Mathematische Wanderpfade unter einer didaktischen Perspektive

NILS BUCHHOLTZ, OSLO

***Zusammenfassung**: Zusammenfassung: Mathematische Wanderpfade erleben derzeit als außerschulische Lernform für den Mathematikunterricht eine Renaissance. Die Lernarrangements, bei denen Schülerinnen und Schüler Mathematikaufgaben im Freien bearbeiten, ermöglichen bei entsprechender Aufgabengestaltung verschiedene kontextbezogene Modellierungsaktivitäten. Insbesondere wenn mathematische Wanderpfade digital unterstützt werden, ergeben sich Möglichkeiten und Potenziale der Förderung fachlichen Lernens. Bisher sind mathematische Wanderpfade jedoch noch nicht ausreichend didaktisch fundiert. Im Artikel werden drei zentrale didaktische Perspektiven auf mathematische Wanderpfade – das außerschulische Lernen, das Unterstützen mit digitalen Medien und das mathematische Modellieren – theoretisch diskutiert und im Hinblick auf die Durchführung von Wanderpfaden konkretisiert.*

***Abstract:** Mathematics trails are currently experiencing a renaissance as an extracurricular form of learning for mathematics lessons. Learning arrangements in which students work on mathematics tasks outdoors allow for various context-related modelling activities if the tasks are designed accordingly. Especially when mathematics trails are supported by digital media, there are possibilities and potentials for the promotion of mathematics learning. So far, however, mathematics trails are not yet sufficiently didactically described. In the article three central didactic perspectives on mathematics trails - extracurricular learning, support with digital media and mathematical modelling - are theoretically discussed and concretized with regard to the implementation of trails.*

1. Einleitung

Die Realisierung von außerschulischen Lerngelegenheiten im Mathematikunterricht durch mathematische Wanderpfade ermöglicht Schülerinnen und Schülern vielfältige Erfahrungen der konkreten Anwendbarkeit mathematischen Wissens in Zusammenhängen, denen sie im täglichen Leben begegnen. Dabei werden bei diesen Lernarrangements in Form einer Rallye Orte und aus mathematischer Sicht interessante Objekte im städtischen Raum oder im Umkreis der Schule aufgesucht, an denen Mathematikaufgaben bearbeitet werden (Buchholtz & Armbrust, 2018; Blane & Clark, 1984; Shoaf, Pollak & Schneider, 2004). Damit insbesondere der Erwerb von für das mathematische Modellieren zentralen Mathematisierungs- und Validierungskompetenzen gefördert werden kann, müssen die Aufgaben allerdings entsprechend anwendungsorientiert und konkret gestaltet werden (Buchholtz, 2018a). Sinnvolle Datenerhebungen lassen sich etwa integrieren, wenn relevante Größen, die für die Aufgabenbearbeitung erforderlich sind, direkt an realen Objekten durch Schätzen oder Messtätigkeiten ermittelt und anschließend in einen mathematischen Zusammenhang gebracht werden.

Mathematische Wanderpfade, die bereits seit den 1980er Jahren existieren, werden derzeit als außerschulische Lerngelegenheit wiederentdeckt (Ludwig, Bärtl, Zender & Buchholtz, 2019). Mehrheitlich wurden sie dabei bisher informell im Rahmen von freizeitpädagogischen Angeboten erstellt und eingesetzt. Sie geraten aber in der letzten Zeit als Ergänzung zum schulischen Mathematikunterricht in den Blick, weil das außerschulische Anwenden von Mathematik die Möglichkeit bereithält, „Mathematik auch in der Begegnung mit Situationen der Wirklichkeit“ (Winter, 2016, S. 262) erfahrbar zu machen. Damit kann u. a. eine hohe Motivation der Schülerinnen und Schüler einhergehen (Buchholtz & Armbrust, 2018). Auch neue technische Möglichkeiten verhelfen den Wanderpfaden zu einer Renaissance. Durch das Aufkommen und den Gebrauch mobiler Endgeräte wie Smartphones und Tablets wird eine digitale Unterstützung von Wanderpfaden ermöglicht, die für das Präsentieren und das Bearbeiten von Aufgaben einen didaktischen Mehrwert bereithalten kann (Cahyono & Ludwig, 2019; Buchholtz, Drexler & Vorhölter, 2019).

Unter Einnahme einer didaktischen Perspektive scheint allerdings noch nicht hinreichend beschrieben zu sein, wie mathematische Wanderpfade als Lernform im Bereich des außerschulischen Lernens, im Bereich des Einsatzes digitaler Medien und zur Ermöglichung von Modellierungsaktivitäten theoretisch eingeordnet werden können. Unter anderem bedarf es etwa beim Einsatz dieser Lernform im schulischen Mathematikunterricht der Klärung der Frage, welchen Beitrag zum mathematischen Kompetenzaufbau Wanderpfade zu leisten vermögen. Hierzu steht die empirische Forschung zu den Lernerträgen mit mathematischen Wanderpfaden noch am Anfang. Es finden sich zwar erste vergleichende Studien zur Motivation und zu den Lernerträgen von Schülerinnen und Schülern (Cahyono, 2018; Zender, 2019), häufig dominieren aber anekdotische

Berichte über Durchführungen mit kleinen Gruppen die wissenschaftliche Diskussion (vgl. Ernest, 1996). Dieser Artikel soll daher einen ersten theoretischen Beitrag zum Schließen dieses Forschungsbedarfs liefern, wenngleich sich die Frage nach den Lernerträgen natürlich stärker als empirische Fragestellung stellt, auf die im Rahmen dieses Artikels aber nicht eingegangen wird.

2. Mathematische Wanderpfade

Es finden sich unterschiedliche Begriffsbezeichnungen für mathematische Wanderpfade. Beispielsweise mathematische Spaziergänge (Buchholtz, 2018a) oder auch die englische Form mathematics trails (Zender, 2019). Einer der ersten Wanderpfade wurde von Blane und Clarke (1985) in Melbourne als Freizeitaktivität entworfen. Kaur (1990) übernahm die Idee für einen der ersten Trails in Singapur. Begrifflich charakterisieren Shoaf, Pollak und Schneider mathematische Wanderpfade als außerschulische lokale Entdeckungsaktivität:

> A mathematics trail is a walk to discover mathematics. A math trail can be almost anywhere – a neighborhood, a business district or shopping mall, a park, a zoo, a library, even a government building. The math trail map or guide points to places where walkers formulate, discuss, and solve interesting mathematical problems. (Shoaf et al., 2004, S. 6)

Die meisten mathematischen Wanderpfade orientieren sich an diesem Verständnis und sind daher primär als Formen *informellen Lernens* angelegt, d. h. das Lernen findet hier außerhalb von Bildungseinrichtungen statt und erfolgt in der Regel weder besonders strukturiert noch intentional (Brodowski, 2009). Es existieren jedoch bereits frühe Formen von mathematischen Wanderpfaden, die auch im Rahmen *formaler Bildung* in den schulischen Kontext und unter einer entsprechenden Lernzielrichtung eingebettet sind (Lumb, 1980). Die Bandbreite der mathematischen Inhalte in Wanderpfaden kann sich über die gesamte Schulmathematik erstrecken, so dass dementsprechend auch die Komplexität und der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben variieren können. Die Grundidee der mathematischen Wanderpfade ist dabei, dass Schülerinnen und Schüler mathematische Aufgaben an speziell ausgezeichneten Objekten in der Stadt oder in der Umgebung der Schule lösen, wobei relevante Größen abgeschätzt oder gemessen und in einen mathematischen Zusammenhang gebracht werden müssen (vgl. Kleine, Ludwig & Schelldorfer, 2012; Ludwig, Jesberg & Weiß, 2013; Buchholtz & Armbrust, 2018; Schreiber & Schulz, 2017). Wanderpfade existieren sowohl in Papier- und Bleistift-Form als auch durch digitale Medien unterstützt. Weil der Einsatz digitaler Medien zusätzliche didaktische Gestaltungsmöglichkeiten bereithält, die Lernprozesse unterstützen können, konzentriere ich mich in diesem Artikel daher insbesondere auf letzteres, zu ersterem sei auf Buchholtz und Armbrust (2018), verwiesen. Strukturell lassen sich dann mathematische Wanderpfade als eine informelle oder in formale Bildung eingebettete außerschulische Lernform für das Lernen und Anwenden von Mathematik begreifen, die durch digitale Medien unterstützt werden kann. Hieraus ergeben sich die drei didaktischen Perspektiven der Betrachtung der Wanderpfade innerhalb dieses Artikels. Im Folgenden wird zunächst der theoretische Hintergrund dieser Perspektiven dargestellt. In einem zweiten Teil des Artikels werden die drei didaktischen Perspektiven in Hinblick auf die Durchführung von mathematischen Wanderpfaden und anhand eines Beispiels konkretisiert.

3. Theoretischer Hintergrund

3.1 Außerschulisches Lernen im Mathematikunterricht

Der Konzeption mathematischer Wanderpfade als Lernform liegt das Prinzip außerschulischen Lernens zugrunde. Außerschulisches Lernen bietet Gelegenheiten, dass Schülerinnen und Schüler schulische Lerninhalte mit ihrer Lebenswelt verknüpfen können und Kompetenzen somit in einer authentischen, echten Begegnung mit den Lerninhalten erwerben. In Frage kommen dafür

> […] Orte außerhalb der Schule, die nur dadurch eingegrenzt werden, dass an ihnen gelernt werden soll, wobei die Verbindung zur Schule und zum Unterricht konstitutiv ist. (Gaedtke-Eckardt, 2012, S. 4)

Diese besondere Form des Lernens geht lerntheoretisch von der Situationsgebundenheit des Lernprozesses aus (vgl. Bauersfeld, 1983) und betont damit die Bedeutung von Lernorten, mit denen sich unter gezielter pädagogischer Anleitung auseinandergesetzt wird (Scherer & Rasfeld, 2010; Sauerborn & Brühne, 2014). Da prinzipiell jeder Ort durch den Einbezug in den Unterricht zu einem Lernort werden kann, existiert eine große Vielfalt außerschulischer Lernorte und dementsprechend die Möglichkeit, diese Lernform sowohl im Rahmen formaler Bildung in den schulischen Unterricht einzubetten als auch informell als (freiwilliges) Zusatzangebot zu beschreiben. Plessow (2015) unterscheidet daher entsprechend eine *schulbezogene* Verwendung des Begriffs „außerschulisch“ von einer *schulkomplementären* Begriffsverwendung. Während erstere beschreibt, dass der strukturierte schulische Unterricht lediglich aus dem Klassenraum ausgelagert wird, beschreibt die zweite Verwendung ein Lernen, das von der Schule als Institution allein nicht bereitgestellt werden kann. Hilfreich bei der systematischen Beschreibung erweist sich außerdem auch die Unterscheidung von *Lernorten* und *Lernstandsorten* (Baum, Roth & Oechsler, 2013). Während Lernstandsorte dauerhaft didaktisch-methodisch und adressatengerecht aufbereitet sind und dadurch einen direkten Bildungsauftrag besitzen (z. B. Schülerlabore oder Museen), werden alle anderen Orte erst durch eine didaktische Aufbereitung zu einem Lernort und besitzen daher von sich aus keinen direkten Bildungsauftrag. Für die Einbindung außerschulischer Lernorte in den Unterricht bedeutet das, dass bei Lernstandsorten die Ziele und Inhalte bereits vorgegeben sind, wodurch die Aufgabe der Lehrkraft lediglich in einer adäquaten Implementierung in den Unterricht durch eine entsprechende Einbettung durch Vor- und Nachbereitung besteht (vgl. Scherer und Rasfeld, 2010). Bei allen anderen Lernorten hingegen muss die gesamte didaktische Aufbereitung von der Lehrkraft in der Regel selbst übernommen werden, wenn nicht auf vorgefertigte Lehrmaterialien zurückgegriffen werden kann. Dies erleichtert dann zwar die Anbindung der Lernziele des außerschulischen Lernens an den Regelunterricht, führt jedoch auch zu einer erheblichen Mehrbelastung im Rahmen des organisatorischen Aufwands.

