„Die sind doch nicht fast gleich." Geometrische Begriffsbildungsprozesse zum Dreieck im Lehr-Lern-Labor *ZahlenRaum*

NINJA DEL PIERO & UTA HÄSEL-WEIDE, PADERBORN

***Zusammenfassung**: Die Entwicklung geometrischer Begriffe ist ein zentrales Ziel des Mathematikunterrichts. Wenig ist jedoch darüber bekannt, wie Kinder in konkreten geometrischen Lernumgebungen Begriffe konstruieren und wie der Unterricht sie dabei unterstützen kann. Im Lehr-Lern-Labor ZahlenRaum wird diesen Fragen nachgegangen und dabei im Sinne eines doppelten Zyklus der fachdidaktischen Entwicklungsforschung empirische, wissenschaftliche Forschung mit forschendem Lernen von Studierenden verknüpft.*

Der Beitrag stellt einerseits erste Ergebnisse zur Begriffsbildung von Kindern zum Dreieck und zur Kongruenz von Dreiecken vor und zeigt andererseits, wie diese gewonnenen lokalen Theorien im nächsten Entwicklungszyklus Gegenstand des forschenden Lernens von Studierenden werden.

***Abstract:** Central goal of mathematical learning is to develop an understanding of geometrical thinking. Little is known, how children think, handle and describe their thoughts when working on geometric tasks and how their understanding can be supported. This research is done by the teaching-learning-lab ZahlenRaum which connects empirical scientific research and the explorative research-based learning of teacher students.*

On the one hand, this article presents first results of children's concept formation of (congruent) triangles and on the other hand it shows how these local theories become the subject of research-based learning by teacher students in the next development cycle.

1. Einleitung

„Geometrie zu lernen und zu betreiben bedeutet größtenteils, geometrische Begriffe zu erwerben und mit ihnen umzugehen" (Bender & Schreiber, 1985, S. 16). Begriffsbildung zielt auf den Erwerb von Vorstellungen, Fähigkeiten und Wissen ab, welche als mentale Modelle abgespeichert werden. Für die Grundschule gehört dazu ganz wesentlich, dass die Kinder Vorstellungen von ebenen und räumlichen Figuren erwerben, diese beschreiben und voneinander unterscheiden können.

Zur Anregung dieser Begriffsbildungsprozesse sind passende Lernumgebungen zu entwickeln und die Kinder im Rahmen ihrer Eigentätigkeit individuell und fachlich zu unterstützen. Das Lehr-Lern-Labor *ZahlenRaum* der Universität Paderborn macht Grundschulkindern Lernangebote, in denen sie ihr Verständnis geometrischer Begriffe in forschenden Lernumgebungen erweitern können.

Gleichermaßen bietet das Lehr-Lern-Labor Studierenden die Gelegenheit, diese Begriffsbildungsprozesse zu initiieren und zu begleiten sowie anhand von Videographien zu reflektieren und zu analysieren. Im Rahmen des Seminars „Heterogene Lernentwicklungsverläufe im ZahlenRaum erkunden" erarbeiten Studierende theoretische Konzeptionen zur geometrischen Begriffsbildung, erkunden und adaptieren die Lernumgebung „Dreiecke auf dem Geobrett"[1]. Sie unterstützen die Grundschulkinder bei der Arbeit an der Lernumgebung im ZahlenRaum und analysieren Videographien hinsichtlich der Begriffsbildungsprozesse zum Dreieck. Über die Analyse im Seminar hinaus werden die videographierten Lern- und Interaktionsprozesse im ZahlenRaum sowohl im Rahmen von Bachelor- und Masterarbeiten als auch in Promotionsprojekten erforscht.

Auf diese Weise fungiert das Lehr-Lern-Labor *ZahlenRaum* als Ort, an dem (a) Interesse und Motivation von Schülerinnen und Schülern für das Fach Mathematik in handlungsorientierten Lernumgebungen mit reichhaltigen mathematischem Potenzial geweckt, (b) die Lehrkompetenz der Studierenden durch eine Stärkung der reflektierten Praxisorientierung entwickelt sowie (c) im Sinne einer Mathematikdidaktik als Design Science Lernumgebungen entwickelt und Lernprozesse von Kindern erforscht werden.

Forschungsfragen können entsprechend auf der Ebene der Förderung von Interesse und Motivation, der Entwicklung der Lehrkompetenz der Studierenden oder der Entwicklung und Erforschung von Lernumgebungen liegen. Im vorliegenden Beitrag liegt der Fokus auf letzterem Aspekt. Im Zentrum steht folgende Fragestellung:

Wie können geometrische Begriffsbildungsprozesse in Lernumgebungen im Lehr-Lern-Labor ZahlenRaum angeregt und welche Interaktions- und Verstehensprozesse rekonstruiert werden?

2. Fachdidaktische Entwicklungsforschung als doppelter methodischer Rahmen im *ZahlenRaum*

Prediger, Link, Hinz, Hußmann, Ralle und Thiele (2012) spezifizieren vier Phasen, die im Rahmen der fachdidaktischen Entwicklungsforschung in mehrmaligen Zyklen durchlaufen werden: a) Spezifizierung und Strukturierung des Lerngegenstandes, b) (Weiter-)Entwicklung des Designs, c) Durchführung und Auswertung der Designexperimente und d) (Weiter-)Entwicklung lokaler Theorien. Dabei müssen die Forschenden zwischen normativen und interpretativen Standpunkten wechseln: Bei der Entwicklung von Lernumgebungen stehen theoretische und normative Aspekte im Mittelpunkt, bei der Analyse der Design-Experimente ist zu berücksichtigen, dass Lernprozesse immer Ergebnisse eines sozial-interaktiven Prozesses zwischen Lernenden und Lehrenden sind (Nührenbörger et al., 2016, S. 11).

Der Forschungszyklus im *ZahlenRaum* folgt diesen Phasen (vgl. Abb. 1). Ausgehend von den Theorien zur Begriffsbildung (vgl. 3.1) und über die Spezifizierung des Lerngegenstands „Dreieck" (vgl. 3.2) wird die Lernumgebung (weiter-)entwickelt (vgl. 3.3) und die Design-Experimente (Schulklassenbesuche im *ZahlenRaum*) durchgeführt sowie ausgewertet (vgl. 3.4), wodurch die Erkenntnisse über die Begriffsbildungs- und Aushandlungsprozesse von Grundschulkindern zum Dreieck (weiter-)entwickelt werden (3.5).

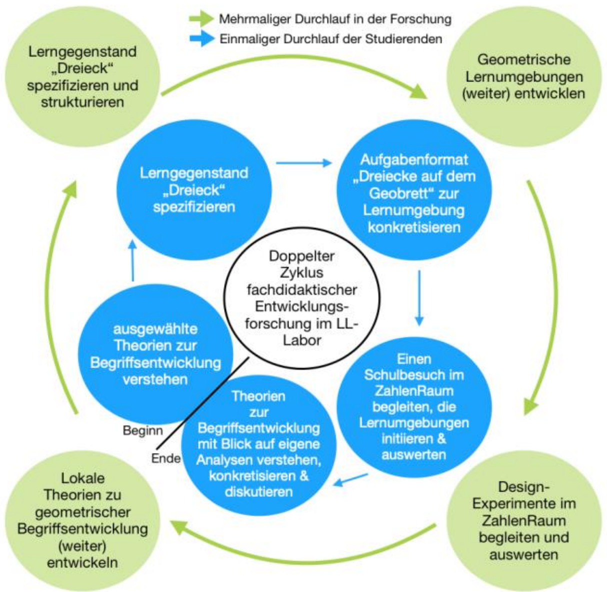


Abb. 1: Doppelter Zyklus fachdidaktischer Entwicklungsforschung im Lehr-Lern-Labor *ZahlenRaum*

Die Studierenden werden in diesen zyklischen Prozess einbezogen und partizipieren an *einem* Zyklus (vgl. Abb. 1).

In einem diesen Prozess begleitenden Seminar setzen sich die angehenden Lehrkräfte in den ersten Sitzungen mit dem theoretischen Hintergrund auseinander – wobei eine Vorauswahl von Konzeptionen und Modellen von der Dozentin getroffen wird. Zudem partizipieren die Studierenden an den bereits gewonnenen lokalen Theorien aus den vorangegangenen Zyklen, in dem z. B. anhand von Videovignetten die Klassifikation der Kinder von Dreiecken analysiert werden. Das Design der Lernumgebung ist in den grundlegenden Design-Prinzipien gesetzt und wird, begleitet von der Seminarleitung, von den Studierenden in ausgewählten Aspekten weiterentwickelt. Während der Durchführung der Lernumgebung unterstützen die Studierenden die Kinder bei ihren Erkundungen und initiieren fachliche Gespräche (Hirt & Wälti, 2008). Die an die Durchführung anschließende Analyse der Begriffsbildungs- und Aushandlungsprozesse wird von den Studierenden anhand der Videodokumente vorgenommen, während die Analysen von den Autorinnen am Transkript erfolgen.

Der Aufbau des Beitrags folgt im Weiteren dem Zyklus der fachdidaktischen Entwicklungsforschung beginnend mit Theorien zur geometrischen Begriffsbildung, die durch Beispiele erläutert werden, welche bereits an den konkreten Lerngegenstand des Dreiecks angelehnt sind und somit dessen Spezifizierung dienen.

3. Zyklisches Vorgehen zu geometrischen Begriffsbildungsprozessen zum Dreieck im Lehr-Lern-Labor ZahlenRaum

3.1 Begriffe im Geometrieunterricht

„Begriffe sind strukturelle Einheiten menschlichen Wissens und dienen dazu, aufgenommene Informationen zweckentsprechend zu verdichten" (Franke & Reinhold, 2016, S. 115). „Von einem „Begriff" sprechen wir dann, wenn damit nicht nur ein einzelnes Objekt oder ein Gegenstand, sondern eine Gesamtheit oder Kategorie gemeint ist, zu der der Gegenstand gehört" (Weigand, 2018, S. 88). Begriffe lassen sich durch bestimmte Eigenschaften charakterisieren, d.h. mit einem Begriff werden „Objekte und Erscheinung hinsichtlich bestimmter Eigenschaften" zusammengefasst (ebd., S. 166). Einen Begriff zu bilden, erfordert damit immer einen Prozess der Kategorisierung, das bedeutet, „unterscheidbar verschiedenen Dingen Äquivalenzen zu verleihen, die Objekte, Ereignisse und Leute um uns herum in Klassen zu gruppieren und auf sie eher bezüglich ihrer Klassenzugehörigkeit als bezüglich ihrer Einzigartigkeit zu reagieren“ (Bruner, Goodnow & Austin, 1956, S. 1). Es gilt also von den Besonderheiten des Einzelfalls zu abstrahieren und die gemeinsamen Eigenschaften hervorzuheben.

