Typische Lernschwierigkeiten mit Darstellungswechseln bei elementaren Funktionen – Welche Schwierigkeiten kennen Lehrkräfte und wie schätzen sie Aufgabenbearbeitungen ihrer Klassen ein?

UTE SPROESSER, KOBLENZ; MARKUS VOGEL, HEIDELBERG & TOBIAS DÖRFLER, HEIDELBERG

***Zusammenfassung**: Ziel dieser Studie ist es, den Bedarf an einer mathematikdidaktischen Lehrerfortbildung zu elementaren Funktionen abzuklären. Dazu wurde unter 80 Siebt- bzw. Achtklässlern untersucht, inwieweit aus der Literatur bekannte Lernschwierigkeiten mit Darstellungswechseln anzutreffen sind. Zusätzlich wurden deren Mathematiklehrkräfte befragt, um ihr diesbezügliches Wissen zu ermitteln. Zur Datenerhebung wurden auf Schülerebene ein Paper-Pencil-Test und auf Lehrerebene strukturierte Leitfadeninterviews verwendet. Die Ergebnisse zeigen, dass die aus der Literatur abgeleiteten Lernschwierigkeiten auch in der untersuchten Stichprobe verbreitet sind mit teilweise großen Klassenunterschieden. Den Lehrkräften waren einige der dokumentierten Schwierigkeiten nicht bekannt, die Qualität ihrer Einschätzungen von Aufgabenbearbeitungen stellte sich als heterogen heraus. Implikationen dieser Ergebnisse werden in Hinblick auf Theorie und Praxis diskutiert.*

***Abstract:** The aim of this study is to clarify the needs for a mathematics teacher training related to elementary functions. Therefore, we investigated among 80 students from grade 7 and 8 to what extent they struggled with learning difficulties with representational changes deduced from the literature. Furthermore, their mathematics teachers were interviewed to identify their corresponding knowledge. The data collection was done at the student level via paper-pencil tests and at the teacher level via structured guideline interviews. The results show that the learning difficulties deduced from the literature are also prevalent in this student sample with partly large class differences. Some of the documented learning difficulties were not known by the participating teachers, the quality of their estimations about their students' performance proved to be heterogeneous. Implications of these findings are discussed with regard to theory and practice.*

1. Einleitung

Schülerschwierigkeiten[1] beim Lernen von Funktionen – insbesondere im Zusammenhang mit Darstellungswechseln – sind seit Jahrzehnten Gegenstand mathematikdidaktischer Forschung. Um Lernprozesse sinnvoll initiieren und unterstützen zu können, ist es wichtig, dass Lehrkräfte typische Schwierigkeiten sowie mögliche Ursachen kennen. Während entsprechende Schwierigkeiten von Lernenden im Bereich (elementarer) Funktionen in der Literatur gut dokumentiert sind, gibt es insbesondere innerhalb von Deutschland kaum Studien, die diesbezügliches Lehrerwissen in den Blick nehmen. Die Untersuchung dieses Lehrerwissens ist nicht nur im Sinne der Grundlagenforschung von Interesse, sondern auch für die Entwicklung von Professionalisierungsmaßnahmen in Aus- und Weiterbildung von Lehrkräften von Bedeutung, die letztlich Schülerlernen unterstützen sollen.

Im Rahmen einer Vorstudie des Projekts *ProfiL9*[2] der Pädagogischen Hochschule Heidelberg wurde untersucht, welche typischen Fehler bei Darstellungswechseln elementarer Funktionen unter Schülern der 7. Gymnasial- und der 8. Realschulklassen in der Region vor Ort auftreten und ob deren Mathematiklehrer diese kennen. Dadurch sollte (nach einer theoriebasierten Auswahl der intendierten Fortbildungsinhalte) empirisch abgesichert werden, dass die aus der Literatur bekannten Lernschwierigkeiten bei Darstellungswechseln mit elementaren Funktionen auch in den Lehr-Lernkontexten von potentiellen Teilnehmern einer Lehrerfortbildung anzutreffen und deshalb relevant für diese sind. Über den Abgleich mit der Einschätzung und dem Wissen der jeweiligen Mathematiklehrer sollten darüber hinaus weitere Informationen gewonnen werden, welche Inhalte für diese mathematikdidaktische Lehrerfortbildung von Bedeutung sind.

Im Folgenden soll in Abschnitt 2 der theoretische Hintergrund zu elementaren Funktionen im Bildungskontext, zu verbreiteten Schülerschwierigkeiten bei Darstellungswechseln sowie zu diesbezüglichem Lehrerprofessionswissen dargelegt werden. Dies führt zu den für diese Studie zentralen Forschungsfragen. Anschließend wird in Abschnitt 3 die methodische Anlage der Untersuchung erläutert. Die gewonnenen Ergebnisse werden in Abschnitt 4 vorgestellt und in Abschnitt 5 diskutiert.

2. Theoretischer Hintergrund

2.1 Mathematische Funktionen im Bildungskontext

Das Arbeiten mit Funktionen stellt einen bedeutsamen Aspekt des Lernens von Mathematik und somit auch des schulischen Mathematikunterrichts dar (z. B. KMK, 2003; 2004; 2012; Selden & Selden, 1992). Dies zeigt sich nicht zuletzt darin, dass die Leitidee Funktionaler Zusammenhang in den Sekundarstufen I und II einen von fünf grundlegenden Inhaltsbereichen bildet. Obgleich der Begriff der Funktion komplex ist, soll für die vorliegende Arbeit folgende Definition genügen:

> Eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnung der Elemente einer nicht-leeren Menge A zu den Elementen einer Menge B, geschrieben $\boldsymbol{f: A \to B}$. Dabei wird jedem Element $\boldsymbol{x \in A}$ eindeutig ein Element $\boldsymbol{y \in B}$ zugeordnet, geschrieben $\boldsymbol{x \to y = f(x)}$. $\boldsymbol{A}$ wird dann als Definitionsmenge bezeichnet, $\boldsymbol{B}$ als Zielmenge und $\boldsymbol{f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}}$ als Wertemenge. Für $\boldsymbol{A, B \subset \mathbb{R}}$ lässt sich der Funktionsgraph (oder kurz: Graph) von f (zumindest ausschnittsweise) in einem Koordinatensystem darstellen, genauer ist der Graph die Menge $\boldsymbol{G_f = \{(x \mid f(x)) \mid x \in A\}}$. (Büchter & Henn, 2010, S. 18)

Obige Definition bringt zum Ausdruck, dass Funktionen – wie andere mathematische Begriffe – abstrakte gedankliche Konstrukte sind. Insofern sind sie nicht direkt zugänglich, sondern es muss auf Darstellungen zurückgegriffen werden, um sie zu verstehen und zu kommunizieren (Duval, 2006; Vogel, Girwidz & Engel, 2007). Im Schulkontext gängige Funktionsdarstellungen sind Verbalbeschreibungen, Wertetabellen, Funktionsgraphen und -gleichungen (vgl. z. B. KMK, 2004; Land Baden-Württemberg, 2004). Dabei ist zu beachten, dass mathematische Begriffe wie der Funktionsbegriff dennoch nicht identisch mit diesen Darstellungen sind und die verschiedenen Darstellungen jeweils bestimmte Eigenschaften und Aspekte des jeweiligen Begriffs betonen, während andere in den Hintergrund treten (z. B. Barzel, Hußmann & Leuders, 2005; Niss, 2014; Vogel, 2006). Dadurch besteht die Gefahr, dass verschiedene Darstellungen für Lernende isoliert („kompartmentalisiert“; vgl. Duval, 2006) erscheinen bzw. der Funktionsbegriff nur mit einzelnen dieser Darstellungen gleichgesetzt wird (Niss, 2014).

Nicht nur bezogen auf Funktionen wird das flexible und adaptive Nutzen von Darstellungen im Sinne von kognitiver Variabilität als bedeutsam angesehen, um (mathematikbezogene) Probleme schnell und akkurat zu verstehen und zu lösen (Heinze, Star & Verschaffel, 2009; vgl. auch Vollrath, 1989). Zudem unterstützt das flexible Nutzen sowie der Wechsel zwischen Darstellungen die mathematische Begriffsbildung (ibid.; Duval, 2006). Diese allgemeinen Überlegungen gelten auch für Funktionen, denn für die Bearbeitung eines konkreten Problems mögen sich bestimmte Darstellungen besonders eignen, während aufgrund des begrenzten und spezifischen Charakters der einzelnen Darstellungen der Funktionsbegriff als solcher nur in deren Gesamtschau zu erschließen ist. Leinhardt Zaslavsky und Stein (1990, S. 3) beschreiben dies am Beispiel von Funktionsgleichung und -graph folgendermaßen: „… algebraic and graphical representations are two very different symbol systems that articulate in such a way as to jointly construct and define the mathematical concept of function.” Weitet man dies auf Funktionsdarstellungen im Allgemeinen aus, so zeigt sich das Verständnis von Funktionen insbesondere darin, inwieweit a) verschiedene Darstellungen gelesen bzw. interpretiert werden können, b) die jeweiligen Stärken von Darstellungen erkannt und genutzt werden sowie c) zwischen einzelnen Darstellungen gewechselt werden kann (z. B. Adu-Gyamfi, 2007; Barzel et al., 2005; Büchter & Henn, 2010; Vollrath, 1989). Dabei werden Darstellungswechsel in zweierlei Hinsicht als besonders charakterisierend für das Lernen von Funktionen angesehen (z. B. Barzel et al., 2005; Hußmann & Laakmann, 2011; Janvier, 1978; Leinhardt et al., 1990; Shell Centre for Mathematical Education, 1985): Wie oben bereits angesprochen, unterstützen multiple Darstellungen einerseits die Begriffsbildung, und nur der Wechsel zwischen diesen Darstellungen verdeutlicht deren zugrundeliegende Gemeinsamkeit bzw. mindert eine mögliche Kompartmentalisierung oder das Gleichsetzen der Funktion mit einzelnen ihrer Darstellungen (vgl. Duval, 2006; Niss, 2014). Andererseits werden diese zum Funktionsverständnis beitragenden Darstellungswechsel selbst zum Lerngegenstand, um unterschiedliche Perspektiven auf Funktionen einzunehmen (z. B. Doorman, Drijvers, Gravemeijer, Boon & Reed, 2012; Zindel, 2019) sowie eine je nach Problemstellung geeignete Darstellung nutzen zu können (z. B. Vollrath, 1989). Vollrath beschreibt in diesem Zusammenhang außerdem, dass durch das Nutzen multipler Darstellungen keine zu starke Abhängigkeit der Lernenden von einer bestimmten Darstellung entsteht.

Für den Aufbau des Funktionsbegriffs spielen Grundvorstellungen von Funktionen eine bedeutende Rolle. Vollrath (1989, S. 6) charakterisiert für das sogenannte Funktionale Denken als „eine Denkweise, die typisch für den Umgang mit Funktionen ist“ drei Grundvorstellungen (vgl. auch Malle, 2000): Funktionen können demnach als Zuordnung, Kovariation oder als Ganzes verstanden werden, wobei die verschiedenen Darstellungen diese Grundvorstellungen unterschiedlich stark betonen. So ist die Zuordnungsvorstellung bei punkteweiser Betrachtung eines Funktionsgraphen sowie bei Betrachtung von zueinander gehörenden Wertepaaren einer Tabelle auf den ersten Blick erkennbar, während sie in der Gleichung vor allem beim Berechnen eines konkreten

Funktionswerts zutage tritt. Die Kovariationsvorstellung tritt z. B. im Graphen hervor, wenn man die Veränderung der y-Werte bei „Entlanglaufen" an der x-Achse in den Blick nimmt bzw. wenn man die (geordnete) Tabelle statt wertepaareweise – je nach Ausrichtung der Tabelle – spalten- bzw. zeilenweise betrachtet. In der Funktionsgleichung ist die Kovariationsvorstellung schwieriger erkennbar, da sie Vorwissen über die jeweilige Funktionsklasse und die Bedeutung der darin relevanten Parameter erfordert. Die Wahrnehmung der Funktion als Ganzes meint, dass Lernende in der jeweiligen Darstellung die Funktion als mathematisches Objekt erkennen. Da dies im Sinne einer umfassenden Begriffsbildung nur durch Einbezug von und Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungen möglich ist, spielen Darstellungswechsel für den Aufbau dieser Grundvorstellung eine wesentliche Rolle. Vollrath (1989, S. 16) schreibt dazu: „Die Ausprägung des funktionalen Denkens zeigt sich an der Fähigkeit, in unterschiedlichen Darstellungen von Funktionen das Ganze der Funktion zu erfassen und in der Fähigkeit, vom Einzelnen aufs Ganze und umgekehrt vom Ganzen aufs Einzelne ‚umzuschalten'." Es ist also insgesamt festzuhalten, dass Darstellungen von Funktionen und insb. die Wechsel zwischen diesen nicht von den geschilderten Grundvorstellungen zu Funktionen zu trennen sind.

Der Aufbau des Funktionalen Denkens als einem Denken in Zusammenhängen, Abhängigkeiten und Veränderungen ist sowohl im unterrichtlichen Kontext verschiedener Fächer als auch im Alltag für Lernende relevant. Insbesondere kommt es zum Einsatz, wenn Problemstellungen aus realen oder innermathematischen Kontexten beschrieben oder bearbeitet werden (z. B. Büchter & Henn, 2010; Vollrath, 1989; Wittmann, 2008). Diese Überlegung verdeutlicht die Bedeutung des curricularen Inhaltsbereichs „Funktionaler Zusammenhang". Laut den für diese Studie relevanten Bildungsstandards für Klasse 8 (Land Baden-Württemberg, 2004; vgl. auch KMK, 2004) sollen in diesem Kontext sprachliche, tabellarische, graphische und algebraische Darstellungen von (linearen) Funktionen verstanden, genutzt, interpretiert, verglichen und gewechselt werden. Diese können innermathematische und realitätsbezogene Zusammenhänge, Abhängigkeiten und Veränderungen repräsentieren. Übergeordnete Ziele der schulischen Auseinandersetzung mit (linearen) Funktionen sind also einerseits die funktionenbezogene Begriffsbildung und andererseits die Befähigung zum Nutzen von Funktionen für die Bearbeitung von Problemstellungen. Darstellungswechsel spielen für diese beiden Zielsetzungen – wie oben bereits dargelegt – eine bedeutsame Rolle.

Inhaltlich fokussiert die vorliegende Arbeit auf qualitative Betrachtungen funktionaler Zusammenhänge sowie auf (qualitative und) quantitative Betrachtungen linearer Funktionen (zusammengefasst als sogenannte „Elementare[3] Funktionen"). Eine qualitative Betrachtung meint, dass die Art eines Zusammenhangs zweier Größenbereiche (z. B. Veränderung von Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit) in den Blick genommen wird. Dafür werden hier die situative und die graphische Darstellung sowie der Wechsel zwischen diesen adressiert. Bei quantitativen Betrachtungen liegt der Fokus auf linearen Funktionen mit der allgemeinen Gleichung $\boldsymbol{y = mx + b}$. Die Punkte des Graphen einer linearen Funktion liegen auf einer Geraden, wobei der Parameter m die konstante Steigung ausdrückt und der Parameter b den y-Achsenabschnitt (z. B. Bücher & Henn, 2010). Im Zusammenhang mit linearen Funktionen stehen die situative, algebraische und graphische Darstellungsform sowie der Wechsel zwischen diesen im Fokus. Als möglicher Zwischenschritt ist auch der Rückgriff auf eine Wertetabelle möglich. Dieser Teilbereich von Funktionen, der typischerweise in Klasse 7 und 8 in der Unterrichtseinheit „lineare Funktionen" thematisiert wird, wurde ausgewählt, weil er in der Regel die erste formale Auseinandersetzung von Lernenden mit Funktionen darstellt. Aus diesem Grund erscheint der Aufbau belastbarer Konzepte als Basis für die Weiterarbeit mit Funktionen in folgenden Schuljahren besonders relevant. Insbesondere der Darstellungswechsel zwischen Funktionsgraph und -gleichung, der für das weitere Arbeiten mit Funktionen gerade im Rahmen der Analysis fundamental ist, wird in diesem Zusammenhang eingeführt.