Für den Mathematikunterricht lassen sich, mit Blick auf andere Fächer, vergleichsweise wenig außerschulische Lernstandsorte ausmachen (Kleine et al., 2012). Zwar existieren hier Schülerlabore oder Mitmachausstellungen in verschiedenen (auch mathematischen) Museen, diese stellen jedoch eher institutionalisierte Lernstandsorte dar und verfolgen den mathematischen Kompetenzerwerb teilweise nur implizit (vgl. Baum et al., 2013). Im Gegensatz zu Lernstandsorten ist die Anzahl möglicher Lernorte für das Fach Mathematik hingegen schier unbegrenzt, da nahezu jeder Ort durch eine Verknüpfung zu mathematischen Lerninhalten zu einem außerschulischen Lernort werden kann. Dafür können etwa Vermessungen in der Natur vorgenommen werden, indem zum Beispiel mit Hilfe der Strahlensätze die Höhe von Bäumen bestimmt wird, oder mit Hilfe von trigonometrischen Funktionen und einem Theodolit ein Gelände vermessen wird (vgl. Scherer & Rasfeld, 2010). Anhand geometrisch interessanter Gebäude, wie beispielsweise Kirchen oder modernen Bürogebäuden, können Symmetrien und geometrische Figuren erforscht werden. Für die Untersuchung einfacher algebraischer Ausdrücke eignen sich etwa sich fortsetzende Muster von Bodenfliesen. Auch für den Bereich der Analysis lassen sich Lernorte finden. Für funktionale Zusammenhänge lässt sich bei Fahrstühlen mit dem Smartphone die Beschleunigung in Abhängigkeit der Zeit erfassen und in den erhobenen Daten Zusammenhänge zwischen Beschleunigung, Geschwindigkeit und gefahrener Strecke untersuchen. Im Rahmen einer Modellbildung können auch Höhe und Spannweite von Brücken mit quadratischen Funktionen beschrieben werden (vgl. Henn & Humenberger, 2011).

Die Einbindung außerschulischer Lernorte in den Regelunterricht hält Chancen für den Kompetenzerwerb der Schülerinnen und Schüler bereit. Die grundsätzliche Anwendungsorientierung der Lerninhalte an den Lernorten ermöglicht es,

> mathematische Sachverhalte mit der Lebenswirklichkeit der Schüler in Zusammenhang zu bringen, um damit einerseits mathematische Inhalte erfahrbar zu machen und andererseits die Wirklichkeitserschließung zu fördern. (Winter, 1987, S. 35).

Die Anwendungsorientierung steht in engem Zusammenhang mit der ersten Winter'schen Grunderfahrung

> Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen. (Winter, 1995, S. 37)

Dies impliziert zum Beispiel das unvermittelte Wahrnehmen und das echte Erleben von Größenverhältnissen an architektonisch interessanten Bauten oder die räumliche Orientierung in der Natur oder im öffentlichen Raum – Lernerfahrungen, die durch kein Medium der Veranschaulichung im Klassenzimmer ersetzt werden können (Wilhelm, Messmer & Rempfler, 2011). Beim Erschließen der Wirklichkeit mit Hilfe der Mathematik können enaktive Handlungen (wie etwa Messen) mit kognitiven Handlungen (z. B. Mathematisieren und Anfertigen von Darstellungen) verbunden werden (vgl. dazu 3.3). Von diesem realistischen Perspektivwechsel können insbesondere motorische und visuelle Lerntypen profitieren (Kleine et al., 2012). Neuere Forschung zur sog. „embodied cognition" geht davon aus, dass das mathematische Denken in Bezug auf Größenvorstellungen und der Aufbau einer intuitiven Anschauung des Zahlenstrahls durch Körperbewegungen und Handlungen wie das Abmessen mit Schritten oder das Vergleichen mit körperbezogenen Stützvorstellungen (z. B. Handbreit, Armlängen) unterstützt werden kann (Tran, Smith & Buschkuehl, 2017; Tall, 2003). Entsprechende Aktivitäten sind zentral für das außerschulische Lernen von Mathematik.

Lerntheoretisch sind beim außerschulischen Lernen verschiedene weitere Arten des Lernens beteiligt, wie etwa problemlösendes oder handlungsorientiertes Lernen. In Verbindung mit digitalen Medien sind auch Formen mobilen Lernens präsent (vgl. 3.2). Eine Verengung auf rein kognitive Lernprozesse kann damit vermieden werden (Baar & Schönknecht, 2018). Das Betreiben von Mathematik an außerschulischen Lernorten kann dementsprechend zur Förderung von Problemlösekompetenz und selbstregulativen Fähigkeiten beitragen. Dafür ist es erforderlich, dass die Aufgaben, die für außerschulische Lernorte konzipiert werden, einen hohen Grad an Selbständigkeit voraussetzen und in verschiedenen Sozialformen gelöst werden können, z. B., wenn mit den Mitschülern mathematisch kommuniziert werden muss, „[…] um Messfehler zu vermeiden“ (vgl. Kleine, et al., 2012, S. 7). Die Schülerinnen und Schüler lernen dann u. a. ihren eigenen Lernprozess zu steuern und ihre Ergebnisse zu reflektieren und zu bewerten. Der Kompetenzerwerb kann sich bei entsprechender Gestaltung daher auch auf allgemeine mathematische Kompetenzen wie Kommunizieren oder Argumentieren erstrecken (vgl. Greefrath, Kaiser, Blum & Borromeo Ferri, 2013; Buchholtz & Armbrust, 2018). Wenn Schülerinnen und Schüler an außerschulischen Lernorten Kompetenzen erwerben, um Mathematik in einfachen oder komplexeren Realsituationen anzuwenden, so entspricht dies nicht zuletzt den Lernzielen von Modellierungsaufgaben (vgl. 3.3). Aufgaben können so gestaltet werden, dass die relevanten Größen dabei z. B. durch Messtätigkeiten von den Schülerinnen und Schülern erst erschlossen werden müssen, wodurch eine authentische Erfahrung von Messungenauigkeiten, dem Operieren mit Größeneinheiten und der Notwendigkeit von strukturiertem Arbeiten ermöglicht wird, die klassische Schulbuchaufgaben oft nicht bereitstellen können. Wenn realitätsnahe Probleme nicht an Fotografien, sondern außerhalb des Klassenzimmers an realen Objekten bearbeitet werden, beinhaltet dies automatisch einen Aufforderungscharakter und kann dadurch eine Motivationssteigerung bewirken (vgl. Kleine et al. 2012; Greefrath et al., 2013).

Diesen Chancen stehen allerdings auch einige Nachteile des außerschulischen Lernens gegenüber. So muss auf den bereits genannten didaktischen Mehraufwand für Lehrkräfte hingewiesen werden, der sich aber zusätzlich noch um organisatorischen und logistischen Aufwand erweitert, etwa, wenn Genehmigungen von Schulleitung oder Eltern eingeholt werden müssen oder innerschulische Abstimmungsprozesse für Exkursionen geführt werden müssen. Als Nachteile des außerschulischen Lernens werden auch eine erschwerte Einhaltung der Aufsichtspflicht, eine veränderte Lernzielkontrolle und eine erschwerte Leistungsbewertung genannt (Sauerborn & Brühne, 2014). In Hinblick auf eine Lernwirksamkeit der Einbindung außerschulischen Lernens sollte daher sichergestellt sein, dass die an außerschulischen Lernorten behandelten Inhalte in den schulischen Unterricht durch Vor- oder Nachbereitung eingebettet sind (Scherer & Rasfeld, 2010), was allerdings eine Reduzierung von ansonsten anderweitig genutzter Lernzeit zur Folge hat. Eine Herausforderung, der bislang in der Forschung zum außerschulischen Lernen von Mathematik außerdem noch nicht genug Aufmerksamkeit zukommt, ist die Frage, wie unterrichtlich effektiv auf den von den Schülerinnen und Schülern gemachten sog. Primärerfahrungen (Scherer & Rasfeld, 2010) aufgebaut werden kann, um eine Anschlussfähigkeit für das Lernen auch allgemeinerer und abstrakterer mathematischer Zusammenhänge (im Sinne der zweiten Winter’schen Grunderfahrung) herzustellen.

3.2 Unterstützung von mathematischen Wanderpfaden durch digitale Medien

Mittlerweile schließt der Einsatz von digitalen Lernmedien im Unterricht auch verstärkt mobile Endgeräte ein, die aufgrund ihrer Standortungebundenheit idealerweise beim außerschulischen Lernen zur Anwendung kommen können. Beispiele unterschiedlicher Projekte zu mathematischen Wanderpfaden, die durch Geolokalisierungs-Apps unterstützt werden, sind etwa das MathCityMap-Projekt der Arbeitsgruppe um Matthias Ludwig (Ludwig, Jesberg & Weiß, 2013) oder die mathematischen Stadtspaziergänge mit der App Actionbound (Buchholtz, 2018b, 2019; Schreiber & Schulz, 2017). Es existieren aber auch Versionen von Wanderpfaden, die mit Google Maps arbeiten (Fessakis, Karta & Kozas, 2018). Im Regelfall werden bei einem App-unterstützten mathematischen Wanderpfad mehrere mathematische Aufgaben mit Hilfe von GPS-Koordinaten an verschiedene Orte geknüpft und Aufgaben übergreifend zu Routen – den eigentlichen Wanderpfaden – sequenziert.

Solche digital unterstützten Wanderpfade verweisen auf eine Form des mobilen Lernens, dem im Bereich des außerschulischen Lernens mit digitalen Medien eine zentrale Rolle zukommt. Mobiles Lernen beschreibt eine Spezialform des elektronischen Lernens (vgl. Lude, Schaal, Bullinger & Bleck, 2013), welches alle Formen des Lernens mit digitalen Medien einschließt (vgl. De Witt & Sieber, 2013). Es geht beim elektronischen Lernen dementsprechend nicht um eine bestimmte Lernform, sondern generell um die „technologische Unterstützung von Lernprozessen durch Informations- und Kommunikationstechnologien“ (De Witt & Sieber, 2013, S. 16). Mobiles Lernen ist ein vergleichsweise junges Forschungsfeld in der Bildungsforschung. Frühe Definitionen des Begriffs beinhalteten die Einbindung mobiler Endgeräte in den Lernprozess und die physische Mobilität der Lernenden als zentrale und notwendige Merkmale des mobilen Lernens (O'Malley, Vavoula, Glew et al., 2005). Neuere Definitionen unterstreichen hingegen darüber hinaus die Bedeutung der Kontextbezogenheit der Lerninhalte und deren Personalisierung (De Witt & Sieber, 2013; Frohberg, 2008; Frohberg, Göth & Schwabe, 2009), so dass der Gebrauch des Begriffs des mobilen Lernens die Grenzen zwischen Kontexten der formalen Bildung und informellen Lernkontexten immer mehr überwindet. Auch für das Lernen von Mathematik mit mobilem Lernen finden sich erste Ansätze (Crompton & Traxler, 2015; White & Martin, 2014; Drigas & Pappas, 2015; Wijers, Jonker & Drijvers, 2010). Mathematische Wanderpfade lassen sich als Prototypen von Settings für mobiles Lernen beschreiben. Nicht nur lassen sich die Wanderpfade durch Apps im obigen Sinne organisatorisch unterstützen; auch die Kontextbezogenheit und die Personalisierung des Lernens kann dabei auf unterschiedliche Arten berücksichtigt werden: die Lerninhalte im digitalen Medium stehen dazu einerseits im engen Bezug zum physischen Kontext der Lernumgebung und erfahren an ihnen eine Bedeutung (Frohberg, 2008). Auch können die Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler aufgegriffen werden (etwa, wenn Zählungen von Verkehrsteilnehmenden durchgeführt werden). Mobile Endgeräte schaffen durch ihre Ortsunabhängigkeit andererseits einen vermittelnden Kontext zwischen dem physischen und dem sozialen Umfeld, z. B. bei der Nutzung von unterschiedlichen Veranschaulichungsmitteln (Buchholtz et al., 2019).