Weigand (2018) unterscheidet beim Lernen geometrischer Begriffe zwischen dem Aufbau angemessener Vorstellungen, dem Erwerb von Kenntnissen, d.h. dem Wissen über die Eigenschaften und die Beziehungen zwischen Eigenschaften sowie dem Aneignen von Fähigkeiten, worunter er das Konstruieren, Berechnen und Problemlösen fasst.

In der Grundschule lernen die Kinder zum einen, *ebene und räumliche Objekte* zu erkennen, zu benennen und darzustellen und ihre Eigenschaften zu beschreiben. Zum anderen sollen geometrische *Abbildungen* – vor allem die Symmetrie – in ihren Eigenschaften erkannt, beschrieben und symmetrische Figuren konstruiert werden (Bildungsstandards Mathematik 2004). Von Beginn an sind Kinder folglich mit allen von Weigand beschriebenen Aktivitäten zum Lernen geometrischer Begriffe konfrontiert.

3.1.1 Wege der Begriffsbildung aus mathematikdidaktischer Sicht

Zur Bildung mathematischer Begriffe werden drei Wege unterschieden. Einen Weg stellt die konstruktive Begriffsbildung dar, die vor allem in der Grundschule relevant ist, da dort Begriffe oft zunächst ohne Definition oder explizite Klassifizierung gebildet werden. Stattdessen werden vielfältige Handlungen sprachlich begleitet sowie im Rahmen von Materialerkundungen oder Eigenproduktionen Erfahrungen gesammelt, durch die die Begriffe aufgebaut oder neue Informationen in das bestehende Wissen zu einem Begriff eingeordnet werden. Der Begriff wird also handelnd beim Herstellen von Repräsentanten des Begriffes gewonnen (Winter, 1983, S. 189), zum Beispiel durch das Spannen von Dreiecken auf einem Geobrett.

Ein anderer Weg besteht in der Begriffsbildung durch Abstrahieren. Die Bildung eines Begriffs erfolgt hier entweder nach bestimmten Merkmalen, die auf die Objekte eines Begriffs zutreffen, oder im Abgleich mit einem Prototyp. Beim ersten werden ausgehend von realen Gegenständen bestimmte Eigenschaften hervorgehoben bzw. ignoriert. Liegt zum Beispiel ein Modell eines blauen Plastikdreiecks vor, so werden die begriffsbestimmenden Eigenschaften (drei Seiten, drei Ecken) hervorgehoben und die Farbe oder Materialbeschaffenheit als nicht begriffsbestimmend ignoriert. Zudem erfolgt eine Idealisierung, indem abstrakte Eigenschaften in das Objekt hineingesehen werden. Bei dem Abgleich mit einem Prototyp hingegen wird oftmals mit Beispielen und Gegenbeispielen eines Begriffs gearbeitet, um diesen zu charakterisieren (Franke & Reinhold, 2016; Weigand, 2015).

Während beim Abstrahieren aus den Objekten auf den Begriff geschlossen wird, steht bei der Begriffsbildung durch Spezifizieren aus einem Oberbegriff zunächst der Begriff im Zentrum. Ein i.d.R. bereits bekannter Begriff wird durch die Angabe zusätzlicher Eigenschaften auf Teilbegriffe eingeschränkt. Gegeben wird bspw. der Oberbegriff des Dreiecks und hinzugenommen wird das spezifische Merkmal „gleichschenklig“, sodass der Begriff „Dreieck“ weiter ausdifferenziert wird, indem er unterteilt wird in gleichschenklige und nicht gleichschenklige Dreiecke. Dies ließe sich mit weiteren spezifischen Merkmalen fortführen, womit die Struktur des Begriffs „Dreiecks“ erschlossen wird. Die Struktur des Begriffs besteht somit aus dem Wissen um verschiedene Repräsentanten, die sich hinsichtlich der Anzahl ihrer begriffsbestimmenden Merkmale unterscheiden. Bei dem Begriff Dreieck können die Repräsentanten bspw. unterschieden und klassifiziert werden nach ihren Innenwinkeln (stumpfwinklig, spitzwinklig, rechtwinklig) oder nach ihren Seitenlängen (verschiedenseitig, gleichschenklig, gleichseitig) (Roth & Wittmann, 2018).

Alle drei Wege der Begriffsbildung werden im Mathematikunterricht verfolgt und ergänzen sich gegenseitig. So kann der Begriff des Dreiecks bspw. durch Spannen oder Zeichnen handlungsorientiert erschlossen und dabei Eigenschaften erkannt werden, die den Begriff charakterisieren. Möglich ist auch, dass bei der Erzeugung des Objektes Gegenbeispiele entstehen, die als nicht zum Begriff zugehörig erkannt werden können.

3.1.2 Entwicklung des Verständnisses geometrischer Begriffe

Ziel der Begriffsentwicklung ist die Ausbildung des Verständnisses. Verständnis wird dabei „als Ergebnis von Lernen erreicht und ist grundsätzlich entwicklungsfähig. Bei vielen Begriffen hat es sich darum bewährt, von Stufen des Verstehens zu sprechen.“ (Vollrath, 1984, S. 10). Unter Verständnis versteht Vollrath (1984) einen Zustand, der durch bestimmte nachprüfbare Fähigkeiten gekennzeichnet ist und dabei das Resultat eines Verstehensprozesses bildet, der mehrere Stufen durchlaufen kann und einen Prozess der Generierung und des Umgehens mit mentalen Modellen darstellt. Um nun den Verstehensprozess der Kinder zum Begriff „Dreieck“ beschreiben zu können, müssen (Teil)Kompetenzen zu der jeweiligen Stufe des Verständnisses charakterisiert werden.

Zur Beschreibung dieser Stufen mathematischen Verständnisses können unterschiedliche Modelle, unter anderem von Winter (1983), Vollrath (1984) und den van Hieles (1957, 1959, 1986), herangezogen werden. Alle drei Modelle weisen inhaltliche Parallelen auf, da jedoch nur das Modell der van Hieles spezifisch auf das geometrische Denken ausgerichtet ist, wird dieses im Folgenden erläutert und diskutiert.

Modell des geometrischen Denkens nach van Hiele

Im Modell zur Entwicklung des geometrischen Denkens beschreiben Dina van Hiele-Geldof (1957) und Pierre van Hiele (1959, 1986) auf der Grundlage empirischer Untersuchungen folgende fünf sogenannte Niveaustufen geometrischen Denkens: 1) Visualization, 2) Analysis, 3) Abstraction 4) Formal Deduction und 5) Rigor[2]. Von diesen werden im Folgenden die drei für die Grundschule relevanten Stufen diskutiert und das Modell erweitert.

Auf der ersten Stufe (Visualization) erfassen Kinder eine geometrische Figur aufgrund ihrer ganzheitlichen Erscheinung und treffen Unterscheidungen zwischen Figuren intuitiv (van Hiele, 1959; Pinkernell, 2003). Zuordnungen über charakteristische Eigenschaften der jeweiligen Figuren können noch nicht vorgenommen werden. Bspw. kann ein Kind ein Dreieck als solches identifizieren und benennen, weil es gelernt hat, dass ein Dreieck „Dreieck" heißt. Der Begriff wird dabei reproduziert (Clements & Battista, 1992) und auf ähnlich aussehende Figuren übertragen, wobei die Kinder sich an der äußeren Gestalt orientieren. Oftmals werden auch prototypische oder alltägliche Vorstellungen als Vergleich herangezogen. So wird bei einem Rechteck bspw. bemerkt, dass es wie eine Tür aussieht (Clements & Battista, 1992, S. 25), bei einem Dreieck, dass es die Form eines Pizzastücks hat, was natürlich keine ganz passende Sichtweise ist, da es sich vermutlich um einen Kreissektor handelt.

Das begriffliche Verständnis auf der zweiten Stufe (Analysis) zeichnet sich dadurch aus, dass die Figuren als Träger geometrischer Eigenschaften gesehen werden. Ein Dreieck wird z. B. von einem Kind als ein Dreieck bezeichnet, weil es die begriffsbestimmenden Eigenschaften erkannt hat und als Kriterien zur Identifikation hinzuzieht (van Hiele, 1959). Die geometrischen Objekte werden somit nicht mehr (nur) an ihrer ganzheitlichen Erscheinung beurteilt, sondern (auch) analytisch anhand geometrischer Eigenschaften.

Als dritte Stufe des Verständnisses (Abstraction) klassifizieren die van Hieles das Erkennen von Beziehungen zwischen Eigenschaften einer geometrischen Figur sowie das Feststellen von Beziehungen zwischen Eigenschaften verwandter geometrischer Figuren (Franke & Reinhold, 2016). Kinder mit einem Verständnis auf dieser Stufe sind in der Lage, geometrische Objekte nach ihren Eigenschaften zu ordnen, voneinander abzuleiten und Klasseninklusionen zu bilden (van Hiele, 1959), wie z. B. die Klassifikation der Dreiecke nach Seitenlänge oder Innenwinkel oder die Unterscheidung zwischen kongruenten und nicht kongruenten Dreiecken.

Kritik am van Hiele Modell

Das van Hiele Modell wird in vielen mathematikdidaktischen Studien als Referenzrahmen und Analyseinstrument genutzt (z. B. Tsamir, Trios, & Levinson, 2008; Wöller & Reinhold, 2016) und erfährt Anerkennung. Zugleich ist es selbst Gegenstand von empirischen Untersuchungen mit dem Ziel, die Güte und Trennschärfe der Stufen zu prüfen (Burger & Shaughnessy, 1986; Clements & Battista, 1992).

Clements und Kollegen führten mit 97 Kindern zwischen vier und sechs Jahren Interviews durch, bei denen die Kinder dazu aufgefordert wurden, auf einem Papier mit mehreren unterschiedlichen Figuren eine bestimmte ebene Figur wie Kreis, Dreieck oder Rechteck zu markieren (Clements, Swaminathan, Hannibal & Sarama, 1999). Die Autoren hielten zum einen die Anzahl der korrekten Antworten fest und kodierten zum anderen die Erklärungen, die die Kinder zu ihren Markierungen abgaben. Dabei stellten sie fest, dass manche Kinder Beispiele sowie Nichtbeispiele von Dreiecken gleichermaßen als Dreieck markierten, also nicht in der Lage waren, zwischen Dreiecken und anderen ebenen Figuren zu unterscheiden. Das Verständnis von Kindern mit diesen Kompetenzen wird laut der Autoren nicht von dem originalen van Hiele Modell abgebildet. Sie führen daher aufgrund der Ergebnisse ihrer Studie, aber auch durch die Sichtung mehrerer internationaler Studien, die zu ähnlichen Ergebnissen kamen (Clements & Battista, 1992), eine weitere Stufe ein, die der ersten van Hiele Stufe vorangestellt ist. Diese Stufe nennen Clements et al. (1999, S. 205) „prerecognitive". Das Verständnis der Kinder auf dieser Stufe ist dadurch gekennzeichnet, dass die Kinder in der Lage sind, geometrische Figuren zu erkennen, dabei jedoch unvollständig nur auf einen kleinen, charakteristischen Teil der Figur fokussieren wie z. B. eckig. So können sie runde von eckigen Figuren unterscheiden, haben jedoch Schwierigkeiten, zwei eckige Figuren voneinander abzugrenzen.