Die Ausführungen dieses Abschnitts umreißen die Komplexität des Arbeitens mit Funktionen. In dieser Hinsicht ist es nicht verwunderlich, dass zahlreiche diesbezügliche Fehler und Lernschwierigkeiten in der internationalen Literatur dokumentiert sind. Dies mag verschiedene Gründe haben, wie beispielsweise die Schwierigkeit, den abstrakten Charakter der innermathematischen Darstellungen Funktionsgraph und -gleichung zu erkennen (z. B. Vogel, 2006) oder die Tatsache, dass zwischen Darstellungen gewechselt werden muss, die verschiedene Funktionseigenschaften unterschiedlich stark betonen und es deshalb schwierig ist, sie direkt miteinander in Bezug zu setzen (z. B. Leinhardt et al., 1990; Niss, 2014). Zudem ist generell zu beachten, dass der Einbezug vielfältiger Darstellungen zwar zu einem vertieften Verständnis eines (mathematischen) Inhalts beitragen mag (vgl. Ainsworth, 2006), aber auch zu kognitiver Überlastung führen kann (vgl. Chandler & Sweller, 1991). Im nächsten Abschnitt wird auf konkrete Lernschwierigkeiten mit Darstellungswechseln bei elementaren Funktionen eingegangen.

2.2 Lernschwierigkeiten mit Darstellungswechseln bei elementaren Funktionen

Eine Vielzahl empirischer Studien belegen Schülerschwierigkeiten mit Darstellungswechseln bei Funktionen. Allerdings ist zu vermuten (oder zumindest denkbar), dass Verschiedenheiten im curricularen, kulturellen oder zeitlichen Kontext Auswirkungen auf die jeweilige Befundlage haben. Aufgrund der räumlichen und zeitlichen Nähe zur vorliegenden Arbeit erscheint die Studie von Nitsch (2015) zu Schwierigkeiten bei Darstellungswechseln ein sinnvoller Anknüpfungspunkt zu sein. Eine empirische Überprüfung in unseren Lehr-Lernkontexten vor Ort ist in Anbetracht der genannten möglichen Verschiedenheiten zusätzlich zu leisten. Im Folgenden wird also insbesondere auf Schülerschwierigkeiten mit elementaren Funktionen eingegangen, wie sie auch von Nitsch untersucht wurden. Mit der Bezeichnung typisch sind in Anlehnung an Nitsch Fehler bzw. Lernschwierigkeiten gemeint, die häufig festgestellt wurden. Diese können sich bei Individuen zusätzlich über mehrere Aufgaben konsistent in einem sogenannten Fehlermuster zeigen (vgl. Nitsch, 2015).

Eine seit Langem dokumentierte Schwierigkeit besteht darin, dass Lernende beim graphisch-algebraischen Darstellungswechsel den x-Achsenschnittpunkt an Stelle der Steigung oder des y-Achsenabschnitts verwenden (z. B. Moschkovich, 1990, 1999; Schoenfeld, 1993). In der Studie von Nitsch (2015) fokussierten 25,7 % der Lernenden über zwei Aufgaben hinweg beim Darstellungswechsel von Graph zu Funktionsgleichung auf den x-Achsenschnittpunkt anstatt der Steigung. Bei einer Aufgabe zum umgekehrten Darstellungswechsel wurde dieser Fehler von 16,4 % der Lernenden gemacht. Das Auftreten dieses Fehlers Fokus auf Achsenschnittpunkte deutet auf ein unzureichendes Verständnis der Bedeutung der Parameter m und b hin. Auch weitere Fehlertypen wie die Bildung des Kehrwertes der Steigung, Vorzeichenfehler oder die Verwechslung der Parameter können durch diesbezügliche Verständnisprobleme erklärt werden.

Darstellungswechsel mit Beteiligung einer Situationsbeschreibung scheinen für Schüler besondere Schwierigkeiten zu bergen, da bei entsprechenden Aufgaben – im Sinne des Modellierungskreislaufs – zusätzlich zu innermathematischen Anforderungen eine Übersetzung zwischen Realität und Mathematik geleistet werden muss (z. B. Blum & Leiss, 2005; Vogel, 2006). Bei der Übersetzung einer Situationsbeschreibung in eine Funktionsgleichung identifiziert Clement (1982) eine Fehlerquelle darin, dass die Reihenfolge aus dem Text direkt auf die zu erstellende Gleichung übertragen wird. Die Bildung eines sinnvollen Situationsmodells und darauf aufbauend eines mathematischen Modells im Rahmen des Modellierungskreislaufs entfällt hierbei. Fehler im Sinne dieser Überbetonung der Textreihenfolge stellte auch Nitsch (2015) bei 12,7 % der befragten Lernenden über drei Aufgaben hinweg fest.

Eine im internationalen Kontext intensiv beforschte Lernschwierigkeit stellt der Graph-als-Bild-Fehler dar (z. B. Hadjidemetriou & Williams, 2001; Janvier, 1978; McDermott, Rosenquist & vanZee, 1987; Vogel, 2006). Hierbei werden Oberflächenmerkmale eines Funktionsgraphen und einer Situation fälschlicherweise aufeinander übertragen. In der Studie von Nitsch (2015) zeigte sich der Graph-als-Bild-Fehler beim Zeichnen eines Funktionsgraphen zu einer gegebenen Situation bei etwa 13,3 % der Schüler. Bei Aufgaben im Single-Choice-Format kam er sowohl beim Wechsel von Situation zu Graph als auch beim umgekehrten Darstellungswechsel häufiger vor; etwa 7,2 % der Schüler machten diesen Fehler über drei Aufgaben hinweg.

Ein weiterer in der Literatur dokumentierter Fehler beim situativen Interpretieren von Funktionsgraphen ist die Slope-Height-Confusion (z. B. Hadjidemetriou & Williams, 2001; Janvier, 1978; McDermott et al., 1987). Wie der Name indiziert, wird bei diesem Fehler statt auf die Steigung eines Funktionsgraphen auf dessen Höhe bzw. y-Wert an einer bestimmten Stelle fokussiert. In der Untersuchung von Nitsch (2015) trat die Slope-Height-Confusion bei zwei Aufgaben zu linearen Weg-Zeit-Graphen bei 49,7 % bzw. 14,4 % der Lernenden auf. Diese Diskrepanz begründet Nitsch mit größeren Schwierigkeiten beim Vergleichen von Geschwindigkeiten zu einem Zeitpunkt als in einem Zeitraum aufgrund einer mangelnden Vorstellung der Steigung in einem Punkt.

Wie in 2.1 erläutert, sind Darstellungswechsel fundamental für das Lernen von und Arbeiten mit Funktionen. Insofern ist es als Ausgangspunkt für die Gestaltung von effektivem Unterricht und insbesondere die Initiierung von Schülerlernen bedeutsam, dass Lehrkräfte typische diesbezügliche Lernschwierigkeiten kennen und die Schwierigkeit von entsprechenden Aufgaben (für die eigenen Schüler) adäquat einschätzen können. Im nächsten Abschnitt wird insbesondere auf Wissen über Schülerfehler und Aufgabenschwierigkeit als bedeutsame Komponente von Lehrerprofessionswissen auch im Zusammenhang mit (Darstellungswechseln bei) elementaren Funktionen eingegangen.

2.3 Lehrerprofessionswissen im Zusammenhang mit elementaren Funktionen

Das Professionswissen von Lehrkräften gilt als ein wesentlicher Faktor für das Gelingen von Lernprozessen (z. B. Baumert et al., 2010; Bromme, 1992).

Shulmans (1987) Konzeptualisierung insbesondere von fachdidaktischem Wissen wurde in weiteren theoretischen Modellen zur Lehrerexpertise aufgegriffen und bildet so auch die Grundlage zahlreicher empirischer Studien. Beispielsweise unterteilen Ball und Kollegen (2008) das fachdidaktische Wissen von Mathematiklehrkräften in das *knowledge of content and students*, das *knowledge of content and teaching* und das *knowledge of content and curriculum*. Das knowledge of content and students (KCS) schließt unter anderem das Nachvollziehen von Schülerdenken, die Kenntnis verbreiteter (Fehl-)Konzepte und Lernschwierigkeiten sowie die Einschätzung von Aufgabenschwierigkeit ein. Lehrerwissen über Schülerdenken und Aufgaben(-schwierigkeit) wird auch in weiteren mathematikdidaktischen Forschungskontexten operationalisiert, wie etwa im Bereich der Forschung zu professionellen Kompetenzen von Lehrkräften (z. B. Blömeke, Kaiser & Lehmann., 2008; Kunter et al., 2011) oder zu ihrer diagnostischen Kompetenz. Letztere fällt im Sinne des Modells von Ball et al. (2008) weitgehend mit der Wissensfacette KCS zusammen.

Weinert (2000, S. 16) definiert diagnostische Kompetenz als „Bündel von Fähigkeiten, um den Kenntnisstand, die Lernfortschritte und die Leistungsprobleme der einzelnen Schüler sowie die Schwierigkeiten verschiedener Lernaufgaben im Unterricht fortlaufend beurteilen zu können, sodass das didaktische Handeln auf diagnostischen Einsichten aufgebaut werden kann“. In der Empirischen Bildungsforschung wird diagnostische Kompetenz häufig über die Übereinstimmung von Lehrereinschätzung und tatsächlicher Schülerleistung operationalisiert (vgl. Urteilsgenauigkeit, z. B. Leuders, Dörfler, Leuders & Philipp, 2017). Empirische Studien bestätigen einerseits die Bedeutung fachdidaktischen Wissens bzw. diagnostischer Kompetenz für Lernerfolg auf Schülerebene (z. B. Anders, Kunter, Brunner, Krauss & Baumert, 2010; Baumert et al., 2010; Carpenter, Fennema, Peterson, Chiang & Loef, 1989; Kunter et al., 2011), zeigen andererseits aber auch diesbezügliche Schwächen von (angehenden) Mathematiklehrkräften. So stellen Nathan und Koedinger (2000) in Bezug auf arithmetische und algebraische Problemlöseaufgaben fest, dass lediglich unter Lehrkräften der Middle School die Einschätzung von Aufgabenschwierigkeit signifikant mit der empirischen Schwierigkeit (operationalisiert über die Lösungsraten) korreliert ist. Lehrkräfte der Grundschule und der Highschool tendieren dieser Studie zufolge fälschlicherweise dazu, realitätsbezogene Aufgaben in ihrer Schwierigkeit zu über- und formal-abstrakte Aufgaben zu unterschätzen. Die Autoren führen die niedrigen Übereinstimmungen demnach einerseits darauf zurück, dass viele Lehrkräfte das Lösen abstrakter innermathematischer Aufgaben als Voraussetzung für das Lösen von Anwendungsaufgaben betrachten („symbol-precedence“). Andererseits führen sie aus, dass Highschool-Lehrer sich aufgrund ihrer fachwissenschaftlichen Expertise nur schwer in die Probleme ihrer Schüler hineinversetzen können („Expert-Blind-Spot“). In der vorliegenden Studie werden Lehrkräfte der Sekundarstufe I fokussiert, deren Studium am ehesten vergleichbar mit Middle- bzw. Highschool-Lehrkräften ist. Auch da die Befunde von Nathan und Koedinger in Bezug auf diese beiden Gruppen unterschiedlich ausfallen, stellt sich die Frage, inwieweit dies auf Lehrkräfte hierzulande übertragbar ist.

In Bezug auf den Inhaltsbereich Funktionen konstatieren Hadjidemetriou und Williams (2002) eine mittelmäßige Übereinstimmung von durch Lehrkräfte geschätzten und empirisch ermittelten Aufgabenschwierigkeiten. Gründe dafür identifizieren die Autoren einerseits in Schwächen des Fachwissens sowie des fachdidaktischen Wissens bezüglich typischer Fehler oder Lösungsmöglichkeiten von vorgelegten Aufgaben. Andererseits wurden – aufgrund der Dominanz von innermathematischen Aufgaben in der Unterrichtseinheit Funktionen – die Schwierigkeit von innermathematischen Aufgaben häufig unter- und die Schwierigkeit von Aufgaben mit Realitätsbezug überschätzt (vgl. Nathan & Koedinger, 2000). Diese Unterrichtskultur begründete auch, dass die Lehrkräfte vor allem Fehler in Bezug auf innermathematische Aufgaben kannten. Von den in 2.2 genannten Schwierigkeiten waren vor allem die Slope-Height-Confusion (bei fünf von 12 Lehrern) und der Graph-als-Bild-Fehler (bei acht von 12 Lehrern) bekannt, wobei das Wissen über typische Fehler in der Stichprobe stark streute. Die Autoren machen keine Detailangaben zur Lehrerfahrung oder Ausbildung der befragten Probanden, beschreiben diese aber insgesamt als „knowledgeable“ (S. 2). Inwieweit die geschilderten Befunde auf Lehrkräfte hierzulande als potentielle Fortbildungsteilnehmer übertragen werden können, ist auch aufgrund dieser fehlenden Angaben zum Hintergrund der Lehrkräfte nur schwer zu beurteilen.

Ostermann und Kollegen (2015) wie auch Busch und Kollegen (2015) berichten Befunde aus Stichproben mit vergleichbarer Lehramtsausbildung zur vorliegenden Studie. So stellen Ostermann et al. in einer Interventionsstudie einen Zusammenhang zwischen fachdidaktischem Wissen bezüglich Lernschwierigkeiten mit Funktionen und der Einschätzung von entsprechenden Aufgabenschwierigkeiten fest. Darüber hinaus zeigen die Autoren, dass (angehende) Mathematiklehrkräfte insbesondere die Lösungshäufigkeiten von Aufgaben mit Einbezug eines Funktionsgraphen überschätzen. Insgesamt zeigte sich, dass sich die Überschätzung von Lösungshäufigkeiten vom Studium über das Referendariat bis hin zum Schuldienst verringert. Konkretere Angaben zum Zusammenhang mit der Lehrerfahrung werden jedoch nicht gemacht. Die Studie von Busch und Kollegen (2015) dokumentiert, dass auch unter praktizierenden Lehrkräften Schwächen im fachdidaktischen Wissen bezüglich Lernschwierigkeiten bei Funktionen anzutreffen sind.

Die zitierten Studien legen trotz ihrer Heterogenität nahe, dass Lehrkräfte in vielen Fällen Nachholbedarf bezüglich ihres Wissens über typische Lernschwierigkeiten bzw. ihrer Einschätzung von Aufgabenschwierigkeiten haben. Wie in den letzten Absätzen angesprochen, ist es schwierig zu beurteilen, inwieweit die berichteten Befunde auf Lehrkräfte hierzulande übertragbar sind. Dies liegt u. a. daran, dass die Lehramtsausbildung der Probanden z. B. aufgrund von curricularen, kulturellen oder zeitlichen Unterschieden variieren. Zudem finden sich in der zitierten Literatur nur wenige Angaben zum Hintergrund der Probanden, beispielsweise zu deren Lehrerfahrung. Informationen hierzu erscheinen aber bedeutsam, wenn man sich im Sinne des Experten-Novizen-Paradigmas bewusst macht, dass Lehrkräften mit zunehmender (reflektierter) Unterrichtspraxis ein flexibleres und besser vernetztes Professionswissen entwickeln (Berliner, 2004). Empirische Studien wie TEDS-M, TEDS-FU oder COACTIV-R bestätigen höhere Werte im (allgemeinen) mathematikdidaktischen Wissen mit fortschreitendem Studium (z. B. Blömeke, Schwarz, Kaiser, Seeber & Lehmann, 2009; Buchholtz & Kaiser, 2013) bzw. beim Übergang vom Studium in die ersten Jahre der Unterrichtspraxis (z. B. Blömeke et al., 2014; Kleickmann et al., 2013). Setzt man diese Befunde aus der Berufseinstiegsphase in Bezug zu Ergebnissen aus COACTIV, wonach Lehrerfahrung und Wissensniveau praktizierender Mathematik-Lehrkräfte kaum korreliert sind (z. B. Krauss et al., 2008), so verändert sich das fachdidaktische Lehrerprofessionswissen im Allgemeinen anscheinend gerade bei Berufsanfängern stark. Empirische Ergebnisse zum fachdidaktischen Wissen insbesondere von Junglehrern in Bezug auf den mathematischen Inhaltsbereich elementarer Funktionen liegen unseres Wissens nicht vor und lassen sich – wie obige Ausführungen illustrieren – aus den vorliegenden Studien kaum sinnvoll ableiten. Da einerseits gerade in der Berufseinstiegsphase Unterstützungsangebote wie Fortbildungen besonders hilfreich für eine positive Entwicklung des Professionswissens erscheinen (Blömeke & Kaiser, 2015; Blömeke et al., 2014), andererseits viele Junglehrer aufgrund der noch vergleichsweise geringen Unterrichtspraxis vermutlich einem besonders hohen Workload ausgesetzt sind, sollten entsprechende Fortbildungsmaßnahmen möglichst zielgenau an die Bedürfnisse potentieller Teilnehmer vor Ort angepasst sein. In diesem Sinn soll die vorliegende Studie gleichermaßen konkrete Implikationen für die Entwicklung einer spezifischen Lehrerfortbildung als auch einen Beitrag zur Grundlagenforschung liefern, indem die geschilderte Forschungslücke zu fachdidaktischem Wissen im Bereich elementarer Funktionen von Junglehrern in exemplarischer Weise geschlossen wird. Im folgenden Abschnitt 2.4 wird das Forschungsdesiderat dieser Studie konkreter beschrieben.

