächtigkeit des Kreuzproduktes in der „*odometer strategy*" liegt. Diese Strategie lässt sich instruktiv mittels Baumdiagramm darstellen und liegt der entsprechenden Zählstrategie (Produktregel) für diese Abzählprobleme zugrunde. Das von English generierte Modell eignet sich nur bedingt für die Rekonstruktion der Strategieentwicklung aus Schülerdokumenten und videographierten Unterrichtssequenzen. Oft lässt sich ein „Strategiekeim" (Stein, 1995, S. 60) im nur scheinbar unplanmäßigen Vorgehen nicht rekonstruieren, da er in den Schülerdokumenten und der Kommunikation im Kleingruppengespräch von den Lernenden nicht explizit gemacht wird. Solche Explizierungen bedürfen i. d. R. eingehender Erkundungen mittels klinischer Interviews (z. B. Hoffmann, 2003; siehe auch Höveler, 2014). Zudem erweist sich das Modell von English (1996) als stark auf die konkrete Problemstellung ihrer Untersuchung bezogen, und es scheint fraglich, inwieweit die doch allgemein formulierten Stufen als problemübergreifend aufgefasst werden können.

Eine für die Rekonstruktion hilfreiche Differenzierung unternimmt Hoffmann (2003). Sie unterscheidet zwischen Mikro- und Makrostrategien.

> Während mit dem Begriff Mikrostrategie Handlungsmuster beschrieben werden, die geeignet sind, um die folgende Kombination bzw. Kombinationen oder zumindest Teile von ihnen zu erstellen, bezeichnet der Begriff Makrostrategie Regeln, die das Erzeugen möglichst aller Kombinationen strukturieren. (Hoffmann, 2003, S. 34)

Mikrostrategien lassen sich demnach auf der zweiten Stufe von Englishs Modell verorten. Es werden zwar Strukturen genutzt bzw. Strukturierungen vorgenommen, diese führen aber lediglich zum Generieren einer oder weniger weiterer Möglichkeiten bzw. sogar nur Teilen derselben. Makrostrategien sind insofern als effiziente Strategien zu betrachten, da sie potenziell alle Möglichkeiten generieren können. Dabei lässt sich zwischen Strukturierungen unterscheiden, die lediglich das Potenzial besitzen, alle Möglichkeiten zu erzeugen und solchen, die zwingend alle Möglichkeiten erzeugen. Unter Strukturierungen des ersten Typs fallen u. a. solche Makrostrategien, die sich als zusammengesetzt aus Mikrostrategien betrachten lassen (z. B. Lösungssuche in Phasen, vollständige Umwendung bzw. vollständige Gegenpaarbildung, vgl. Hoffmann, 2003, S. 169). Die von English (1996) erwähnte „*odometer strategy*" – bei Hoffmann (2003, S. 169) als „Tachometerzählprinzip" bezeichnet – kann dem zweiten Typ zugerechnet werden. Dieser zweite Typ der Strukturierung legt oft eine Zählstrategie nahe, die eine Verallgemeinerung auf der Grundlage der entsprechenden Strategie erlaubt. In diesem Sinne kann er als effizienter als der erste Typ betrachtet werden.

Solche Mikro- und Makrostrategien ließen sich auch im Projekt ‚Mathe-Spürnasen' in Schülerdokumenten und videographierten Unterrichtssequenzen der kombinatorischen Vertiefung zur Fibonacci-Folge rekonstruieren. Dabei sind bei den Schülerdokumenten immer Anhaltspunkte für entsprechende Rekonstruktionen in den Videodokumenten notwendig, da sich evtl. auch aus zufälligen Anordnungen der gesuchten Möglichkeiten Mikro- und Makrostrategien rekonstruieren ließen.

4.4.2 Darstellung des Entwicklungsprozesses

Für die Entwicklung einer kombinatorischen Lernumgebung zur Fibonacci-Folge finden sich bspw. Ideen bei Rényi (1982). Eine unterrichtliche Umsetzung dieser Ideen beschreibt Cofman (1992) für die Sekundarstufe, hält die vorgestellten kombinatorischen Problemstellungen aber auch für jüngere Schülerinnen und Schüler für geeignet. Böttinger (2006) adaptiert diese für den Einsatz in der Grundschule. An diesen Vorschlag anknüpfend wurde im Projekt ‚Mathe-Spürnasen' zunächst die kombinatorische Vertiefung ‚Wege legen' entwickelt: Das dort vorgestellte Problem lässt sich als Variante des bekannteren Problems des Treppensteigens (vgl. z. B. Beutelspacher & Petri, 1996; Lovász, Pelikán & Vesztergombi, 2005) betrachten, bei dem nach der Anzahl der Möglichkeiten gefragt wird, die *n* Stufen einer Treppe in Einer- oder Zweier-Schritten zu überwinden. Böttinger beschreibt das Problem ‚Wege legen' folgendermaßen:

> Mithilfe von Steinen, deren Kanten sich wie 2:1 verhalten, kann man besondere Wege legen. […] Es gelten folgende Regeln: 1. Der Weg ist so breit wie ein Stein und zwar wie die breitere Seite. 2. Der Weg ist ein Rechteck, das keine Löcher haben darf. (Böttinger, 2006, S. 44)

Gesucht sind alle Möglichkeiten, Wege aus *n* Steinen zu legen. Den Lernenden können hierzu passende Steine (z. B. die entsprechenden Fröbel-Steine) als Arbeitsmaterial zur Verfügung gestellt werden. Damit erweist sich das ‚Wege legen' gegenüber dem Problem des Treppensteigens als leichter darstellbar, da sich Letzteres nur ikonisch-symbolisch repräsentieren ließe (vgl. z. B. Stowasser & Mohry, 1978). Im Projekt wurde das Problem ‚Wege legen' nach dem zweiten Zyklus durch die Lernumgebung ‚Türme bauen' abgelöst. Dabei sollen die Lernenden alle möglichen Türme der Höhen 1, 2, 3 und 4 aus gelben und blauen Legosteinen finden, wobei keine blauen Steine unmittelbar übereinander gesteckt werden. Ausschlaggebend für diesen Wechsel der kombinatorischen Problemstellung waren das Aufgabenverständnis, die von den Lernenden entwickelten Strategien und die damit verbundenen Argumentationen. Diese drei Bereiche erwiesen sich zuvor nicht hinreichend erfüllt bzw. angeregt, um allen Lernenden gerecht zu werden, was im Folgenden genauer erläutert wird.