Eine weitere Erkenntnis aus derselben Studie ist, dass sich viele Kinder an einem Übergang zwischen den Stufen 1 und 2 des van Hiele Modells befinden. Sie beurteilen ein Objekt sowohl anhand ganzheitlicher prototypischer Vorstellungen als auch anhand von begriffsbestimmenden Merkmalen. Bei der Entscheidung überwiegt hier oftmals die prototypische Vorstellung des Objektes. Für Kinder mit einem solchen Verständnis regen die Autoren an, die Stufe 1 der van Hieles durch eine neue Stufe, die sich zwischen 1 und 2 bewegt, zu ersetzen, welche sie „syncretic“ nennen (Clements & Battista, 1999, S. 206).

Kompetenzen, die sich am Übergang zwischen der ersten und zweiten Stufe der van Hieles festmachen lassen, beschreiben auch Tsamir et al. (2008). In einer Studie mit 65 Kindern zwischen fünf und sechs Jahren wurden diesen in Einzelinterviews verschiedene ebene Figuren präsentiert und die Kinder gefragt, ob es sich bei der jeweiligen Figur um ein Dreieck handle. Bei den präsentierten Figuren handelt es sich um typische und untypische Repräsentanten des Dreiecks sowie um andere typische ebene Figuren wie Quadrat und Ellipse, aber auch um weitere Figuren, die Ähnlichkeiten zu Dreiecken aufweisen, jedoch keine darstellen wie bspw. ein Dreieck mit abgerundeten Ecken. Die Autoren stellten fest, dass sich die Kinder bei der Begründung ihrer Entscheidung auf Eigenschaften beziehen, die nicht begriffsbestimmend sind, wie die Ausrichtung oder Größe der Figuren. Hierin vermuten Tsamir und Kollegen einen Übergang zwischen der ersten und zweiten van Hiele Stufe, da nicht mehr nur die ganzheitliche Gestalt eine Rolle spielt, die Begründungen aber auch noch nicht über begriffsbestimmende Eigenschaften erfolgen.

Erweitertes Modell der geometrischen Begriffsbildung

Folgt man den obigen Argumentationen, so ist zu einer differenzierteren Betrachtung der Entwicklung des Begriffsverständnisses das ursprüngliche van Hiele Modell um zwei Stufen zu ergänzen, woraus ein erweitertes Modell zur Beschreibung der Entwicklung des geometrischen Begriffsverständnisses von Grundschulkindern entsteht:

<u>Stufe 0: Vorstufe der Identifikation (prerecognitive)</u>

- Fixierung auf Eigenschaften wie rund und eckig
- Mentale Vorstellungsbilder noch nicht aufgebaut
- Identifizierung und Unterscheidung geometrischer Figuren gelingt zumeist nicht

<u>Stufe 1: Intuitives Begriffsverständnis (visualization)</u>

- Ganzheitlich-intuitive Wahrnehmung geometrischer Figuren, prototypische oder alltagsgegenständliche Vorstellungen
- Auseinandersetzung mit konkreten Phänomenen
- Reproduktion gelernter Begriffe

<u>Übergangsstufe: Intuitiv-inhaltliches Begriffsverständnis (syncretic)</u>

- Ganzheitliche Wahrnehmung geometrischer Figuren und Beschreibung anhand von Eigenschaften – ganzheitliche Wahrnehmung überwiegt
- Herangezogene Eigenschaften sind nicht begriffsbestimmend

<u>Stufe 2: Inhaltliches Begriffsverständnis (analysis)</u>

- Identifizierung, Beschreibung und Zuordnung geometrischer Figuren anhand begriffsbestimmender Eigenschaften

<u>Stufe 3: Integriertes Begriffsverständnis (abstraction)</u>

- Beziehungen zwischen Eigenschaften einer Figur und/oder Eigenschaften verwandter Figuren werden erkannt
- Klasseninklusionen werden gebildet

Die Benennungen der Stufen setzen sich zusammen aus den englischen Bezeichnungen im van Hiele Modell und den Ergänzungen von Clements et al.[3] Für die deutschen Bezeichnungen wurden die von Vollrath (1984, S. 216) gewählten Begriffe aus seinen Ausführungen zur Entwicklung des Begriffsverständnisses gewählt, da diese die jeweiligen Stufen anschaulich charakterisieren. Der Vergleich zwischen den Modellen von den van Hieles, das geometriespezifisch ist, und Weigand sowie von Winter (1983) und Vollrath (1984) zeigte deutliche inhaltliche Parallelen, sodass die Begrifflichkeiten gut übernommen werden können.

Das (erweiterte) Modell der Begriffsentwicklung gibt einen Rahmen über die Entwicklung des geometrischen Verständnisses, allerdings ist es auch mit der Erweiterung recht grob, umfasst es doch die Entwicklung vom Kleinkind bis zur Hochschule und ist zudem weitgehend unspezifisch. Untersuchungen fokussieren deshalb auf ausgewählte Inhaltsbereiche und versuchen die Kompetenzen und die Kompetenzentwicklung von Kindern dort genauer zu erfassen, zu beschreiben und gegebenenfalls zu hierarchisieren (z. B. Burger & Shaughnessy, 1986; Tsamir et al., 2008).

3.2 Spezifizierung des Lerngegenstands „Dreieck“

Im Kapitel zu den lokalen Theorien wurde der Lerngegenstand „Dreieck“ bereits durch die Beispiele spezifiziert und ebenso Studien aufgezeigt, die auf die Begriffsentwicklung des „Dreiecks“ fokussieren. Dabei stellen diese Studien vor allem das Erkennen von Repräsentanten des Begriffs, ihre Unterscheidung von anderen ebenen Figuren und den herangezogenen Begründungen für die Unterscheidung bzw. Identifikation in den Vordergrund (vgl. Clements et al., 1999; Tsamir et al., 2008; weitere Studien bspw. auch von Unterhauser, 2015).

Die Konstruktion von Dreiecken im Unterricht untersucht Senftleben (2011) mit 50 Kindern des 4. Jahrgangs. Im Fokus steht, welche Dreiecke auf dem 3·3-Geobrett mit welcher Häufigkeit von den Kindern gefunden werden. Es zeigte sich, dass von den möglichen acht Dreiecken (siehe. Abb. 2) nahezu alle Kinder die Dreiecke 1, 2 und 4 fanden. Die Dreiecke 3, 6 und 7 wurden von gut zwei Dritteln, die Dreiecke 5 (20%) und 8 (16 %) von weniger als einem Fünftel der Kinder gefunden.

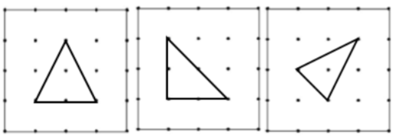
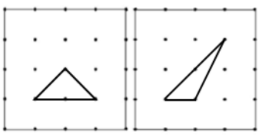
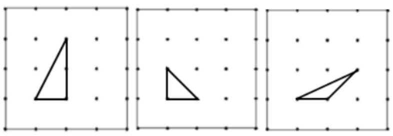
Mögliche Dreiecke auf dem 3•3 Geobrett	Anzahl Lagemöglichkeiten
 Dreieck 1, Dreieck 2, Dreieck 3	4
 Dreieck 4, Dreieck 5	8
 Dreieck 6, Dreieck 7, Dreieck 8	16

Abb. 2: Übersicht über mögliche Dreiecke auf dem 3 · 3 Geobrett (Nummerierung durch Autorinnen)

Auch wenn die Ergebnisse der Studie aufgrund der kleinen Stichprobe eine eingeschränkte Aussagekraft haben, scheint es bemerkenswert, dass die Dreiecke, die von nahezu allen Kindern gefunden wurden, sich durch ein prototypisches Erscheinungsbild auszeichnen. Dieser Befund deckt sich mit der Untersuchung von Tsamir et al. (2008), die ebenfalls feststellten, dass Kinder prototypische Dreiecke wesentlich besser als solche identifizieren können als nicht typische Repräsentanten. Als prototypische Dreiecke beschreiben sie gleichschenklige oder gleichseitige Dreiecke, die sich in einer für die Kinder gewohnten Lage befinden. Dieser Charakterisierung entsprechen die Dreiecke 1, 2 und 4, da sie gleichschenklig und in gewohnter Lage sind während Dreieck 3 zwar gleichschenklig ist, jedoch in einer ungewohnten Lage, auf der Spitze stehend, problematischer aufzufinden erscheint.

Die bisherigen Studien untersuchen oftmals in klinischen Interviews oder Einzeltests, ob Dreiecke als solche identifiziert werden können, Senftleben (2011) fokussiert im Unterricht auch das Finden von Dreiecken. Damit wird einerseits auf die Vorstellung vom Dreieck bzw. dem Erkennen anhand von Eigenschaften und andererseits auf die Konstruktion von Dreiecken fokussiert, wobei Senftleben nicht den Konstruktionsprozess, sondern nur die Produkte betrachtet. Wenig ist darüber bekannt, wie Kinder bei der Konstruktion von Dreiecken vorgehen, wie sie also zu einem Begriff „Einzelfälle“ konstruieren, und welche Beziehungen zwischen Dreiecken dabei hergestellt werden. Zudem gibt es keine Kenntnisse darüber, inwiefern die Kongruenz zwischen Dreiecken erkannt wird und worauf sich die Kinder bei der Prüfung der Kongruenz beziehen.

Um diese Prozesse untersuchen zu können, ist eine Lernumgebung notwendig, die genau dies in den Mittelpunkt stellt und sichtbar macht. Dazu wird im Lehr-Lern-Labor *ZahlenRaum* eine Lernumgebung konzipiert, die sowohl die Konstruktion verschiedener Dreiecke als auch den Vergleich und die Ordnung in den Mittelpunkt stellt und durch hohe kommunikative Anteile die Lern- und Interaktionsprozesse rekonstruierbar macht.