2.4 Forschungsdesiderat

Angesichts der Bedeutung von Darstellungswechseln für den verständigen Umgang mit Funktionen (vgl. 2.1) sowie einer Vielzahl entsprechender Schülerfehler auch im Bereich elementarer Funktionen (vgl. 2.2) erscheint diesbezügliches mathematikdidaktisches Wissen von Lehrkräften notwendig, um effektive Lehr-Lern-Prozesse zu gestalten. Die unter 2.3 dokumentierten Schwächen im Lehrerprofessionswissen begründen die oben bereits dargelegte Intention des Projekts ProfiL9, eine Lehrerfortbildung mit Fokus auf Lernschwierigkeiten mit Darstellungswechseln bei elementaren Funktionen zu entwickeln. Auch wenn Fortbildungen im Sinne eines lebenslangen Lernprozesses sicher auch für erfahrene Lehrkräfte fruchtbar sein können, erscheinen solche Unterstützungsmaßnahmen insbesondere für Junglehrer wichtig: Blömeke und Kollegen (2014) betonen, dass Junglehrer für eine positive Entwicklung Unterstützung im Reflexionsprozess benötigen. In dieser Perspektive schlagen Blömeke und Kaiser (2015) konkret Fortbildungen und Supervisionsphasen als Fördermaßnahmen vor. Um Informationen zum bereits vorhandenen Professionswissen im adressierten Inhaltsbereich von elementaren Funktionen zu erhalten, auf die bei der Konzeption von Fortbildungsmaßnahmen zurückgegriffen werden kann, fokussiert die vorliegende Studie auf Junglehrer als Zielgruppe.

Da die oben berichteten empirischen Studien größtenteils nicht aus den Lehr-Lernkontexten potentieller Fortbildungsteilnehmer stammen, soll in dieser Studie geklärt werden, in welchem Umfang oben dargestellte Lernschwierigkeiten mit Darstellungswechseln unter Schülern vor Ort anzutreffen sind; darüber hinaus wird untersucht, wie das Wissen der jeweiligen Lehrkräfte über diese Lernschwierigkeiten ausgeprägt ist und inwieweit ihre Einschätzungen von Aufgabenbearbeitungen in den eigenen Klassen empirischen Ergebnisse entsprechen. Demnach ergibt sich als Ziel dieser Studie zunächst die empirische Überprüfung bisheriger Studienergebnisse bezogen auf Schülerfehler mit Darstellungswechseln bei elementaren Funktionen und entsprechendem Lehrerwissen in baden-württembergischen Lehr-Lernkontexten. Darüber hinaus soll ein Abgleich zwischen Schüler- und Lehrerebene weiteren Aufschluss darüber geben, welche Lernschwierigkeiten für potentielle Fortbildungsteilnehmer relevant sind und demnach in der zu entwickelnden Lehrerfortbildung thematisiert werden sollen.

Die konkreten Forschungsfragen lauten:

1) Wie erfolgreich lösen die befragten Schüler die vorgelegten Aufgaben zu Darstellungswechseln bei elementaren Funktionen?
2) Wie verbreitet sind die Lernschwierigkeiten Fokus auf Achsenschnittpunkte, Überbetonung der Textreihenfolge, Graph-als-Bild-Fehler und Slope-Height-Confusion in dieser Stichprobe?
3) Inwieweit kennen bzw. erkennen die jeweiligen Mathematiklehrkräfte diese Fehler?
4) Können die untersuchten Mathematiklehrkräfte einschätzen, wie erfolgreich die vorgelegten Aufgaben in den eigenen Klassen gelöst werden?

Mit der Untersuchung dieser Forschungsfragen verbreitert diese Studie die empirische Basis bestehender Befunde, da einerseits ein direkter Bezug von Lehrerwissen bzw. -einschätzung zur jeweiligen Klasse hergestellt werden kann, während bei den oben berichteten Studien Ergebnisse auf Lehrerebene gemittelt / zusammenfassend betrachtet wurden bzw. in Bezug zu einer den Lehrkräften unbekannten Schülergruppe gesetzt wurden. Andererseits wird in dieser Studie eine Gruppe sehr junger Lehrkräfte betrachtet, die aufgrund ihrer geringen Lehrerfahrung eine geeignete Zielgruppe für eine Fortbildung repräsentiert (vgl. Blömeke & Kaiser, 2015; Blömeke et al., 2014). Zudem sind unseres Wissens keine Befunde zu (funktionen-)spezifischen Facetten des Professionswissens von Junglehrern dokumentiert.

Da in Hinblick auf die zu entwickelnde Lehrerfortbildung die Erfassung eines lokalen *Status Quo* im Vordergrund steht, soll der Vergleich von geschätzten und empirischen Lösungshäufigkeiten rein deskriptiv vorgenommen werden und fokussiert nicht wie andere Studien zur Diagnosekompetenz auf eine Urteilsgenauigkeit im Sinne von Korrelationen. Eine Fokussierung sowohl auf Lehrerwissen bezüglich typischer Schülerfehler als auch auf die Einschätzung von Aufgabenbearbeitungen in den eigenen Klassen erscheint im Kontext der vorliegenden Studie sinnvoll, da durch den Einbezug beider Aspekte ein möglichst umfassendes Bild aus der Schulpraxis abgebildet werden kann. Insbesondere können auf diesem Weg entsprechende Zusammenhänge in den Blick genommen werden.

3. Methode

3.1 Stichprobe und Kontext der Studie

In dieser Studie nahmen 80 Schüler aus vier Klassen sowie deren Mathematiklehrkräfte teil. Alle Klassen stammen aus demselben Schulzentrum aus einem Randbezirk einer baden-württembergischen Großstadt. Da elementare Funktionen in Gymnasium und Realschule in unterschiedlichen Jahrgangsstufen thematisiert werden, nahmen eine siebte Gymnasialklasse und drei achte Realschulklassen teil. Die Gymnasialklasse (im Folgenden Klasse G) bestand aus 15 Jungen und 14 Mädchen im Alter zwischen 12 und 14 Jahren (M = 12,8; SD = 0,6) während die Teilnehmenden aus den drei Realschulklassen jeweils zwischen 13 und 16 Jahren alt waren. Realschulklasse RSA bestand aus 10 Jungen und 6 Mädchen (Alter: M = 14,4; SD = 0,8), Realschulklasse RSB aus 8 Jungen und 10 Mädchen (Alter: M = 14,3; SD = 0,7) und Realschulklasse RSC aus 11 Jungen und 6 Mädchen (Alter: M = 14,2; SD = 0,6). In den Realschulklassen fehlten am Befragungstag aus unbekannten Gründen einige Schüler (RSA: 5 Schüler; RSB: 2 Schüler; RSC: 3 Schüler). Laut Einschätzung des jeweiligen Mathematiklehrers herrschte in Klasse G eine eher überdurchschnittliche Leistungsstärke vor. Klasse RSA verfügte über ein durchschnittliches Leistungsniveau, die Klassen RSB und RSC wurden als eher unterdurchschnittlich leistungsstark eingeschätzt.

Die Lehrkräfte befanden sich zum Zeitpunkt der Studienteilnahme am Anfang ihrer Berufstätigkeit. Insofern können sie als exemplarische Vertreter von Junglehrkräften aufgefasst werden, für die Fortbildungsangebote besonders fruchtbar erscheinen, um ihr Lehrerprofessionswissen positiv zu entwickeln (Blömeke & Kaiser, 2015; Blömeke et al., 2014). In Hinblick auf die Exploration des Bedarfs an einer zu entwickelnden Lehrerfortbildung erscheint diese Zielgruppe demnach als geeignet. Der Lehrer der Gymnasialklasse (im Folgenden Herr Ginger) hatte Mathematik als Hauptfach studiert und befand sich bei Studienteilnahme am Ende seines ersten Schuljahres nach dem Referendariat. Zu diesem Zeitpunkt hatte er lineare Funktionen zweimal in Klasse 7 und zweimal in Klasse 8 unterrichtet. Herr Ginger berichtete, dass er während der Unterrichtseinheit zu linearen Funktionen in Klasse G abgesehen von Textaufgaben und Füllgraphen keine Aufgaben mit situativer Bedeutung behandelt habe. Er würde die Schüler regelmäßig in eigenen Worten „rezeptartige“ Anleitungen für abstrakte Darstellungswechsel schreiben lassen.

Der Lehrer der Realschulklasse RSA (Herr Albert) hatte Mathematik als Nebenfach gewählt und nach dem Referendariat drei Schuljahre unterrichtet.

Lineare Funktionen hatte er bereits mit zwei 8. Klassen thematisiert. Herr Albert habe im Zusammenhang mit linearen Funktionen in seiner Klasse nicht situativ gearbeitet und insbesondere keine Textaufgaben behandelt. Er lege den Fokus auf abstrakte Darstellungswechsel und gäbe seinen Schülern algorithmische Hilfen für deren Realisierung.

Die Lehrerin von Klasse RSB (Frau Beck) hatte Mathematik ebenso als Nebenfach studiert und befand sich am Ende ihres ersten Schuljahres nach dem Referendariat. Funktionen in Klasse 8 hatte sie zum Zeitpunkt der Studienteilnahme erst einmal unterrichtet. Frau Beck nannte Situierungen zwar als Verständnishilfe bei Problemen mit dem Vorzeichen der Steigung, sei sonst im Unterricht aber nur im Zusammenhang mit Textaufgaben explizit darauf eingegangen.

Realschulklasse RSC wurde von einem Lehrer in seinem zweiten Referendariatsjahr unterrichtet („Herr Cesar"). Mathematik besaß in seinem Studium einen vergleichsweise geringen Stellenwert („affines Fach"). Lineare Funktionen hatte er im Referendariat mit zwei 8. Klassen behandelt. Herr Cesar gab an, dass er Aufgaben zur situativen Interpretation von Funktionsgraphen nicht behandelt und lediglich das Vorzeichen der Steigung situativ illustriert habe. Zum Steigungsdreieck habe er eine algorithmische Merkhilfe gegeben.

Im Rahmen dieser Evaluationsstudie standen den Schülern 45 Minuten zur Bearbeitung eines Paper-Pencil-Tests (siehe 3.2) zur Verfügung, wobei die meisten Lernenden deutlich weniger Zeit dafür benötigten. Um langfristige Lerneffekte sowie typische Lernschwierigkeiten und Fehler unabhängig von kurzfristig gelernten Algorithmen festzustellen, erfolgten die Testungen einige Zeit nach Behandlung der Unterrichtseinheit Funktionen. Der genaue Zeitpunkt der Befragung wurde durch die Schulleitung bzw. die Lehrkräfte festgelegt und lag in den Klassen G, RSA und RSC ungefähr 6 Monate und in Klasse RSB etwa 4 Monate nach Abschluss der Unterrichtseinheit.

Die Daten auf Lehrerebene wurden durch videographierte Leitfadeninterviews (ca. 45 – 55 Minuten) erhoben. Der Hauptteil dieser Interviews bestand darin, dass den jeweiligen Mathematik-Lehrkräften zu jedem Aufgabentyp des Schülertests exemplarisch eine Aufgabe vorgelegt wurde (Details siehe 3.2). Schüler- und Lehrerbefragungen fanden jeweils am gleichen Tag statt. Die Schulleitung vor Ort terminierte die Befragungen so, dass in den Klassen G und RSA das Lehrerinterview vor dem Schülertest lag, während in den Klassen RSB und RSC zuerst die Schülerbefragung stattfand.

3.2 Eingesetzte Instrumente

3.2.1 Schülertest

Um die unter 2.2 erläuterten Lernschwierigkeiten bei Darstellungswechseln nachzuweisen, wurde größtenteils auf Aufgaben eines Erhebungsinstruments von Nitsch (2015) mit offenen und Single-Choice-Aufgaben zurückgegriffen. Die jeweils drei Distraktoren der Single-Choice-Aufgaben bilden von Nitsch ermittelte typische Fehler ab (S. 190). Zusätzlich wurden einige Items mit analogen Aufgabenstellungen entwickelt, so dass im Test von jedem Aufgabentyp ein offenes und zwei Single-Choice-Items enthalten waren. Dies hat den Vorteil, dass über die offenen Items eine große Vielfalt verschiedener Fehlertypen explorativ erhoben werden konnte und gleichzeitig über die Single-Choice-Items auf ökonomische Art aus anderen Studien bekannte und ggfs. implizit vorhandene Lernschwierigkeiten fokussiert werden konnten. Zudem konnte durch die Gesamtschau aller Items eines Aufgabentyps die Konsistenz von Fehlermustern vertieft analysiert werden – selbst wenn bei offenen Aufgaben vermehrt Missings auftraten. Ein durch Projektmitarbeiter mit mehrjähriger Schulpraxis vorgenommener Abgleich der verwendeten Aufgaben mit dem gültigen Bildungsplan (Land Baden-Württemberg, 2004; KMK, 2004) bestätigt die Aufgaben als typisch für die Unterrichtseinheit Funktionen in Klasse 7/8.

Insgesamt sechs Aufgaben prüften die Lernschwierigkeit Fokus auf Achsenschnittpunkte ab (siehe Übersicht in Tabelle 1). In drei dieser Aufgaben war zu einem gegebenen Graphen eine Funktionsgleichung gesucht (vgl. Anhang, Tabelle 2: FA1), in ebenso drei Aufgaben sollte zu einer gegebenen Gleichung der Graph gezeichnet bzw. ausgewählt werden (vgl. Anhang, Tabelle 2: FA4). Drei weitere Aufgaben überprüften, inwieweit die Schüler beim Aufstellen einer Funktionsgleichung aus einer gegebenen Situationsbeschreibung (Textaufgabe) die Textreihenfolge auf die Reihenfolge der Parameter in der Gleichung übertrugen (vgl. Anhang, Tabelle 2: TR1). Der Graph-als-Bild-Fehler wie auch die Slope-Height-Confusion wurden ebenso durch jeweils drei Aufgaben abgefragt (vgl. Anhang, Tabelle 2: Graph-als-Bild-Fehler GB1 und GB2; Slope-Height-Confusion SH1). Zusätzlich gab es im Schülertest noch drei weitere Aufgaben zur Interpretation von Funktionsgraphen und drei Aufgaben mit Fokus auf Begriffswissen, die im vorliegenden Artikel nicht thematisiert werden.

Bezeichnung der Lernschwierigkeit	Aufgabenanzahl	
	Offen	Single-Choice
Fokus auf Achsenschnittpunkte	2	4
Überbetonung der Textreihenfolge bei Textaufgaben	1	2
Graph-als-Bild-Fehler	1	2
Slope-Height-Confusion	1	2

Tab. 1: Anzahlen und Formate der Schüleraufgaben.

Alle Fragebogen wurden von zwei unabhängigen Ratern anhand eines in dieser Studie entwickelten Codebooks zur Kategorisierung typischer Lernschwierigkeiten eingegeben. Die Übereinstimmung der Rater (Cohen's Kappa) lag für die hier thematisierten Aufgaben zwischen 0,96 und 1,0. Die nicht übereinstimmenden Codierungen wurden in einem zweiten Durchgang von den Ratern besprochen, so dass in allen Fällen ein Konsens erreicht wurde. In einigen der Aufgaben wurden die Lernenden dazu aufgefordert, ihr Vorgehen bei der Bearbeitung der jeweiligen Aufgabe zu beschreiben. Diese Beschreibungen wurden zur Beleuchtung von Fehlerursachen verwendet, so dass bei einer fehlenden Beschreibung die jeweilige Aufgabe nicht grundsätzlich als falsch oder unvollständig gewertet, sondern die aus der Schülerbearbeitung am plausibelsten erscheinende Codierung gewählt wurde.

