Das Organum mathematicum – ein historisches Arbeitsmittel als Quelle für problemorientiertes Arbeiten im zeitgemäßen Mathematikunterricht

SILVIA SCHÖNEBURG-LEHNERT, LEIPZIG; THOMAS KROHN, LEIPZIG

***Zusammenfassung**: Mathematikunterricht vor mehr als 300 Jahren – spannend, abwechslungsreich und voller Entdeckungen?! Eine Quelle stellt das von Athanasius Kircher entwickelte Organum mathematicum mit seinen zehn verschiedenen Fächern zu neun unterschiedlichen mathematischen Disziplinen dar. Die darin enthaltenen Materialien dienen als Grundlage für die unterrichtliche Auseinandersetzung in verschiedenen Jahrgangsstufen. Im Artikel sollen sowohl einige konzeptionelle Überlegungen zur Einbindung von Mathematikgeschichte im Mathematikunterricht am Beispiel des Organum mathematicum als auch die Arbeit mit den Originalquellen im Unterricht erläutert werden.*

***Abstract:** Mathematics education more than 300 years ago – an exciting, diversified enterprise full of fascinating discoveries?! The historic source of the following considerations is the Organum mathematicum by Athanasius Kircher consisting of ten different files on nine different mathematical subjects. The material contained in these files can be the basis for a deep understanding of the mathematical content to be used in class on various age levels. The article deals with some conceptual questions about the use of history of mathematics in the teaching of mathematics using the example of Kircher's Organum mathematicum. It also discusses the actual use of the historic source in class.*

1. Einleitung

Historische Arbeitsmittel im zeitgemäßen Mathematikunterricht – dass dies für die Autoren keineswegs einen Widerspruch darstellt, sollte in einem Heft mit dem Themenschwerpunkt Mathematik und Geschichte nicht überraschen. Die Idee, Mathematikgeschichte als Gegenstand des Mathematikunterrichts zu nehmen und Schülerinnen und Schüler mit Originalquellen arbeiten zu lassen, ist wahrlich nicht neu und zahlreiche Studien und Arbeiten haben sich mit der Sinnhaftigkeit dieses Unterfangens und der Frage, ob und wie dieses sinnvoll umgesetzt werden kann, beschäftigt (vgl. beispielweise Arcavi & Bruckheimer, 2000; Barbin, 1991; Jahnke et al., 2000, 2006; Thomaidis & Tzanakis, 2008).

Offensichtlich ist es jedoch so, dass nicht jede Originalquelle gleichermaßen gut für den Einsatz im Unterricht geeignet ist. Im Folgenden wird dann auch vordergründig darzustellen sein, warum das Organum mathematicum von Athanasius Kircher besonders gut geeignet ist und wie es gewinnbringend in den Unterricht eingebracht werden kann.

Zunächst ist es jedoch geboten, die Gründe, die für den Einsatz im Unterricht sprechen, in Erinnerung zu rufen, um anschließend die Eignung überhaupt beurteilen zu können. Auf Grundlage zahlreicher vorliegender Arbeiten, wie den oben genannten, hat Jankvist in einer Metastudie (Jankvist, 2009) die typischen Argumente für den Einsatz von Geschichte im Mathematikunterricht analysiert und diese grob in zwei Klassen eingeteilt. Die Argumente der ersten Klasse – von Jankvist „history as a tool", also Geschichte als Werkzeug, genannt – zielt darauf ab, dass der Einsatz der Mathematikgeschichte dienlich sein kann, die Vermittlung der eigentlichen Mathematik zu befördern. Der Kern der zweiten Klasse – von Jankvist „history as a goal", also Geschichte als Ziel, genannt – ist die Idee, dass die Geschichte der Mathematik selbst ein so wichtiger Teil der Mathematik als sozialem und kulturellem Konstrukt ist, dass die Vermittlung der Geschichte schon um ihrer selbst willen geboten ist, weil nur so der evolutionäre Charakter der Disziplin vermittelbar ist.