Ein Gradmesser für den Nutzen des Einsatzes digitaler Medien im Mathematikunterricht ist, inwieweit die Förderung fachlicher Lernprozesse durch die digitale Unterstützung gewährleistet werden kann (Barzel, 2019). Insbesondere mit Blick auf den Kompetenzerwerb ist daher zu fragen, wie digital unterstützte Wanderpfade dabei relevante mathematische Denk- und Arbeitsweisen unterstützen. Mit Apps wie Actionbound oder MathCityMap können die Aufgaben für mathematische Wanderpfade so erstellt werden, dass eine Variabilität der Aufgabenpräsentation und Lösungseingaben gewährleistet werden kann, so dass speziell mathematische Tätigkeiten wie etwa Schätzen, Messen oder Vergleichen unterstützt werden können. Aufgaben können z. B. als Quiz mit Multiple-Choice oder offenen Antwortformat gestellt werden, die Eingabe einer bestimmten Zahl als Schieberegler oder eines Textstücks (z. B. „Zylinder“) verlangen, oder mit zu sortierenden Antwortvorgaben versehen werden (z. B. wenn Objekte nach ihrer Größe sortiert werden sollen). Eingegebene Lösungen werden in der App mit zuvor programmierten Lösungsintervallen und Textvorgaben direkt abgeglichen. Dabei kann das Intervall, in dem eine Lösung als richtig erkannt wird, beliebig groß gewählt werden, so dass Lösungen sensibel für das Treffen von unterschiedlichen Modellierungsannahmen sind. Die Toleranz von unterschiedlichen Lösungen gewährleistet auch die Berücksichtigung von Messfehlern (z. B. beim Ausmessen mit Schrittlängen). Die Apps stellen dann eine unmittelbare Rückmeldung bereit, die auch Hilfestellungen beinhalten kann, die bei einer erneuten Bearbeitung den mathematischen Denkprozess oder die Fehlersuche unterstützen können. Dadurch können die Aufgaben an die jeweiligen Voraussetzungen der Schülerinnen und Schüler angepasst werden und im Sinne von unterschiedlichen Zugangsweisen und Lösungsansätzen differenziert werden (Buchholtz et al., 2019).

Es lassen sich aber auch mediendidaktische Kriterien zur Beurteilung des Mehrwerts der digitalen Unterstützung von mathematischen Wanderpfaden durch Apps heranziehen, unter anderem die Multimedialität, der Grad der Interaktivität und die Adaptierbarkeit (vgl. Petko, 2014). Die für mathematische Spaziergänge eingesetzten Apps sind in der Regel multimedial, da sowohl Text, Bild und Animationen als auch Audioaufnahmen miteinander kombiniert werden können. Dies bietet insbesondere für die Aufgabengestaltung die Möglichkeit, auf verschiedene erweiterte Darstellungen in der Aufgabenformulierung zurückzugreifen oder etwa virtuelle Inhalte wie externe Links, Bilder, Videos oder Audioaufnahmen, Baupläne oder Reinzeichnungen einzubauen. Die Aufgaben können durch einen „Augmented-Virtuality“-Charakter (Milgram et al., 1994) dann zusätzliche Informationen oder Herangehensweisen für die Schülerinnen und Schüler bereithalten.

Bei der Verwendung interaktiver digitaler Medien im Unterricht können nach Urff (2014) zwei Formen der Interaktivität unterschieden werden: die objektbezogene und die unterstützende Interaktivität. Die objektbezogene Interaktivität ist bei den Apps momentan noch eingeschränkt auf das Eingeben von Text, das Bewegen von Schiebereglern und das Hochladen von Bildern, Tonaufnahmen, Lösungsskizzen oder Videos in Aufgaben. Der Wanderpfad kann jedoch unterwegs in der Regel nicht eigenständig verändert werden. Die zunehmende Einbindung von „Augmented Reality“ (Milgram et al., 1994) spielt hier jedoch eine Rolle, da laut Santos et al. (2014) durch eine sog. *vision-haptic visualization* eine größere Interaktivität mit dem Lerninhalt ermöglicht wird (vgl. die *virtuell-enaktive Ebene* bei Krauthausen, 2012). Die visuell-haptische Veranschaulichung wird dabei verstanden als die Integration von Seh- und Tastsinn bei der virtuellen Wahrnehmung von Informationen. Virtuelle Inhalte auf Wanderpfaden wie etwa geometrische Formen oder Funktionsgraphen, die im digitalen Medium eingeblendet oder auch als Durchsichts-Display (sog. *Optical See-Through Display*) realisiert werden können, ermöglichen das Objekt durch Drehen und Bewegen aus verschiedenen Winkeln zu betrachten und somit auch in der Realität nicht zugängliche Perspektiven, wie z. B. die Betrachtung von oben einzunehmen.

Durch die unterstützende Interaktivität der Apps besteht die Möglichkeit den Lernenden „vor, während oder nach dem Lösungsprozess […] zeitnahe, prozessbezogene Rückmeldungen und Hilfe“ (Urff, 2014, S. 182) anzuzeigen (vgl. Laborde & Strässer, 2016). Erste empirische Ergebnisse im Zusammenhang mit Wanderpfaden weisen auf die hohe Bedeutung dieses unmittelbar gegebenen Feedbacks für die Schülerinnen und Schüler hin (Gurjanow & Ludwig, 2019). Im Bereich der erstellten Rückmeldungen und Hilfen sind die Apps auch adaptierbar, worin sich ein didaktischer Mehrwert gegenüber der analogen Durchführung mathematischer Wanderpfade zeigt.

Der markanteste Unterschied zum generellen Lernen von Mathematik mit digitalen Medien besteht beim mobilen Lernen mit mathematischen Wanderpfaden allerdings in der Unterstützung und Erweiterung der Kontextbezogenheit der Lerninhalte. Es kann vor Ort auf unterschiedliche Art und Weise eine inhaltliche Vernetzung des Lerninhalts in der App zu Anwendungsbeispielen in der Lernumgebung (hier die realen Objekte und die zu ermittelnden Größen auf dem Wanderpfad) stattfinden (vgl. Sommerauer & Müller, 2014). Die Schülerinnen und Schüler müssen dafür selbstständig die digitalen Lerninhalte mit den entsprechenden Größen der realen Objekte in einen Zusammenhang bringen (Buchholtz et al., 2019). Hierbei kommt man einem enaktiven und auch auf perzeptive Handlungen ausgeweiteten Verständnis von Darstellungen von Lerninhalten nach, das sich etwa in der phänomenologisch verankerten Theorie der Repräsentationsformen und Multimodalität von Hansen (2018) findet.

3.3 Mathematische Wanderpfade und mathematisches Modellieren

Die Aufgaben auf mathematischen Wanderpfaden können vielfältig gestaltet werden. Eine besondere Rolle spielen dabei aber Mathematisierungsprozesse. Der Begriff „Mathematisieren“ geht ursprünglich auf Freudenthal (1973; 1987) zurück und bezeichnet das mathematische Ordnen im Sinne eines Übergangs von der Lebenswelt – von Freudenthal auch als Realität bezeichnet – hin zur Symbolwelt. Freudenthal griff in späteren Veröffentlichungen die Unterscheidung von Treffers (1987) in horizontales und vertikales Mathematisieren auf, wobei ersteres meint, ein lebensweltliches Problemfeld der mathematischen Behandlung zugänglich zu machen und es fortlaufend zu schematisieren, und letzteres die mathematische Verarbeitung im Sinne eines zunehmenden Abstraktionsprozesses. In seiner ursprünglichen Bedeutung verweist der Begriff auf grundlegende mathematische Handlungen wie beispielsweise Zählen, das Strukturieren und Vergleichen von Größen oder das Veranschaulichen von grundlegenden Rechenoperationen und bezieht sich dabei auf so gut wie alle mathematischen Tätigkeiten (vgl. die Beispiele von Freudenthal, 1991, S. 42ff). In der Diskussion um mathematisches Modellieren wird der Begriff allerdings spezifischer in seiner horizontalen Bedeutung für Beschreibungs- und Übersetzungsprozesse zwischen Realität und Mathematik verwendet (analog das „Interpretieren“ als Rückübersetzung). Sowohl Mathematisieren als auch Interpretieren werden dabei unter weitgehendem Konsens als zentrale Bestandteile des mathematischen Modellierens verstanden (vgl. z. B. Niss, Blum & Galbraith, 2007; Maaß, 2005; Greefrath et al., 2013). Die Verknüpfung von echten, lebensweltlichen Aufgabenkontexten mit der digital unterstützten Aufgabenstellung und dem mathematischen Arbeiten kann die verwendeten Aufgaben auf Wanderpfaden grundsätzlich in einen engen Zusammenhang zum mathematischen Modellieren stellen (Buchholtz & Armbrust, 2018). Dazu ist es notwendig, dass die Aufgaben authentische Problemstellungen im Zusammenhang mit den realen Objekten berücksichtigen und nicht nur einfach „draußen“ stattfinden und Mathematisierungen von auch ohne die realen Objekte bearbeitbaren Standardaufgaben enthalten. Charakteristisch für das Modellieren sind hierbei verschiedene Prozesse, die beim Bearbeiten der Aufgaben eine Rolle spielen sollten. Die zu berücksichtigenden Größen zum Lösen einer Aufgabe müssen beispielsweise eigenständig unter dem Treffen von Annahmen rechnerisch bestimmt oder durch Mess- oder Schätztätigkeiten ermittelt werden (Buchholtz & Armbrust, 2018). Weitere Teilprozesse des mathematischen Modellierens wie das Strukturieren und Vereinfachen von Problemstellungen anhand realer Objekte, das Rechnen mit echten Größen und das objektbezogene Validieren von rechnerischen Ergebnissen stehen dabei als zentrale Tätigkeiten beim außerschulischen Lernen im Vordergrund. Darüber hinaus kann bei entsprechender Aufgabengestaltung das Anwenden heuristischer Fertigkeiten beim Lösen der Aufgaben (z. B. wenn ein Lösungsweg nicht direkt einsehbar oder eine Größe der direkten Messung nicht zugänglich ist) die Aufgaben auch im Bereich des Problemlösens verorten.