Aufgabenverständnis

Bei der Problemstellung ‚Wege legen' wurden die Legeregeln den Lernenden im ersten Zyklus zunächst mündlich mitgeteilt und dabei z. T. schriftlich an der Tafel fixiert. Zur Problembearbeitung erhielten die Lernenden als Arbeitsmaterial Pappkarten (5 x 10 cm) sowie ein Arbeitsblatt zur Dokumentation aller Wege aus ein, zwei, drei, vier und fünf Steinen. Zunächst wurden alle Wege aus einem und zwei Steinen gemeinsam gelegt. Danach folgte eine Aktivitätsphase, in der die Schülerinnen und Schüler in Einzel- bzw. in Partnerarbeit alle übrigen möglichen Wege finden sollten. Während dieser Phase äußerten die Lernenden immer wieder Verständnisfragen bzgl. der Aufgabenstellung. Vor allem die Orientierung der Wege erwies sich als besondere Schwierigkeit. So zeigen die Schülerdokumente, dass einige Lernende, wie bspw. Nele, um 90°-gedrehte Wege als neue Wege auffassten (vgl. Abb. 6).

Diese Schwierigkeit bzgl. der Orientierung der Wege artikulierten Lernende wie Nils auch als Frage an die Lehrperson (L).

Nils: Geht das auch, wenn man das hier einmal sozusagen so einen macht [*legt zwei Steine horizontal übereinander*] und so [*legt an die zwei horizontalen Steine rechts einen Stein vertikal an*].

L: Ja.

Nils: So dass man den so macht [*beginnt die gelegte Wegfigur gegen den Uhrzeigersinn zu drehen*]. Und einmal so [*dreht die Figur um 90°*]. Dann einmal so [*dreht die Figur weiter um 90°, insgesamt 180°*].

L: Also senkrecht, die zählen nicht [*macht eine Handbewegung im Blickfeld von unten nach oben*]. Weil wir die nur, weil die nur waagerecht [*macht eine Handbewegung im Blickfeld von links nach rechts*]. Aber das [*zeigt auf die insgesamt um 180° gedrehte Wegfigur*] ist ein neuer Weg, ja. Also wenn die nach oben [*macht Handbewegung von unten nach oben*] liegen, das zählt nicht. Es geht nur um waagerecht [*macht Handbewegung von links nach rechts*], nur um eine Richtung immer.

Um derartigen Schwierigkeiten bzgl. des Aufgabenverständnisses entgegenzuwirken, wurde im zweiten Zyklus die Aufgabestellung auch in schriftlicher Form auf dem Arbeitsblatt präsentiert: „Wie viele verschiedene Wege kann man legen? Erklärt, wie Ihr die Wege gefunden habt.“ Dabei lag eine Karte mit den Legeregeln der Wege in der Mitte des Arbeitstisches (Regeln: Der Weg ist so breit wie ein Stein. Der Weg ist ein Rechteck ohne Löcher.). Allerdings erwies sich – wie oben bereits angedeutet – die Orientierung der Wege weiterhin als zentrale Schwierigkeit.

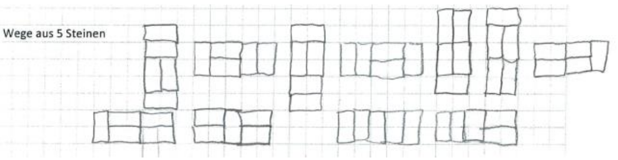


Abb. 6: Neles Wege aus fünf Steinen

Um dieser Schwierigkeit zu begegnen, wurde im dritten Zyklus das ‚Wege legen‘ durch das ‚Türme bauen‘ ersetzt. Um auf das Problem der Orientierung einzugehen, wurde als eine der Bauregeln für die Türme festgehalten: Türme werden von unten nach oben gebaut. Diese Regel wurde aber ab dem vierten Zyklus als überflüssig verworfen, da die Orientierung der Türme letztlich eindeutig vorgegeben war und auch das entsprechende Arbeitsblatt keine anderen Deutungsmöglichkeiten zuließ. Außerdem wurde eine entsprechende Regel im Hinblick auf das strategische Denken der Lernenden als eher einschränkend wahrgenommen. Mit dem Wechsel der Problemstellung erwies sich das Aufgabenverständnis für die Lernenden nicht mehr als Hürde.

Strategieentwicklung

Die Schwierigkeiten im Aufgabenverständnis beim ‚Wege legen‘ scheinen sich auch auf die Strategieentwicklung vieler Lernender auszuwirken. Die im Rahmen der Klärung des Aufgabenverständnisses getroffenen Überlegungen bzgl. der Orientierung der Wege implizieren im Hinblick auf die um 180°-gedrehten Wege die Mikrostrategie der Umwendung, da sich über entsprechende Drehungen in vielen Fällen neue Wege finden lassen. Lediglich Jakob beschrieb diese Strategie auf seinem Arbeitsblatt im Rahmen der Erprobung des zweiten Zyklus (vgl. Abb. 7).

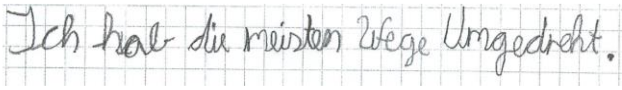


Abb. 7: Jakobs Erklärung

Ben aus der gleichen Kleingruppe brachte die von ihm genutzte Strategie der Umwendung in der Reflexionsphase zum Ausdruck:

Ben: Ich hab’ die meisten einfach nur umgedreht.

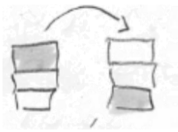
Ob Bens Idee von Jakob übernommen und nachträglich notiert wurde, ist nicht eindeutig rekonstruierbar. Aus der Anordnung von Jakobs Wegfiguren lässt sich nur schwer die Verwendung dieser Strategie rekonstruieren. Aber auch Bens Arbeitsblatt lässt die entsprechende Strategie kaum erkennen.

Im Übrigen ließen sich im ersten und zweiten Zyklus keine weiteren Strategien oder Strategiekeime bei den Lernenden rekonstruieren. Vielmehr scheint ihr Vorgehen eher durch Versuch und Irrtum geprägt. Dies brachte bspw. Cancan zum Ausdruck, indem er schrieb: „Ich habe mir die Quadrate immer lengst und hochkant hingelegt und ausprobiert.“

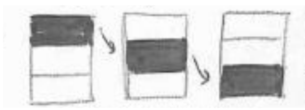
Die Entwicklung von vielfältigen Strategien scheint somit bei der Problemstellung ‚Wege legen‘ kaum angeregt zu werden. Vielmehr zeigte sich die Aufgabe für die Lernenden wenig zugänglich, so dass die Bemühungen um ein Aufgabenverständnis die Entwicklung von Strategien vermutlich hemmen.