3.2.2 Leitfaden der Lehrerinterviews

Um bestehende Hypothesen direkt überprüfen, aber bei Bedarf auch Äußerungen weiterentwickelnd explorieren zu können, wurde für die Lehrerbefragung eine stark strukturierte Interviewform gewählt. Vor dem Einsatz in dieser Studie wurde der entwickelte Interviewleitfaden unter Mathematik-Lehramtsstudierenden und -Lehrkräften pilotiert. Im Folgenden wird der für diese Studie relevante Teil des überarbeiteten Interviewleitfadens vorgestellt.

Den Lehrkräften wurden sechs Aufgaben zu Darstellungswechseln aus dem Schülertest vorgelegt (siehe Anhang, Tabelle 2 links), die sie sich in Ruhe anschauen und den Einsatz in der eigenen Klasse vorstellen sollten. Die Abfolge von Fragen war grundsätzlich immer die gleiche: Zuerst wurde eruiert, welche typischen Fehler und Lernschwierigkeiten die Lehrkräfte bei der jeweiligen Aufgabe in der eigenen Klasse erwarteten („Welche typischen Fehler / Lernschwierigkeiten erwarten Sie bei dieser Aufgabe in Ihrer Klasse?“). Anschließend wurde ein aus der Literatur abgeleiteter Schülerfehler gezeigt (siehe Anhang, Tabelle 2 rechts) und nach einer möglichen zugrundeliegenden Vorstellung gefragt („Wir haben die Aufgabe einer Klasse vorgelegt. XY hat die Aufgabe folgendermaßen gelöst... Welche Vorstellung könnte dahinterliegen? Bitte begründen Sie!“) Die Lehrer sollten sich ebenso dazu äußern, ob sie die vorgelegten Fehler in der eigenen Klasse erwarten würden. Abschließend sollten sie einschätzen, wie viele Lernende der eigenen Klasse die Aufgabe in einer bestimmten Art lösen würden („Was meinen Sie, wie viele der Lernenden Ihrer Klasse in etwa diese Aufgabe richtig lösen könnten / diesen Fehler machen würden?“). Nach jeder Aufgabe sowie am Ende des Interviews erhielten die Lehrkräfte die Gelegenheit, weitere Überlegungen zu den besprochenen Aufgaben bzw. allgemeiner Art zu äußern. Im letzten Teil der Interviews wurden die in 3.1 geschilderten Daten zum Mathematikstudium und zur Unterrichtserfahrung erhoben.

3.3 Auswertung und Ergebnispräsentation

Die Lehrerinterviews wurden mit Kamerafokus auf die besprochene Aufgabe videographiert. Dieses Vorgehen ermöglichte auf ökonomische Art die Dokumentation der Lehreräußerungen sowie möglicher skizzierter Bemerkungen oder Veranschaulichungen. Aus den mündlichen Äußerungen der Lehrerinterviews wurden lediglich die Teile transkribiert, die zur Beantwortung der Forschungsfragen unmittelbar relevant erschienen. Zusätzlich wurden bedeutsam erscheinende Nebenerscheinungen notiert, wie z. B. schriftliche Ergänzungen, Pausen für längeres Nachdenken, Nachfragen von beiden Seiten, oder auch im Nachhinein ergänzte Bemerkungen. Da die Schwerpunkte der Interviewauswertung durch die Forschungsfragen bereits im Vorfeld festgelegt worden waren, spiegeln die in Abschnitt 4 berichteten Ergebnisse auf Lehrerebene eher objektiv erfassbare Aspekte und weniger Interpretationen der gegebenen Lehrerantworten wieder.

Die im Ergebnisteil angeführten Fehlerhäufigkeiten wurden mit SPSS 22 ermittelt. Im Folgenden wird zunächst eine detaillierte Übersicht der Ergebnisse auf Schüler- und Lehrerebene in Form von Tabelle 3 präsentiert. Diese enthält nach Fehlertypen und Schulklassen geordnet auf der linken Seite Informationen auf Schülerebene. Neben der Aufgabenbezeichnung finden sich hier Angaben zu absoluten und relativen Häufigkeiten korrekter Antworten, des jeweils fokussierten Fehlers und von Missings. Dabei sind die relativen Häufigkeiten richtig gelöster Aufgaben bzw. konkreter Fehler als gültige Prozent angegeben, d. h. als Bezugspunkt wird jeweils die Anzahl der in der entsprechenden Klasse bearbeiteten Aufgaben zu Grunde gelegt. Durch diese Angabe steht der Vergleich der gegebenen Antworten im Vordergrund und wird nicht durch die Anzahl von Missings verzerrt. Zusätzlich wird zu jeder Aufgabe die Häufigkeit der Missings angegeben, da dies zumindest bei offenen Aufgaben als ein Indikator für eine subjektive Schwierigkeitsempfindung betrachtet werden kann.

	Schülerebene				Lehrerebene			
				Fehlertyp 1: Fokus auf Achsenschnittpunkte				
Klasse	Aufgabe	Häufigkeit korrekt gelöst	Häufigkeit Fokus auf Achsen	Häufigkeit Missings	Fehler… bekannt /	erkannt /	erwartet	Geschätzte Lösungshäufigkeit jetzt (und nach UE)
	FA1*	10 (52,6 %)	4 (21,1 %)	10 (34,5 %)	nein	nein	nein	15
G	FA2**	9 (32,1 %)	12(42,9 %)	1 (3,4 %)				(19 – 22)
n = 29	FA3**	8 (29,6 %)	14 (51,9 %)	2 (6,9 %)				
	FA4*	7 (31,8 %)	2 (9,1 %)	7 (24,1 %)	nein	ja	selten	15
	FA5**	14 (48,3 %)	12 (41,4 %)	0				(19 – 22)
	FA6**	10 (34,5 %)	17 (58,6 %)	0				
	FA1*	3 (50,0 %)	0	10 (62,5 %)	nein	ja	nein	Etwas weniger als
RSA	FA2**	3 (21,4 %)	7 (50,0 %)	2 (12,5 %)				6 – 7
n = 16	FA3**	4 (28,6 %)	9 (64,3 %)	2 (12,5 %)				(6 – 7)
	FA4*	3 (25,0 %)	0	4 (25,0 %)	nein	nein	nein	6 – 8
	FA5**	5 (31,3 %)	11 (68,8 %)	0				(8)
	FA6**	4 (26,7 %)	10 (66,7 %)	1 (6,3 %)				
	FA1*	0	7 (58,3 %)	6 (33,3 %)	nein	nein	nein	Deutlich weniger
RSB	FA2**	1 (5,9 %)	13 (76,5 %)	1 (5,6 %)				als 8 – 12
n = 18	FA3**	2 (11,8 %)	12 (70,6 %)	1 (5,6 %)				(8 – 12)
	FA4*	0	6 (33,3 %)	0	nein	ja	nein	5 – 6
	FA5**	2 (11,8 %)	13 (76,5 %)	1 (5,6 %)				(10)
	FA6**	0	14 (82,4 %)	1 (5,6 %)				
	FA1*	2 (14,3 %)	8 (57,2 %)	3 (17,6 %)	nein	ja	nein	6
RSC	FA2**	0	13 (76,5 %)	1 (5,9 %)				(15)
n = 17	FA3**	1 (5,9 %)	13 (76,5 %)	0				
	FA4*	0	2 (16,7 %)	7 (24,1 %)	nein	nein	nein	6
	FA5**	1 (17,6 %)	13 (76,5 %)	0				(15)
	FA6**	0	16 (94,1 %)	0				

				Fehlertyp 2: Überbetonung der Textreihenfolge bei Textaufgaben				
Klasse	Aufgabe	Häufigkeit Korrekt gelöst	Häufigkeit Fehler Textreihenfolge	Häufigkeit Missings	Fehler… bekannt /	erkannt /	erwartet	Geschätzte Lösungshäufigkeit jetzt (und nach UE)
G	**TR1***	11 (37,9 %)	1 (2,4 %)	0	nein	nein	nein	10 – 20
n = 29	TR2**	23 (82,1 %)	2 (7,1 %)	1 (3,4 %)				(20)
	TR3**	19 (67,9 %)	4 (14,3 %)	1 (3,4 %)				
RSA	**TR1***	0	0	8 (50,0 %)	nein	nein	nein	1
n = 16	TR2**	8 (57,1 %)	5 (35,7 %)	2 (12,5 %)				(ebenso)
	TR3**	6 (40,0 %)	7 (46,7 %)	1 (6,3 %)				
RSB	**TR1***	0	1 (10,0 %)	8 (44,4 %)	nein	nein	nein	Weniger als 3
n = 18	TR2**	5 (29,4 %)	11 (64,7 %)	1 (5,6 %)				
	TR3**	3 (18,8 %)	13 (81,3 %)	2 (11,1 %)				
RSC	**TR1***	0	0	12 (70,6 %)	ja	ja	ja	(3 bis 4)
n = 17	TR2**	7 (43,8 %)	8 (50,0 %)	1 (5,9 %)				
	TR3**	3 (18,8 %)	10 (62,5 %)	1 (5,9 %)				

Tab. 3 Anfang: Detaillierte Auflistung der Schüler- und Lehrerergebnisse.

Bemerkungen: *…offenes Format; **… Single-Choice-Format
UE … Unterrichtseinheit; SC … Single-Choice-Aufgabe
Zugunsten der Leserführung wurden sinnstiftende Abkürzungen für die Aufgabenbezeichnungen sowie eine Nummerierung eingeführt (z. B. FA1). Diese entspricht nicht der Reihenfolge im Schülertest

Fehlertyp 3: Graph-als-Bild-Fehler								
Klasse	Auf-gabe	Häufigkeit Korrekt gelöst	Häufigkeit Graph-als-Bild-Fehler	Häufigkeit Missings	Fehler… bekannt /	erkannt /	erwartet	Geschätzte Lösungshäufigkeit jetzt (und nach UE)
G	**GB1***	12 (42,9 %)	3 (10,7 %)	1 (3,4 %)	ja	ja	ja	Jeweils 3 – 4
n = 29	**GB2****	7 (25,0 %)	11 (39,3 %)	1 (3,4 %)				(ebenso)
	GB3**	18 (62,1 %)	5 (17,2 %)	0				
RSA	**GB1***	6 (60,0 %)	0	6 (37,5 %)	nein	ja	ja	4 – 6 offen; 5 – 7 SC
n = 16	**GB2****	6 (40,0 %)	7 (46,7 %)	1 (6,3 %)				(ebenso)
	GB3**	4 (36,4 %)	5 (45,5 %)	5 (31,3 %)				
RSB	**GB1***	3 (23,1 %)	1 (7,7 %)	5 (27,8 %)	ja	ja	ja	5
n = 18	**GB2****	3 (17,6 %)	10 (58,8 %)	1 (5,6 %)				(6 -7)
	GB3**	4 (23,5 %)	9 (52,9 %)	1 (5,6 %)				SC etwas einfacher
RSC	**GB1***	2 (13,3 %)	1 (6,7 %)	2 (11,8 %)	nein	ja	ja	1 – 2 offen; 3 SC
n = 17	**GB2****	2 (13,3 %)	7 (46,7 %)	2 (11,8 %)				(ebenso)
	GB3**	2 (12,5 %)	12 (75,0 %)	1 (5,9 %)				
Fehlertyp 4: Slope-Height-Confusion								
Klasse	Auf-gabe	Häufigkeit Korrekt gelöst	Häufigkeit Slope-Height-Confusion	Häufigkeit Missings	Fehler… bekannt /	erkannt /	erwartet	Geschätzte Lösungshäufigkeit jetzt (und nach UE)
G	**SH1****	15 (55,6 %)	9 (33,3 %)	2 (6,9 %)	ja	ja	ja	2 – 3
n = 29	SH2**	16 (59,3 %)	10 (37,0 %)	2 (6,9 %)				(ebenso)
	SH3*	3 (14,3 %)	10 (47,6 %)	8 (27,6 %)				
RSA	**SH1****	5 (41,7 %)	4 (33,3 %)	4 (25,0 %)	nein	ja	Keine Angabe	2 – 6
n = 16	SH2**	7 (58,3 %)	4 (33,3 %)	4 (25,0 %)				(ebenso)
	SH3*	1 (12,5 %)	4 (50,0 %)	8 (50 %)				
RSB	**SH1****	5 (33,3 %)	10 (66,7 %)	3 (16,7 %)	ja	ja	ja	10
n = 18	SH2**	9 (60,0 %)	5 (33,3 %)	3 (16,7 %)				(höchstens 6)
	SH3*	3 (27,3 %)	6 (54,5 %)	7 (38,9 %)				
RSC	**SH1****	2 (14,3 %)	8 (57,1 %)	3 (17,6 %)	nein	ja	Keine Angabe	Keine Angabe
n = 17	SH2**	1 (6,7 %)	11 (73,3 %)	2 (11,8 %)				
	SH3*	0	6 (54,5 %)	6 (35,3 %)				

Tab. 3 Fortsetzung: Detaillierte Auflistung der Schüler- und Lehrerergebnisse.

Bemerkungen: *…offenes Format; **… Single-Choice-Format
UE … Unterrichtseinheit; SC … Single-Choice-Aufgabe
Zugunsten der Leserführung wurden sinnstiftende Abkürzungen für die Aufgabenbezeichnungen sowie eine Nummerierung eingeführt (z. B. FA1). Diese entspricht nicht der Reihenfolge im Schülertest

Die relativen Häufigkeiten der Missings beziehen sich auf alle beteiligten Schüler einer Klasse. Die rechte Tabellenhälfte zeigt die Ergebnisse auf Lehrerebene. Hier wird dokumentiert, inwieweit die thematisierten Fehler bekannt waren (d. h. bereits bei der offenen Frage nach erwarteten Fehlern genannt wurden) bzw. nach Vorlage erkannt und in der eigenen Klasse erwartet wurden. Abschließend findet sich die Einschätzung der Lösungshäufigkeit der den Lehrkräften vorgelegten und durch Fettschrift hervorgehobenen Aufgabe zum Zeitpunkt der Befragung („jetzt") und direkt im Anschluss an die Unterrichtseinheit („nach UE").

In den Abschnitten 4.2 bis 4.5 werden nach Aufgabentypen geordnet Ergebnisse zur Konsistenz von Fehlermustern in den vier Klassen vorgestellt. Zudem wird ergänzend zu Tabelle 3 berichtet, welche alternativen Fehler und Fehlerursachen die Lehrkräfte erwarteten sowie weitere, unter den Schülern beobachtete Fehlertypen systematisiert.

4. Ergebnisse

4.1 Tabellarischer Überblick der Ergebnisse

In Tabelle 3 ist jeweils die Aufgabe, die Lehrkräften und Schülern vorgelegt wurde, zuerst abgedruckt und durch Fettschrift hervorgehoben. Die Fehlerhäufigkeiten der parallelen Aufgaben werden ergänzt, um ein umfassenderes Bild zu ermöglichen.

4.2 Aufgaben zur Diagnose des Fokus‘ auf Achsenschnittpunkte

Tabelle 4 stellt die Konsistenz des Fehlers Fokus auf Achsenschnittpunkte (kurz: FA) in den vier Klassen dar. Hierbei werden Fälle gelistet, bei denen dieser Fehler unter den jeweils drei Items zweimal (Spalte „Fehler zweifach": drittes Item anderweitig beantwortet; Spalte „Fehler zweifach plus Missing": drittes Item nicht beantwortet) oder sogar dreimal (Spalte „Fehler dreifach") beobachtet wurde.

Klasse	**Fehlerkonsistenz**		
	Fehler zweifach	Fehler zweifach plus Missing	Fehler dreifach
Wechsel von Graph zu Gleichung (FA1, FA2, FA3)			
G (n = 29)	6	4	1
RSA (n = 16)	2	4	0
RSB (n = 18)	3	2	6
RSC (n = 17)	5	1	6
Wechsel von Gleichung zu Graph (FA4, FA5, FA6)			
G (n = 29)	6	5	1
RSA (n = 16)	5	4	0
RSB (n = 18)	9	0	4
RSC (n = 17)	7	3	2

Tab. 4: Fehlerkonsistenz Fokus auf Achsenschnittpunkte.