Möglichkeiten, dass Schülerinnen und Schüler diese Tätigkeiten in echten und erlebbaren außerschulischen Lernkontexten erfahren können, sind in der Regel bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben im schulischen Mathematikunterricht vergleichsweise selten gegeben. Modellierungsaufgaben beinhalten zwar zentral auch realistische Sachkontexte, diese sind jedoch in der Regel durch Situationsbeschreibungen oder Abbildungen gegeben und gründen – sieht man einmal vom unterrichtlichen Arbeiten mit konkreten Anschauungsmitteln wie platonischen Körpern, Milchkartons oder Steckwürfeln ab – nur selten in der (erlebten) Wirklichkeit. Modellierungsaufgaben nehmen innerhalb der Aufgabenstellung oft bereits bestimmte Teilprozesse des Modellierens vorweg, die aufgrund eines gegebenen Aufgabenkontextes nicht selbst ausgeführt werden können (oder sollen). Deutlich wird diese Komplexitätsreduktion in bereits (vor-)mathematisierten Strukturen in Aufgaben, d. h., wenn Größen oder etwa Gebäudegrundrisse vorgegeben sind oder Personen auf Bildern zur Normierung von Längeneinheiten dienen. Für den schulischen Rahmen erscheint dies im Sinne eines eher atomistischen Ansatzes zur Förderung von Modellierungskompetenzen, bei dem jeweils nur einzelne Teilprozesse des Modellierens berücksichtigt werden (Greefrath, 2010; Brand, 2014), auch durchaus legitim. Schulische Modellierungsaufgaben berücksichtigen den Sachkontext dabei allerdings durchaus unterschiedlich. In ihrem Überblick über verschiedene Aufgabentypen, die in unterschiedlichem Grad Modellierungsaktivitäten einfordern, beschreiben Greefrath, Kaiser, Blum & Borromeo Ferri (2013, S. 25), dass realitätsbezogene Aufgaben oft in Form von eingekleideten Aufgaben oder Textaufgaben vorliegen, die zwar in (austauschbare) Sachkontexte eingebettet sind, im allgemeinen aber weniger auf eine Umwelterschließung, sondern eher auf das Übertragen bekannter Modelle und die Anwendung von Rechenfertigkeiten abzielen. Komplexere Modellierungstätigkeiten etwa durch das Arbeiten mit echten Daten oder realistischen Kontexten, bei denen Mathematisierungen erst entwickelt werden müssen, zählen sie hingegen zu den echten Sachaufgaben, die sich durch zusätzliche Aufgabenkriterien wie etwa Authentizität und Offenheit auszeichnen. Exemplarisch lässt sich der Unterschied dieser verschiedenen Aufgabentypen etwa bei Hagena (2019) finden, die die verschiedenen Aufgabentypen anhand einer Aufgabe zur Ermittlung der Anzahl Backsteine eines Turms gegenüberstellt. Der Aufgabentyp „Sachproblem“ liegt etwa vor, wenn ein Foto eines realen Backsteinturms gegeben ist und die Aufgabenstellung beinhaltet, die Anzahl der Ziegel zu bestimmen, die zum Bau des abgebildeten Turms benötigt werden (Hagena, 2019, S. 27). Nur wenig werden bisher bei der Klassifikation von Aufgaben mit Modellierungsbezug wirkliche gegenständliche Kontexte berücksichtigt (z. B. in Zusammenhang mit Schätzaufgaben bei Greefrath, 2010), aber auch hier ist das Aufgreifen des Kontextes in unterschiedlichem Grad möglich. Um auf das Beispiel von Hagena (2019) zurückzukommen, wäre es etwa denkbar, dass der Backsteinturm auf einem mathematischen Wanderpfad besucht und die Anzahl der verbauten Ziegel vor Ort rechnerisch und unter dem Treffen verschiedener Annahmen bestimmt würde. Anders als auf einem Foto ist durch die Präsenz des Objektes dann insbesondere beim kontextbezogenen Mathematisieren im Zusammenhang mit einer eigenen Datenerhebung ein breiteres Spektrum von Exaktheit und ein leichterer (anschaulicherer) Zugang zum Lösungsweg möglich. Auch beim Validieren von Lösungen bietet der direkte Vergleich zwischen Berechnungen und realem Objekt eine im Klassenraum nicht gegebene empirische Überprüfbarkeit. Da die Lernform des mathematischen Wanderpfads eine zeitliche Begrenzung der Bearbeitungszeit erfordert, finden Mathematisierungsprozesse innerhalb der Aufgaben allerdings eher in vergleichsweise kleinen Schritten statt und die entwickelten mathematischen Modelle sind tendenziell von geringer Komplexität (Buchholtz & Armbrust 2018). Auch hier steht also bislang eher eine atomistische Vermittlung von Modellierungskompetenzen im Vordergrund. Allerdings enthalten die Aufgaben stets eine eigene Erhebung echter Daten an den Objekten, so dass das Mathematisieren kontextbezogen erfolgt. Dies geschieht unter anderem, um das selbstständige stückweise Lernen von Mathematisieren zu unterstützen (Zielgruppe der Aufgaben sind in der Regel Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe I).

Für die Gestaltung von Aufgaben auf mathematischen Wanderpfaden möchte ich an dieser Stelle fachbezogene auf Modellierungsprozesse abzielende Aufgabenkriterien formulieren (vgl. Buchholtz, 2018), die auf meiner mehrjährigen Erfahrung mit der Durchführung von mathematischen Wanderpfaden beruhen. Die Aufgaben

- beziehen sich inhaltlich allesamt auf ein überschaubares, zuvor im Unterricht behandeltes Themengebiet;
- berücksichtigen im Sinne eines diagnostischen Potenzials verschiedene Grundvorstellungen dieses Themenbereiches (vgl. Blum & vom Hofe, 2003);
- regen die Schülerinnen und Schüler zum eigenständigen Herstellen von mathematischen Zusammenhängen an (Mathematisierungsgehalt);
- sollten einen hinreichenden Grad der Offenheit besitzen (von der Anzahl möglicher Lösungsansätze zur Ermittlung einer bestimmten Lösung bis hin zur Anzahl möglicher Lösungen (vgl. Blomhøj & Jensen, 2003);

- können durch das Ermitteln von Größen vor Ort gelöst werden;
- stehen in Beziehung zu den zugehörigen Objekten und sollten auch nicht ohne diese gelöst werden können;
- weisen eine authentische Problemorientierung auf.

Auch organisationsbezogene Kriterien der Aufgaben spielen eine Rolle. Die Aufgaben

- sollten die Bearbeitungszeit von jeweils 20 min nicht überschreiten;
- weisen differenzierende Merkmale, wie z. B. ein gestuftes Aufgabenformat von leicht zu schwer auf;
- fördern kooperatives Arbeiten;
- sind möglichst interaktiv und abwechslungsreich gestaltet;
- sollten fußläufig untereinander innerhalb von 10 min. leicht erreichbar und zugänglich sein.

Für Beispiele von Aufgaben sei auf Buchholtz (2018a; 2019), Ludwig, Baumann-Wehner, Gurjanow und Jablonski (2019) und Buchholtz und Armbrust (2018) verwiesen.

4. Konkretisierung

Entsprechend den drei zuvor eingenommenen didaktischen Perspektiven, wird im Folgenden auf drei Ebenen konkretisiert, welche Abläufe und Prozesse aus didaktischer Sicht bei der Planung und Durchführung existierender oder neu zu entwickelnder mathematischer Wanderpfade relevant sind. Dabei bewegen wir uns innerhalb der didaktischen Struktur durch die verschiedenen Bereiche des außerschulischen Lernens, der Funktion und des Nutzens digitaler Medien und der Modellierungsprozesse der Schülerinnen und Schüler.

4.1 Aufbau und Ablauf von mathematischen Wanderpfaden als außerschulische Lernorte

Auch wenn sowohl in die formale Bildung eingebettete als auch informelle Formen existieren, werden mathematische Wanderpfade als außerschulische Lernorte im Folgenden formal eingebettet und schulbezogen verstanden, um ihre didaktische Funktion präziser herausarbeiten zu können. Wenn eine nachhaltige Kompetenzentwicklung der Schülerinnen und Schüler angestrebt wird, setzen mathematische Wanderpfade als außerschulische Lernarrangements eine intensive Vorbereitung und Nachbereitung im Unterricht voraus, die dem Besuch des außerschulischen Lernortes voran- und nachgestellt ist (Scherer & Rasfeld, 2010; Gaedtke-Eckhardt, 2012). Zunächst ist die Auswahl von interessanten Objekten und die Entwicklung passender Aufgaben in der näheren Umgebung erforderlich (vgl. Buchholtz & Armbrust, 2018). Abbildung 1 verdeutlicht schematisch den organisatorischen Ablauf einer Planung und Durchführung eines mathematischen Wanderpfads.

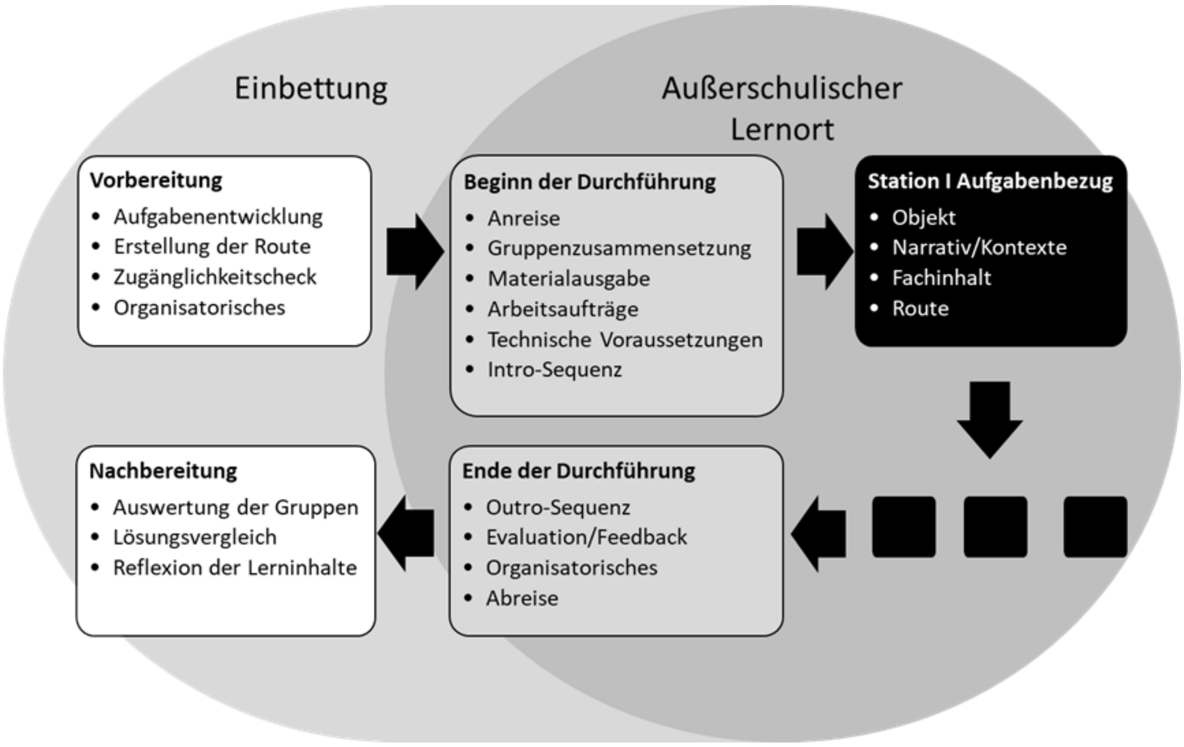
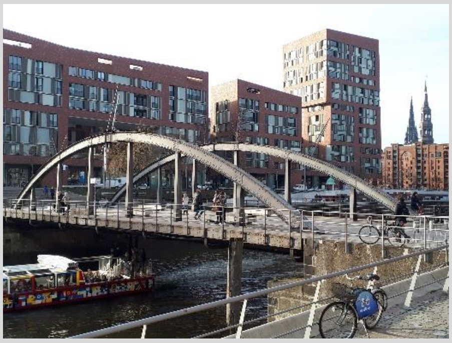