Bei näherer Betrachtung dieser Unterteilung drängt sich die Vermutung auf, dass je nach vorliegender Quelle die Gründe für den Einsatz im Unterricht durchaus mal mehr aus der einen, mal mehr aus der anderen Kategorie stammen. Für die hier vorgestellte Quelle liegt der Schwerpunkt sicherlich auf den „history as a tool" Aspekten, was angesichts der Tatsache, dass es sich eigentlich nicht nur um eine Quelle zur Geschichte der Mathematik, sondern gewissermaßen auch um eine Quelle zur Geschichte der Mathematikdidaktik handelt (siehe Kapitel 2), nicht überraschen dürfte.

In der Kategorie „history as a tool" hat Jankvist wiederum mehrere Unterargumente ausgemacht, die sich alle auch am Einsatz der vorliegenden historischen Quelle belegen lassen. So wird zum einen ein starker motivationaler Effekt der Quellenarbeit erkannt, der sich sowohl im Erlebbaren der Mathematik im geschichtlichen Kontext begründet als auch in der für Schülerinnen und Schüler im Vergleich zum Unterricht mit dem Schulbuch abwechslungsreicheren Methodik.

Neben der Motivation, wenn auch damit verknüpft, gibt es auch positive kognitive Effekte, die sich aus dem Wechsel des Blickwinkels und aus der Betrachtung einer Entwicklung im Vergleich zum statischen Ergebnis ergeben:

> Denn alle mathematischen Ideen, Begriffe, und Techniken sind irgendwann einmal aus konkreten Fragen entstanden. (Jahnke & Richter, 2008, S. 4)

Der Bezug zu diesen konkreten Fragen ermöglicht es Lernenden, sich der Thematik kognitiv auf verschiedenen Ebenen zu nähern.

Im vorliegenden Fall ist dies – wie später noch zu sehen sein wird – besonders ausgeprägt, da es sich bei der vorliegenden Quelle nicht nur um einen Text handelt, sondern auch um zusätzliche Materialien. Bezugnehmend auf die Definition von Pandel:

> Quellen sind Objektivierung und Materialisierung vergangenen menschlichen Handelns und Leidens. Sie sind in der Vergangenheit entstanden und liegen einer ihr nachfolgenden Gegenwart vor. (Pandel, 2003, S. 11)

ist nämlich nicht nur die Beschreibung der Materialien eine Quelle, sondern auch die konkreten historischen Lehrmittel.

Vor diesem Hintergrund studierte van Randenborgh den Einsatz historischer Zeichengeräte – insbesondere verschiedener Entwicklungsstufen des Pantographen – im Mathematikunterricht und kam zu dem positiven Ergebnis:

> Historische Zeichengeräte beruhen auf der mathematischen Idee und genau diese soll im Unterricht von den Schülern entdeckt bzw. rekonstruiert werden. […] Durch dieses Aufdecken, Erklären und Herstellen von Zusammenhängen wird das Artefakt zum Instrument der Wissensvermittlung. (van Randenborgh, 2015, S. 193 f.)

Mit anderen Worten wird also das historische Werkzeug zur historischen Quelle, die auch im Jankvist'schen Sinne als Werkzeug der Wissensvermittlung – und somit als Werkzeug auf mehreren Ebenen – Verwendung findet.

Darauf aufbauend kann man den Einsatz der historischen mathematischen Werkzeuge natürlich noch mit den authentischen Originalquellen textlicher Art verknüpfen, ein Ansatz der beispielsweise in (Schöneburg-Lehnert, 2018) mit dem Scheiner'schen Pantographen und dessen Werk „Pantographice seu ars delineandi“ verfolgt wird. In dem dort beschriebenen fächerübergreifenden Projektunterricht wird das positive Zusammenspiel der beiden historischen Quellen – d. h. des Pantographen und des beschreibenden Textes –, des historischen Kontexts und der noch immer aktuellen Mathematik bei der Ansprache der Schülerinnen und Schüler auf verschiedenen kognitiven Ebenen deutlich. Daraus resultierend leitet sich der Auftrag ab, weitere geeignete Quellenpaare bestehend aus historischen mathematischen Werkzeugen und den dazugehörigen zeitgenössischen mathematischen Beschreibungen für den Unterricht aufzubereiten. Mit dem Organum mathematicum wird nun ein weiteres solches Quellenpaar bereitgestellt.