3.3. Die Lernumgebung Dreiecke auf dem Geobrett

Die Aufgabe „Finde möglichst viele verschiedene Dreiecke auf dem Geobrett“ steht zentral im Mittelpunkt der Lernumgebung (Radatz & Rickmeyer, 1991; Rickmeyer, 2000) und zielt zentral auf die Kompetenz „geometrische Figuren erkennen, benennen und darstellen“ (Bildungsstandards Mathematik, 2004). Die konkrete Umsetzung als Lernumgebung (Wollring, 2007a) variiert je nach Umsetzung der Studierenden. Feste Elemente sind a) das freie Spannen von Figuren auf einem selbstgebauten Geobrett, b) individuelles Finden von (ersten) Dreiecken und deren Zeichnung sowie c) der Vergleich und die Ordnung der Dreiecke in Paaren oder Gruppen.

Spannen, Zeichnen, Vergleichen und Ordnen von Dreiecken sind reichhaltige mathematische Aktivitäten zum zugrundliegenden mathematischen Inhalt

(Begriffsverständnis zum Dreieck) und bieten im Sinne der natürlichen Differenzierung unterschiedliche Schwierigkeitsniveaus, deren Charakterisierung sich an der Entwicklung des Begriffsverständnisses zum Dreieck orientiert.

Beim Finden der Dreiecke spielt zudem die Auseinandersetzung mit dem Begriff „verschieden“ eine wichtige Rolle. Die Aufforderung, viele verschiedene Dreiecke zu finden, erfordert den Vergleich von Dreiecken, um die Gleichheit oder Verschiedenheit festzustellen und somit Dreiecke zueinander in Beziehung zu setzen. Es findet hiermit eine erste Annäherung an die Kongruenz von Dreiecken statt, wobei das mathematische Konzept der Kongruenz nicht explizit genannt wird. Kongruent sind Dreiecke dann, wenn sie in Form und Größe übereinstimmen. Das bedeutet, sie stimmen entweder in der Länge aller drei Seiten, in der Länge zweier Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, in der Länge zweier Seiten und dem der längeren Seite gegenüberliegenden Winkel oder in der Länge einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln überein (vgl. Agricola & Friedrich, 2009, S. 21). Die Prüfung der Verschiedenheit, also der Kongruenz der Dreiecke, kann auf unterschiedliche Weisen erfolgen, bspw. durch Handlungen oder analytisch verbale Begründungen.

Eine an das Finden der Dreiecke anschließende Aufforderung zur Ordnung der Dreiecke zielt auf die Fokussierung von Eigenschaften ab. Merkmale wie z. B. Innenwinkel oder Seitenlängen werden herangezogen, um die Dreiecke zu klassifizieren (Roth & Wittmann, 2018) und das Wissen über den Begriff Dreieck und dessen Struktur zu vertiefen. Möglich wäre dabei bspw. die Dreiecke danach zu ordnen, ob sie rechtwinklig, spitzwinklig oder stumpfwinklig bzw. verschiedenseitig oder gleichschenklig sind (Roth & Wittmann, 2018). Zudem können beim Ordnen der Dreiecke noch nicht aussortierte kongruente Dreiecke entdeckt werden. Angebahnt wird ebenfalls, dass durch die Ordnung der Begriff des Dreiecks anhand der Ordnungskriterien weiter spezifiziert wird, womit die Begriffsbildung durch Spezifizieren aus einem Oberbegriff angeregt wird.

Wie genau die Aufgabe als Lernumgebung konkretisiert wird, planen die Studierenden im begleitenden Seminar zum *ZahlenRaum*. Nach der Klärung ausgewählter theoretischer Grundlagen, erkunden sie das Aufgabenformat, spezifizieren die Gegenstände und konkretisieren die Lernumgebungen, d. h. das jeweilige Aufgabenformat bleibt konstant, aber die konkrete Gestaltung wird von den Studierenden individuell vorgenommen (Wollring, 2007). So bereiten die Studierenden bspw. fachliche Gespräche, einen passenden Einstieg und die Reflexion für die Lernumgebung vor. Sie sichten Videoausschnitte und Transkripte aus vorangegangenen Durchführungen, um Erkenntnisse für ihre eigene Planung daraus zu gewinnen. Sie identifizieren Schwierigkeiten der Kinder bei der Bearbeitung der Lernumgebung und berücksichtigen diese in ihrer eigenen Adaption.

3.4 Design-Experimente zu „Dreiecken auf dem Geobrett“ im ZahlenRaum begleiten und auswerten

Pro Semester und Seminar besuchen 4-5 Schulklassen des dritten und vorwiegend vierten Jahrgangs den *Zahlenraum*. Die Besuche dauern ca. 120 Minuten und finden während der regulären Schulzeit am Vormittag mit der gesamten Schulklasse statt. Die Schülerinnen und Schüler werden bei der Arbeit im *ZahlenRaum* videographiert, wobei i. d. R. drei bis vier Tischgruppen gefilmt werden.

Untersucht wird, welches Begriffsverständnis der ebenen Figur „Dreieck“ und welche Beziehung zwischen mehreren Dreiecken von Kindern bei der Arbeit an der Lernumgebung „Dreiecke auf dem Geobrett“ rekonstruiert werden können. Das rekonstruktive Forschungsinteresse besteht also darin, zu erfassen, welches (unterschiedliche) Begriffsverständnis Kinder einer Grundschulklasse zeigen sowie festzustellen, inwieweit die Kinder in Interaktion miteinander ihr Verständnis erweitern und Begriffsbildungsprozesse zu rekonstruieren sind. Folglich stellen sich folgende Forschungsfragen:

1. Welche unterschiedlichen Vorgehensweisen und Lösungen lassen sich bei den Kindern bei der Arbeit an den natürlich differenzierenden, geometrischen Lernumgebungen rekonstruieren und welches Begriffsverständnis liegt diesen Vorgehensweisen und Lösungen jeweils zugrunde?
2. Wie handeln die Kinder unterschiedliche Ideen und Vorstellungen zum Begriff „Dreieck“ miteinander aus?

Die Studierenden beobachten dazu die Vorgehensweisen der Kinder während des Besuchs und analysieren im Anschluss anhand der Videodaten die Lern- und Interaktionsprozesse „ihrer“ Klasse. Im Mittelpunkt stehen die Rekonstruktion der Vorgehensweisen und des Begriffsverständnisses an ausgewählten Videosequenzen. Die Videoanalyse ermöglicht, die Komplexität des Unterrichtsgeschehens zum Gegenstand einer Analyse der Lernprozesse zu machen. Die ausgewählten Szenen werden in den letzten Sitzungen des Seminars gemeinsam analysiert, wobei jeweils die durchführende Studierendengruppe die Szenen auswählt und Analysefragen generiert.

In die Forschungsarbeiten der Verfasserinnen fließen hingegen die Videographien aus mehreren Semestern ein; aktuell werden die Daten von 21 Besuchsklassen[4] im Zeitraum von Mai 2015 bis zunächst Januar 2018 einbezogen, von denen neun Besuche zur Lernumgebung „Dreiecke auf dem Geobrett“ stattfanden.

Um die Begriffsbildungsprozesse der Kinder noch genauer erfassen zu können, werden ausgewählte Episoden von den Autorinnen bezogen auf die Aushandlungsprozesse in der Lernsituation analysiert. Dazu wird eine epistemologische Perspektive eingenommen (vgl. Steinbring, 2005; Steinbring & Nührenbörger, 2010). Ziel ist es, über die Analyse der unterschiedlichen Referenzkontexte zu erfassen, welche Bezüge die Kinder bei der Ausbildung des Begriffs „Dreieck“ heranziehen und inwiefern Referenzkontexte im Rahmen von Erkenntnisprozessen zum Objektbegriff „Dreieck“ sich vom Relationsbegriff „Kongruenz zwischen Dreiecken“ unterscheiden. Das konkrete Vorgehen bei der Auswahl und Analyse der Szenen orientiert sich an der systematisch-extentionalen Interpretation als Methode der Textinterpretation (Beck & Maier, 1994).

Zudem wird das in der Situation gezeigte Verständnis den Stufen des erweiterten Modells der geometrischen Begriffsentwicklung der van Hieles (siehe 2.3.3) zugeordnet. Mit diesem kategoriengeleiteten Vorgehen sollen Erkenntnisse dazu gewonnen werden, inwiefern sich die Charakteristika der Begriffsentwicklung in konkreten Unterrichtssituationen zeigen.

Die Analysen werden anhand von Transkripten zum Videomaterial vorgenommen und turn-by-turn analysiert, um die vollzogenen Äußerungen und Handlungen der Kinder in ihrer Entwicklung rekonstruieren zu können (Beck & Maier, 1994).

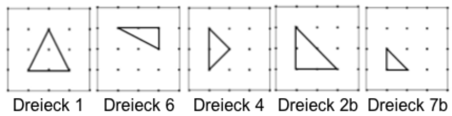
3.4.1 Analyse eines Fallbeispiels zu Begriffsbildungsprozessen und Entwicklung lokaler Theorien

Am Fallbeispiel von Steffi und Leila, zwei Schülerinnen der vierten Klasse, wird das sich zeigende Begriffsverständnis der Schülerinnen in zwei Episoden betrachtet: beim Vergleichen der Dreiecke sowie beim Ordnen der Dreiecke. Dabei wird einerseits das Verständnis der Kinder mit Blick auf das erweiterte Modell der geometrischen Begriffsentwicklung betrachtet, andererseits wird mit Hilfe der epistemologischen Analyse herausgestellt, mit welchen Zeichen und Referenzkontexten die Kinder ihr Verständnis vom Dreieck kommunizieren und erweitern. Das Fallbeispiel entspricht dem Kriterium von Beck und Maier, die als Kriterien für geeignete Episoden angeben, dass sich spontan Deutungshypothesen zu den Forschungsfragen ergeben (Beck & Maier, 1994), was sich im Folgenden zeigen wird. Zudem erwies sich die Szene nach vertiefter Auseinandersetzung sowohl als ergiebig zur Analyse der Lern- als auch Aushandlungsprozesse der Kinder. Bei der Analyse wird im Weiteren direkt der vertiefte Forschungsfokus eingenommen.

Kongruente Dreiecke identifizieren

Die Schülerinnen Leila und Steffi finden in der individuellen Erkundungsphase fünf bzw. sieben nichtkongruente Dreiecke und zeichnen diese auf. Beide Kinder spannen weitere, zu diesen Dreiecken kongruente Dreiecke, die jedoch als kongruent erkannt und nicht aufgezeichnet werden.