Abb. 1: Ablauf eines mathematischen Wanderpfads

Damit beim Mathematisieren Zusammenhänge zwischen mathematischen Inhalten und Sachzusammenhängen hergestellt werden können, sollten die Aufgaben dazu animieren, dass die Schülerinnen und Schüler ihre mentalen Vorstellungen mathematischer Zusammenhänge sowie dazu vernetzter Konzepte aktivieren. Dafür bietet es sich an, die Aufgaben zu ausgewählten Themenbereichen an Grundvorstellungen (z. B. Prozente, Proportionalität, Brüche, Änderungsrate oder Flächeninhalt) zu orientieren. Die Geometrie verfügt darüber hinaus über eine reichhaltige Sammlung von Grundbegriffen (z. B. Punkt, Gerade, verschiedene geometrische Formen und Körper) samt ihren Eigenschaften und Zusammenhängen (z. B. Lagebeziehungen und Symmetrieachsen), die eine Ressource bei der individuellen Vorstellungsentwicklung darstellt (z. B. bei der Entwicklung der Vorstellung von Ähnlichkeit, Symmetrie, Parallelität oder Kongruenz; vgl. auch Sträßer, 2015). Bestenfalls wird die Aktivierung der Vorstellungen in den Aufgaben noch unterstützt durch kognitive Aktivitäten (z. B. mentales Rotieren, Spiegeln) oder konkrete Handlungen am Objekt (z. B. Sich-Aufstellen, Aufteilen, Zerlegen und Ergänzen). Abbildung 2 zeigt exemplarisch eine Aufgabe, aus dem Bereich der Sekundarstufe II, die Grundvorstellungen zum Integral als Flächeninhalt berücksichtigt. Zur Mathematisierung der Aufgabe kann die Spannweite der Brücke direkt ausgemessen werden und ihre höchste Stelle anhand von Schraubenabständen bestimmt werden. Hierbei sollte eine größere Genauigkeit erzielt werden können, als wenn die Maße allein auf dem Foto bestimmt werden. Anschließend kann der Brückenbogenverlauf gedanklich in ein Koordinatensystem mit zuvor gewählten Längeneinheiten eingebettet werden und über die Scheitelpunktform mit den geeigneten Maßen eine quadratische Funktion bestimmt werden, deren bestimmtes Integral im abgemessenen Intervall berechnet wird. Dabei ist u. a. entscheidend, wo der Ursprung des Koordinatensystems verortet wird, wodurch sich eine Gelegenheit zum mathematischen Argumentieren ergibt. Die Bearbeitung der Aufgabe auf einem Foto hat hier den Nachteil, dass das Einzeichnen von Koordinatenachsen häufig durch die Perspektive der Aufnahme naheliegend ist oder eine nicht-frontale Perspektive die räumliche Interpretation erschweren kann. Eine alternative Mathematisierung auf einfacherem Niveau ergibt sich durch die Approximation des Flächeninhalts allein durch einfachere geometrische Formen. Auch hier kann sich die direkte Anschauung und Messbarkeit vor Ort vorteilhaft auf den Lösungsansatz auswirken, weil im Rahmen einer Validierung direkt abgeschätzt werden kann, welche Güte die Annäherung der krummlinig begrenzten Flächen durch andere Formen aufweist.

Bei der Erstellung von digital unterstützten Wanderpfaden mit der App Actionbound lassen sich Aufgaben online erstellen, hinzufügen und bearbeiten, es kann mit Hilfe von GPS-Koordinaten die Route festgelegt werden, und es lassen sich Hilfen und Lösungen eingeben. Apps wie MathCityMap ermöglichen auch, sich bereits durch andere User erstellte Aufgaben zu bestimmten Themenbereichen zusammenstellen zu lassen (Ludwig, Baumann-Wehner, Gurjanow & Jablonski, 2019). Bei der Durchführung vor Ort kann der erstellte Wanderpfad z. B. mittels Scannen eines QR-Codes oder direkt über die Suche in den Apps aufgerufen werden. Die Apps gestalten die Durchführung des Wanderpfads in der Regel als Wettbewerb, bei dem die Schülerinnen und Schüler in Gruppen Punkte für gefundene Orte, gelöste Aufgaben und das Einhalten von Zeitvorgaben erhalten (Gurjanow & Ludwig, 2019). Daher spielt für die Durchführung die Gruppengröße eine Rolle und, ob etwa homogene oder heterogene Gruppen gebildet werden müssen. In einem Hamburger und Osloer Projekt zu mathematischen Spaziergängen wurden Gruppen zu je drei Schülerinnen und Schülern jeweils mit Maßbändern und digitalen Endgeräten ausgestattet (Buchholtz & Armbrust, 2018; Buchholtz et al., 2019).



Aufgabe: Die Busan-Brücke am Museum

Das Maritime Museum in Hamburg möchte auf der Busan-Brücke für eine Ausstellung werben.

Auf beiden Seiten der Brücke sollen unter den Brückenbögen großflächige Poster aufgehängt werden, die passend zugeschnitten werden. Wie viel Werbefläche steht dem Museum zur Verfügung, wenn die Werbung sowohl von der Straße als auch von den Booten aus gesehen werden soll?

Gib Deine Lösung in m^2 an.

Abb. 2: Aufgabe zur Aktivierung von Grundvorstellungen

Nach Überprüfung der technischen Voraussetzungen und Erteilung eines Arbeitsauftrags präsentiert das digitale Medium bei der Durchführung die erstellten Aufgaben in festgelegter Reihenfolge, die dann mittels Geolokalisierung abgelaufen wird. Dabei sind die Aufgaben an die jeweiligen Objekte geknüpft, wodurch eine entsprechende Kontextualisierung hergestellt wird. Diese kann entweder über die Fachinhalte (z. B. ausschließlich Aufgaben zur Kombinatorik) oder über die Sachkontexte in Zusammenhang mit der Route (z. B. Mathematik im Hafen) hergestellt werden. Ein entsprechendes Narrativ (wie etwa eine Schatzsuche oder ein Agentenkrimi), das mit einer textlichen oder videobasierten Intro- und Outro-Sequenz gerahmt wird, kann – insbesondere im Primarstufenbereich – eine zusätzliche Kontextualisierungsebene für das außerschulische Lernen bereithalten. Am Ende der Durchführung zeigt das digitale Medium eine Rückmeldung über die erreichte Punktzahl an. Hier sollten schon bei der Erstellung des Wanderpfads Möglichkeiten zur Erteilung von aufgabenbezogenem Feedback berücksichtigt werden. Die Aufgabenbearbeitungen der Schülerinnen und Schüler können bei der Nachbereitung produktiv im Sinne einer Lernprozessdiagnostik genutzt werden, mit der auch die für das Lernen von Mathematisierungskompetenzen notwendige rückblickende Reflexion in den Unterricht integriert werden kann (vgl. Buchholtz, 2018a). Die Auswertung des mathematischen Wanderpfads kann dabei stärker in die Hände der Schülerinnen und Schüler gelegt werden, indem beispielsweise Expertengruppen für einzelne Aufgaben gebildet werden oder die Schülerinnen und Schüler ihre Lösungsansätze gegenseitig korrigieren und dabei auch entsprechende Erklärungen der Lösungsansätze der anderen Gruppen einfordern.

4.2 Unterstützungsmöglichkeiten digitaler Medien und Endgeräte beim Bearbeiten von Stationen

Betrachtet man das Bearbeiten einzelner Stationen auf einem mathematischen Wanderpfad mit einem GPS-fähigen Smartphone oder Tablet-PC genauer, so lassen sich konkret verschiedene Funktionen der Unterstützung des digitalen Mediums beschreiben (vgl. Abb. 3). Das digitale Medium steuert beim Durchführen des Wanderpfads zunächst den Weg von Aufgabe zu Aufgabe (in Actionbound durch Angabe eines koordinatenbezogenen Richtungspfeils oder durch das Anzeigen einer positionsbezogenen Karte) und präsentiert die Aufgaben, sobald ein Ort gefunden wurde. Dazu können – wie schon unter 3.2 beschrieben – bei der Erstellung der Aufgaben verschiedene Aufgabenformate (z. B. Quiz, freie Aufgabe, Sortieraufgabe), Zeitbegrenzungen und Ausgabeformen (wie etwa Bild, Text oder Video) festgelegt werden. Zurzeit ermöglichen die Apps noch keine Ein- oder Ausgabe von mathematischen Formeln, allerdings lassen sich Formeln als Bilder einfügen.

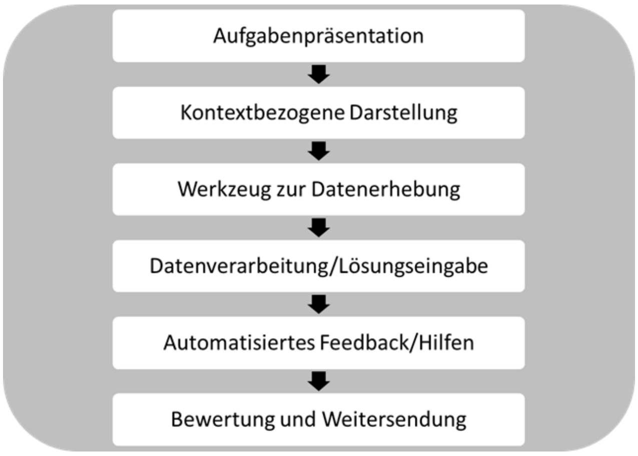
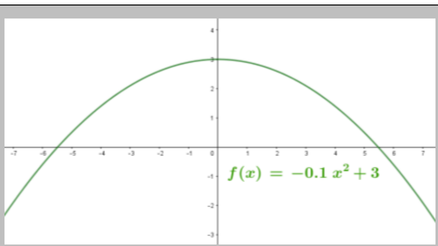


Abb. 3: Funktionen der Unterstützung des digitalen Mediums

Eine erweiterte Kontextualisierung des Lerninhalts durch das digitale Medium wird hergestellt, indem bei der Aufgabenpräsentation auf das reale Objekt bezogene Darstellungsformen verwendet werden, die unterschiedliche Zugangsweisen zur Aufgabe ermöglichen. Dies können zusätzliche unterstützende Informationen in unterschiedlicher Form wie etwa Skizzen, Baupläne, geschichtliche Hintergrundinformationen, mathematisch-konzeptuelle Animationen (GIFs), Formeln, Links oder Videos oder durch Augmented Reality integrierte virtuelle Elemente wie etwa vorstrukturierende beschreibende Funktionsgraphen sein (vgl. Buchholtz, et al., 2019; Drigas & Pappas, 2015). Eine Studie von Sommerauer und Müller (2014) zum Einsatz von Augmented Reality in einer mathematischen Mitmachausstellung zeigte etwa signifikant bessere Lernergebnisse von Besuchern, denen über Augmented Reality zusätzliche Informationen angezeigt wurden.