Diese Beobachtungen führten zum Wechsel der Problemstellung, so dass die Lernenden seit dem dritten Zyklus das Problem ‚Türme bauen‘ bearbeiten. Bereits bei den ersten Erprobungen ließ sich bei nahezu allen Lernenden ein strategisches Vorgehen vermuten. Für eine detaillierte Analyse fehlte allerdings eine umfassendere Untersuchung der Vorgehensweisen bzgl. dieser Aufgabenstellung. Daher wurden die schriftlich vorliegenden Bearbeitungen von Lehramtsstudierenden zum gleichen Problem aus der Veranstaltung ‚Elementare Kombinatorik‘ im Wintersemester 2014/15 (N = 235) herangezogen und mittels qualitativer Inhaltsanalyse (vgl. Mayring, 2010) untersucht. Auf diese Weise konnten neben bekannten beschriebenen Strukturierungsstrategien (vgl. z. B. Hoffmann, 2003), eine horizontale und eine vertikale Perspektive identifiziert werden, unter denen die Strukturierungen vorgenommen wurden (vgl. Rütten & Weskamp, 2015).

Anders als die Grundschulkinder sollten die Studierenden alle Türme bis zur Höhe 5 (d. h. aus fünf Steinen) unter folgender Aufgabenstellung ermitteln: „Finden Sie durch systematisches Kombinieren alle verschiedenen Türme aus ein, zwei, drei, vier und fünf Steinen. Untersuchen Sie ihr Ergebnis in Hinblick auf ein Muster, so dass Sie eine begründete Vermutung für die Anzahl der Türme aus sechs Steinen aufstellen können.“ Analog zu den Grundschulkindern sollten sie auf dieser Grundlage schließlich eine Strategie für die Anzahlbestimmung der Türme jeder beliebigen Höhe entwickeln.[1]



Fabian



Sara

Abb. 8: Instruktive Zeichnungen von Lehramtsstudierenden unter horizontaler Perspektive

Bei Fabian und Sara zeigten sich Beispiele für den Einsatz von Mikrostrategien unter horizontaler Perspektive. Beide nutzten Strategien, um Türme derselben Höhe zu finden. Fabian nutzte dabei die Strategie der Umwendung (vgl. Hoffmann, 2003, S. 156 f.). Diese verdeutlichte er durch eine instruktive Zeichnung (vgl. Abb. 8, links) und kommentierte wie folgt:

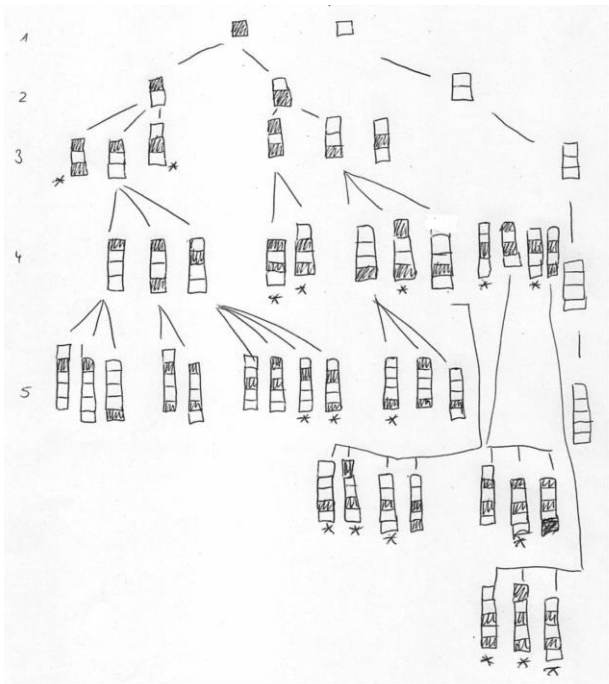
Fabian: Jede Möglichkeit kann gespiegelt werden, was in den meisten Fällen zu zwei Möglichkeiten führt.

Auf eine nach Hoffmann (2003) effizientere Strategie unter horizontaler Perspektive griff Sara zurück, indem sie das Treppen- bzw. Fahrstuhlmuster (*elevator pattern*) nutzte (vgl. Hoffmann, 2003, S. 164; Maher, Sran & Yankelewitz, 2011; Stein, 1995, S. 70 f.; vgl. Abb. 8, rechts):

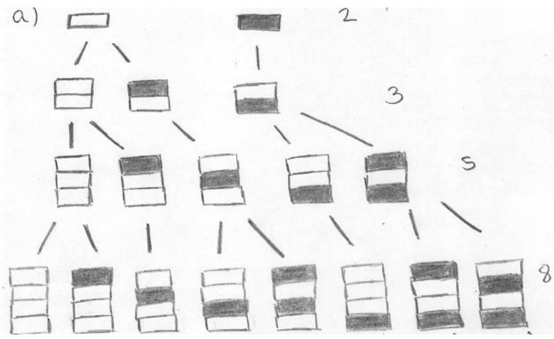
Sara: Ich habe den blauen Stein immer abwärts wandern lassen.

Als Makrostrategie unter horizontaler Perspektive eignet sich bei dieser Problemstellung letztlich nur die Lösungssuche in Phasen (vgl. Hoffmann, 2003, S. 177 ff.).

Britta und Hannah nahmen eine vertikale Perspektive ein. Sie generierten aus den Türmen einer bestimmten Höhe durch Anbau die Türme der jeweils nächsten Höhe. Dabei nutzten sie allerdings unterschiedliche Strategien: *beidseitigen* oder *einseitigen* Anbau.



Hannah



Britta

Abb. 9: Instruktive Zeichnungen von Lehramtsstudierenden unter vertikaler Perspektive

Hannah baute beidseitig, sowohl oben als auch unten an die bestehenden Türme einen Stein an und erzeugte unter den so generierten Türmen auch Dubletten, die es nachfolgend zu streichen galt (vgl. Abb. 9, oben). Britta baute einseitig, ausschließlich oben an die bestehenden Türme an. Sie differenzierte jeweils, ob sie eine oder zwei Möglichkeiten hat, entsprechend der Regel einen Stein anzufügen (vgl. Abb. 9, unten). Beide Strategien haben eine vergleichbare Qualität wie die Makrostrategie ‚Lösungssuche in Phasen‘, da sie potenziell alle gesuchten Türme generieren. Allerdings stellen diese Strukturierungen ein Finden aller Türme einer Höhe noch nicht sicher.