Leilas festgehaltene Dreiecke nach der individuellen Erkundung in der Reihenfolge der Entstehung:



Steffis festgehaltene Dreiecke nach der individuellen Erkundung in der Reihenfolge der Entstehung:

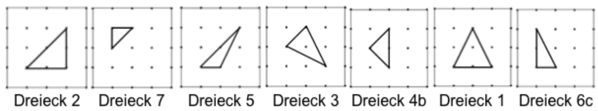
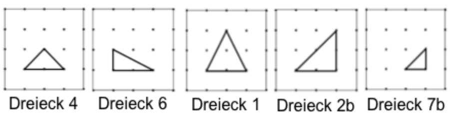
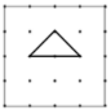
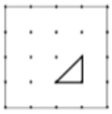
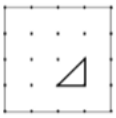
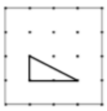


Abb. 3: Ergebnisse aus der individuellen Erkundung[5]

Aufgefordert, die gefundenen Dreiecke zu vergleichen („Vergleicht eure Dreiecke. Wenn ihr beide ein gleiches Dreieck habt, sortiert eines davon aus, sodass ihr am Ende eine gemeinsame Sammlung von nur verschiedenen Dreiecken habt.“) legt Leila ihre fünf Dreiecke scheinbar bewusst so hin, dass jeweils eine Seite der Dreiecke parallel zur Grundseite des Geobrett ist (s. Zeile 62). Die Schülerinnen vergleichen dann nacheinander Steffis Dreiecke mit Leilas.

62	Leila	*(legt ihre Dreiecke vor sich hin)* 

63	Steffi	**Also (..) aber das ist auch ein Gleiches, oder?** *(hält ihre Zeichnung von Dreieck 4b unter die von Leila)*	 Dreieck 4  Dreieck 4b
64	Leila	**Ja, das ist gleich.**	
65	Steffi	*(legt ihre Zeichnung von Dreieck 4b auf die von Leila.)* **Dann hat das hier so \`ne Ecke** *(hält ihre um 180° gedrehte Zeichnung von Dreieck 7 unter Leilas Zeichnung von Dreieck 7b und legt sie dann darauf.)*	 Dreieck 7b  Dreieck 7
66	Leila	*(dreht Steffis Zeichnung von Dreieck 6c zweimal um 90° und legt sie dann auf ihre Zeichnung von Dreieck 6)* **drei, das ist gleich.** *(betrachtet dann das Dreieck 3 von Steffi)*	 Dreieck 6c  Dreieck 6
67	Steffi	*(nimmt Leila Dreieck 3 aus der Hand und legt es um 90° gedreht vor die Reihe der anderen Dreiecke)*	 Dreieck 3
68	Leila	**Zwei nach da und drei nach oben, hier, oder?** *(tippt auf die Zeichnung von Dreieck 1 und schaut zu Dreieck 3)* **ne, das ist anders.**	
69	Steffi	**Das ist so** *(macht eine undeutliche Bewegung mit dem Arm)*	
70	Leila	**Hä?** *(schaut zwischen Dreieck 3 und 1 hin und her)*	 Dreieck 3  Dreieck 1
71	Steffi	**Das ist gleich** *(dreht und legt ihr Dreieck 1 auf Leilas Dreieck 1)*	 Dreieck 1  Dreieck 1

Beim Vergleichen prüfen die Kinder gezielt ein Dreieck nach dem anderen auf Kongruenz. Dabei legen sie Steffis Dreieck 4b unter das Dreieck 4 von Leila und kommen zu dem Schluss, dass die beiden gleich sind. Sie erkennen die Kongruenz der beiden Dreiecke unabhängig davon, dass sich das Dreieck an einer anderen Stelle des Geobrett befindet, also um eine Reihe verschoben ist. Ähnlich gehen sie bei den nächsten Dreiecken vor. Das Dreieck 7 dreht Steffi so, dass es sich in der gleichen Position befindet wie Leilas Dreieck 7b. Auch hier stellen die Kinder fest, dass die Dreiecke kongruent sind. Steffi verweist in ihrer Argumentation darauf, dass das Dreieck „hier so \`ne Ecke" hat. Möglicherweise ist damit die Ecke gegenüber der Hypotenuse gemeint, die am äußersten Punkt des Geobretts liegt. Die Äußerung unterstreicht die Übereinanderführung der beiden Dreiecke durch die Drehung, da sich die bezeichnete Ecke nun an derselben Stelle befindet. Auf die gleiche Weise wird auch das Dreieck 1 (Z. 71) überprüft und mit einer Drehung aufeinandergelegt.

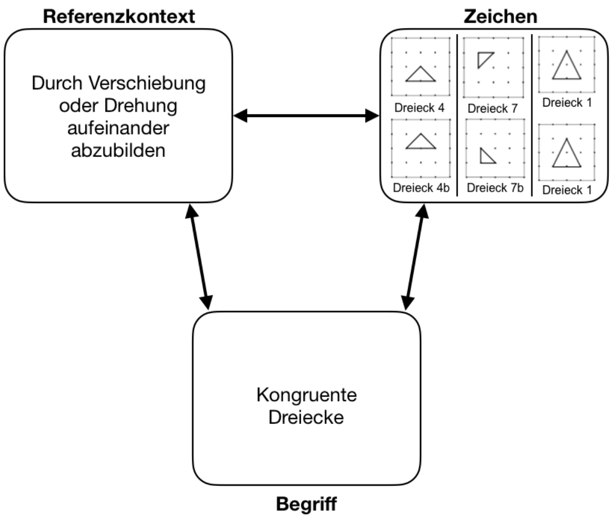


Abb. 4: Epistemologisches Dreieck zur Kongruenz von Dreieck 4, 7 und 1

Leila untersucht schließlich das Dreieck 6 und 6c, versucht, diese durch Drehen aufeinander abzubilden und legt sie schließlich mit der Erklärung „Drei, das ist gleich" (Z. 66) aufeinander. Sie erkennt an dieser Stelle die Kongruenz der beiden Dreiecke, obwohl sich das Dreieck 6 in gedrehter und gespiegelter Position zu Dreieck 6c befindet. Dass sich die beiden Dreiecke deswegen nicht deckungsgleich aufeinanderlegen lassen, scheint für sie unproblematisch zu sein. Eventuell stellt sie sich die Kongruenzabbildung, um die Dreiecke ineinander zu überführen, mental vor.

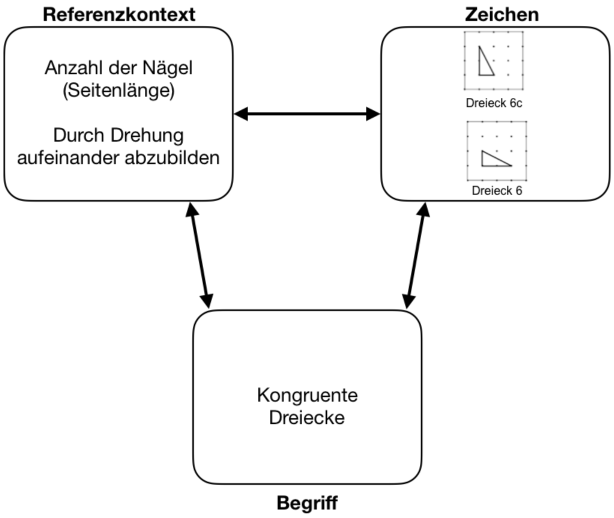


Abb. 5: Epistemologisches Dreieck zur Kongruenz von Dreieck 6

Mit der gegebenen Erklärung könnte sie zudem auf die gleiche Seitenlänge der Dreiecke fokussieren, da beide Dreiecke zwei Seiten aufweisen, die sich über eine Länge von drei Nägeln erstreckt („Drei, dann ist das gleich). Dieser Interpretation folgend zieht sie zur Erklärung der Kongruenz der beiden Dreiecke begriffsbestimmende Eigenschaften hinzu, welche jedoch nicht vollständig sind, da sie sich nur auf die Seiten bezieht, die sich über drei Nägel erstrecken und nicht auch auf die dritte Seite, was aber für eine eindeutige Überprüfung der Kongruenz nötig wäre.

Größere Schwierigkeiten bereitet das Dreieck 3 (Z. 67-70). Während Steffi dieses in die Reihe zu den anderen Dreiecken legt und damit möglicherweise andeutet, dass sich dieses Dreieck nicht in kongruenter Form wiederfindet, sondern ein neues darstellt, prüft Leila die Kongruenz zwischen Dreieck 3 und Dreieck 1. Sie äußert zu Dreieck 1 „zwei nach hier und drei nach oben" und scheint dieses Merkmal mit Dreieck 3 abzugleichen. Auch hier könnte man annehmen, dass sich Leila wieder auf die Seitenlänge der Dreiecke bezieht. Bei Dreieck 3 erstrecken sich zwei Seiten über eine Länge von drei Nägeln (wenn die mittleren Reihen als Referenz genommen werden) und eine Seite über die Länge von zwei Nägeln. Bei Dreieck 1 hingegen erstrecken sich alle Seiten über eine Länge von 3 Nägeln. Leila kommt zu dem Schluss, dass beide Dreiecke nicht kongruent sind. Folgt man dieser Interpretation zieht sie hier begriffsbestimmende Eigenschaften heran, um die Kongruenz der Dreiecke zu prüfen und zu verneinen.

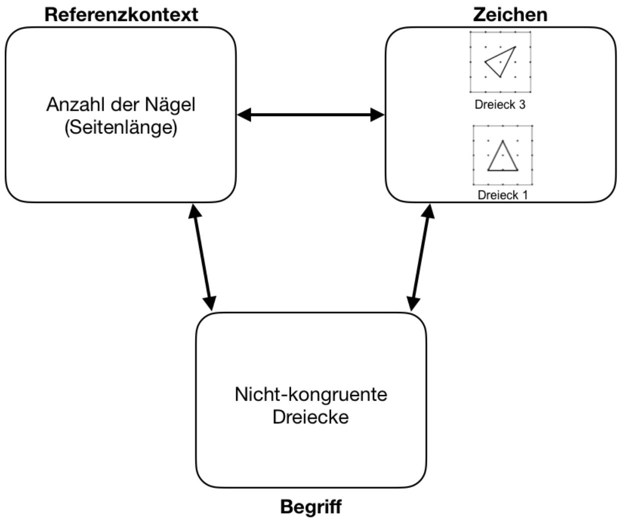


Abb. 6: Epistemologisches Dreieck zu nicht kongruenten Dreiecken

Steffi und Leila prüfen in dieser Szene die Dreiecke auf Kongruenz. Dabei scheinen sie ein Vorgehen gemäß einer ganzheitlich-intuitiven Wahrnehmung mit einer Fokussierung auf Eigenschaften zu kombinieren. Die Prüfung der Kongruenz vollzieht sich vor allem durch Handlungen, die Dreiecke ineinander zu überführen, wie bspw. durch das Drehen (Wollring, 2007b). Die Handlungen werden nur punktuell verbal begleitet. Dabei beziehen sich die Schülerinnen auf spezifische Merkmale der einzelnen Dreiecke (einzelne Ecken, Ausrichtung) und in Ansätzen auf begriffsbestimmende Eigenschaften. Das Vorgehen beider Schülerinnen in dieser Szene kann somit der Übergangsstufe zugeordnet werden.