Bei der Datenbeschaffung zur Bearbeitung der Aufgaben kann das digitale Endgerät durch die Schülerinnen und Schüler auch als digitales Werkzeug zur Datenerhebung eingesetzt werden, hierbei müssen jedoch vorläufig noch unterschiedliche Apps benutzt werden. So ermöglichen die Sensoren der digitalen Endgeräte mit der entsprechenden App beispielsweise, dass das Gerät als physikalisches Messinstrument genutzt werden kann (z. B. bei Höhen- oder Schallmessungen). Eine erste kleine Studie zur Verknüpfung von digital unterstützten Wanderpfaden mit dynamischen GeoGebra-Arbeitsblättern weist außerdem auf die empfundene Nützlichkeit von GeoGebra beim Validieren von Ergebnissen und beim Berechnen von Integralen zu ermittelten Randfunktionen hin (Drexler, 2018; Buchholtz et al., 2019). Selbstverständlich dient das digitale Endgerät darüber hinaus schlicht auch zur Informationsbeschaffung im Internet (z. B., wenn mathematische Formeln vergessen wurden). Eine häufig auf mathematischen Wanderpfaden genutzte Funktion der digitalen Endgeräte im Sinne der Datenverarbeitung beim Rechnen ist außerdem nach wie vor die Taschenrechnerfunktion. Die Schülerinnen und Schüler geben die Lösungen zu den Aufgaben direkt in die App ein, wobei die App je nach Einstellung und Aufgabenformat die Möglichkeit für eine freie Texteingabe oder eine Zahleneingabe mittels Schieberegler bereithält. Es ist auch möglich, dass die Schülerinnen und Schüler mit ihren digitalen Endgeräten ein Foto oder eine Audioaufnahme machen und das Werk anschließend in der App hochladen. Hier kann z. B. an markante Gebäudeteile, die beobachtet werden sollen, oder Größenvergleiche gedacht werden, aber auch an Skizzen und Rechenwege, die die Schülerinnen und Schüler beim Arbeiten auf Papier anfertigen.

Hilfe	Bild und Text
1	 An welchen Funktionstyp erinnert Dich der Brückenbogen?
2	 Überlege dir, inwiefern du die x- und y-Achse durch den Brückenbogen legen kannst.
3	$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ *oder* $f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$ *wobei x_s und y_s die Koordinaten des Scheitelpunkts der Parabel sind* Kannst du einen Funktionsterm aufstellen, wenn du weißt, wie die Funktion einer Parabel allgemein aussieht?

Tab. 1: Gestufte Hilfen zur Aufgabe „Die Busan-Brücke am Museum“

Die Ergebniseingaben in die App können mit in der App hinterlegten Lösungen abgeglichen werden, so dass eine unverzügliche automatisierte Rückmeldung gegeben werden kann. Dies setzt allerdings voraus, dass die Lösungseingabe etwa aus metrischen Daten oder aus bestimmten zuvor programmierten Textbausteinen besteht. Die Apps stellen daraufhin ein Lösungs-Feedback und wahlweise zuvor programmierte Hilfestellungen bei falschen Antworten bereit (vgl. Tab. 1). Bei richtiger Lösungseingabe bewerten die Apps das Ergebnis mit Punkten und senden die Schülerinnen und Schüler zu der nächsten Koordinate.

4.3 Kontextbezogenes Mathematisieren und Validieren bei mathematischen Wanderpfaden

Ähnlich wie bei anderen Modellierungsaktivitäten lassen sich mathematische Wanderpfade mit entsprechenden Aufgaben auch in Hinblick auf die beteiligten Teilprozesse beschreiben. Dabei spielen insbesondere das Mathematisieren und das Interpretieren sowie das Validieren eine Rolle, da hierbei Transferleitungen zwischen Realität und Mathematik getätigt werden müssen, an denen individuelle inhaltsbezogene Vorstellungen beteiligt sind (Blum & vom Hofe, 2003). Anders als bei regulären Modellierungsaufgaben im Unterricht spielt dabei zusätzlich auch die Kontextualisierung durch die echten Objekte eine besondere Rolle (vgl. 3.2). Bei den Aufgaben müssen Schülerinnen und Schüler Größen messen, skalieren, zählen oder schätzen und die ermittelten Größen in ein richtiges mathematisches Verhältnis setzen oder relevante, aber nicht zugängliche Größen aus gemessenen Größen rekonstruieren oder berechnen – das eigentliche Mathematisieren. Umgekehrt können mathematische Ergebnisse direkt anhand der realen Objekte überprüft werden. Abbildung 4 stellt eine ideale Beschreibung des Modellierungsprozesses von Aufgaben auf mathematischen Wanderpfaden dar, mit der sich zentrale Tätigkeiten der Schülerinnen und Schüler identifizieren lassen. Die Darstellung ähnelt den bekannten Modellierungskreisläufen (vgl. Greefrath et al., 2013; Kaiser & Stender, 2013; Blum & Leiß, 2005) mit den Phasen der Mathematisierung, des mathematischen Arbeitens und des Interpretierens und Validierens. Da auf mathematischen Wanderpfaden speziell der Übergang zwischen Realität und Mathematik bzw. die Rückübersetzung im Kontext der Objekte eine wichtige Rolle spielt, beinhaltet die Darstellung Sphären der Kontextualisierung, d. h. Schritte, bei denen die einzelnen Modellierungsprozesse eng an die realen Objekte geknüpft sind. So spielt etwa die für die mathematischen Wanderpfade charakteristische eigene Datenerhebung und die Lokalisierung der zu erhebenden Größen in der Wirklichkeit eine Rolle, die in ähnlicher Form im sog. Nodes-Modell zur Beschreibung von Modellierungsaktivitäten von Doerr und Pratt (2008, S. 264) beschrieben sind. Die Darstellung weist auch zentrale Elemente der Problemlösungsphasen nach Pólya (1945) auf (z. B. Verstehen, Planen, Kontrollstrategien). In Bezug auf die Kontextualisierung der Prozesse beim Arbeiten mit mathematischen Wanderpfaden lassen sich jedoch auch Besonderheiten feststellen: Zunächst müssen die Schülerinnen und Schüler die Aufgabe verstehen. Dies geschieht – sofern digitale Medien involviert sind – in der kognitiven Auseinandersetzung mit der multiplen Repräsentation der Aufgabe im vermittelnden Kontext des digitalen Mediums (vgl. 3.2), d. h. zunächst außerhalb des durch die Objekte gegebenen Kontextes. Parallel oder nachgeordnet dazu werden die in der Aufgabe relevanten Größen in den realen Objekten lokalisiert. Hierbei wird die erweiterte Kontextualisierung durch die realen Objekte zum ersten Mal relevant (in Abb. 4 durch den Übergang in die grauen Sphären dargestellt). Um einen Lösungsweg und das gezielte Ermitteln von gesuchten und für den Rechenweg benötigten Größen zu planen, müssen dazu die im digitalen Medium dargestellten oder gesuchten Größen auf das entsprechende reale Objekt bezogen werden. Dabei werden bereits kontextbezogene Annahmen gemacht oder Vereinfachungen vorgenommen (beispielsweise, wenn die reale Form von Objekten gegenüber idealen mathematischen Formen abweicht oder aus einer Vielzahl von realen Objekten ein geeigneter oder leichter zugänglicher Repräsentant gewählt wird). Diese Lokalisierung und objektbezogene Planung lässt sich vergleichen mit der Erstellung eines realen Modells der Aufgabensituation beim Arbeiten mit klassischen Modellierungsaufgaben im Klassenraum, allerdings erfordert der nun folgende Ansatz des Mathematisierens zunächst eine Strukturierung des lebensweltlichen Kontexts, bei der bereits mathematische Denk- und Arbeitsweisen sowie bekannte Heuristiken eine Rolle spielen, ohne dass hier bereits rein mathematisch gearbeitet wird, sowie anschließend eine gezielte enaktive Datenbeschaffung durch Messtätigkeiten oder Schätzen. Ausgehend von der Zugänglichkeit und Größe des realen Objekts und der zur Verfügung stehenden digitalen Hilfsmittel müssen dazu geeignete Wege zur Datenbeschaffung gefunden werden. Entwickelt man eine Zusammenstellung bei Greefrath (2009) weiter, so kann die kontextbezogene Datenbeschaffung auf mathematischen Wanderpfaden (breiter als bei klassischen Aufgaben im Klassenraum) erfolgen durch:

- Schätzen, Hochrechnen,
- Abzählen, Nutzen des allgemeinen Zählprinzips,
- die Verwendung von Alltagswissen,
- den Rückgriff auf geeignete Stützpunktvorstellungen (z. B. Schritt- oder Armlänge, durchschnittliche Größen von Menschen, Stockwerken etc.),

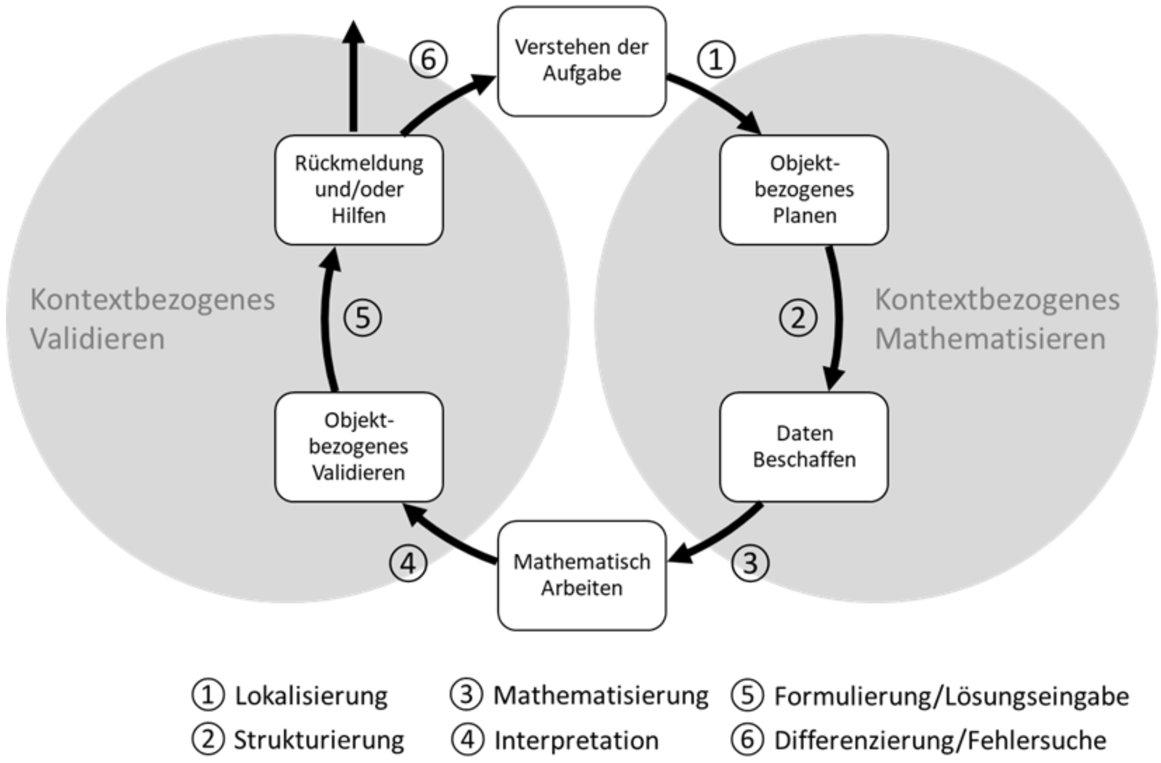


Abb. 4: Kontextbezogene Modellierungsaktivitäten auf mathematischen Wanderpfaden

- das Anfertigen von Skizzen und informativen Figuren,
- Nutzen von Lösungsgraphen,
- Ausmessen mit Maßband, Zollstock, Schnur,
- Vergleich mit zuvor ermittelten Werten oder gegebenen Vergleichswerten,
- Vergleich mit Gegenständen oder beteiligten Personen,
- Lesen,
- Raten,
- Gebrauch von Sensoren des digitalen Endgeräts,
- Internetrecherche, Nutzen von zusätzlichen Darstellungen des digitalen Mediums.