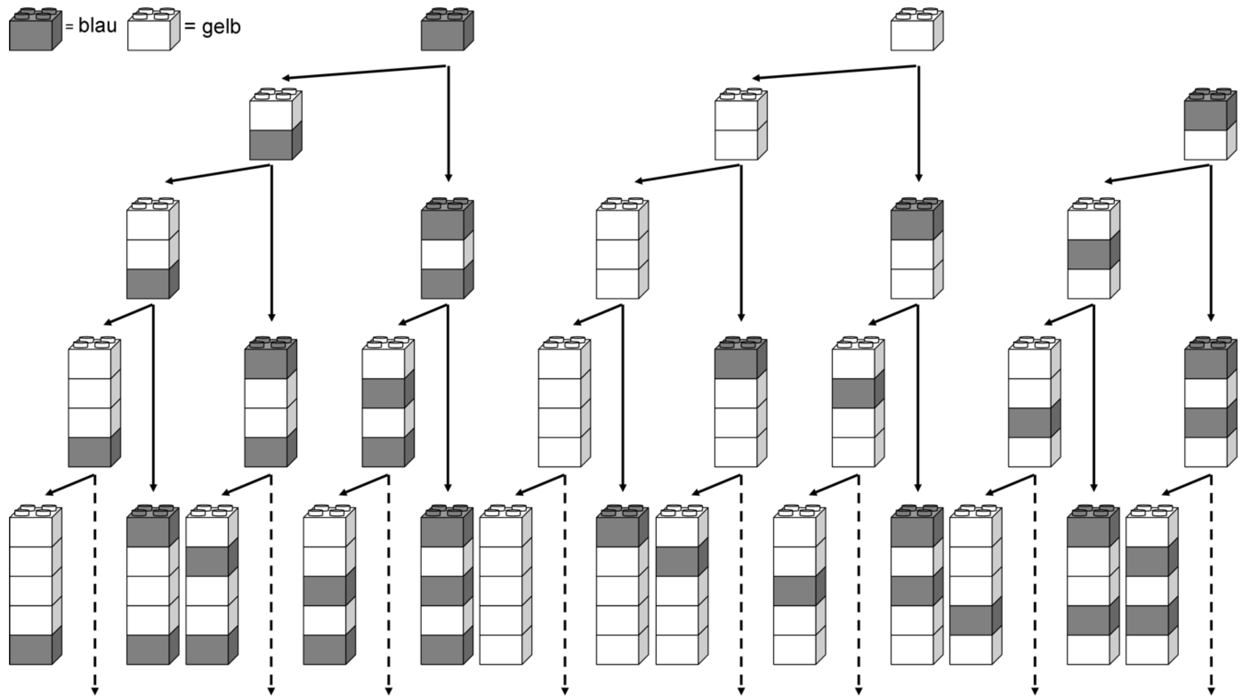


Abb. 10: Instruktive Zeichnung zum einseitigen Anbau beim ‚Türme bauen'

Hierzu müssten die Strukturierungen modifiziert werden und die Türme der Höhe n aus den Türmen der Höhe $n-1$ und $n-2$ durch einseitigen Anbau von einem gelben bzw. erst einem gelben und dann einem blauen Stein generiert werden (vgl. Abb. 10).

Entsprechende Restrukturierungen werden von den Studierenden vorgenommen, wenn sie Hypothesen zu Zählstrategien entwickeln. So begründete Susi ihre Hypothese letztlich über (Re-)Strukturierungen beim Aufzählen:

Susi: Die Anzahl aus F_{n-1} bleibt stehen, weil man hier überall einen gelben Stein auflegen kann. Dazu wird die Anzahl von F_{n-2} addiert, weil man hier jeweils einen gelben und einen blauen Stein auflegen kann, um die Anzahl der in *n* geforderten Etagen zu erfüllen.

Studierende wie Lea blieben allerdings auch im Zusammenhang mit der Entwicklung von Zählstrategien bei einer bloßen Beschreibung des Zusammenhangs der Anzahlen, ohne eine Verbindung zu den Strukturierungen aufzubauen:

Lea: Die Anzahl der Möglichkeiten eines Turms mit *x* Etagen ist die Summe der Möglichkeiten der Türme mit $x-1$ und $x-2$ Etagen.

Diese bei den Studierenden rekonstruierten Strategien wurden als Orientierung bei der Analyse der Bearbeitungen der Grundschulkinder im Design-Research-Prozess bzgl. des spezifischen Designprinzips der Entwicklung von Strategiedenken genutzt. Ähnlich wie Studierende nutzten auch einige Grundschulkinder Strukturierungen unter horizontaler Perspektive. Bspw. nutzte Jana die Mikrostrategie der Umwendung.

Jana: Den? [*zeigt auf den Turm (blau, gelb, gelb, gelb) der Höhe 4*] Ja und dann haben wir das umgedreht. Dann haben wir das gemacht. Mist, das ist falsch [*dreht einen Turm um*].

Verbreiteter als die Umwendung ist die etwas effizientere Strategie Treppenmuster (vgl. Abschnitt 4.4.1). So fand bspw. Lina Türme der Höhe 3 und 4 über diese Strategie.

Lina: Also, wir haben erst das gemacht [*zeigt auf den Turm der Höhe 3 mit einem blauen Stein unten und zwei gelben darüber*] und dann oben gelb. Dann das [*zeigt auf den Turm der Höhe 3 mit einem blauen Stein zwischen zwei gelben*] und alles gelb. Dann oben und alles gelb.

[…]

L: Und wie habt ihr das gemacht? [*zeigt auf die Türme der Höhe 4*]. Wie habt ihr da alle gefunden?

Lina: Also wir haben [unverständlich]

L: Habt ihr irgendein System gehabt, oder [unverständlich]

Lina: Ja, das Gleiche wie gerade eben.

Auch Florian strukturierte die Türme der Höhe 3 horizontal mittels Treppenmuster.

Florian: Also, ich habe es so gebaut, dass ich jetzt so die Blauen [*zeichnet mit der Hand eine Diagonale nach*] wie so eine, wie eine schräge Linie also und der Rest dann Gelb.