2. Athanasius Kircher und sein organum mathematicum

Der Jesuit und Universalgelehrte Athanasius Kircher (1602–1680), eine der herausragendsten Persönlichkeiten seiner Zeit, widmete sein Leben neben der theologischen Laufbahn, die er in der Gesellschaft Jesu vollzog, der Wissenschaft. Die Mathematik ist dabei für ihn „der Schlüssel zum Verständnis der Welt“ (Vollrath, 2002, S. 161) und der „Ausgangspunkt jeglicher wissenschaftlichen Arbeit“ (Wittstadt, 2002, S. 19). Sie findet sich demzufolge auch auf vielfältige Art und Weise in seinen wissenschaftlichen Werken wieder, beispielsweise als „Vorbild für die Darstellung der Wissenschaften“ oder als Hilfsmittel zur „Klärung von Phänomenen“ (Vollrath, 2002, S. 161). Eingebettet in für die damalige Zeit und Kirchers Forschungen authentische Problemkontexte sind für den Leser der Nutzen und die Bedeutung der Mathematik stets offenkundig.

Kirchers Schriften stellen somit zum einen ein essentielles Zeugnis seiner umfangreichen und vielseitigen Forschungen auf den Gebieten der Ägyptologie, Geologie, Optik, Alchemie, Orientalistik, Medizin, Musik und des Magnetismus dar und leisten damit „einen wichtigen Beitrag zur Ausstrahlung und zur wissenschaftlichen Wirkung und Nachwirkung der Gesellschaft Jesu“ (Krohn & Schöneburg, 2017, S. 79), zum anderen liefern sie durch die dargebotenen Hilfsmittel eine bedeutende Quelle der didaktischen Bemühungen Kirchers.

> So zeigt sich in Kirchers gesamten Werk das Bemühen, möglichst vielen Menschen einen Zugang zur Mathematik und damit allgemein zur Erkenntnis zu eröffnen. Er hat damit viel für das Ansehen der Mathematik getan. So sind seine Leistungen im Anwenden und Vermitteln von Mathematik unbestritten. (Vollrath, 2002, S. 162)

Eines seiner in diesem Kontext entwickelten Hilfsmittel ist das Organum mathematicum, das er im Jahre 1661 für den Mathematikunterricht des damals zwölfjährigen Erzherzogs Karl Joseph von Habsburg (1649–1664) nach Wien entsandte.

2.1 Das Organum mathematicum

Ein treppenartiger Holzschrein, verziert mit goldener und anderen Farben und unterteilt in 10 Fächer zu 9 verschiedenen mathematischen Themen: Arithmetik, Geometrie, Festungsbau, kirchliche Zeitrechnung, Sonnenuhren, Astronomie, Astrologie, Geheimschriften (in zwei Fächern) und Musik – dies ist das Ergebnis zahlreicher Überlegungen von Athanasius Kircher auf der Suche nach einem geeigneten Hilfsmittel für den Mathematikunterricht des jungen österreichischen Erzherzogs, nachdem ihn Gottfried Kinner, der Erzieher des Erzherzogs, um Unterstützung gebeten hatte (vgl. Schott, 1668, S. 57).

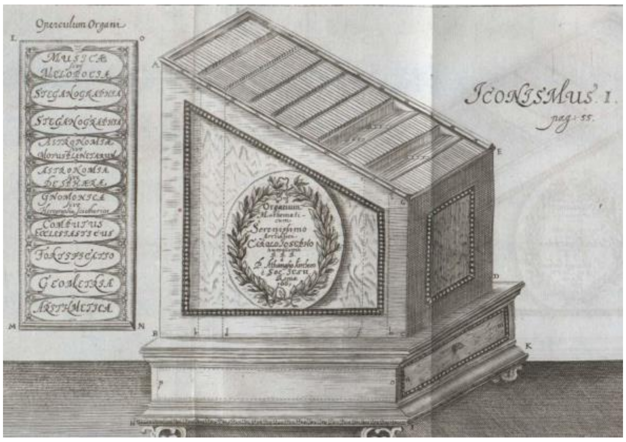


Abb. 1: Organum mathematicum (Schott, 1668, zu S. 55)

In jedem Fach befinden sich verschiedene hölzerne Hilfstäfelchen, die „ad capessenda mathemata cum facilitate“ (Schott, 1668, S. 58) beitragen sollen. Darüber hinaus werden im Sockel des Organum mathematicum verschiedene Instrumente aufbewahrt, die ebenfalls die mathematische Auseinandersetzung unterstützen sollen.