Nicht-kongruente Dreiecke ordnen

Nach dem Sortieren der Dreiecke wird die Lerngruppe aufgefordert, die gefundenen Dreiecke zu ordnen, wobei häufig der Prozess des Vergleichens und Aussortierens weitergeführt wird – so auch von Steffi und Leila. Den im Folgenden analysierten Szenen, die beide direkt aneinander anknüpfen, geht voraus, dass Steffi im Anschluss an die Szene aus 4.1 noch das Dreieck 8 findet. Die gemeinsame Sammlung verschiedener Dreiecke ist nun folgende:

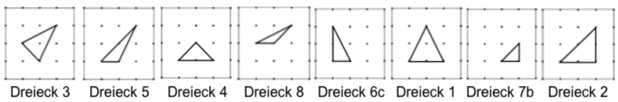


Abb. 7: Gemeinsame Sammlung verschiedener Dreiecke

Zu Beginn der Szene in Zeile 88 scheint Steffi durch die Anzahl der gefundenen Dreiecke dazu ermutigt, noch weitere zu finden. Sie spannt eine gedrehte, verschobene und gespiegelte Version des Dreiecks 8 auf ihrem Geobrett. Gemeinsam überlegen die Mädchen dann, ob dieses Dreieck in ihrer Sammlung bereits vorhanden ist oder ein neues Dreieck darstellt. In ihrer Diskussion behauptet Leila zunächst, dass die beiden Dreiecke übereinstimmen, während Steffi die Dreiecke nicht für die gleichen hält.

88	Steffi	*(geht die Dreiecke mit dem Finger ab)* **Eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht. Acht Stück schon. [..]** *(spannt Dreieck 8c auf das Geobrett, für den Betrachter nicht zu sehen)* **Das ist ein Dreieck, aber haben wir schon, oder? Moment, haben wir das schon?**	 Dreieck 8c
89	Leila	**Ja, das ist doch hier das hier** *(deutet auf Dreieck 6c)*, **falsch, das hier** *(deutet auf Dreieck 8)*	
90	Steffi	**Nein, das ist das nicht** #	
91	Leila	# *(hält die Zeichnung von Dreieck 8 vor das Geobrett)* **Doch**	 Dreieck 8
92	Steffi	**Hä, nein das ist genau umgekehrt, weil hier ist das eins [achso ja] [..] Warte aber ich zeichne das auf, ja?** *(zeichnet Dreieck 8c auf Geobrettvorlage)* **noch eine** *(legt Zeichnung von Dreieck 8c in vorliegende die Reihe neben Dreieck 2)* **Boah, wie viele haben wir denn jetzt schon? Neun Stück!**	 Dreieck 8c
93	Leila	**Jo. Aber wir legen die, die fast gleich sind untereinander, aber nur die, die fast gleich sind** *(legt Dreieck 8c unter Dreieck 8, das nun um 180° gedreht ist)*	 Dreieck 8  Dreieck 8c

Steffi hält das gezeichnete Dreieck 8 vor das Geobrett mit dem gespannten Dreieck 8c, argumentiert, das Dreieck sei „genau umgekehrt“ zu dem aufgezeichneten Dreieck und scheint dies als Grund heranzuziehen, dass es sich um ein neues Dreieck handelt. Der Ausdruck „genau umgekehrt“ kann als Erkennen der Spiegelung gedeutet werden. Die Kinder scheinen also zu sehen, dass beide Dreiecke achsensymmetrisch zueinander sind. Während sie die gedrehten oder verschobenen Dreiecke als gleich kategorisiert haben, klassifizieren sie die zueinander achsensymmetrischen Dreiecke 8 und 8c als verschieden, aber dennoch zusammengehörig, als „fast gleich“.

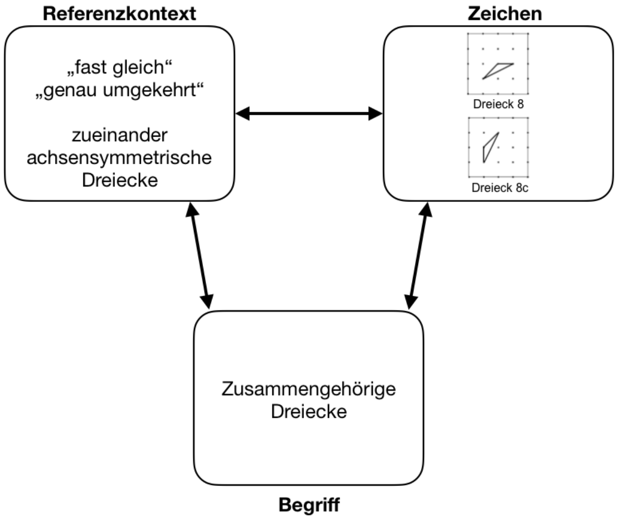
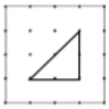
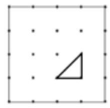
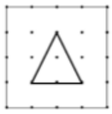
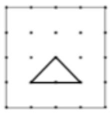


Abb. 8: Epistemologisches Dreieck zu den zusammensortierten Dreiecken 8 und 8c

Das Vorgehen der Kinder bei den Dreiecken 8 und 8c unterscheidet sich vom Vorgehen in der vorherigen Szene, da dort mit den Dreiecken 6 und 6c zwei gespiegelte Dreiecke als gleich identifiziert wurden. Möglich wäre, dass die Kinder im Verlauf der Aktivität genauer klassifizieren und nun feinere Unterschiede machen (kongruent, aber gespiegelt). Auch möglich ist, dass die Schülerinnen Schwierigkeiten haben, die gespiegelte Version des Dreiecks 8 als kongruent zu erkennen, weil es ein untypischerer und kleinerer Repräsentant als Dreieck 6 ist. Außerdem ist das Dreieck 8c im Vergleich zu Dreieck 8 eine um eine Reihe verschobene, gespiegelte und um 90° nach links gedrehte Version, was für die Raumvorstellung deutlich anspruchsvoller ist und das gedankliche Übereinanderlegen der beiden Dreiecke erschwert.

Das Auffinden zweier Dreiecke, die „fast gleich“ sind, scheint im weiteren Verlauf das Vorgehen der Mädchen bei der Ordnung der Dreiecke zu bestimmen. Sie versuchen, weitere Dreiecke nach dem Aspekt „fast gleich“ zu ordnen, was dafürspricht, dass sie ihre Vergleichsmaßstäbe verfeinert haben, und sortieren dabei immer zwei Dreiecke zueinander.

94	Leila	*(legt Dreieck 4 unter Dreieck 1)*	 Dreieck 1  Dreieck 4

95	Steffi	**Die sind doch nicht fast gleich.**	
96	Leila	**Nein** *(nimmt Dreieck 4 wieder unter Dreieck 1 weg)*	
97	Steffi	**Die sind also `nen Größer-Kleiner-Unterschied** *(schiebt Dreieck 7b unter Dreieck 2)*	 Dreieck 2  Dreieck 7b
98	Leila	**Wir können und ja mal was #** [**unverständlich]** *(deutet auf Dreieck 1)*	
99	Steffi	# **Moment, äh doch die hätte ich auch untereinandergelegt** *(legt Dreieck 4 wieder unter Dreieck 1)*	 Dreieck 1  Dreieck 4

Leilas Vorschlag, die Dreiecke 1 und 4 zusammenzulegen, wird von ihr nicht explizit erklärt, es sind jedoch mehrere Deutungen möglich, nach welchen Kriterien sie die Dreiecke sortiert hat. Es könnte sein, dass sie sich an der gleich langen Grundseite der Dreiecke orientiert. Dies entspricht bezüglich der Untersuchung der Kongruenz zweier Dreiecke einer begriffsbestimmenden Eigenschaft, die allerdings nicht vollständig ist (kongruente Dreiecke müssten über 3 gleichlange Seiten verfügen). Leila könnte jedoch auch das Kriterium der Gleichschenkligkeit herangezogen haben, das beide Dreiecke verbindet und welches ebenfalls eine begriffsbestimmende Eigenschaft beim Vergleich von Gemeinsamkeiten von Dreiecken ist. Möglich wäre jedoch auch, dass Leila auf die Ausrichtung und Position der Dreiecke schaut, da beide Dreiecke die gleiche Seite am unteren Rand des Geobrett aufweisen und mit der markanten Ecke nach oben zeigen. Da sie keine weitere Erläuterung formuliert, bleibt es unklar, woran sie sich an dieser Stelle orientiert und ebenso, inwieweit ihr selbst die Kriterien deutlich sind und inwiefern sich eine ganzheitliche Wahrnehmung mit Aspekten eines inhaltlichen Verständnisses mischt. Steffi erhebt den Einwand, dass die beiden Dreiecke nicht fast gleich sind. Dies könnte darauf zurückzuführen sein, dass für sie unter das Kriterium „fast gleich“ nur solche Dreiecke fallen, die wie im Fall von Dreieck 8 und 8c kongruent, aber gespiegelt sind. Dies trifft bei Dreiecke 1 und 4 nicht zu.

Anschließend ordnet Steffi die Dreiecke 7b und 2 zueinander unter dem Aspekt, dass hier ein „Größer-Kleiner-Unterschied“ besteht. Mit dieser Aussage macht sie einerseits deutlich, dass die Dreiecke nicht kongruent sind, andererseits scheint sie eine Beziehung zwischen ihnen zu sehen, da sie sie einander zuordnet. Man könnte aus ihrer Aussage schließen, dass das einzige, was beide Dreiecke unterscheidet, die Größe ist und sie sonst in ihrer Form (Winkel und Seitenverhältnissen) übereinstimmen, sie also mathematisch ähnlich sind. Da sie diese Eigenschaft zwischen Dreiecken jedoch nicht expliziert, sondern nur die Größe erwähnt, scheint es naheliegend, dass sie die Ähnlichkeit der Dreiecke eher ganzheitlich intuitiv wahrnimmt und verbal nicht an weiteren Eigenschaften festmachen kann.

Des Weiteren sortiert Steffi die Dreiecke 1 und 4, deren Zuordnung sie zuvor verneint hat, wieder zueinander.