In vielen theoretischen Modellierungskreisläufen wird die Datenbeschaffung nicht als expliziter Schritt ausgewiesen (vgl. Greefrath et al., 2013; Kaiser & Stender 2013; Blum & Leiß, 2005). Sie erscheint aus zwei Gründen marginalisiert: Im Zusammenhang mit dem Einsatz klassischer Modellierungsaufgaben scheint es erstens nicht geklärt, ob sie theoretisch eher im Bereich des Vereinfachens, des Mathematisierens oder des mathematischen Arbeitens anzusiedeln ist. Zweitens erscheint sie vernachlässigbar, insofern sie lediglich aus der reinen Informationsaufnahme (teilweise gegebener Größen) aus einer Abbildung besteht. In Bezug auf mathematische Wanderpfade erscheint es jedoch sinnvoll, die Datenbeschaffung als expliziten Schritt theoretisch auszuweisen, da dieser gewissermaßen den Kern der durch die realen Objekte erweiterten Kontextualisierung (vgl. 3.3) ausmacht. Sind die relevanten Größen ermittelt, müssen diese in einen geeigneten mathematischen Zusammenhang gebracht werden. Dazu werden inhaltsbezogene Vorstellungen aktiviert und beispielsweise Formeln zur Berechnung von Größen herangezogen. Hier vollzieht sich der Übergang zum mathematischen Modell, die Mathematisierung. Bei der Durchführung von mathematischen Wanderpfaden ist hierbei zu beobachten, dass Schülerinnen und Schüler sich hier gedanklich vom lebensweltlichen Kontext lösen und beispielsweise Berechnungen auf Papier oder auf dem digitalen Endgerät durchführen. Der Schritt des mathematischen Arbeitens (verstanden als das symbolische Operieren) liegt deshalb in Abbildung 4 als rein kognitive Aktivität außerhalb der Sphären der Kontextualisierung. Die Rechenergebnisse werden anschließend im Hinblick auf die Aufgabenstellung und ggf. durch eine erneute Lokalisierung interpretiert, wodurch wieder in die Sphäre der lebensweltlichen Kontextualisierung gewechselt wird. Dadurch, dass die realen Objekte verfügbar sind, können als Kontrollstrategie die Ergebnisse direkt am Objekt validiert werden (Borromeo Ferri, 2006; Czocher, 2018). Das objektbezogene Validieren auf mathematischen Wanderpfaden kann beispielsweise erfolgen durch:

- Vergleich mit bekannten Vergleichsgrößen (z. B. von Fahrzeugen oder Mietwohnungen),
- Direktes Ausmessen, Auszählen,
- Einheiten- und Dimensionskontrolle, Runden,
- Anwenden eines alternativen Lösungswegs, erneutes Berechnen mit einem anderen Repräsentanten,
- Ausprobieren physikalischer Zusammenhänge am Objekt,
- Physische Interaktion mit dem Objekt (z. B. Auslösen einer Veränderung; Fahren auf einer Rolltreppe),
- Vergleich mit beteiligten Personen, Vergleich mit Ergebnissen anderer Gruppen,
- Rückgriff auf Fehlerwissen.

Auf Basis der validierten Ergebnisse wird eine Lösung formuliert und in das digitale Medium eingegeben. Das digitale Medium gleicht die Lösung mit dem eingegebenen Lösungsintervall ab und gibt eine entsprechende Rückmeldung aus. Für den Fall, dass die Lösung nicht richtig war, können (wie in 3.2 beschrieben) einerseits kontextbezogene Hilfen mit entsprechenden Darstellungen und Hinweisen formuliert werden (Gurjanow, Jablonski, Ludwig & Zender, 2019), die eine Überarbeitung des Ergebnisses und ggf. ein erneutes Durchlaufen der verschiedenen Prozesse möglich machen. Andererseits können beispielsweise auch Lösungsvideos bereitgestellt werden, bei denen die Schülerinnen und Schüler ein korrektes Vorgehen zur Ermittlung der relevanten Größen gezeigt bekommen. Ideell werden diese durch das digitale Medium bereitgestellten Informationen im Sinne einer Differenzierung auf die Aufgabenstellung und die realen Objekte bezogen, dies setzt aber voraus, dass entsprechende Hilfestellungen aufgabenspezifisch passen und entsprechend ausgearbeitet sind. Für die Suche nach dem Fehler können dann noch einmal alle aufgaben- und lösungswegrelevanten Schritte einzeln zwischen dem digitalen Medium und dem realen Objekt abgeglichen werden, Gurjanow und Kolleginnen und Kollegen (2019) sprechen hier von einem Dissonanzeffekt.

5. Schlussfolgerung

Wenn mathematische Wanderpfade die didaktischen Potenziale des außerschulischen Lernens nutzen, durch digitale Medien im Sinne des mobilen Lernens unterstützt werden und echte lebensweltliche Kontexte für Modellierungsaktivitäten bereithalten, so stellen sie eine sinnvolle Ergänzung zum (institutionalisierten) schulischen Mathematikunterricht dar, die den Schülerinnen und Schülern eine Möglichkeit zur Anwendung von Mathematik im Alltagsleben ermöglichen. Die dabei stattfindenden Modellierungsaktivitäten sind eingebettet in eine erweiterte Kontextualisierung, die sich vergleichbar beim Bearbeiten von Modellierungsaufgaben im Klassenraum nicht findet. Speziell im Vordergrund stehen hier nämlich kontextbezogene Mathematisierungs- und Validierungsprozesse, die sich dadurch auszeichnen, dass die realen Objekte enaktiv in die Datenbeschaffung und Interpretation bzw. Validierung von Daten mit einbezogen werden. Diese Kontextualisierung und das Arbeiten in Gruppen ermöglicht ein informelles und persönliches Lernen von Mathematik und scheint – besieht man erste empirische Studien – Schülerinnen und Schüler beim Anwenden von Mathematik zu motivieren (Buchholtz & Armbrust, 2018; Buchholtz, 2018b). Insbesondere wenn mathematische Wanderpfade mit digitalen Medien unterstützt werden, lassen sich neben der rein technischen Begleitung der Wanderpfade auch Potenziale für die Förderung fachlicher Lernprozesse und den vielfältigen Einsatz digitaler Medien erkennen. Die empirische Forschung zu den Wirkungen von mathematischen Wanderpfaden für das Lernen von Mathematik steht jedoch erst am Anfang. Allzu oft berichten Studien nur über die Erstellung und Durchführung einzelner Wanderpfade mit wenigen Schülerinnen und Schülern. Dieser Beitrag kann jedoch erste theoretische Bausteine für eine Didaktik der mathematischen Wanderpfade liefern, die durch systematische zukünftige Forschungsbefunde im Weiteren komplementiert werden sollte.

Danksagung

Herzlichen Dank an Judith Drexler für umfangreiche Vorarbeiten zu diesem Artikel und Jörg Zender für die Vorschläge relevanter Literatur.

Literatur

Baar, R. & Schönknecht, G. (2018). *Außerschulische Lernorte: didaktische und methodische Grundlagen*. Weinheim: Beltz.

Barzel, B. (2019). Digitalisierung als Herausforderung an Mathematikdidaktik – gestern. heute. morgen. In G. Pinkernell & F. Schacht (Hrsg.), *Digitalisierung fachbezogen gestalten. Herbsttagung vom 28. bis 29. September 2018 an der Universität Duisburg-Essen. Arbeitskreis Mathematikunterricht und digitale Werkzeuge in der GDM* (S. 1–9). Hildesheim: Franzbecker.

Bauersfeld, H. (1983). Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In H. Bauersfeld, H. Bussmann, G. Krummheuer, J.-H. Lorenz & J. Voigt (Hrsg.), *Lernen und Lehren von Mathematik* (S. 1–56). Köln: Aulis Verlag Deubner.

Baum, S., Roth, J. & Oechsler, R. (2013). Schülerlabore Mathematik: Außerschulische Lernstandorte zum intentionalen mathematischen Lernen. *Der Mathematikunterricht, 5*(59), 4–11.

Blane, D. C. & Clarke, D. (1984). *A mathematics trail around the city of Melbourne*. Melbourne: Monash Mathematics Education Center, Monash University.

Blomhøj, M. & Jensen, T.H. (2003). Developing mathematical modelling competence: conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications, 22*(3), 123–139.

Blum, W. & Leiß, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der "Tanken"-Aufgabe. *mathematik lehren, 128*, 18–21.

Blum, W. & vom Hofe, R. (2003). Welche Grundvorstellungen stecken in der Aufgabe? *mathematik lehren, 118*, 14–18.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM Mathematics Education, 38*(2), 86–95.

Brand, S. (2014). *Erwerb von Modellierungskompetenzen. Empirischer Vergleich eines holistischen und eines atomistischen Ansatzes zur Förderung von Modellierungskompetenzen*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Brodowski, M. (2009). *Informelles Lernen und Bildung für eine nachhaltige Entwicklung: Beiträge aus Theorie und Praxis*. Opladen: Verlag Barbara Budrich.

Buchholtz, N. (2019). Mit Actionbound spielerisch Mathematisieren üben. *mathematik lehren, 215*, 26–28.

Buchholtz, N. (2018a). Wie können Lehrkräfte Mathematisierungskompetenzen bei Schülerinnen und Schülern fördern und diagnostizieren? Über den produktiven Einsatz von Grundvorstellungen bei Modellierungsprozessen in außerschulischen Lernumgebungen. In R. Borromeo Ferri & W. Blum (Hrsg.), *Lehrerkompetenzen zum Unterrichten mathematischer Modellierung* (S. 57–80). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Buchholtz N. (2018b). Außerschulisches Lernen von Mathematisieren durch App-basierte mathematische Stadtspaziergänge. In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018* (S. 385–388). Münster: WTM-Verlag.

Buchholtz, N. & Armbrust, A. (2018). Ein mathematischer Stadtspaziergang zum Satz des Pythagoras als außerschulische Lernumgebung im Mathematikunterricht. In S. Schukajlow & W. Blum (Hrsg.), *Evaluierte Lernumgebungen zum Modellieren* (S. 143–163). Wiesbaden: Springer.

Buchholtz, N., Drexler, J. & Vorhölter, K. (2019). Mathtrails digital unterstützen – Chancen und Grenzen mobilen Lernens im Mathematikunterricht. In G. Pinkernell & F. Schacht (Hrsg.), *Digitalisierung fachbezogen gestalten. Herbsttagung vom 28. bis 29. September 2018 an der Universität Duisburg-Essen. Arbeitskreis Mathematikunterricht und digitale Werkzeuge in der GDM* (S. 11–22). Hildesheim: Franzbecker.

Cahyono, A. N. (2018). *Learning Mathematics in a Mobile App-Supported Math Trail Environment*. Cham: Springer.

Cahyono, A. N., Ludwig, M. (2019). Teaching and Learning Mathematics around the City Supported by the Use of Digital Technology. *Eurasia Journal of Mathematics,* *Science and Technology Education, 15*(1), em1654. https://doi.org/10.29333/ejmste/99514

Crompton, H. & Traxler, J. (2015). *Mobile Learning and Mathematics. Foundations, Design and Case Studies*. New York & London: Routledge.

Czocher, J. A. (2018). How does validating activity contribute to the modeling process? *Educational Studies in Mathematics, 99*(2), 137–159.

De Witt, C. & Sieber, A. (2013). *Mobile Learning: Potenziale, Einsatzszenarien und Perspektiven des Lernens mit mobilen Endgeräten*. Dordrecht: Springer.