Durch die verschiedenen Themen wird ein Einblick in die Vielfalt der mathematischen Wissenschaften jener Zeit vermittelt, auch wenn Kircher hier eine altersgerechte Auswahl getroffen hat,

> ne multitudine rerum nimia Tyronis capacitas non tam promoveretur, quam confunderetur – um nicht durch eine allzu große Menge an Inhalten die geistige Aufnahmefähigkeit des Zöglings nicht so zu fördern wie zu verwirren (Schott, 1668, S. 59) (Übersetzung der Autoren).

Die Inhalte sind zudem bewusst mit Blick auf die Zukunft des Erzherzogs ausgewählt und sollen ihm dabei helfen, in entsprechenden Situationen sachgerecht urteilen und handeln zu können (vgl. Vollrath, 2001, S. 115). Die Arithmetik als die „erstgeborene Tochter der gesamten Mathematik“ (Schott, 1668, S. 68) darf dabei ebenso wenig fehlen wie beispielsweise die Fortifikation, deren Bedeutung für die Fürsten und Adligen unbestritten ist (vgl. Schott, 1668, S. 237 f.) oder auch die Steganographie (Lehre von Geheimschriften), die für die Könige und Fürsten äußerst dienlich bei der Wahrung ihrer Geheimnisse ist (vgl. Schott, 1668, S. 59 f.).

Für jedes dieser neun Themen hat Kircher kleine Anleitungsbüchlein verfasst, die sich im Sockel des hölzernen Schreins befinden und in denen die Inhalte laut Kirchers eigener Aussage „ausführlich und durch Beispiele gezeigt und erklärt werden“ (Schott, 1668, S. 59). Die Ausführungen sind insbesondere durch die Beispiele leicht verständlich, allerdings sind sie entgegen der Ankündigungen Kirchers sehr kurz gehalten. Ein deutlich umfassenderes Bild zeichnet das gleichnamige Handbuch von Kirchers Schüler Caspar Schott (1608–1666), das 1668 posthum veröffentlicht wurde. Das – entsprechend der neun Themen des Organum mathematicum – neun Bücher umfassende Werk enthält eine knappe Erläuterung der den entsprechenden Fächern zugrundeliegenden Täfelchen sowie die Anleitungsbüchlein von Athanasius Kircher als auch eine umfassende und detailreiche Auseinandersetzung von Caspar Schott zu dem jeweiligen Themenbereich, die über das Organum mathematicum hinausgehende Inhalte vermittelt.

Die im Organum mathematicum behandelten Inhalte sind keineswegs neu, sondern allgemein bekannt; das Entscheidende ist die neue Methode die Inhalte zu vermitteln (vgl. Schott, 1668, S. 59).

Dabei kommt den Täfelchen in den einzelnen Fächern eine besondere Bedeutung zu. Sie sind als eine Art „Datenträger“ zu verstehen, mit deren Hilfe Probleme in den einzelnen anwendungsorientierten Kontexten bearbeitet und gelöst werden können und die dabei unterschiedliche Funktionen erfüllen (vgl. Vollrath, 2003, S. 49 ff.) als:

1) Rechenhilfen (Arithmetik)
2) Konstruktionshilfen (Fortifikation, Gnomonik)
3) Hilfen zur Versuchsauswertung (Geometrie)
4) Hilfen zur Orientierung in der Umwelt (Astronomie, Astrologie, Chronologie)
5) Anregung zur schöpferischen Kreativität (Steganographie, Musik)

So dienen die im Arithmetikfach enthaltenen Napierstäbchen beispielsweise als Multiplikations- und Divisionhilfe oder die Täfelchen im Geometriefach zur praktischen Anwendung des Geometrischen Quadrats. Die Aufgabe des Lernenden ist es nun, jeweils die entsprechenden Täfelchen auszuwählen, geeignet anzuordnen, die gewünschten Daten abzulesen und in dem jeweiligen Kontext zu interpretieren – keine allzu anspruchsvolle Tätigkeit, aber dennoch unterstützt das Material, das in anwendungsorientierten Übungsaufgaben Anwendung findet, die Aneignung der Inhalte (vgl. Vollrath, 2003, S. 53).