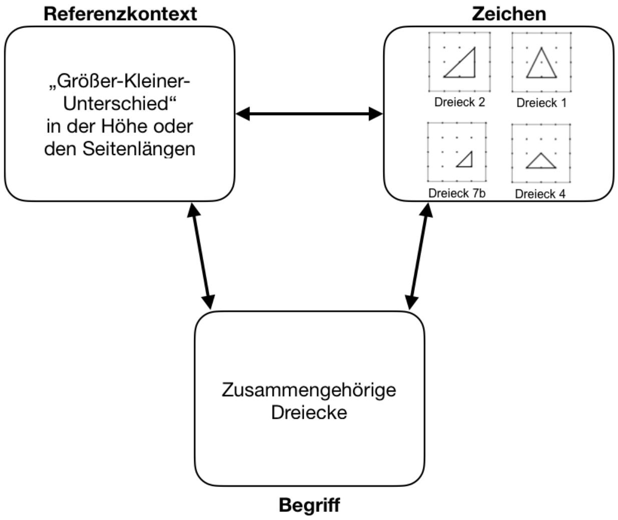


Abb. 9: Epistemologisches Dreieck zu den zusammensortierten Dreiecken 2 und 7b sowie 1 und 4

Möglich wäre, dass sie diese Zuordnung angeregt durch das zuvor genutzte Kriterium des Größenunterschiedes tätigt und dieses auch hier anwendet. Ganzheitlich betrachtet wirken die Dreiecke zunächst ähnlich in ihrer Form, da beide die gleiche Grundseite haben und gleichschenklig sind, allerdings sind sie mathematisch nicht ähnlich. Der „Größer-Kleiner-Unterschied“ könnte sich eventuell auf die Höhe des Dreiecks beziehen, da diese sich von Dreieck 4 zu Dreieck 1 verdoppelt. Um den Faktor zwei erfolgt auch die Streckung, um das Dreieck 7b auf das Dreieck 2 abzubilden. Möglicherweise nimmt Steffi die Verdopplung der Seitenlängen bzw. der Höhe intuitiv ganzheitlich als Gemeinsamkeit beider Dreiecke wahr, wobei sich die Seitenlängen von Dreieck 4 zu

Dreieck 1 nicht verdoppeln wie es bei Dreieck 2 und 7b der Fall ist.

Beide Kinder greifen in ihrer Argumentation sowohl auf ihre intuitive Wahrnehmung zurück als auch auf Eigenschaften der Dreiecke, um diese in Beziehung zueinander zu setzen. Sie erfinden dabei die Relationsbegriffe „fast gleich", „genau umgekehrt" und „Größer-Kleiner-Unterschied", um die Beziehung zwischen den Dreiecken zu beschreiben. Es wird deutlich, dass ihnen Begriffe zu oder Wissen über die mathematische Ähnlichkeit fehlen, die notwendig sind, um die (Nicht)-Kongruenz über inhaltsbezogene Eigenschaften zu formulieren. Entsprechend greifen sie auf eine Kombination von ganzheitlicher Wahrnehmung, Handlungen und nicht vollständiger oder nicht begriffsbestimmender Beschreibung zurück.

3.5 Entwicklung lokaler Theorien aus der Analyse

Die Analysen der Interaktionen der Kinder bei der Bearbeitung der Lernumgebung ermöglichen, wie oben gezeigt, das Begriffsverständnis zu rekonstruieren. Im Fallbeispiel von Steffi und Leila konnte herausgestellt werden, dass die Kinder sowohl bei der Prüfung der Kongruenz als auch bei der Ordnung der Dreiecke eine Mischung aus ganzheitlicher Wahrnehmung und Beschreibung erster Eigenschaften verwenden, was einem Verständnis gemäß der Übergangsstufe, dem intuitiv-inhaltlichen Begriffsverständnis, entspricht. Der Vergleich mit anderen Fällen bestätigt, dass die Prüfung der Kongruenz und die Ordnung der Dreiecke häufig intuitiv und über Handlungen erfolgt. Nur vereinzelt formulieren die Kinder die Relationen verbal und wenn, dann nutzen sie alltagssprachliche Formulierung und erfinden Relationsbegriffe (Wollring, 2007b). Dies ist nicht verwunderlich, da zum Zeitpunkt der Untersuchung im 4. Schuljahr die notwendigen Eigenschafts- und Relationsbegriffe bzw. die zugehörigen Abbildungen noch nicht im Mathematikunterricht thematisiert wurden. Die Begriffe der Kinder können somit als Präkonzepte verstanden werden, an denen in der Reflexion der Lernumgebungen oder im weiteren Unterricht angeschlossen und diese im Sinne der Abstraktion erweitert werden kann.

Erst wenn Kinder über die notwendigen Eigenschafts- und Relationsbegriffe verfügen, kann bezüglich der Kongruenz von Dreiecken ein inhaltliches Verständnis im Sinne der Stufe 2 im erweiterten Modell der Begriffsentwicklung gezeigt werden. Eine Rekonstruktion des Verständnisses in Entwicklungsmodellen ist somit immer im Zusammenhang mit den im Unterricht explizierten Begriffen zu sehen.

Aus den hier aufgestellten lokalen Theorien ergibt sich für den nächsten Zyklus das Vorhaben, die Kinder stärker dazu herauszufordern, sowohl die Prüfung der Kongruenz als auch die Ordnung der Dreiecke verbal zu begründen. Diesem Vorhaben liegt die Idee zugrunde, dass die Kinder durch die Aufforderung der Begründung von einer möglichen Verhaftung in konkreten Handlungen zu allgemeineren Beschreibungen angeregt werden, bei denen sie vermehrt (begriffsbestimmende) Eigenschaften formulieren. Auch wenn nicht davon auszugehen ist, dass dies dazu führt, dass die Kinder noch nicht erarbeitete Begriffe wie Winkel oder Verhältnis nutzen, die für ein inhaltliches Verständnis charakterisierend sind, so besteht doch die Annahme, dass die Kinder die Kriterien, nach denen sie die Kongruenz prüfen und die Ordnung vollziehen, deutlicher formulieren, für andere nachvollziehbarer darlegen und allgemeiner zu fassen versuchen und auf diesem Weg ihr Begriffsverständnis zum Dreieck und zur Kongruenz ausschärfen können. Zudem könnten dadurch womöglich die unterschiedlichen Vorstellungen und Vorgehensweisen der Kinder untereinander besser nachvollzogen und diskutiert werden, was ebenfalls Potential zur Ausschärfung des eigenen Begriffsverständnisses bietet.

Um zu erproben, inwiefern dieses Vorhaben und die damit verbundenen Annahmen zutreffend sind, wird den Studierenden des neuen Zyklus der Erprobung im Lehr-Lern-Labor das Fallbeispiel von Steffi und Leila und die daraus gezogenen Erkenntnisse vorgestellt und gemeinsam mit ihnen diskutiert. Gemeinsam mit den Studierenden wird erarbeitet, wie die Lernumgebung gestaltet werden könnte, um die Kinder stärker dazu aufzufordern, ihre eher intuitiv getroffenen Überlegungen zu verbalisieren und ihre Vorgehensweise nachvollziehbar zu erklären, und welche neuen Begriffe an welcher Stelle dafür womöglich noch eingeführt werden könnten. Erste Überlegungen der Studierenden und der Dozentin gehen in zwei Richtungen: Einerseits sollen die Kinder bereits bei der Bearbeitung vermehrt aufgefordert werden zu begründen, warum zwei Dreiecke kongruent sind, andererseits sollen ihnen bei der Gestaltung des Plakates explizit zwei Fragen gestellt werden, die die Lernenden schriftlich beantworten sollen:

1. Warum habt ihr die Dreiecke auf dem Plakat so angeordnet?
2. Warum sind alle Dreiecke auf dem Plakat verschieden?

Auf diese Weise könnte der Fokus sowohl innerhalb der Gruppe als auch später bei der Vorstellung der Plakate im Plenum noch einmal verstärkt darauf gelegt werden, welche (gemeinsamen) Eigenschaften als Kriterium für die Ordnung und die Prüfung der Kongruenz herangezogen wurden. Die Überlegungen der Kinder können somit für die Mitschülerinnen und Mitschüler nachvollziehbarer werden, sodass es womöglich leichter ist, die Unterschiede in den Vorgehensweisen herauszuarbeiten, die eigenen Kriterien zu hinterfragen und auf diese Weise das eigene Begriffsverständnis weiter auszuschärfen. Inwiefern dies zu einer expliziteren Betrachtung der begriffsbestimmenden Eigenschaften führt, kann im weiteren Zyklus der Erprobung im Lehr-Lern-Labor im Fokus der Analysen stehen und wiederum mit den Studierenden thematisiert werden.

4. Zusammenfassung und Ausblick

Lehr-Lern-Labore verfolgen unterschiedliche Aufgaben und Funktionen. Dazu gehört erstens, dass sie für Lernende „regelmäßig einsetzbare Lernumgebungen in festen Räumen [anbieten], in denen Schüler/innen unter expliziter Zielsetzung selbstständig, handlungsorientiert und experimentell mathematische Grundlagen und Zusammenhänge an Phänomenen in einem begrenzten Zeitrahmen entdecken, erarbeiten und durchdringen können, ohne dabei dem für den Lernort Schule typischen Leistungsdruck zu unterliegen“ (Baum, Roth & Oechsler, 2013, S. 6) und so zu einem motivierenden, positiven Erleben von Mathematik beitragen. Zweitens nehmen viele Lehr-Lern-Labore, wie auch der *ZahlenRaum*, die Aufgabe wahr, Studierenden sowohl Praxiserfahrungen als auch forschende Arbeitsweisen zu ermöglichen. Drittens können sie als Forschungsort im Sinne der fachdidaktischen Entwicklungsforschung fungieren.

Die Funktionen werden, wie am Beispiel der Entwicklung und Erforschung der Lernumgebung „Dreiecke auf dem Geobrett“ gezeigt, im *ZahlenRaum* im Sinne eines doppelten Zyklus der fachdidaktischen Entwicklungsforschung miteinander verknüpft. Einerseits sind die Studierenden bei der Adaption und Durchführung der Lernumgebung beteiligt und beobachten und analysieren im Anschluss anhand der Videos die Begriffsbildungsprozesse der Kinder, womit sie an einem Zyklus der fachdidaktischen Entwicklungsforschung partizipieren, andererseits sind die Erprobungen und Auswertungen im Lehr-Lern-Labor Teil der wissenschaftlichen Forschung, die mehrere Zyklen durchläuft. Dabei profitieren sowohl die Wissenschaftlerinnen als auch die Studierenden vom wechselseitigen Austausch und der Teilhabe an den jeweiligen Forschungsprozessen.