Der Mathematiklehrer Herr Ginger von Gymnasialklasse G rechnete bei Aufgaben zum graphisch-algebraischen Darstellungswechsel kaum mit dem Fokus auf Achsenschnittpunkte, sondern hauptsächlich mit Vorzeichenfehlern oder dem Bilden des Kehrwerts der Steigung sowie bei ungewohnter Gleichungsreihenfolge auch mit Verwechslungen der Parameter. Herr Albert erwartete den Fokus auf Achsenschnittpunkte in Klasse RSA nicht, sondern rechnete bei Aufgaben zum graphisch-algebraischen Darstellungswechsel hauptsächlich mit den Fehlern Kehrbruchbildung bei der Steigung und mit einem fehlenden Lösungsansatz aufgrund von Problemen mit der allgemeinen Geradengleichung. Die Mathematiklehrerin von Klasse RSB Frau Beck hatte den Fehler Fokus auf Achsenschnittpunkte in der eigenen Klasse nicht bemerkt und rechnete bei Aufgaben zum graphisch-algebraischen Darstellungswechsel vor allem mit einem fehlenden Lösungsansatz aufgrund von Vergessen der allgemeinen Geradengleichung und mit Kehrbrüchen der Steigung sowie in seltenen Fällen mit Vorzeichenfehlern und einer Parameterverwechslung. In Klasse RSC war der Mathematiklehrer Herr Cesar ebenso davon überzeugt, diesen Fehler nicht beobachtet zu haben. Er rechnete beim graphisch-algebraischen Darstellungswechsel mit Problemen, einen Lösungsansatz zu finden, sowie mit Schwierigkeiten der Skalierung des Koordinatensystems, dem Ignorieren des y-Achsenabschnitts oder einer Parameterverwechslung.

In allen vier Klassen kamen im offenen und im Single-Choice-Format Fehler wie die Verwechslung der Parameter, Vorzeichenfehler oder die Kehrbruchbildung der Steigung – wenn überhaupt – unsystematisch und selten vor. Der Fehler Fokus auf Achsenschnittpunkte stellte im Single-Choice-Format in allen Klassen den häufigsten Fehler dar – meist mit höheren Häufigkeiten als die richtige Lösung. Im offenen Aufgabenformat bildete der Fokus auf Achsenschnittpunkte zumindest in Klasse RSC in Aufgabe FA1 sowie in Klasse RSB in den Aufgaben FA1 und FA4 den häufigsten Fehler. Darüber hinaus konnte in den offenen Aufgaben ein weiterer Fehlertyp ermittelt werden, bei dem die Schüler die Parameter m und b fälschlicherweise mit einem Punkt im Koordinatensystem in Verbindung brachten: Bei Aufgabe FA1 (Darstellungswechsel von Gleichung $y = 4x - 3$ zu Graph) wurde entweder a) nur ein Punkt im Koordinatensystem markiert (häufig (4/-3) oder b) dieser anschließend mit dem Ursprung oder einem weiteren beliebigen Punkt zu einer Geraden verbunden. Das Vorgehen a) wählten insgesamt 13 Schüler (Klasse RSA: 5; Klasse RSB: 4; Klasse RSC 4), das Vorgehen b) wurde in 10 Fällen (G: 3; RSA: 1; RSB: 3; RSC: 3) gewählt. Beim Darstellungswechsel von Graph zu Gleichung (Aufgabe FA4) konnte verstärkt festgestellt werden, dass Schüler den gut ablesbaren Punkt des Graphen (2/4) wählten und diese Koordinaten dann als Parameter in eine Gleichung einsetzten (z. B. $y = 4x - 2$ oder auch $y = 2x \cdot 4$). Ein solcher Fehler kam insgesamt 10 Mal vor (Klasse G: 2; Klasse RSA: 0; Klasse RSB: 6; Klasse RSC: 2). Allerdings lässt diese Fehlerklassifikation Interpretationsspielraum, da – im Gegensatz zu den in FA1 zusätzlich festgestellten Fehlern – die Schülererklärungen die Fehlerursache in letzteren Fällen weniger eindeutig benannten. Über die beschriebenen Fehler hinaus wurden in den offenen Aufgaben FA1 und FA4 weitere nicht eindeutig erklärbare bzw. unsystematische Fehler festgestellt.

4.3 Aufgaben zur Diagnose der Überbetonung der Textreihenfolge bei Textaufgaben

Tabelle 5 zeigt die Konsistenz des Fehlers Überbetonung der Textreihenfolge (im Folgenden: Fehler Textreihenfolge) in den vier Klassen. Wieder werden die Lernenden gelistet, bei denen dieser Fehler unter den drei Items zweimal oder dreimal beobachtet wurde.

Klasse	**Fehlerkonsistenz**		
	Fehler zweifach	Fehler zweifach plus Missing	Fehler dreifach
G (n = 29)	0	1	0
RSA (n = 16)	0	1	0
RSB (n = 18)	5	3	1
RSC (n = 17)	1	4	0

Tab. 5: Fehlerkonsistenz Textreihenfolge.

Die Mathematiklehrer Herr Ginger, Herr Albert und Frau Beck erkannten die Fehlerursache Überbetonung der Textreihenfolge auch nach Vorlage eines konkreten Beispiels nicht und führten den gezeigten Fehler auf Raten zurück bzw. im Fall von Frau Beck konkret auf zufälliges Unterbringen der Parameter in der allgemeinen Form, wenn das Verständnis für die Bedeutung der Parameter fehle. Dagegen kannte der Mathematiklehrer von Klasse RSC Herr Cesar den Fehler Textreihenfolge und erwartete ihn neben allgemeinen Problemen beim Verstehen von Textaufgaben auch in seiner Klasse.

Der Fehler Textreihenfolge stellte in allen Klassen bei Aufgaben im Single-Choice-Format jeweils den häufigsten Fehler dar, in einigen Klassen wurde er häufiger angekreuzt als die richtige Lösung. Im offenen Aufgabenformat konnte er kaum festgestellt werden, dafür wurden unter den falschen Bearbeitungen zwei weitere systematische Fehlertypen klassifiziert: Einerseits wurde von sechs Schülern (Klasse G: 4; Klasse RSA: 1; Klasse RSB: 1, Klasse RSC: 0) beim Aufstellen der Funktionsgleichung die unabhängige Variable x vollständig weggelassen oder zumindest nicht algebraisch umgesetzt (z. B. Notation als „pro Stunde“. Andererseits fühlten sich 13 Lernende (G: 3; RSA: 5; RSB: 3; RSC: 2) durch die Aufgabenstellung dazu aufgefordert zu berechnen, wann kein Wasser mehr im Aquarium wäre. Über diese beiden weiteren Fehlertypen hinaus kam im offenen Aufgabenformat eine Vielzahl an Fehlern zum Tragen, zu denen aufgrund ihrer Vielfältigkeit keine eigene Kategorie entwickelt wurde.

4.4 Aufgaben zur Diagnose des Graph-als-Bild-Fehlers

In Tabelle 6 ist die Konsistenz des Graph-als-Bild-Fehlers abgebildet, wobei erneut die Fälle betrachtet werden, bei denen dieser Fehler unter den drei Items zweimal oder dreimal nachgewiesen wurde.

Klasse	**Fehlerkonsistenz**		
	Fehler zweifach	Fehler zweifach plus Missing	Fehler dreifach
G (n = 29)	0	0	3
RSA (n = 16)	2	2	0
RSB (n = 18)	3	1	1
RSC (n = 17)	8	0	0

Tab. 6: Fehlerkonsistenz Graph-als-Bild-Fehler.

Die Mathematiklehrer Herr Ginger und Frau Beck nannten den Graph-als-Bild-Fehler bereits bei der offenen Frage nach typischen Fehlern und erwarteten ihn auch verstärkt in den eigenen Klassen. Herr Ginger begründete dies ausdrücklich damit, dass er in seiner Klasse kaum Geschwindigkeits-Zeit-Diagramme behandelt habe. Herr Albert und Herr Cesar erkannten diesen Fehler nach Vorlage des entsprechenden Distraktors und erwarteten ihn in den eigenen Klassen zumindest im Single-Choice-Format. Ähnlich wie Herr Ginger betonte Herr Albrecht in diesem Zusammenhang, dass er vergleichbare Aufgaben zur Interpretation von Graphen in seiner Klasse nicht behandelt habe.

In allen Klassen war der Graph-als-Bild-Fehler bei beiden Single-Choice-Aufgaben der häufigste Fehler. In den Realschulklassen wurde er häufiger angekreuzt als die richtige Lösung. Im offenen Aufgabenformat wurde der Graph-als-Bild-Fehler selten direkt diagnostiziert und die Klassifikation der weiteren falschen Bearbeitungen war insgesamt schwierig, insbesondere da die Schüler in dieser Aufgabe nicht zur Beschreibung ihres Vorgehens aufgefordert wurden. Auffällig waren folgende vier Fehlertypen: Insgesamt fünf Schüler (G: 1; RSA: 0; RSB: 0; RSC 4) zeichneten lediglich eine horizontale Linie, die eine konstante Geschwindigkeit ausdrückte. Weitere sieben Lernende (G: 4; RSA: 0; RSB: 2; RSC: 1) zeichneten einen Graphen durch den Ursprung, wobei diese Graphen in ihrer weiteren Gestalt sehr heterogen ausfielen und deshalb nicht weiter systematisiert wurden. In acht Fällen (G: 3; RSA: 1; RSB: 3; RSC: 1) erstellten die Schüler Graphen mit drei Tiefpunkten / Abbremsvorgängen, die aufgrund ihrer Ähnlichkeit zum Graphen in der Parallelaufgabe GB2 davon inspiriert erschienen. Neun weitere Lernende zeichneten Graphen mit drei Tiefpunkten / Abbremsvorgängen (wie in GB2), die zudem der Form der gegebenen Rennstrecke ähnlich sahen und somit eine Verbindung aus einem Graph-als-Bild-Fehler und dem Graphen aus GB2 darstellen könnten. Über diese Fehlertypen hinaus konnte keine Systematik hinter den weiteren Fehlern erkannt werden.

4.5 Aufgaben zur Diagnose der Slope-Height-Confusion

Tabelle 7 ist die Konsistenz des Fehlers Slope-Height-Confusion zu entnehmen. Wieder werden alle Schüler gelistet, bei denen dieser Fehler unter den drei Items zweimal oder dreimal beobachtet wurde.

Klasse	**Fehlerkonsistenz**		
	Fehler zweifach	Fehler zweifach plus Missing	Fehler dreifach
G (n = 29)	5	1	2
RSA (n = 16)	1	2	0
RSB (n = 18)	4	4	0
RSC (n = 17)	3	2	3

Tab. 7: Fehlerkonsistenz Slope-Height-Confusion.

Der Gymnasiallehrer Herr Ginger und die Realschullehrerin Frau Beck kannten die Slope-Height-Confusion und erwarteten sie auch in den eigenen Klassen. Wieder begründete Herr Ginger dies damit, dass er vergleichbare Aufgaben in seinem Unterricht nicht behandelt habe. Die Mathematiklehrer Herr Albert und Herr Cesar hatten beim Vorlegen dieser Aufgabe zunächst selbst Verständnisprobleme, erkannten den konkreten Fehler Slope-Height-Confusion aber nach Vorlage und einiger Bedenkzeit. Herr Cesar wollte keine Einschätzung der Lösungshäufigkeit angeben, da er vergleichbare Aufgaben nicht behandelt habe; er hielt die vorgelegte Aufgabe aber für schwierig.

Die Slope-Height-Confusion stellte in allen vier Klassen in beiden Aufgabenformaten jeweils den häufigsten Fehler dar. Im Single-Choice-Format wurde sie teilweise häufiger angekreuzt als die richtige Lösung. Im offenen Aufgabenformat wurde darüber hinaus in vier Fällen (G: 3; RSA: 1; RSB: 0; RSC: 0) festgestellt, dass die Lernenden im s-t-Diagramm zwar auf die ungleichen Startpunkte der abgebildeten Läufer fokussierten, den Transfer zur Geschwindigkeit aber nicht vollzogen und deshalb die gestellte Frage nicht beantworteten. Zwei weitere Schüler (G: 0; RSA: 0; RSB: 1; RSC: 1) fokussierten auf die gegebenen Intervallgrenzen. Weitere Fehler konnten nicht systematisch festgestellt werden.

5. Diskussion und Ausblick

Im Folgenden werden die Ergebnisse zusammengefasst und in Hinblick auf Theorie und Praxis diskutiert. Dazu wird in der Reihenfolge obiger Aufgabentypen zunächst auf die Schülerebene und anschließend auf die Lehrerebene sowie deren Zusammenspiel eingegangen. Es folgen Implikationen für Theorie, Praxis und zukünftige Forschung sowie eine Reflexion der Grenzen dieser Studie.

5.1 Zusammenfassung Schülerergebnisse

Die ersten beiden Forschungsfragen beziehen sich darauf, wie erfolgreich die Schüler dieser Stichprobe die vorgelegten Aufgaben bearbeiteten und inwieweit bei den Aufgabenbearbeitungen die aus der Literatur abgeleiteten typischen Fehler vorkamen. Obwohl Aufgaben zum graphisch-algebraischen Darstellungswechsel laut Aussagen der Lehrkräfte die Unterrichtseinheit dominierten, fielen die Lösungshäufigkeiten der entsprechenden Aufgaben eher niedrig aus. Die Gymnasiasten erzielten die besten Ergebnisse, in den Klassen RSB und RSC gab es kaum richtige Lösungen. Der Fokus auf Achsenschnittpunkte war in allen Klassen insbesondere im Single-Choice-Format sehr verbreitet, im offenen Aufgabenformat lag sein Vorkommen über alle vier Klassen hinweg mit etwa 15 % (von Gleichung zu Graph) und etwa 35 % (von Graph zu Gleichung) ebenso im beachtenswerten Bereich. Die verhältnismäßig hohen Anzahlen an Missings in den offenen Aufgaben legen außerdem eine allgemeine Unsicherheit bei diesem Aufgabentyp nahe – obwohl er laut Aussagen der Lehrkräfte intensiv behandelt wurde. Diese Unsicherheit mag auf die zeitliche Distanz zwischen Unterrichtseinheit und Testung zurückzuführen sein und zudem erklären, dass die Schüler bei den Single-Choice-Aufgaben mehrheitlich den Distraktor Fokus auf Achsenschnittpunkte wählten, der eine direkte Entsprechung zwischen Gleichung und Graph aufwies. Insofern mag das Single-Choice-Format in der vorliegenden Stichprobe diesen Fehler provoziert haben. Auf Grundlage der vorliegenden Daten kann nicht erklärt werden, warum die anderen aus der Literatur abgeleiteten typischen Fehler nicht in vergleichbaren Häufigkeiten angekreuzt wurden.

Weitere Fehler wie die Verwechslung der Parameter, Vorzeichenfehler oder eine Kehrbruchbildung der Steigung konnten nicht vermehrt festgestellt werden. Somit sind die vorliegenden Befunde in Bezug auf den Fokus auf Achsenschnittpunkte – aber nicht in Bezug auf diese weiteren Fehlertypen – vergleichbar zu Nitsch (2015). Über die in Anlehnung an Nitsch

(2015) überprüften Fehler hinaus wurden in der vorliegenden Stichprobe bei den offenen Aufgaben zum graphisch-algebraischen Darstellungswechsel vermehrt die Übertragung der Funktionsparameter auf die Koordinaten eines Punktes festgestellt. Im Falle des Wechsels von Gleichung zu Graph erreichte dieser Fehlertyp eine zum Fokus auf Achsenschnittpunkte vergleichbare Größenordnung. Zudem ist dieses Vorgehen dem Fokus auf Achsenschnittpunkte nicht ganz unähnlich, da auch hier die Bedeutung der Parameter nicht durchdrungen wurde und diese als Punkte im Koordinatensystem umgesetzt wurden. Eine mögliche Erklärung für das Vorkommen dieses Fehlertyps ist die zeitliche Distanz zwischen der Unterrichtseinheit Lineare Funktionen und der Testung, durch die das Erinnern an die korrekte Vorgehensweise mit dem schon länger bekannten Verorten von Punkten im Koordinatensystem interferieren könnte. Da diese Fehlertypen nicht erwartet worden waren, sondern explorativ untersucht wurden, waren sie unter den Distraktoren der Single-Choice-Aufgaben nicht enthalten. Aus diesem Grund können keine Ergebnisse zur Konsistenz dieser Fehler berichtet werden.