Neben seiner Nutzung horizontaler Strukturierungen nahm er bzgl. der Türme aus ausschließlich gelben Steinen auch eine vertikale Perspektive ein:

Florian: […], also, bei jedem der verschiedenen Etagen-Türme gibt es immer einen mit nur Gelben. Den habe ich dann auch ganz am Anfang gebaut, […]

Über diese beiden Strukturierungen fand Florian aber nur vier Türme der Höhe 3. Den Turm mit zwei blauen Steinen fand er ohne weitere Systematik, allein aufgrund der Bauregel:

Florian: […] dann habe ich noch den letzten Turm so herausbekommen, weil es gibt ja keine drei Blauen.

Das Treppenmuster als horizontale Strukturierung nutzte auch Paul. Zunächst beschrieb er die Konstruktion der Türme der Höhe 4 mit lediglich einem blauen Stein.

Paul: Also, ich habe die immer zu einer Art Musterreihe [*zeigt auf die blaue Diagonale der Türme*]. Immer erst den Blauen ganz unten und dann der Rest Gelb und dann den Blauen in den zweiten, ich meine den zweiten Stein und dann den Rest Gelb und dann beim dritten Stein und dann beim vierten Stein.

Paul nutzte die Strategie der Treppe mit gleichzeitiger „Elementfixierung“ (Höveler, 2014) auch für das Finden der Türme mit zwei blauen Steinen, wobei die Strukturierung dort abgebrochen wurde, wo ein nicht regelkonformer Turm entstehen würde.

Paul: […] dann habe ich halt noch so gemacht, dass ich dann oben den Blauen gemacht habe und dann wieder einen Stein und dann habe ich wieder eine Treppe gemacht, so dass ganz oben halt auch wieder ein Blauer ist, und dann habe ich den Blauen noch einen runtergeholt und danach gab es ja nur noch eine Möglichkeit, weil höher könnte man ja nicht bauen, weil da ja dann zwei Blaue sind.

Interessant erscheint, dass Paul im Reflexionsgespräch wenig später eine andere Perspektive bezüglich der Strukturierung einnahm, die ausschließlich vertikal zu sein scheint. Möglicherweise regt die Reflexion damit auch Restrukturierungen an. Ähnlich wie bei den Lösungen der Studierenden, gab Paul als vertikale Strukturierungsperspektive an, jeweils oben und unten an die zuvor gefundenen Türme einer Höhe einen Stein anzusetzen (beidseitiger Anbau).

Paul: […] wir hatten erst die drei Türme und da haben wir an die drei Türme nach oben oder unten einen drangebaut.

Bei konsequenter Anwendung dieser Strategie entstehen insgesamt acht Dubletten und vier nicht regelkonforme Türme der Höhe 4. Da Paul im weiteren Verlauf des Gespräches nicht vom Streichen von Dubletten oder nicht regelkonformen Türmen sprach, sondern vielmehr von der Konstruktion noch fehlender Türme („und dann haben wir geguckt, was noch gefehlt hat und die haben wir dann noch dazu gebaut“), ist davon auszugehen, dass er hier eine neu gefundene Strukturierungsidee einbringt, ohne sie tatsächlich zuvor beim Bau der Türme genutzt zu haben.

Die angesprochenen Beispiele geben einen Einblick in die Vielfältigkeit, mit der Grundschulkinder beim ‚Türme bauen‘ Strukturierungen und sogar Restrukturierungen vornehmen. Damit erweist sich diese kombinatorische Problemstellung im Hinblick auf das Designprinzip der Entwicklung von Strategiedenken als deutlich ergiebiger als das ‚Wege legen‘.

Argumentieren

Auch im Hinblick auf das spezifische Designprinzip der Argumentationsfähigkeit zeigt das ‚Türme bauen‘ gegenüber dem ‚Wege legen‘ eine höhere Ergiebigkeit. So wurden durch die Reflexionsfrage auf dem Arbeitsblatt des ersten Zyklus „Warum habt ihr alle Wege gefunden?“ Argumentationen nicht ausreichend angeregt, und selbst wenn die Betonung im anschließenden Reflexionsgespräch auf der Vollständigkeit der Lösungen lag, argumentierten die Lernenden kaum, sondern beschrieben wie Kim vielmehr ihr Vorgehen.

L: Woher weiß man denn, ob, dass man alle gefunden hat? Oder wie kann man denn sicher sein, dass man alle gefunden hat?

Kim: Indem man vielleicht noch was ausprobiert und dann schaut man erst hier [*zeigt auf die bereits gelegten Wege*] also.

Im zweiten Zyklus wurden Erläuterungen zum strategischen Vorgehen expliziter durch die Aufforderung auf dem Arbeitsblatt „Erkläre, wie ihr die Wege gefunden habt“ eingefordert. Allerdings wurden hierdurch kaum Argumentationen motiviert. Auch im dritten Zyklus mit der veränderten Problemstellung ‚Türme bauen‘ wurden Argumentationen zunächst nicht angeregt, und das Arbeitsblatt enthielt auch keinen entsprechenden Arbeitsauftrag mehr. Im vierten Zyklus wurde das Arbeitsblatt um die Aufforderung zur Hypothesenbildung bzgl. der Anzahl der Türme aus fünf Steinen ergänzt: „Wie viele verschiedene Türme gibt es mit 5 Etagen? Vermute.“. Im Reflexionsgespräch wurde auf diese Frage dann näher eingegangen. Dabei stellten Lernende unterschiedliche Hypothesen auf.

Nina meinte, die Anzahl der Türme aus fünf Steinen über die Summe der Anzahlen aller Türme aus weniger als fünf Steinen (1+2+3+5+8=18) bestimmen zu können.

Nina: Ich habe einfach so gerechnet, wie Mira das gerechnet hat letztes Mal und das zusammengezogen.

Tom bspw. entdeckte das arithmetische Muster +1, +2, +3, +4 bei den Anzahlen der Türme mit bis zu vier Steinen und nahm entsprechend eine Anzahl von zwölf Türmen aus fünf Steinen an.

Tom: Weil das bei der zweiten Etage einer mehr ist als bei der ersten. Bei der dritten sind zwei mehr und bei der vierten sind drei mehr und bei der fünften sind dann vier mehr. Also sind das dann zwölf.

Schließlich entdeckten einige Lernende – wie Tugba – aber auch die strukturelle Ähnlichkeit der Anzahlen mit der Fibonacci-Folge und nutzten deren Struktur für eine Hypothesenbildung bzgl. der Anzahl von Türmen aus fünf Steinen.