Im Beitrag konnte dargestellt werden, wie im Rahmen der Forschung im Lehr-Lern-Labor lokale Theorien zur geometrischen Begriffsentwicklung (weiter) entwickelt und erforscht werden. Die Analyse der im *ZahlenRaum* videographierten Vorgehensweisen und Deutungen im Rahmen der Lernumgebung „Dreiecke auf dem Geobrett“ zeigt, dass

- die Kinder bei der Prüfung der Kongruenz und der Ordnung der Dreiecke oft intuitiv und über Handlungen vorgehen und ein Verständnis gemäß der zum originalen van Hiele-Modell ergänzten Übergangsstufe zeigen,
- Lernende ohne explizite unterrichtliche Vorerfahrung zur Kongruenz in einer handlungsorientierten Lernumgebung wichtige Erkenntnisse gewinnen, zentrale Eigenschaften der Kongruenz von Dreiecken erkennen und von sich aus über geeignete Handlungen prüfen, indem sie eine Deckungsgleichheit hervorzurufen versuchen,
- einzelne Kinder zur Klassenbildung Vorwissen zur mathematischen Ähnlichkeit von Dreiecken zeigen und versprachlichen,
- sprachliche Begriffe erfunden werden, wo fachsprachliche Begriffe noch nicht verfügbar sind.

Inwieweit die Begriffsentwicklung der Kinder mit der Erweiterung der Lernumgebungen mit Blick auf sprachliche Explikation sowie eine entsprechende Sensibilisierung der lernbegleitenden Studierenden weiter angeregt werden kann, ist Gegenstand der nächsten Forschungszyklen.

Im Rahmen einer offenen Seminarreflexion werden in der aktuellen Gestaltung des Labors die Lernprozesse der Studierenden, ihre Erfahrungen, Erkenntnisse und Reflexionsprozesse evaluiert. Um den Gewinn der Praxisorientierung sowie des forschenden Lernens für die angehenden Lehrkräfte zu erheben, wird in den kommenden Semestern eine entsprechende Evaluation des Kompetenzerwerbs der Studierenden mit einer Kombination aus offenen und geschlossenen Items zur Selbsteinschätzung und Entwicklung der eigenen Kompetenz eingesetzt.

Anmerkungen

[1] Die Lernumgebung „Dreiecke auf dem Geobrett“ gehört zu einer stetig wachsenden Zahl an Lernumgebungen, die im Rahmen des Lehr-Lern-Labor ZahlenRaum entwickelt und erforscht werden.

[2] In älteren Veröffentlichungen nutzen die van Hieles die Nummerierung von 0 - 4.

[3] Die deutschsprachigen Bezeichnungen für die zwei neuen Stufen sind selbst gewählt.

[4] Davon sind 13 in der MatheWerkstatt der Universität Siegen nach gleichem Konzept entstanden, an der die Verfasserinnen bis zum Jahr 2016 tätig waren.

[5] Die Nummerierung der Dreiecke entspricht der Nummerierung in Abbildung 2 der möglichen Dreiecke auf dem

Geobrett. Die nachgesetzten Buchstaben markieren, dass sich das Dreieck in einer anderen Position befindet als das erste Dreieck, das von dem Kinderpaar gefunden wurde.

Literatur

Agricola, I. & Friedrich, T. (2009). *Elementargeometrie: Fachwissen für Studium und Mathematikunterricht*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Baum, S., Roth, J. & Oechsler, R. (2013). Schülerlabore Mathematik – Außerschulische Lernstandorte zum intentionalen mathematischen Lernen. *Der Mathematikunterricht, 59*(5), 4-11.

Beck, C. & Maier, H. (1994). Zu Methoden der Textinterpretation in der empirischen mathematikdidaktischen Forschung. In H. Maier & J. Voigt (Hrsg.), *Verstehen und Verständigung. Arbeiten zur interpretativen Unterrichtsforschung* (S. 43-76). Köln: Aulis.

Bender, P. & Schreiber, A. (1985). *Operative Genese der Geometrie*. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.

Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. (2004). http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Primar.pdf (10.2.2020)

Bruner, J. S., Goodnow, J. J. & Austin, G. A. (1956). *A study of thinking*. New York: Wiley.

Burger, W. F. & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele Levels of Development in Geometry. *Journal for Research in Mathematics Education, 17*, 31-48.

Clements, D. H. & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Hrsg.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 420-464). New York: Macmillan.

Clements, D. H., Swaminathan, S., Hannibal, M. A. & Sarama, J. (1999). Young Children's Concept of Shape. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 192-212.

Franke, M. & Reinhold, S. (2016). *Didaktik der Geometrie in der Grundschule* (3. Aufl.). Berlin: Springer Spektrum.

Hirt, U. & Wälti, B. (2008). *Lernumgebungen im Mathematikunterricht. Natürliche Differenzierung für Rechenschwache bis Hochbegabte*. Seelze: Klett Kallmeyer.

Nührenbörger, M., Rösken-Winter, B., Fung, C. I., Schwarzkopf, R., Wittmann, E. C., Akinwunmi, K., Lensing, F. & Schacht, F. (2016). *Design Science and Its Importance in the German Mathematics Educational Discussion*. Cham: Springer.

Pinkernell, G. (2003). *Räumliches Vorstellungsvermögen im Geometrieunterricht: eine didaktische Analyse mit Fallstudien*. Hildesheim: Franzbecker.

Prediger, S., Link, M., Hinz, R., Hußmann, S., Ralle, B. & Thiele, J. (2012). Lehr-Lernprozesse initiieren und erforschen. Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell. *MNU, 65*(8), 452-457.

Radatz, H. & Rickmeyer, H. (1991). *Handbuch für den Geometrieunterricht an Grundschulen*. Hannover: Schroedel.

Rickmeyer, K. (2000). Dreiecke auf dem Geobrett: "Ich habe 16 Dreiecke gefunden. – Sind das alle?". *Mathematische Unterrichtspraxis, 1*, 20-30.

Roth, J. & Wittmann, G. (2018). Ebene Figuren und Körper. In H.-G. Weigand, A. Filler, R. Hölzl, S. Kuntze, M. Ludwig, J. Roth, B. Schmidt-Thieme & G. Wittmann (Hrsg.), *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (3. erw. und überarb. Aufl.) (S. 107-148). Wiesbaden: Springer.

Scherer, P. & Steinbring, H. (2006). Noticing children´s learning processes - teachers jointly reflect on their own classroom interaction for improving mathematics teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9*(2), 157-185.

Senftleben, G. (2011). Ebene Formen und Figuren auf dem kleinen Geobrett. Unterschiedliche Vielecksformen handlungsorientiert erschließen. *Mathematik differenziert, 1*, 42-44.

Steinbring, H. (2005). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction – An Epistemological Perspective*. Bosten: Springer.

Steinbring, H. & Nührenbörger, M. (2010). Mathematisches Wissen als Gegenstand von Lehr-/Lerninteraktionen. Eigenständige Schülerinteraktionen in Differenz zu Lehrerinterventionen. In U. Dausendschön-Gay, C. Domke & S. Ohihus (Hrsg.), *Wissen in (inter-)Aktion. Verfahren der Wissensgenerierung in unterschiedlichen Praxisfeldern* (S. 161-188). Berlin: De Gruyter.

Tsamir, P., Trios, D. & Levinson, E. (2008). Intuitive nonexamples: the case of triangles. *Educational Studies in Mathematics, 69*, 81-95.

Unterhauser, E. (2015). Begriffsverständnis von Viereck und Dreieck bei Kindern im Alter von 4 bis 6 Jahren. In A. S. Steinweg (Hrsg.), *Entwicklung mathematischer Fähigkeiten von Kindern im Grundschulalter. Tagungsband des AK Grundschule in der GDM* (S. 83-86). Bamberg: University of Bamberg Press.

van Hiele-Geldof, D. (1957). The Didactics of Geometry in the Lowest Class of Secondary School. In D. Guys, D. Geddes & R. Tischler (Hrsg.), *English Translation of Selected Writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele* (S. 1-213). New York: Brooklyn College.

van Hiele, P. M. (1959). The Child's Thought and Geometry. In D. Guys, D. Geddes & R. Tischler (Hrsg.), *English Translations of Selected Writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele* (S. 243-252). New York: Brooklyn College.

van Hiele, P. M. (1986). *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*. Orlando: Academic Press.

Vollrath, H.-J. (1984). *Methodik des Begriffslehrens*. Stuttgart: Klett.

Weigand, H.-G. (2015). Begriffsbildung. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 255-278). Berlin, Heidelberg: Springer.

Weigand, H.-G. (2018). Begriffslernen und Begriffslehren. In H.-G. Weigand, A. Filler, R. Hölzl, S. Kuntze, M. Ludwig, J. Roth, B. Schmidt-Thieme & G. Wittmann (Eds.), *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (3. erw. und überarb. Aufl.) (S. 85-106). Wiesbaden: Springer.

Winter, H. (1983). Über die Entfaltung begrifflichen Denkens im Mathematikunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik, 4*(3), 175-204.

Wittmann, E. C. (1992). Mathematikdidaktik als "design science". *Journal für Mathematik-Didaktik, 13*(92), 55-70.

Wittmann, E. C. (1995). Mathematics Education as a Design Science. *Educational Studies in Mathematics, 29*, 355-374.

Wittmann, E. C. (1998). Design und Erforschung von Lernumgebungen als Kern der Mathematikdidaktik. *Beiträge zur Lehrerbildung, 3*(16), 329-342.

Wöller, S. & Reinhold, S. (2016). Konzeptionelles Begriffsverständnis von Drittklässlern zu den Begriffen Würfel und Quader. In Institut für Mathematik und Informatik der Pädagogischen Hochschule Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 50. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 07.03.2016 bis 11.03.2016 in Heidelberg* (S. 1077-1080). Münster: WTM-Verlag.

Wollring, B. (2007a). *Zur Kennzeichnung von Lernumgebungen für den Mathematikunterricht in der Grundschule. Handreichungen des Programms SINUS an Grundschulen*. URL: http://www.sinus-transfer.de/fileadmin/MaterialienIPN/Lernumgebungen_Wo_f_Erkner_070621.pdf (16.02.2020)

Wollring, B. (2007b). *Würfelnetze finden und ordnen - Design von Lernumgebungen zur Geometrie für die Grundschule. Handreichung des Programms Sinus an Grundschulen* URL: http://www.sinus-transfer.uni-bayreuth.de/fileadmin/MaterialienIPN/Wollring_Wuerfelnetze_finden_und_ordnen_43_f_Erkner_07-06-22.pdf (16.02.2020)

Anschrift der Verfasserinnen

Ninja Del Piero
Universität Paderborn
Institut für Mathematik
Warburger Str. 100
33098 Paderborn
ninja.delpiero@math.uni-paderborn.de

Uta Häsel-Weide
Universität Paderborn
Institut für Mathematik
Warburger Str. 100
33098 Paderborn
uta.haesel.weide@math.uni-paderborn.de