Drigas, A. S. & Pappas, M.A. (2015). A Review of Mobile Learning Applications for Mathematics. *International Journal of Interactive Mobile Technologies, 9*(3), 18–22.

Drexler, J. (2018). *Einsatz von GeoGebra bei mathematischen Stadtspaziergängen: Konstruktion und Analyse eines mathematischen Rundgangs auf dem Campus der Universität Hamburg*. Masterarbeit. Hamburg: Universität Hamburg.

Doerr, H. M. & Pratt, D. (2008). The learning of mathematics and mathematical modeling. In M. K. Heid & G. W. Blume (Hrsg.), *Research on technology in the teaching and learning of mathematics: Syntheses and perspectives: Vol. 1. Mathematics learning, teaching and policy* (pp. 259–285). Charlotte: Information Age.

Ernest, P. (1996). Popularization: Myths, Massmedia and Modernism. In A. J. Bishop, M. Clements, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Hrsg.), *International handbook of mathematics education* (pp. 785–817). Dordrecht: Springer Science & Business Media.

Fessakis, G., Karta, P. & Kozas, K. (2018). The Math Trail as a Learning Activity Model for M-Learning Enhanced Realistic Mathematics Education: A Case Study in Primary Education. In M.E. Auer, D. Guralnick & I. Simonics (Hrsg.), *Teaching and Learning in a Digital World. Proceedings of the 20th International Conference on Interactive Collaborative Learning – Volume 1* (pp. 323–332). Cham: Springer.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel Publishing.

Freudenthal, H. (1987). Theoriebildung zum Mathematikunterricht. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 3*, 96–103.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education. China lectures*. Dordrecht: Kluwer.

Frohberg, D. (2008). *Mobile learning*. Zurich: Department of Informatics, University of Zurich.

Frohberg, D., Göth, C. & Schwabe, G. (2009). Mobile Learning projects – a critical analysis of the state of the art. *Journal of Computer Assisted Learning, 25*(4), 307–331.

Gaedtke-Eckhardt, D.-B. (2012). Außerschulische Lernorte. Besonderes Lernen in der Sekundarstufe. *Lernchancen, 89*, 4–8.

Greefrath, G., Kaiser, G., Blum, W. & Borromeo Ferri, R. (2013). Mathematisches Modellieren– Eine Einführung in theoretische und didaktische Hintergründe. In R. Borromeo Ferri, G. Greefrath & G. Kaiser (Hrsg.*), Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule. Theoretische und Didaktische Hintergründe.* Wiesbaden: Springer.

Greefrath, G. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Sekundarstufe*. Heidelberg: Springer Spektrum.

Greefrath, G. (2009). Schwierigkeiten bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben. In M. Neubrand (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2009* (S. 137–140). Münster: WTM-Verlag.

Gurjanow, I. & Ludwig, M. (2019). Gamifiying math trails with the MathCityMap app: Impact of points and leaderboard on intrinsic motivation. In G. Aldon & J. Trgalova (Hrsg.), *Proceedings of the 13th International Conference on Technology in Mathematics Teaching (ICTMT 13)* (pp. 105–112). https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01632970

Gurjanow I., Jablonski S., Ludwig M., Zender J. (2019). Modellieren mit MathCityMap. In Grafenhofer I. & Maaß J. (Hrsg.), *Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 6. Realitätsbezüge im Mathematikunterricht* (S. 95–105). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Hagena, M. (2019). *Einfluss von Größenvorstellungen auf Modellierungskompetenzen. Empirische Untersuchung im Kontext der Professionalisierung von Lehrkräften*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Hansen, T. I. (2018). Multimodalitet som didaktisk kategori. Learning Tech – *Tidsskrift for läremidler, didaktik og teknologi, 5*, 60–85.

Henn, H.-W. & Humenberger, H. (2011). Parabeln und Brücken – Ein vielversprechender Brückenschlag im Mathematikunterricht. *Der Mathematikunterricht, 57*(4), 22–33.

Kaur, B. (1990). *Mathematics around us: A mathematics trial around the Institute of Education, Singapore. Paper presented at the 5th South East Asian Conference on Mathematical Education: Enhancement of Mathematics, Brunei*.

Kaiser, G. & Stender, P. (2013). Complex modelling problems in co-operative, self-directed learning environments. In G. Stillman, G. Kaiser, W. Blum & J. Brown (Hrsg.), *Teaching mathematical modelling: Connecting to research and practice* (S. 277–293). Dordrecht: Springer.

Kleine, M., Ludwig, M. & Schelldorfer, R. (2012). Mathematik draußen machen: Outdoor Mathematics. *Praxis der Mathematik in der Schule*, *47*, 2–8.

Krauthausen, G. (2012). *Digitale Medien im Mathematikunterricht der Grundschule*. Berlin: Springer Spektrum.

Laborde, C. & Strässer, R. (2016). Was bedeutet Interaktivität in einer dynamischen Computer-gestützten Lernumgebung? In G. Heintz, G. Pinkernell & F. Schacht, *Digitale Werkzeuge für den Mathematikunterricht: Festschrift für Hans-Jürgen Elschenbroich* (S. 166–187). Neuss: Verlag Klaus Seeberger.

Lude, A., Schaal, S., Bullinger, M. & Bleck, S. (2013). *Mobiles, ortsbezogenes Lernen in der Umweltbildung und Bildung für nachhaltige Entwicklung: der erfolgreiche Einsatz von Smartphone und Co. in Bildungsangeboten in der Natur*. Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren GmbH.

Ludwig, M., Baumann-Wehner, M., Gurjanow, I. & Jablonski, S. (2019). Mathe draußen: MathCityMap. Mit Aufgaben-Wizard und Digitalem Klassenzimmer zum mobilen MathTrail. *mathematik lehren, 215*, 29–32.

Ludwig, M., Bärtl, M., Zender, J. & Buchholtz, N. (2019). Renaissance der mathematischen Wanderpfade. In A. Frank, S. Krauss & K. Binder (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2019* (S. 1207–1208). Münster: WTM-Verlag.

Ludwig, M., Jesberg, J. & Weiß, D. (2013). MathCityMap – faszinierende Belebung der Idee mathematischer Wanderpfade. *Praxis der Mathematik in der Schule, 53*, 14–19.

Lumb, D. (1980). Mathematics Trails in Newcastle. *Mathematics in School, 9*(2), 5.

Maaß, K. (2005). Modellieren im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. *Journal für Mathematikdidaktik, 26*(2), 114–142.

Milgram, P., Takemura, H., Utsumi, A. & Kishino, F. (1994). Augmented Reality: A class of displays on the reality-virtuality continuum. In H. Das (Hrsg.), *Proceedings of SPIE – The International Society for Optical Engineering. Volume 2351, Telemanipulator and Telepresence Technologies* (S. 282–292). https://doi.org/10.1117/12.197321

Niss, M., Blum, W. & Galbraith, P. (2007). Introduction. In W. Blum, P.L. Galbraith, H.-W. Henn & M. Niss (Hrsg.), *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study* (S. 3–32). New York: Springer.

O'Malley, C., Vavoula, G., Glew, J. P., Taylor, J., Sharples, M., Lefrere, P., et al. (2005). *Guidelines for learning/teaching/tutoring in a mobile environment*. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00696244

Petko, D. (2014). *Einführung in die Mediendidaktik: Lehren und Lernen mit digitalen Medien*. Weinheim: Beltz Verlag.

Pólya, G. (1945). *How to Solve It*. Princeton: Princeton University Press.

Plessow, O. (2015). „Außerschulisch" – Zur Bedeutung eines Begriffs aus geschichtsdidaktischer Perspektive. In D. Karpa, B. Overwien & O. Plessow (Hrsg.), *Außerschulische Lernorte in der politischen und historischen Bildung* (S. 17–32). Immenhausen: Prolog.

Scherer, P. & Rasfeld, P. (2010). Außerschulische Lernorte: Chancen und Möglichkeiten für den Mathematikunterricht. *mathematik lehren, 160*, 4–10.

Schreiber, C. & Schulz, K. (2017). Actionbound – virtuelle Schnitzeljagd. Mathematische Aspekte in der Umwelt spielerisch entdecken. *Mathematik differenziert, 1/2017*, 22–25.

Santos, M. E. C., Chen, A., Taketomi, T., Yamamoto, G., Miyazaki, J. & Kato, H. (2014). Augmented Reality Learning Experiences: Survey of Prototype Design and Evaluation. *IEEE Transactions on Learning Technologies, 7*(1), 38–56.

Sauerborn, P. & Brühne, T. (2014). *Didaktik des außerschulischen Lernens* (5. Auflage). Hohengehren: Schneider Verlag.

Shoaf, M., Pollak, H. & Schneider, J. (2004). *Math trails*. Lexington: COMAP.

Sommerauer, P. & Müller, O. (2014). Augmented Reality in informal learning environments: A field experiment in a mathematics exhibition. *Computers & Education, 79*, 59–68.

Sträßer, R. (2015). Grundbegriffe, Grundvorstellungen und Nutzen in der Geometrie. In M. Ludwig, A. Filler & A. Lambert (Hrsg.) *Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen. Jubiläumsband des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* (S. 1–11). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Tall, D. (2003). Using Technology to support an embodied approach to learning concepts in mathematics. In L.M. Carvalho & L.C. Guimarães (Hrsg.), *Historia e Tecnologia no Ensino de Mathemática* (S. 1–28). Rio De Janeiro: Universidade do Rio De Janeiro.

Tran, C., Smith, B. & Buschkuehl, M. (2017). Support of mathematical thinking through embodied cognition: Nondigital and digital approaches. *Cognitive research: Principles and Implications, 2*,16, https://doi.org/10.1186/s41235-017-0053-8

Treffers, A. (1987) *Three dimensions. A model of goal and theory description in mathematics instruction – the Wiskobas project*. Dordrecht: D. Reidel Publishing.

Urff, C. (2014). *Digitale Lernmedien zur Förderung grundlegender mathematischer Kompetenzen: Theoretische Analysen, empirische Fallstudien und praktische Umsetzung anhand der Entwicklung virtueller Arbeitsmittel*. Berlin: Mensch und Buch.

White, T. & Martin (2014). Mathematics and Mobile Learning. *TechTrends, 58*(1), 64–70.

Wilhelm, M., Messmer, K. & Rempfler, A. (2011). Ausserschulische Lernorte: Chance und Herausforderung. In K. Messmer, R. von Niederhäusern, A. Rempfler & M. Wilhelm (Hrsg.), *Ausserschulische Lernorte: Positionen aus Geographie, Geschichte und Naturwissenschaften* (S. 8–24). Zürich: LIT Verlag.

Winter, H. (2016). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik*, 3., aktualisierte Auflage. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 61*, 37–46.

Winter, H. (1987). *Mathematik entdecken. Neue Ansätze für den Unterricht in der Grundschule*. Frankfurt a. Main: Scriptor.

Wijers, M., Jonker, V. & Drijvers, P. (2010). MobileMath: exploring mathematics outside the classroom. *ZDM Mathematics Education, 42*, 789–799.

Zender, J. (2019). *Mathtrails in der Sekundarstufe I. Der Einsatz von MathCityMap bei Zylinderproblemen in der neunten Klasse*. Münster: WTM Verlag.

Anschrift des Verfassers

Assoc. Prof. Dr. Nils Buchholtz
University of Oslo
Department of Teacher Education and School Research,
Faculty of Educational Science
Postbox 1099 Blindern,
0317 Oslo, NORWAY
n.f.buchholtz@ils.uio.no