Tugba: Weil zwei plus drei sind fünf und drei plus fünf sind acht. [...] Dann sind fünf plus acht, sind dann wieder dreizehn.

Letztlich fordern gerade diese unterschiedlichen Hypothesen die Restrukturierung der gefundenen Turmfigurenmenge, um die jeweiligen Argumente zu stützen. Ähnlich wie bei den Studierenden bleibt die Argumentation aber bei den Grundschulkindern auch meist auf der Ebene des arithmetischen Musters, und ein Bezug zur Strukturierung wird nicht hergestellt, was z. T. auch in fehlenden Impulsen der Lehrperson begründet liegen dürfte.

Insgesamt erweist sich die Problemstellung ‚Türme bauen' dennoch als hinreichend anregend für verschiedene Lernende im Hinblick auf die Argumentationsfähigkeit und besitzt zudem das Potenzial, diese durch entsprechende Impulse der Lehrperson ggf. auszubauen.

5 Fazit und Perspektiven

Für den Umgang mit Heterogenität wird der Einsatz SLU vielfach als geeignet und erfolgreich berichtet (vgl. z. B. Krauthausen & Scherer, 2014; Hirt & Wälti, 2008). Dies kann auch für die Arbeit im Lehr-Lern-Labor bestätigt werden. Am Beispiel der SLU ‚Fibonacci-Folge' wurde aufgezeigt, inwiefern die Vielfalt von bspw. unterschiedlichen Bearbeitungs- und Lösungsstrategien – u. a. auf unterschiedlichen Repräsentationsebenen –, aber auch Argumentationsprozessen berücksichtigt werden konnte.

Die eingesetzten SLU sind in ihrer Konstruktion auch für den inklusiven Mathematikunterricht geeignet und teilweise bereits erprobt (z. B. die SLU Kreis in Hähn, 2017), wenngleich sie noch nicht unbedingt die Anforderungen spezifischer Förderschwerpunkte, wie bspw. Förderschwerpunkt Sehen oder Geistige Entwicklung, realisieren. Perspektivisch sollen die im Lehr-Lern-Labor eingesetzten SLU auch auf besondere Anforderungen eines inklusiven Mathematikunterrichts hin untersucht und ggf. erweitert und adaptiert werden. Erste theoretische Überlegungen und Erprobungen werden derzeit für die SLU Quadrat durchgeführt (vgl. auch Hähn & Scherer, 2017).

Im Beitrag wurde die Bedeutung eines Design-Research-Prozesses mit substanziellen Veränderungen einer SLU dargestellt. Als zentrale Erkenntnis im Entwicklungsprozess der SLU ‚Fibonacci-Folge' konnte gezeigt werden, dass sich in der SLU ‚Türme bauen' vielfältige Strategien rekonstruieren lassen, wohingegen beim ‚Wege legen' kaum strategisches Vorgehen rekonstruierbar war. Im Sinne einer lokalen Theorie scheint die SLU ‚Türme bauen' eine Förderung der Strategieentwicklung besser zu realisieren als die SLU ‚Wege legen'.

Die SLU ‚Türme bauen' ermöglichte den Lernenden in Bezug auf die Aufgabenstellung einen Zugang zu den zugrundeliegenden Regeln. Es zeigte sich, dass die Orientierung bzgl. der zu erstellenden Figuren im Rahmen der kombinatorischen SLU von zentraler Bedeutung ist. Zudem ermöglicht die SLU ‚Türme bauen' die Entwicklung verschiedener Strukturierungsstrategien. Insbesondere durch Re-Strukturierungen der erstellten Figurenmenge unter Berücksichtigung der horizontalen und vertikalen Perspektive können Argumentationen bzgl. der Vollständigkeit der Figurenmenge herausgefordert werden.

Im Hinblick auf den weiteren Design-Research-Prozess sind neben der Förderung strukturierungsbezogener Argumentationen weitere Perspektiven angedacht, z. B. Re-Design der SLU ‚Wege legen', um weitere Strategieentwicklungen zu unterstützen oder das Design des isomorphen Problems zum Bauen von Türmen aus würfel- und quaderförmigen Steinen. Des Weiteren gilt es, die Erkenntnisse bei anderen kombinatorischen SLU zu überprüfen, um Perspektiven allgemein für den Kombinatorikunterricht abzuleiten.

Perspektivisch kann die SLU ‚Türme bauen' im Hinblick auf inklusive Settings weiterentwickelt werden. So können z. B. Materialadaptionen unter Berücksichtigung verschiedener Förderschwerpunkte in einem weiteren Design-Research-Zyklus fokussiert werden.

Anmerkung

[1] In der Version für die Studierenden wurde materialbedingt anstelle der gelben und blauen Steine mit weißen und roten Steinen gearbeitet. Im Beitrag wurden die Farben in allen Transkriptausschnitten und Abbildungen zur besseren Lesbarkeit entsprechend ersetzt.

Literatur

Baltes, U.; Rütten, C.; Scherer, P. & Weskamp, S. (2014). Mathe-Spürnasen – Grundschulklassen experimentieren an der Universität. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (Bd. 1, S. 121–124). Münster: WTM-Verlag.

Bauersfeld, H. (2006). Die Probleme mathematisch besonders befähigter Kinder und ihrer Tutoren. *mathematica didactica*, *29*(1), 26–40.

Beutelspacher, A. (2017). Mathematische Experimente und ihr Potenzial für Grundschulkinder. Erfahrungen aus einem internationalen Projekt. *Grundschulunterricht*, *64*(2), 4–9.

Beutelspacher, A. & Petri, B. (1996). *Der Goldene Schnitt* (2., überarb. u. erw. Aufl.). Heidelberg: Spektrum Akad. Verlag.

BLK – Bund-Länder-Kommission (1998). *Gutachten zur Vorbereitung des Programms „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts“*. Bonn: BLK.

Böttinger, C. (2006). Aufgaben für begabte Schüler. Modelle für die Fibonacci-Zahlen. *Grundschulunterricht*, *53*(2), 44–46.

Boncompagni, B. (Hrsg.) (1857). *Scritti di Leonardo Pisano. matematico del secolo decimoterzo* (Bd. 1: Liber Abaci). Rom: Tipografia delle scienze matematiche e fisiche.

Brown, A. L. (1992). Design Experiments. Theoretical and Methodological Challenges in Creating Complex Interventions in Classroom Settings. *Journal of the Learning Sciences*, *2*(2), 141–178.