Dem Alter des Erzherzogs Rechnung tragend ist Kircher bestrebt, durch die direkte Auseinandersetzung mit dem Organum mathematicum indirekt eine mathematische Beschäftigung mit den einzelnen Themen zu fokussieren, um den Lernenden geistig nicht zu überfordern (vgl. Schott, 1668, S. 58). Die Hilfstäfelchen und die anwendungsorientierten Kontexte leisten dazu ihren Beitrag.

Bei dem Organum mathematicum handelt es sich demnach um ein wohldurchdachtes didaktisches Hilfsmittel, das aufgrund seiner Vielzahl an Themen und Hilfstäfelchen eine gewisse Systematik und Ordnung erfordert. Eine erste grobe Ordnung erfolgt bereits durch die Aufteilung der Inhalte in zehn Fächer, die jeweils mit einem Buchstaben und einem Zahlzeichen in aufsteigender Reihenfolge versehen sind. So ist das Arithmetikfach mit dem Buchstaben A und der Zahl 1 gekennzeichnet, das Geometriefach mit B und 2, usw. Innerhalb der einzelnen Fächer hilft eine unterschiedlich farbige Gestaltung der Täfelchen der weiteren Systematisierung. Täfelchen, die zu ein und demselben Anwendungsgebiet nützlich sind, haben dieselbe Farbe, die anderen sind farblich von diesen abgegrenzt. Weitere Feinheiten, die der Ordnung der Materialien zuträglich sind, lassen sich u. a. in der Struktur der Täfelchen finden (Schott, 1668, S. 59 f). Auch hier lässt sich ein didaktisch geschickter Schachzug von Kircher erkennen, den Vollrath vortrefflich wie folgt beschreibt:

> Der Umgang mit dem systematisch geordneten Material lässt den Schüler den Wert einer Ordnung und eines Systems erkennen. Und es erzieht ihn zur Pflege dieser Ordnung, indem die Täfelchen wieder in das richtige Fach einzuräumen sind. (Vollrath, 2003, S. 54)

Trotz der sorgfältigen Strukturierung und gut durchdachten Materialien ist die Benutzung des Organum mathematicum kein Selbstläufer, sondern bedarf der Anweisung durch einen erfahrenen Lehrer, der sich zuvor intensiv selbst mit dem mathematischen Schrein vertraut gemacht haben sollte (vgl. Schott, 1668, S. 59 und S. 64). Seine Aufgabe besteht weniger darin Fakten- und Sachwissen zu vermitteln, dies liefern die Täfelchen, vielmehr muss er Fähigkeiten vermitteln, die den Umgang mit diesen Täfelchen betreffen.

Insgesamt präsentiert sich das Organum mathematicum als eine bedeutende Quelle didaktischer Bestrebungen der Barockzeit anhand der Person Athanasius Kircher. Die in dieses Unterrichtsmittel eingeflossenen Überlegungen sind auch für die aktuelle mathematikdidaktische Diskussion äußerst fruchtbar. So nahm Kircher mit Blick auf das Alter und die Interessen des Erzherzogs bewusst eine didaktische Reduktion der Themen und dazugehörigen Inhalte vor, wie es auch bei der Planung im gegenwärtigen Mathematikunterricht gefordert wird (vgl. Barzel & Holzäpfel, 2010, S. 5). Kirchers oberstes Ziel war es, mit seinem Lehrmittel Gefallen beim Erzherzog zu finden (Schott, 1668, S. 58), ihn zur Auseinandersetzung mit den Themen zu motivieren. Dies versuchte er sowohl über die Themen, die von Bedeutung für die Zukunft des Erzherzogs waren, als auch über die im Organum mathematicum enthaltenen Materialien (Täfelchen und Instrumente), die zu einer handlungsorientierten aktiven Auseinandersetzung mit ganz unterschiedlichen Problemkontexten einladen sollten. Die Frage nach dem „Warum?“ – „Wozu brauche ich das?“ ist auch im aktuellen Mathematikunterricht eines der Schlüsselmomente. Die Einsicht in die Nützlichkeit der zu erlernenden Inhalte stellte einen nicht unwesentlichen Grundstein dar, um die Lernenden zu einer motivierten Auseinandersetzung mit entsprechenden Inhalten zu bewegen (vgl. Förster, 2015; Maaß, 2007).