Die Analyse der Konsistenz des Fehlers Fokus auf Achsenschnittpunkte sowie sein Vorkommen im offenen Aufgabenformat legen es nahe, dass einige Schüler systematisch die Strategie des Ablesens/Einzeichnens vom *y*-Achsenabschnitt auf die Steigung übertragen und es sich nicht nur um einen Flüchtigkeitsfehler handelt. Insbesondere angesichts des langen zeitlichen Abstands zur Unterrichtseinheit erscheint eine solche Strategie als nachvollziehbar, wenn das richtige Vorgehen nur teilweise erinnert wird. Auch die insgesamt niedrigen Lösungshäufigkeiten sowie das Vorkommen einer Vielzahl nicht nachvollziehbarer Bearbeitungen sind vor diesem zeitlichen Abstand zu bewerten.

Vergleicht man den Fehler Fokus auf Achsenschnittpunkte im Hinblick auf die Richtung des Darstellungswechsels, so stellt man ihn im offenen Aufgabenformat in den Klassen G und RSC (deutlich) häufiger vom Graphen zur Gleichung als in umgekehrter Richtung fest. Bezieht man jedoch alle Aufgaben sowie die Fehlerkonsistenz ein, so scheint der Fehler etwas häufiger beim Darstellungswechsel von der Gleichung zum Graph aufzutreten. Insgesamt ergibt sich in dieser Hinsicht kein einheitliches Bild, was vermutlich auch an der eher kleinen Stichprobe liegt.

Im Zusammenhang mit der Bearbeitung von Textaufgaben zeigte sich ein deutlicher Schulart-Unterschied. Während unter den Gymnasiasten gut ein Drittel die offene Aufgabe korrekt lösen konnte, fand sich unter allen Realschülern keine richtige Lösung. Die Gymnasiasten schnitten auch bei den entsprechenden Single-Choice-Aufgaben besser ab, wobei in diesem Aufgabenformat in allen Klassen höhere Lösungshäufigkeiten zu verzeichnen waren. Der Fehler der Überbetonung der Textreihenfolge konnte im offenen Aufgabenformat in keiner der Klassen verstärkt festgestellt werden, er spielte aber im Single-Choice-Format eine große Rolle: Die Realschüler kreuzten fast ausschließlich die richtige Lösung oder den Distraktor Textreihenfolge an, in den Klassen RSB und RSC wurde diese Falschantwort sogar deutlich häufiger als die richtige Antwort gewählt. Andere Falschantworten wie Vorzeichenfehler kamen kaum vor. Dieser Befund deutet darauf hin, dass den Realschülern die Platzierung der Parameter in der Textreihenfolge ähnlich plausibel oder sogar plausibler erscheint als die Aufstellung der richtigen Gleichung. Versucht man weitere Fehler in der Textaufgabe im offenen Aufgabenformat zu klassifizieren, so zeigten sich zum einen die Schwierigkeit, die unabhängige Variable algebraisch umzusetzen. Dies stellt im Sinne des Modellierungskreislaufs (z. B. Blum & Leiss, 2005) eine nachvollziehbare Schwierigkeit am Übergang zwischen realem und mathematischem Modell dar. Darüber hinaus gab es einen beachtlichen Teil an Schülern, die entgegen der Aufgabenstellung die Nullstelle der Funktion zu bestimmen versuchten. Dabei ist unklar, ob dieses Vorgehen aufgrund von Gewohnheit (eine nachvollziehbare Fragestellung wäre, wann das Aquarium leergelaufen ist), aufgrund oberflächlichen Lesens oder aufgrund eines Unverständnisses der eigentlichen Aufgabe gewählt wurde.

In Bezug auf die Fehlerkonsistenz zeigte sich, dass der Fehler Textreihenfolge in den Klassen G und RSA eher ein Einzelphänomen war, während er in den Klassen RSB und RSC auch systematisch vorkam. Ob dies in der vermeintlichen Leistungsstärke der Klassen oder im konkreten Unterricht der jeweiligen Lehrer begründet ist, lässt sich durch diese Studie nicht klären. Trotz der berichteten Heterogenität zeigt diese Studie vergleichbar zu Nitsch (2015), dass der Fehler Textreihenfolge im Single-Choice-Format sehr dominant und konsistent vorkommen kann. Insgesamt lässt sich auch unter Beachtung der hohen Anzahlen an Missings im offenen Format festhalten, dass die befragten Realschüler größere Probleme beim Aufstellen einer Gleichung aus einer gegebenen Situationsbeschreibung hatten als die Gymnasiasten.

Drei der Aufgaben zum situativ-graphischen Darstellungswechsel wurden zur Diagnose des Graph-als-Bild-Fehlers genutzt. Die Lösungshäufigkeiten der offenen Aufgabe GB1 waren in den vier Klassen heterogen mit Vorteilen für die Gymnasialklasse und die Realschulklasse RSA, obwohl deren Lehrkräfte vergleichbare Aufgaben laut eigener Aussage nicht behandelt hatten. Der Graph-als-Bild-Fehler konnte bei dieser Aufgabe in allen Klassen nur selten direkt diagnostiziert werden, was auch dadurch erschwert wurde, dass in der Aufgabe keine Begründung des Vorgehens eingefordert wurde. Diesbezüglich sollte die Aufgabe vor der weiteren Nutzung überarbeitet werden. An einigen Falschbearbeitungen dieser offenen Aufgabe fiel auf, dass diese ähnlich zum Graphen aus der parallelen Single-Choice-Aufgabe GB2 ausfielen, was auf grundsätzliche Probleme bei diesem eher unbekannten Aufgabentyp zurückzuführen sein mag. Ob teilweise zusätzlich eine Überlagerung mit dem Graph-als-Bild-Fehler vorliegt, ist aufgrund der fehlenden Begründung schwer zu beurteilen. In vergleichbarer Weise kann kaum beurteilt werden, ob die Schüler, die ihren Graphen durch den Ursprung gezeichnet hatten, lediglich einen Teil der Situationsbeschreibung (zweite Runde auf der Rennstrecke) ignoriert haben oder ob in diesen Fällen der Prototyp „Funktionsgraph durch den Ursprung“ angeregt wurde (z. B. Hadjidemetriou & Williams, 2001). In ähnlicher Weise könnten die Lerner, die eine horizontale Linie als Funktionsgraph gezeichnet haben, dem Prototyp „linearer Funktionsgraph“ erliegen (z. B. Hadjidemetriou & Williams, 2001) oder ein unpassendes Situationsmodell gewählt haben (vgl. Blum & Leiss, 2005). Betrachtet man dagegen die beiden Single-Choice-Aufgaben, so stellte der Graph-als-Bild-Fehler in allen Klassen den verbreitetsten Fehler dar und wurde meist häufiger als die richtige Lösung gewählt. Entgegen der Erwartung der Realschullehrkräfte wurden die Single-Choice-Aufgaben nicht systematisch häufiger korrekt gelöst als die offene Aufgabe, was vermutlich auf die Beeinflussung durch den Distraktor Graph-als-Bild-Fehler zurückzuführen ist. Im Vergleich zu Nitsch (2015) kam der Graph-als-Bild-Fehler in dieser Stichprobe im offenen Aufgabenformat seltener, im Single-Choice-Format meist häufiger vor, was Nitschs Feststellung bekräftigt, dass das Single-Choice-Format diesen Fehler provozieren kann. Ein möglicher Grund für den extremeren Befund mag neben der erschwerten Diagnose des Graph-als-Bild-Fehlers in der offenen Aufgabe aufgrund fehlender Begründungen sein, dass die Schüler dieser Stichprobe jünger und laut ihren Mathematiklehrern wenig erfahren in der Interpretation von Graphen waren. Eine mangelnde Geläufigkeit mag Lernende dazu bewegen, Graphen und Situationsabbilder nach optischer Ähnlichkeit zuzuordnen. Diese Vermutung spiegelt sich auch darin wider, dass es in allen vier Klassen einige Schüler gab, die den Graph-als-Bild-Fehler mehrfach machten. Insgesamt stellte dieser Fehler – abgesehen von Realschulklasse RSC – aber eher ein inkonsistentes Einzelphänomen dar, das den Schülern je nach Aufgabe mehr oder weniger naheliegend erschien.

In den drei Aufgaben zur Diagnose der Slope-Height-Confusion wurden den Schülern lineare Weg-Zeit-Diagramme vorgelegt und sie wurden nach dem Graphen gefragt, der die höchste Geschwindigkeit darstellt. In der offenen Aufgabe erzielten alle drei Klassen nur wenige richtige Lösungen, was vermutlich an der für viele Lernende ungewöhnlichen Aufgabenstellung lag und deshalb vorsichtig interpretiert werden sollte. Die beiden Single-Choice-Aufgaben wurden von den Klassen G und RSA und teilweise auch von RSB mit zufriedenstellenden Lösungshäufigkeiten bearbeitet, Klasse RSC schnitt wieder sehr schwach ab. Die Slope-Height-Confusion kam in den vier Klassen in beiden Aufgabenformaten regelmäßig und häufig vor mit der stärksten Verbreitung in Klasse RSC. Im Vergleich zu Ergebnissen von Nitsch (2015) ist festzustellen, dass – abgesehen von Klasse RSB – die Slope-Height-Confusion bei der Frage nach einem Zeitpunkt (SH1) nicht häufiger vorkam als bei der Frage nach einem Zeitraum (SH2). Demnach konnte in der vorliegenden Stichprobe das Ergebnis von Nitsch nicht bestätigt werden, dass die Fokussierung auf einen Zeitpunkt die Slope-Height-Confusion begünstigt. In allen Klassen außer RSA kam die Slope-Height-Confusion relativ konsistent vor. Dies spricht dafür, dass es sich hierbei nicht um einen Flüchtigkeitsfehler, sondern eine systematische Fehlstrategie handelt. Diese Interpretation bezieht auch mit ein, dass es keine anderen verstärkt auftretenden Fehler gab. Untersucht man trotz der ungewohnten Aufgabenstellung weitere Fehler in der offenen Aufgabe SH3, so fällt zumindest in einigen Fällen auf, dass Lernende im s-t-Diagramm auf markante Punkte wie die (ungleichen) Startpunkte oder die Schnittpunkte mit den Intervallgrenzen fokussieren, den Transfer zum Vergleich der Geschwindigkeit aber nicht leisten konnten. Dies mag – wie bereits erwähnt – auf die fehlende Geläufigkeit solcher Aufgaben zurückzuführen sein.

5.2 Zusammenfassung Lehrerergebnisse

Die Forschungsfragen 3 und 4 zielen auf das fachdidaktische Wissen der Lehrkräfte ab. Die entsprechenden Ergebnisse sind vor dem Hintergrund der begrenzten Lehrerfahrung der Stichprobe zu interpretieren. Wie oben argumentiert, erscheint die Untersuchung dieser Zielgruppe im Zusammenhang mit der Entwicklung einer Lehrerfortbildung jedoch sinnvoll, da sie prädestiniert für die Teilnahme an entsprechenden Unterstützungsmaßnahmen ist (vgl. Blömeke & Kaiser, 2015; Blömeke et al., 2014). Zudem ermöglicht die Untersuchung dieser Stichprobe eine Verbreiterung der Forschungsbasis zum Professionswissen von Junglehrern mit einem bisher mangelndem funktionen-spezifischen Fokus.

Bei der Interpretation der erwarteten Fehlerhäufigkeiten sollte beachtet werden, dass diese in den Interviews auf Grundlage von sechs konkreten, den Lehrkräften vorgelegten Items besprochen wurden (siehe Tabelle 2 im Anhang). Auf Schülerebene wurde neben diesen Items auch auf Parallelitems im jeweils anderen Aufgabenformat eingegangen, die teilweise deutlich andere Lösungshäufigkeiten aufwiesen. Aus diesem Grund wird die Einschätzung der Lehrkräfte zu den jeweiligen Schülerergebnissen in den vorgelegten Aufgaben in Bezug gesetzt und es sollten keine verallgemeinernden Schlüsse auf Parallelitems gezogen werden.

Der Abgleich zwischen den von den Lehrkräften genannten / erwarteten und den empirisch festgestellten Fehlern beim graphisch-algebraisch Darstellungswechsel ergibt ein eher schwaches Bild: Selbst nach Vorlage eines Fehlerbeispiels erkannten die Lehrkräfte nur teilweise den empirisch häufigsten Fehler Fokus auf Achsenschnittpunkte und stellten keine Verbindung dieses Fehlerbildes zwischen den beiden Richtungen des graphisch-algebraischen Darstellungswechsels her. Lediglich Herr Ginger erwartete den Fehler in seiner eigenen Klasse, obwohl er in allen Klassen (teilweise dominant) vorkam. Die Überschätzung der Lösungshäufigkeiten fiel in den Klassen RSB und RSC, in denen die Lehrkräfte den Fokus auf Achsenschnittpunkte nicht kannten und erwarteten, am deutlichsten aus. Die von den Lehrern erwarteten Schülerschwierigkeiten wie Vorzeichenfehler oder eine Kehrbruchbildung der Steigung konnten empirisch nicht bestätigt werden; lediglich ein erwarteter fehlender Lösungsansatz wurde in der Stichprobe vorgefunden.

Die Interviews illustrieren, dass sich die befragten Lehrkräfte nur wenig mit Gründen für Schwierigkeiten bei Textaufgaben auseinandersetzen. Von den vier Lehrkräften nannte lediglich Herr Cesar die Übernahme der Textreihenfolge in die Funktionsgleichung als möglichen Fehler im Zusammenhang mit der vorgelegten Textaufgabe und erwartete ihn in seiner Klasse. Die drei anderen Lehrkräfte erkannten und erwarteten dies nicht, sondern nannten als Grund für den vorgelegten Fehler ein zufälliges Raten der Schüler. Auch wenn dies natürlich grundsätzlich möglich ist, so widersprechen die häufige Auswahl des Distraktors Textreihenfolge in den Single-Choice-Aufgaben sowie die in zwei Klassen hohe Fehlerkonsistenz dennoch einer generellen Ratestrategie beim Lösen. Ein Raten wäre auf Grundlage der vorliegenden Ergebnisse nur zwischen richtigem Ergebnis und dem Distraktor Textreihenfolge einigermaßen plausibel, wobei auch hier die teilweise hohe Fehlerkonsistenz eher auf eine bewusste Auswahl hindeutet. Obwohl sich das fachdidaktische Wissen der Lehrkräfte in Bezug auf typische Fehler bei Textaufgaben als begrenzt herausstellte, entsprachen die von den Lehrern erwarteten Lösungshäufigkeiten in den Klassen G, RSA und RSB weitgehend den empirischen Ergebnissen. Dies ist in den Klassen RSA und RSB hauptsächlich darauf zurückzuführen, dass die jeweiligen Lehrkräfte ihren Schülern kaum Lösungsansätze zutrauten und Textaufgaben als im Allgemeinen sehr schwierig für die Lernenden einschätzten. Sie nahmen die Schülerprobleme demnach wahr, setzten sich aber kaum mit möglichen Ursachen auseinander. Obwohl Herr Cesar den Schülerfehler Überbetonung der Textreihenfolge kannte und in seiner Klasse erwartete, überschätzte er die Lösungshäufigkeit stärker als seine Kollegen. Dies könnte möglicherweise durch seine sehr geringe Lehrerfahrung erklärt werden, zumal Probleme mit Textaufgaben nicht auf den Inhaltsbereich Funktionen beschränkt sind.

Im Gegensatz zum Fokus auf Achsenschnittpunkte und der Überbetonung der Textreihenfolge (er)kannten alle vier Lehrkräfte den Graph-als-Bild-Fehler und erwarteten ihn zumindest im Single-Choice-Format in den eigenen Klassen. Die Bekanntheit dieses Fehlers könnte in Veröffentlichungen im Zusammenhang mit PISA 2000 (z. B. OECD, 2000) begründet liegen. Während Herr Ginger die Lösungshäufigkeiten in seiner Klasse aufgrund der nicht-Behandlung vergleichbarer Aufgaben sehr stark unterschätzte, spiegelten die Einschätzungen der Realschullehrkräfte die jeweiligen Schülerergebnisse adäquat wider. Lediglich die Erwartung, dass den Schülern die offene Aufgabe schwerer fallen würde als die entsprechende Single-Choice-Aufgabe, fand sich empirisch nicht bestätigt.