Brüning, A.-K. (2017). Lehr-Lern-Labore in der Lehramtsausbildung – Definition, Profilbildung und Effekte für Studierende. In U. Kortenkamp & A. Kuzle (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2017* (S. 1377–1378). Münster: WTM-Verlag.

Cofman, J. (1992). Verallgemeinerung der Fibonacci-Folge. *Praxis der Mathematik*, *34*(4), 157–160.

Collins, A. (1992). Toward a Design Science of Education. Technical Report No. 1. In E. Scanlon & T. O'Shea (Hrsg.), *New directions in educational technology* (S. 4–9). New York: Springer.

Elliott, J. (1991). *Action research for educational change*. Philadelphia: Open University Press.

English, L. D. (1991). Young children's combinatoric strategies. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(5), 451–474.

English, L. D. (1996). Children's Construction of Mathematical Knowledge in Solving Novel Isomorphic Problems in Concrete and Written Form. *The Journal of Mathematical Behavior*, *15*(1), 81–112.

Freudenthal, H. (1981). Should a mathematics teacher know something about the history of mathematics? *For the learning of mathematics*, *2*(1), 30–33.

Gravemeijer, K. (1994). Educational Development and Developmental Research in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(5), 443–471.

Gravemeijer, K. & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In K. G. Jan Van den Akker, S. E. McKenney, N. Nieveen (Hrsg.), *Educational Design Research* (S. 17–51). New York: Routledge.

Hähn, K. (2016). Individuelle Lern- und Kooperationsprozesse in einer geometrischen Lernumgebung im inklusiven Mathematikunterricht der Grundschule. In Institut für Mathematik und Informatik der PH. Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (Bd. 1, S. 349–352). Münster: WTM.

Hähn, K. (2017). Analyses of learning situations in inclusive settings: a coexisting learning situation in a geometrical learning environment. In J. Novotná & H. Moraova (Hrsg.), *SEMT 2017. International Symposium Elementary Maths Teaching. August 20–25, 2017. Proceedings: Equity and Diversity* (S. 187–196). Prague: Charles University.

Hähn, K. & Scherer, P. (2017). Kunst quadratisch aufräumen. Eine geometrische Lernumgebung im inklusiven Mathematikunterricht. In U. Häsel-Weide & M. Nührenbörger (Hrsg.), *Gemeinsam Mathematik lernen – mit allen Kindern rechnen* (S. 230–240). Frankfurt/M.: Arbeitskreis Grundschule.

Hähn, K.; Rütten C., Scherer. P. & Weskamp, S. (2018). Lernumgebungen für alle – Die Fibonacci-Folge natürlich differenzierend erkunden. In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018* (S. 703–706). Münster: WTM.

Hefendehl-Hebeker, L. (2004). Perspektiven für einen künftigen Mathematikunterricht. In H. Bayrhuber et al. (Hrsg.), *Konsequenzen aus PISA – Perspektiven der Fachdidaktiken* (S. 141–189). Innsbruck: Studienverlag.

Hirt, U. & Wälti, B. (2008). *Lernumgebungen im Mathematikunterricht. Natürliche Differenzierung für Rechenschwache bis Hochbegabte*. Seelze: Kallmeyer.

Hoffmann, A. (2003). *Elementare Bausteine der kombinatorischen Problemlösefähigkeit*. Hildesheim: Franzbecker.

Höveler, K. (2014). *Das Lösen kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme. Eine Untersuchung zu den Strukturierungs- und Zählstrategien von Drittklässlern*. Dortmund: TU Dortmund.

Hußmann, S.; Thiele, J.; Hinz, R.; Prediger, S. & Ralle, B. (2013). Gegenstandsorientierte Unterrichtsdesigns entwickeln und erforschen. Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell. In M. Komorek & S. Prediger (Hrsg.), *Der lange Weg zum Unterrichtsdesign. Zur Begründung und Umsetzung fachdidaktischer Forschungs- und Entwicklungsprogramme* (S. 26–42). Münster: Waxmann.

Jost, D. (unter Mitarbeit von F. Züllig) (1999). *Lernlandschaften für das Erleben und Entdecken von Mathematik*. Luzern: Lehrmittelverlag des Kantons Luzern.

Käpnick, F. (Hrsg.) (2010). *Das Münsteraner Projekt „Mathe für kleine Asse“. Eine Darstellung aus der Perspektive von Kindern, Studierenden und Wissenschaftlern*. Münster: WTM.

KMK – Kultusministerkonferenz (Hrsg.) (2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich Beschluss vom 15.10.2004*. München: Wolters Kluwer.

Krauthausen, G. & Scherer, P. (2014). *Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht – Konzepte und Praxisbeispiele aus der Grundschule*. Seelze: Kallmeyer.

Kütting, H. (1981). *Didaktik der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Freiburg: Herder.

Ladel, S. (2015). Zur Schönheit der Mathematik in der Natur. Auf der Spur von Mustern und Strukturen. *Grundschulmagazin*, *83*(3), 7–11.

Link, M. (2012). *Grundschulkinder beschreiben operative Zahlenmuster Entwurf, Erprobung und Überarbeitung von Unterrichtsaktivitäten als ein Beispiel für Entwicklungsforschung*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Lockwood, E. (2013). A model of students' combinatorial thinking. *The Journal of Mathematical Behavior*, *32*(2), 251–265.

Lovász, L.; Pelikán, J. & Vesztergombi, K. (2005). *Diskrete Mathematik*. Berlin: Springer.

Lucas, É. (1877). Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise et sur diverses questions d'arithmétique supérieure. *Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*, (10), 129–193 & 239–293.

Maher, C. A.; Sran, M. K. & Yankelewitz, D. (2011). Towers: Schemes, Strategies, an Arguments. In C. A. Maher, A. B. Powell & E. B. Uptegrove (Hrsg.), *Combinatorics and reasoning. Representing, justifying and building isomorphisms* (S. 27–43). Dordrecht: Springer.

Maher, C. A. & Uptegrove, E. B. (2011). Methodology. In C. A. Maher, A. B. Powell & E. B. Uptegrove (Hrsg.), *Combinatorics and reasoning. Representing, justifying and building isomorphisms* (S. 9–14). Dordrecht: Springer.

Matter, B. (2017). *Lernen in heterogenen Lerngruppen. Erprobung und Evaluation eines Konzepts für den jahrgangsgemischten Mathematikunterricht*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Mayring, P. (2010). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken*. Weinheim und Basel: Beltz.

McKenney, S. E. & Reeves, T. C. (2012). *Conducting educational design research*. Oxon: Routledge.

MSW – Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen. (2008). *Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen*. Frechen: Ritterbach Verlag.

Müller, G. N. & Wittmann, E. C. (1984). *Der Mathematikunterricht in der Primarstufe* (3. Aufl.). Braunschweig: Vieweg.

Prediger, S.; Link, M.; Hinz, R.; Hußmann, S.; Thiele, J. & Ralle, B. (2012). Lehr-Lernprozesse initiieren und erforschen. Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell. *MNU*, *65*(8), 452–457.

Prediger, S. & Link, M. (2012). Fachdidaktische Entwicklungsforschung – Ein lernprozessfokussierendes Forschungsprogramm mit Verschränkung fachdidaktischer Arbeitsbereiche. In H. Bayrhuber et al. (Hrsg.), *Formate fachdidaktischer Forschung. Empirische Projekte – historische Analysen – theoretische Grundlegungen* (Bd. 2, S. 29–45). Münster: Waxmann.

Rényi, A. (1982). *Tagebuch über die Informationstheorie*. Basel: Birkhäuser.

Roth, J. (2013). Vernetzen als durchgängiges Prinzip – Das Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“. In A. S. Steinweg (Hrsg.), *Mathematik vernetzt – Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2013* (S. 65–80). Bamberg: Universitätsdruck Bamberg.

Rütten, C. & Scherer, P. (2015). 'Throwing dice' versus 'Passing the Pigs' – Fourth-graders' reasoning about probability. In J. Novotná & H. Moraova (Hrsg.), *SEMT 2015. International Symposium Elementary Maths Teaching. August 16–21, 2015. Proceedings: Developing mathematical language and reasoning in elementary mathematics* (S. 284–292). Prague: Charles University.

Rütten, C. & Weskamp, S. (2015). Türme bauen – Eine kombinatorische Lernumgebung für Grundschulkinder und Lehramtsstudierende. In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015* (Bd. 2, S. 772–775). Münster: WTM.

Scherer, P. (1996). Zahlenketten. Entdeckendes Lernen im 1. Schuljahr. *Die Grundschulzeitschrift*, (96), 20–23.

Scherer, P. & Rasfeld, P. (2010). Außerschulische Lernorte – Chancen und Möglichkeiten für den Mathematikunterricht (Basisartikel zum Themenheft). *mathematik lehren*, (160), 4–10.

Scherer, P. & Selter, C. (1996). Zahlenketten – ein Unterrichtsbeispiel für natürliche Differenzierung. *Mathematische Unterrichtspraxis*, *17*(2), 21–28.

Selter, C. & Scherer, P. (1996). Zahlenketten. Ein Unterrichtsbeispiel für Grundschüler und Lehrerstudenten. *mathematica didactica*, *19*(1), 54–66.

Stein, M. (1995). Elementare Bausteine von Problemlöseprozessen: Gestaltorientierte Verhaltensweisen. *mathematica didactica*, *18*(2), 59–84.

Stowasser, R. & Mohry, B. (1978). *Rekursive Verfahren. Ein problemorientierter Eingangskurs*. Hannover: Schroedel.

TDBRC – The Design-Based Research Collective. (2003). Design-Based Research: An Emerging Paradigm for Educational Inquiry. *Educational Researcher*, *32*(1), 5–8.

Van den Akker, J.; Gravemeijer, K.; McKenney, S. & Nieveen, N. (2006). Introducing educational design research. In J. van den Akker, S. E. McKenney, N. Nieveen (Hrsg.), *Educational Design Research* (S. 3–7). New York: Routledge.

Walther, G.; Selter, C. & Neubrand, J. (2008). Die Bildungsstandards Mathematik. In G. Walther et al. (Hrsg.), *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret* (S. 16–41). Frankfurt/M.: Cornelsen Scriptor.

Weskamp, S. (2015). Einsatz von substanziellen Lernumgebungen in heterogenen Lerngruppen im Mathematikunterricht der Grundschule. In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015* (Bd. 2, S. 996–999). Münster: WTM.

Weskamp, S. (2016). Design einer Lernumgebung für differenzierenden Mathematikunterricht der Grundschule und Erforschung diesbzgl. Bearbeitungsprozesse. In Institut für Mathematik und Informatik PH Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (Bd. 3, S. 1137–1140). Münster: WTM.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, (61), 37–46.

Wittmann, E. C. (1995a). Mathematics Education as a ‚design science'. *Educational Studies in Mathematics*, *29*(4), 355–374.

Wittmann, E. C. (1995b). Unterrichtsdesign und empirische Forschung. In K. P. Müller (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 1995* (S. 528–531). Hildesheim: Franzbecker.

Wittmann, E. C. (1996). Offener Mathematikunterricht in der Grundschule – vom FACH aus. *Grundschulunterricht*, *43*(6), 3–7.

Wittmann, E. C. (1998). Design und Erforschung von Lernumgebungen als Kern der Mathematikdidaktik. *Beiträge zur Lehrerbildung*, *16*(3), 329–342.

Wittmann, E. C. (2004). Design von Lernumgebungen zur mathematischen Frühförderung. In G. Faust et al. (Hrsg.), *Anschlussfähige Bildungsprozesse im Elementar- und Primarbereich* (S. 49–63). Kempten: Klinkhardt.

Wittmann, E. C. & Müller, G. N. (2008). Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept. In G. Walther et al. (Hrsg.), *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret* (S. 40–63). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Wollring, B. (2009). Zur Kennzeichnung von Lernumgebungen für den Mathematikunterricht in der Grundschule. In A. Peter-Koop et al. (Hrsg.), *Lernumgebungen – Ein Weg zum kompetenzorientierten Mathematikunterricht in der Grundschule* (S. 9–23). Offenburg: Mildenberger.

Anschrift der Verfasser

Christian Rütten
Universität Duisburg-Essen,
Fakultät für Mathematik
Thea-Leymann-Str. 9
45127 Essen
christian.ruetten@uni-due.de

Petra Scherer
Universität Duisburg-Essen,
Fakultät für Mathematik
Thea-Leymann-Str. 9
45127 Essen
petra.scherer@uni-due.de

Stephanie Weskamp
Universität Duisburg-Essen,
Fakultät für Mathematik
Thea-Leymann-Str. 9
45127 Essen
stephanie.weskamp@uni-due.de