Bei der Aufgabe zur Diagnose der Slope-Height-Confusion ist auffällig, dass zwei der vier Lehrkräfte zunächst selbst Verständnisprobleme mit der verwendeten Aufgabe zeigten. Den vorgelegten Fehler erkannten sie erst nach einigem Überlegen, während die beiden anderen Lehrkräfte diesen gleich zu Beginn genannt hatten. Herr Albert und Frau Beck schätzten die Lösungshäufigkeiten in den eigenen Klassen weitgehend konform zu den Schülerergebnissen ein. Herr Cesar wollte aufgrund fehlender Erfahrung mit vergleichbaren Aufgaben keine quantitative Prognose abgeben, lag mit seiner Erwartung großer Schülerschwierigkeiten aber richtig. Ähnlich wie bei den Aufgaben zur Diagnose des Graph-als-Bild-Fehlers hatte Herr Ginger vergleichbare Aufgaben nicht behandelt und unterschätzte seine Klasse in den Lösungshäufigkeiten stark.

5.3 Implikationen für Theorie und Praxis

Bezüglich des fachdidaktischen Wissens der vier befragten Lehrkräfte lässt sich festhalten, dass lediglich der Graph-als-Bild-Fehler allen bekannt war und in den eigenen Klassen erwartet wurde. Bei der Slope-Height-Confusion und dem Fokus auf Achsenschnittpunkte zeigte sich in Bezug auf das Wissen und die Erwartungen der Lehrkräfte ein heterogenes Bild. Im Zusammenhang mit der vorgelegten Textaufgabe stellte sich heraus, dass kaum über mögliche Gründe für Probleme mit Textaufgaben reflektiert und Fehler vereinfachend durch Raten erklärt wurden. Diese Befunde sind in Hinblick auf ihre Heterogenität und die Unkenntnis von – in den eigenen Klassen verbreiteten – Lernschwierigkeiten konsistent mit Ergebnissen anderer Forschergruppen und deuten auf entsprechenden Verbesserungsbedarf hin (Busch et al., 2015; Hadjidemetriou & Williams, 2002; Ostermann et al., 2015). Dies betrifft auch die in den offenen Aufgaben diagnostizierten Schülerfehler, die über den Fokus der Studie von Nitsch (2015) hinausgehen.

Ein Zusammenhang zwischen der adäquaten Einschätzung von Lösungshäufigkeiten und fachdidaktischem Wissen zu möglichen Lernschwierigkeiten, wie Ostermann und Kollegen (2015) es nahelegen, konnte in dieser Studie höchstens stellenweise festgestellt werden und ließ sich in der vorliegenden (kleinen) Stichprobe nicht systematisch bestätigen. Die Einschätzungsgüte bezüglich Lösungshäufigkeiten war je nach Aufgabe und Klasse sehr unterschiedlich. Insgesamt zeigte sich, dass die Lehrkräfte bei Aufgabentypen, die sie im Unterricht verstärkt behandelt hatten (insbesondere graphisch-algebraische Darstellungswechsel), meist deutlich höhere Lösungshäufigkeiten erwarteten als bei Aufgaben zum situativ-graphischen Darstellungswechsel, die in ihrem Unterricht kaum eine Rolle spielten. Im Gegensatz zu dieser Einschätzung fielen die empirischen Lösungshäufigkeiten auf Schülerebene bei den Aufgaben zum situativ-graphischen Darstellungswechsel tendenziell am höchsten aus. Die Aufgabenkultur der vier Lehrer – im Sinne von tatsächlich im Unterricht eingesetzten Aufgaben – hatte demnach einen maßgeblichen Einfluss darauf, ob sie Lösungshäufigkeiten eher über- oder unterschätzten (vgl. auch Hadjidemetriou & Williams, 2002). Konsistent mit Ergebnissen von Nathan und Koedinger (2000) unterschätzten die Lehrkräfte die Lösungshäufigkeiten von Aufgaben mit Realitätsbezug meist, während die Lösungshäufigkeiten von abstrakt-mathematischen Aufgaben überschätzt wurden. Dies könnte neben dem Einfluss durch die eigene Aufgabenkultur insbesondere beim Gymnasiallehrer Herr Ginger auf den Expert-Blind-Spot zurückzuführen sein, da sein fachwissenschaftlich geprägtes Universitätsstudium den Blick für Probleme von Lernenden erschweren könnte. Im Gegensatz zur Studie von Ostermann und Kollegen (2015) stellte sich in dieser Stichprobe die Überschätzung von Lösungshäufigkeiten bei Aufgaben mit Graphen nicht grundsätzlich als stärker heraus als bei anderen Aufgaben.

Betrachtet man auf Schülerebene die Fehlerhäufigkeiten über alle Klassen hinweg, so finden sich im Single-Choice-Format häufig stärkere Ausprägungen als bei Nitsch (2015). Dies ist einerseits im Sinne der Grundlagenforschung zu beachten, da anscheinend das Aufgabenformat in dieser Stichprobe einen maßgeblichen Einfluss auf das Vorkommen bestimmter Fehler hatte. Da sich dieser Befund nicht nur bei für die Schüler eher unbekannten Aufgabentypen zeigte, kann er nicht (nur) auf mangelnde Geläufigkeit zurückgeführt werden und verdient weitere Beachtung. Andererseits offenbaren diese im Vergleich zu Nitsch höheren Fehlerquoten in Kombination mit den Ergebnissen zum fachdidaktischen Wissen der Lehrkräfte diesbezüglichen Nachholbedarf in der Aus- und Fortbildung von Lehrkräften, die letztendlich auf die Unterstützung von Schülerlernen abzielt.

Die Befunde dieser Studie auf Schüler- und Lehrerebene legen für die geplante Lehrerfortbildung nahe, alle in dieser Vorstudie festgestellten Lernschwierigkeiten zu berücksichtigen. Im Rahmen einer solchen Lehrerfortbildung ist es sicher sinnvoll, Ergebnisse verschiedener Studien vorzulegen und dabei insbesondere auf deren Heterogenität einzugehen. Dabei liefert die vorliegende Studie insbesondere Hinweise auf mögliche Unterschiede der Richtung des Darstellungswechsels (Fokus auf Achsenschnittpunkte), des Aufgabenformats sowie der einbezogenen Klassen. Vor dem Hintergrund der identifizierten Lehrererwartungen erscheint es ebenso sinnvoll, die Verwechslung der Parameter, Vorzeichenfehler und die Bildung des Kehrbruchs in die Fortbildung einzubeziehen, aber in den jeweiligen Häufigkeiten zu relativieren. Da die fokussierten Fehler in allen Klassen gefunden wurden, erscheint eine schulartübergreifende Lehrerfortbildung sinnvoll. Inzwischen wurde diese Fortbildung mit den genannten Schwerpunkten entwickelt und in mehreren Zyklen durchgeführt. Dabei wurde insbesondere mit den Lehrkräften besprochen, wie auf die genannten Lernschwierigkeiten didaktisch sinnvoll reagiert werden kann bzw. wie diese durch den Aufbau belastbarer Vorstellungen möglichst vermieden werden können. Zu diesem Zweck wurden im Vorfeld der Fortbildung langjährige Experten aus Schule, Studienseminar und Hochschule zur Vorbeugung von bzw. zum Umgehen mit diesen Lernschwierigkeiten befragt. Zudem wurden in der Fortbildungsplanung verschiedene Merkmale umgesetzt, die sich empirisch als wirksam gezeigt haben (z. B. Lipowsky, 2013): So gewährleistete die Schwerpunktsetzung auf die genannten Fehler eine hohe Inhaltsspezifizität. Außerdem wurde die Fortbildung langfristig angelegt, so dass die Lehrkräfte die Möglichkeit hatten, die thematisierten Inhalte im eigenen Unterricht zu erproben und in der Fortbildung gemeinsam zu reflektieren. Insbesondere wurde den Fortbildungsteilnehmern angeboten, Schülertestungen in den eigenen Klassen durchführen zu lassen und die Ergebnisse im Rahmen der Fortbildung zu diskutieren. Darüber hinaus ermöglichte die kleine Gruppengröße von maximal zehn Teilnehmern eine individuelle Ausrichtung und insbesondere die Gabe von lernförderlichem Feedback.

Eine Interpretation der Ergebnisse auf Schüler- und Lehrerebene sollte auch in Hinblick auf die Aufgabenkultur erfolgen: Insgesamt scheinen bei den befragten Lehrkräften abstrakte algebraisch-graphische Darstellungswechsel im Unterricht zu dominieren (vgl. auch Hadjidemetriou & Williams, 2002). Der Einbezug von Situierungen wird entgegen der Bildungsstandards (KMK, 2004; Land Baden-Württemberg, 2004) auf die Bearbeitung von Textaufgaben und Füllgraphen reduziert – sofern diese überhaupt eine Rolle spielen. Algorithmische „Rezepte“ ohne inhaltliche und verständnisfördernde Vernetzungen nehmen demnach den meisten Platz im Unterricht dieser Lehrkräfte ein – anscheinend ohne, dass in diesen Bereichen zufriedenstellende Ergebnisse erzielt werden. Ein solcher Fokus auf innermathematische Aufgaben deutet auf die von Nathan und Koedinger (2000) beschriebene Perspektive einer symbol-precedence (s. Abschnitt 2.3) hin. Dies birgt die Gefahr, dass wesentliche Aspekte der Funktionenlehre, insbesondere belastbare Vorstellungen, zu kurz kommen. Zudem widerspricht es den Zielen der Bildungsstandards (z. B. KMK, 2004; Land Baden-Württemberg, 2004), und mag auch zu verstärkten Problemen bei der Auseinandersetzung mit komplexeren / höhergradigen Funktionsklassen führen. Gerade in den Klassen 7 und 8, wo der Funktionsbegriff aus formal-mathematischer Sicht eingeführt wird und deshalb belastbare Vorstellungen besonders bedeutsam sind, können Situierungen leicht mit den abstrakten Darstellungen Funktionsgraph und -gleichung verknüpft werden und dadurch das Verständnis unterstützen (vgl. z. B. Shell Centre for Mathematical Education, 1985). Da die vorliegenden Schülerergebnisse auf einen diesbezüglich verbesserungswürdigen Unterricht hindeuten, läge in dieser Fokussierung eine große Chance.

5.4 Ausblick und Implikationen für zukünftige Forschung

Die Erkenntnisse dieser Studie wurden für die Entwicklung einer mathematikdidaktischen Lehrerfortbildung genutzt, deren Evaluationsdaten auf Schüler- und Lehrerebene aktuell ausgewertet werden. Auf diesem Weg können die oben geschilderten Befunde zumindest teilweise in einer größeren Stichprobe überprüft werden. Im Hinblick auf die Grundlagenforschung und motiviert durch Vergleiche mit Nitsch (2015) wäre es hierbei insbesondere von Interesse an einer größeren Stichprobe zu untersuchen, inwieweit die Richtung des Darstellungswechsels (Fokus auf Achsenschnittpunkte) sowie das Aufgabenformat zu unterschiedlichen Fehlerhäufigkeiten führt. Nitsch hatte eine signifikant höhere Fehlerhäufigkeit im Single-Choice-Format lediglich beim Graph-als-Bild-Fehler festgestellt. Obige Ergebnisse legen dies auch für die Fehler Fokus auf Achsenschnittpunkte und Überbetonung der Textreihenfolge nahe.

5.5 Grenzen der Studie

Die in diesem Artikel vorgestellten Befunde sind aufgrund der kleinen Stichprobengröße insbesondere auf Lehrerebene nicht verallgemeinerbar. Die geringe Lehrerfahrung der untersuchten Lehrkräfte stellte sie einerseits als eine für die vorliegende Studie im Bereich der elementaren Funktionen interessante Zielgruppe heraus (vgl. Blömeke & Kaiser, 2015; Blömeke et al., 2014), andererseits geht damit einher, dass die entsprechenden Ergebnisse vor dem Hintergrund ihrer sehr begrenzten Lehrerfahrung interpretiert werden sollten. Aufgrund der Art der Stichprobenziehung (Einbezug von Gymnasial- und Realschulklassen eines Schulzentrums) kann davon ausgegangen werden, dass das allgemeine Leistungsspektrum an Schulen in Baden-Württemberg in dieser Stichprobe weitgehend abgebildet wurde. Dabei wurden die mutmaßlich schwächsten Lerner von Haupt- bzw. Werkrealschule bewusst nicht einbezogen, da diese die hier zentralen Inhalte weitgehend in Klassenstufe 10 bearbeiten. Die Fragestellung, inwieweit die aus der Literatur abgeleiteten Lernschwierigkeiten auch in den Lehr-Lernkontexten potentieller Fortbildungsteilnehmer anzutreffen sind, konnte demnach – zumindest exemplarisch – auch in dieser kleinen Stichprobe zufriedenstellend beantwortet werden. Auf Lehrerebene handelt es sich aufgrund der kleinen Stichprobe und der spezifischen demographischen Eigenschaften der befragten Lehrkräfte um Einzelbefunde, die sich dennoch für die Fortbildungskonzeption als sehr aufschlussreich zeigten.

Die Einschätzung von Lösungshäufigkeiten in bestimmten Aufgaben ist mehrere Monate nach Behandlung eines Themas nachvollziehbarerweise schwierig und könnte durch spezifische Vergessenseffekte verzerrt sein. Da in den Klassen G und RSA das Lehrerinterview vor dem Schülertest stattfand, hatten Herr Ginger und Herr Albert im Gegensatz zu Frau Beck und Herrn Cesar nicht die Gelegenheit, sich die Schüleraufgaben im Vorfeld anzuschauen bzw. ihre Eindrücke aus der Schülertestung im Interview aufzugreifen. Ein Vergleich der Lehrerantworten deutet aber darauf hin, dass diese ungleichen Rahmenbedingungen keinen systematischen Effekt hatten und die Lehrkräfte während der Schülertestung lediglich eine oberflächliche Beobachterrolle einnahmen.

In Bezug auf die Schülerergebnisse sollte beachtet werden, dass der lange zeitliche Abstand eine mögliche Begründung für niedrige Häufigkeiten korrekter Bearbeitungen sowie von Nicht- und Falschbearbeitungen im offenen Aufgabenformat darstellen könnte. Möglicherweise war das Aufgabenformat Single-Choice für einige Lernende ungewohnt und verstärkte augenscheinlich einige Fehlerhäufigkeiten. Dies war in diesem Umfang nicht erwartet worden, da sich bei Nitsch (2015) nur bei den Aufgaben zur Diagnose des Graph-als-Bild-Fehlers ein systematischer Unterschied nach Aufgabenformat gezeigt hatte. Da auch den Lehrkräften mehrheitlich offene Aufgaben vorgelegt wurden, sollten hauptsächlich diese beachtet werden. Zudem muss bei Aufgaben im Single-Choice-Format immer die Möglichkeit eines zufälligen Ankreuzens berücksichtigt werden.

Anmerkungen

[1] In diesem Artikel wird zugunsten der Lesbarkeit bei Personenbezeichnungen und zusammengesetzten Begriffen die männliche Form benutzt. Geschlechtsspezifisch sind diese Bezeichnungen jedoch neutral zu verstehen.

[2] ProfiL9 war ein Teilprojekt des durch das Ministerium für Wissenschaft, Forschung und Kunst Baden-Württemberg geförderten Promotionskollegs Professionalisierung im Lehrberuf. Siehe z. B. https://www.ph-heidelberg.de/mathematik/forschung-projekte/professionalisierung-im-lehrberuf.html

[3] Da keine höhergradigen Funktionsklassen als lineare Funktionen betrachtet werden, wird die Bezeichnung elementare Funktionen verwendet.

Danksagung

Diese Studie wurde durch das Ministerium für Wissenschaft, Forschung und Kunst Baden-Württemberg sowie durch die Pädagogische Hochschule Heidelberg gefördert.

Literatur

Adu-Gyamfi, K. (2007). *Connections among representations: The nature of students' coordinations on a linear function task.* Raleigh: Mathematics science and technology education.

Ainsworth, S. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction*, *16*, 183–198.

Anders, Y., Kunter, M., Brunner, M., Krauss, S. & Baumert, J. (2010). Diagnostische Fähigkeiten von Mathematiklehrkräften und ihre Auswirkungen auf die Leistungen ihrer Schülerinnen und Schüler. *Psychologie in Erziehung und Unterricht, 57*(3), 175–193.

Ball, D. L., Hoover Thames, M. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*, 389–407.

Barzel, B., Hußmann, S. & Leuders, T. (2005). Der "Funktionenführerschein": Wie Schülerinnen und Schüler das Denken in Funktionen wiederholen und festigen können. *Praxis der Mathematik, 47*(2), 20–25.

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., et al. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American Educational Research Journal, 47*(1), 133–180.

Berliner, D. C. (2004). Describing the behavior and documenting the accomplishments of expert teachers. *Bulletin of Science, Technology & Society, 24*(3), 200–212.

Blömeke, S. & Kaiser, G. (2015). *Teacher Education and Development Study: Follow Up (TEDS-FU).* Abschlussbericht. https://www.teds-unterricht.uni-hamburg.de/bilder/abschlussbericht.pdf [10.7.2019]

Blömeke, S., Kaiser, G. & Lehmann, R. (2008). *Professionelle Kompetenz angehender Lehrerinnen und Lehrer. Wissen, Überzeugungen und Lerngelegenheiten deutscher Mathematik-Studierender und -referendare. Erste Ergebnisse zur Wirksamkeit der Lehrerausbildung.* Münster: Waxmann.

Blömeke, S., König, J., Busse, A., Suhl, U., Benthien, J., Döhrmann, M. & Kaiser, G. (2014). Von der Lehrerausbildung in den Beruf – Fachbezogenes Wissen als Voraussetzung für Wahrnehmung, Interpretation und Handeln im Unterricht. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft 17*, 509–542.

Blömeke, S., Schwarz, B., Kaiser, G., Seeber, S. & Lehmann, R. (2009). Untersuchungen zum mathematischen und mathematikdidaktischen Wissen angehender GHR- und Gymnasial-lehrkräfte. *Journal für Mathematik-Didaktik, 30*(3/4), 232–255.

Blum, W. & Leiss, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der „Tanken"-Aufgabe. *mathematik lehren* 128, 18–21.

Bromme, R. (1992). *Der Lehrer als Experte. Zur Psychologie des professionellen Wissens*. Bern: Huber.

Büchter, A. & Henn, H.-W. (2010). *Elementare Analysis. Von der Anschauung zur Theorie*. Heidelberg: Spektrum.

Buchholtz, N. & Kaiser, G. (2013). Professionelles Wissen im Studienverlauf: Lehramt Mathematik. In S. Blömeke, A. Bremerich-Vos, G. Kaiser, G. Nold, H. Haudeck, J.-U. Keßler & K. Schwippert (Hrsg.), *Kompetenzen im Studienverlauf: Weitere Ergebnisse zur Deutsch-, Englisch- und Mathematiklehrerausbildung aus TEDS-LT* (S. 107–143). Münster: Waxmann.

Busch, J., Barzel, B. & Leuders, T. (2015). Die Entwicklung eines kategorialen Kompetenzmodells zur Erfassung diagnostischer Kompetenzen von Lehrkräften im Bereich Funktionen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *36*(2), 315–338.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Peterson, P. L., Chiang, C.-P. & Loef, M. (1989). Using knowledge of children's mathematics thinking in classroom teaching: An experimental study. *American Educational Research Journal*, *26*, 499–531.

Chandler, P. & Sweller, J. (1991). Cognitive load theory and the format of instruction. *Cognition and Instruction, 8*(4), 293–332.

Clement, J. (1982). Algebra word problem solutions: Thought processes underlying a common misconception. *Journal for Research in Mathematics Education, 13*(1), 16–30.

Doorman, M., Drijvers, P., Gravemeijer, K., Boon, P. & Reed, H. (2012). Tool use and the development of the function concept: from repeated calculations to functional thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education, 10*(6), 1243–1267.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics, 61*, 103–131.

Hadjidemetriou C., & Williams, J. S. (2002). Teachers' pedagogical content knowledge: graphs, from a cognitivist to a situated perspective. In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, S. 57–64). Norwich, UK: University of East Anglia.

Hadjidemetriou C. & Williams J. S. (2001). Children's graphical conceptions: assessment of learning for teaching. In M. van den Heuvel-Panthuizen (Hrsg.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, S. 89–96). Utrecht, the Netherlands: PME.

Heinze, A., Star, J. R. & Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. *ZDM Mathematics Education 41*, 535–540.

Hußmann, S. & Laakmann, H. (2011). Eine Funktion - viele Gesichter: Darstellen und Darstellungen wechseln. *Praxis der Mathematik, 53*(38), 2–11.

Janvier, C. (1978). *The interpretation of complex cartesian graphs representing situations - studies and teaching experiments. Dissertation*. Nottingham: University of Nottingham.

Kleickmann, T., Richter, D., Kunter, M., Elsner, J., Besser, M., Krauss, S. & Baumert, J. (2013). Teachers' content knowledge and pedagogical content knowledge: the role of structural differences in teacher education. *Journal for Teacher Education 64*(1), 90–106.

KMK (2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich*. München: Wolters Kluwer.

KMK (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*. München: Wolters Kluwer.

KMK (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife*. Köln: Wolters Kluwer.

Krauss, S., Neubrand, M., Blum, W., Baumert, J., Brunner, M., Kunter, M. et al. (2008). Die Untersuchung des professionellen Wissens deutscher Mathematik-Lehrerinnen und -Lehrer im Rahmen der COACTIV-Studie. *Journal für Mathematik-Didaktik, 29* (3/4), 233–258.

Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S. & Neubrand, M. (Hrsg.). (2011). *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV.* Münster: Waxmann.

Land Baden-Württemberg (2004). *Bildungsstandards für Mathematik. Realschule – Klassen 6, 8, 10.* http://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lsbw/Bildungsplaene/Bildungsplaene-2004/Bildungsstandards/Realschule_Bildungsplan_Realschule_Gesamt.pdf [6.2.2018].

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research 60*(1), 1–64.

Leuders, T., Dörfler, T., Leuders, J. & Philipp, K. (2017). Diagnostic competence of mathematics teachers - Unpacking a complex construct. In T. Leuders, J. Leuders & K. Philipp (Hrsg.), *Diagnostic competence of mathematics teachers – Unpacking a complex construct in teacher education and teacher practice* (S. 3–31). Heidelberg: Springer.

Lipowsky, F. (2013). Theoretische und empirische Perspektiven zur Wirksamkeit von Lehrerfortbildung. In E. Terhart, H. Bennewitz & M. Rothland, *Handbuch der Forschung zum Lehrerberuf*. Münster: Waxmann.

Malle, G. (2000). Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. *mathematik lehren 103*, 8–11.

McDermott L., Rosenquist, M. & vanZee, E. (1987). Student difficulties in connecting graphs and physics: Example from kinematics. *American Journal of Physics, 55*(6), 503–513.

Moschkovich, J. N. (1990). Students' interpretations of linear equations and their graphs. In G. Booker, P. Cobb, & T. N. de Mendicuti (Hrsg.), *Proceedings of the 14th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, S. 109–116). Mexico: Cinvestav.

Moschkovich, J. N. (1999). Students' use of the x-intercept as an instance of a transitional conception. *Educational Studies in Mathematics, 37*, 169–197.

Nathan, M. J. & Koedinger, K. R. (2000). An investigation of teachers' beliefs of students' algebra development. *Cognition and Instruction*, *18*(2), 209–237.

Niss, M. A. (2014). Functions Learning and Teaching. In S. Lerman (Hrsg.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (S. 238–241). Dordrecht: Springer.

Nitsch, R. (2015). *Diagnose von Lernschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammenhänge.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

OECD Programme for International Student Assessment (2000). *PISA 2000. Beispielaufgaben aus dem Mathematiktest.* https://www.mpib-berlin.mpg.de/Pisa/ Beispielaufgaben_Mathematik.PDF [8.12.2017].

Ostermann, A., Leuders, T. & Nückles, M. (2015). Wissen, was Schülerinnen und Schülern schwer fällt. Welche Faktoren beeinflussen die Schwierigkeitseinschätzung von Mathematikaufgaben? *Journal für Mathematik-Didaktik, 36*(1), 45–76.

Schoenfeld, A., Smith, J. & Arcavi, A. (1993). Learning: The microgenetic analysis of one student's evolving understanding of a complex subject matter domain. In R. Glaser (Hrsg.), *Advances in Instructional Psychology 4* (S. 55–175). Hillsdale: Erlbaum.

Selden, A. & Selden, J. (1992). Research perspectives on conceptions of function: Summary and overview. In E. Dubinsky, & G. Harel (Hrsg.), *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy* (S. 1–16). United States: The Mathematical Association of America.

Shell Centre for Mathematical Education (1985). *The language of functions and graphs. An examination module for secondary schools.* Manchester: Joint Matriculation Board.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harward Educational Review, 57,* 1–22.

Vogel, M. (2006). *Mathematisieren funktionaler Zusammenhänge mit multimediabasierter Supplantation. Theoretische Grundlegung und empirische Untersuchung*. Hildesheim: Franzbecker.

Vogel, M., Girwidz, R. & Engel, J. (2007). Supplantation of mental operations on graphs. *Computers & Education 49*(2007), 1287–1298.

Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematikdidaktik, 10*, 3–37.

Weinert, F. E. (2000). Lehren und Lernen für die Zukunft – Ansprüche an das Lernen in der Schule. *Pädagogische Nachrichten Rheinland-Pfalz*, Heft 2/00 – Schulleben Schulkultur, Sonderseiten 1–18.

Wittmann, G. (2008). *Elementare* Funktionen und ihre Anwendungen. Heidelberg: Springer.

Zindel, C. (2019). *Den Kern des Funktionsbegriffs verstehen. Dortmunder Beiträge zur Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Anschrift der Verfasser

Ute Sproesser
Universität Koblenz-Landau, Campus Koblenz
Mathematisches Institut
Universitätsstr. 1
56070 Koblenz
utesproesser@uni-koblenz.de

Markus Vogel
Pädagogische Hochschule Heidelberg
Institut für Mathematik
Im Neuenheimer Feld 561
69120 Heidelberg
Vogel@ph-heidelberg.de

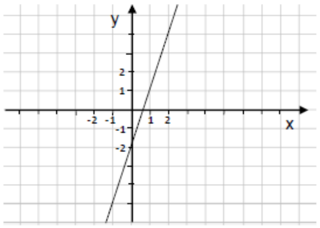
Tobias Dörfler
Pädagogische Hochschule Heidelberg
Institut für Psychologie
Keplerstraße 87
69120 Heidelberg
Doerfler@ph-heidelberg.de

Anhang

Schüleraufgabe	Vorgelegter Fehler

FA1:

Gegeben ist der Graph der Funktion f:



Stelle passend zum Funktionsgraphen eine Gleichung auf.

(Item adaptiert nach Nitsch, 2015, S. 159)

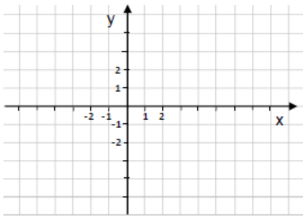
Parallelitems: FA2 (SC) und FA3 (SC)

Vom Schüler aufgestellte Funktionsgleichung:
$y = 0{,}6x - 2$

FA4:

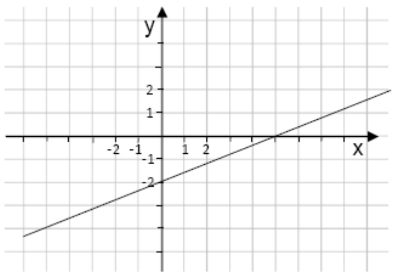
Gegeben ist folgende Funktionsgleichung:
y = 5x − 2

Zeichne den Graphen dieser Funktion in das Koordinatensystem ein.



Parallelitems: FA5 (SC) und FA6 (SC)

Schülergraph:



TR1:

Gegeben ist folgende Situation:

„In einem Aquarium mit 60l Wasser befindet sich ein kleines Loch, durch welches pro Stunde etwa 1,2l Wasser austritt."

Stelle die Funktionsgleichung auf!

(Item adaptiert nach Nitsch, 2015, S. 160)

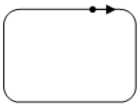
Parallelitems: TR2 (SC; Kontext Taxifahrt) und TR3 (SC; Kontext abbrennende Kerze)

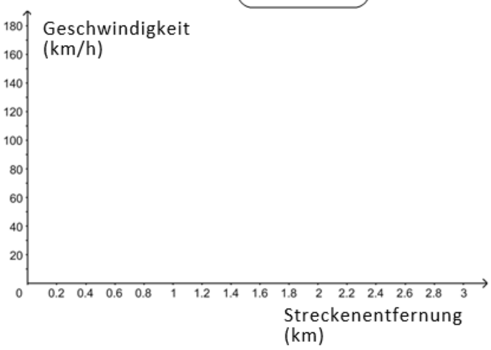
Vom Schüler aufgestellte Funktionsgleichung:
$y = 60x - 1{,}2$

GB1:

Zeichne den Geschwindigkeitsgraphen eines Rennwagens in der zweiten Runde auf folgender Rennstrecke:

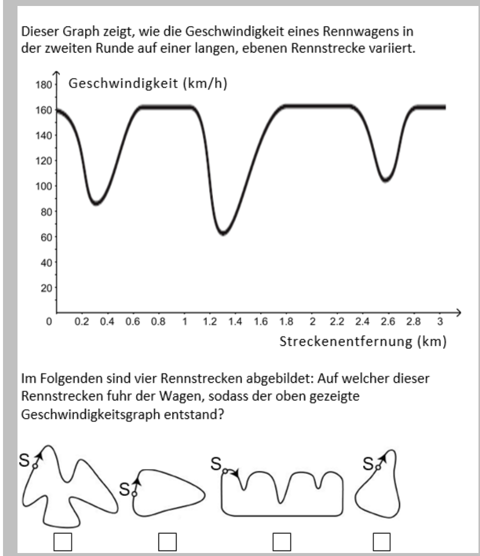
Start





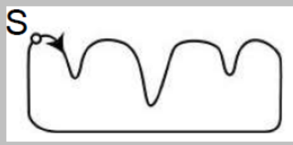
Aufgrund von Aufgabenteil GB2 wurde hierzu kein Schülerfehler vorgelegt.

GB2:



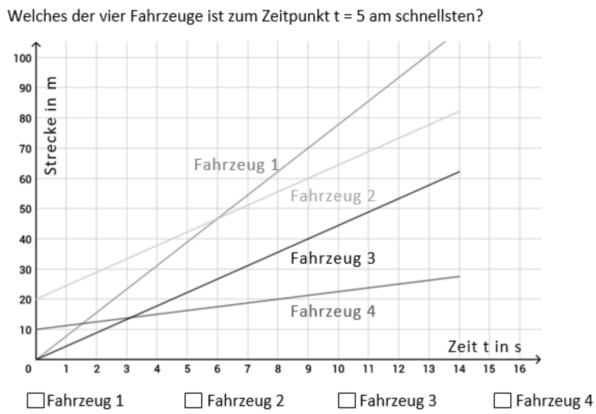
(Item adaptiert nach OECD, 2000, S. 9 f.; vgl. Nitsch, 2015, S. 141)
Parallelitem: GB3 (SC; Kontext: v-t-Diagramm Skifahrer)

Schülerauswahl



(Hinweis: Auf den ersten Distraktor der nebenstehenden Aufgabe, der im weiteren Sinn auch als eine Art Graph-als-Bild-Fehler angesehen werden kann, wird in diesem Artikel aus Umfangsgründen nicht explizit eingegangen.)

SH1:



(Item adaptiert nach Nitsch, 2015, S. 220)
Parallelitems: SH2 (SC; Kontext: Läufergeschwindigkeiten in *s*-*t*-Diagramm) und SH3 (offen; Kontext: Läufergeschwindigkeiten in *s*-*t*-Diagramm)

Schülerauswahl:
Fahrzeug 2

Tab. 2: Übersicht über die vorgelegten Schüleraufgaben und -fehler.

Bemerkungen: offen … offenes Aufgabenformat; SC … Single-Choice-Format