Das zusätzliche Bereitstellen von Materialien, die zu einem handelnden Umgang auffordern, tut diesbezüglich sein Übriges und unterstützt die motivationale Auseinandersetzung. Allein unter den hier angeführten Gesichtspunkten lohnt sich eine Beschäftigung mit dem Organum mathematicum unter didaktischem Blickwinkel. Gleichzeitig stellt das Lehrmittel eine nicht zu unterschätzende Quelle für den aktuellen Mathematikunterricht dar, wie im Folgenden exemplarisch aufgezeigt werden soll.

3. Das Organum als historische Quelle im Mathematikunterricht

Geheimnisse in sich bergend, die zu Entdeckungen einladen, so präsentiert sich der mathematische Schrein den Schülerinnen und Schülern. Die verschiedenen Fächer laden zum Durchstöbern der Materialien ein. Jedes Fach ist für sich genommen eine Auseinandersetzung wert und bietet eine essentielle Grundlage zur Initiierung eines motivierenden, aktiven und problemorientierten Arbeitens.

So lassen sich im Fach zur Steganographie Täfelchen finden, mit denen man selbst schnell geheimnisvolle Botschaften verschlüsseln kann. Die Frage nach der Sicherheit dieser Verschlüsselungsmethode schließt sich automatisch an und lädt zur Erkundung weiterer Verfahren ein, um schließlich die von Kircher hier vorgestellte Methode besser beurteilen zu können.

Das Musikfach regt die Kreativität der Lernenden an, indem sie mit Hilfe der verschiedenen Täfelchen, ihren eigenen vierstimmigen Satz komponieren können. Zuvor gilt es aber, die Inhalte der Täfelchen zu erkunden. Hierfür ist wie von Kircher gefordert, ein erfahrener Lehrer wichtig. Und nicht zuletzt bieten auch die dem Organum beigegebenen Instrumente einen guten Ausgangspunkt für den Mathematikunterricht, wie beispielsweise das Geometrische Quadrat, ein in der Barockzeit durchaus häufig genutztes Vermessungsinstrument.

Anhand der Abbildung in Schotts Lehrbuch lässt sich dieses mit einfachen Mitteln nachbauen und im Feld erproben. Bei der Auswertung der Messergebnisse kommen die Täfelchen des Geometriefaches zum Einsatz, aus denen sich die benötigten Verhältnisse direkt ablesen lassen. Verzichtet man auf diese oder hinterfragt die Inhalte und konzentriert sich auf das historische Vermessungsinstrument, ist eine Einbeziehung in den Geometrieunterricht zum Thema Ähnlichkeit offensichtlich (vgl. Malitte et al., 2011, S. 252 ff.).

Die Schwierigkeiten, die mit dem Einsatz dieses Unterrichtsmittels verbunden sind, liegen vorrangig in der lateinischen Sprache, in der die Anleitungsbüchlein von Kircher verfasst worden sind. Durch die Unterweisung mittels Beispielen genügen allerdings im Wesentlichen Grundkenntnisse in Latein, die in den ersten beiden Jahren des Anfangsunterrichts erworben werden.

Darüber hinaus liegen die von Kircher verfassten Anleitungen mittlerweile auch in deutscher Sprache vor (http://www.history.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/organum/organum.html), so dass ggf. auf diese Übersetzungen bei Sprachbarrieren zurückgegriffen werden kann.

3.1 Anregungen aus dem Organum mathematicum für den Mathematikunterricht

Eintauchen in den Mathematikunterricht vor mehr als 300 Jahren – eine ebenso spannende wie abwechslungsreiche Erfahrung, die im Mathematikunterricht verschiedener Jahrgangsstufen gemacht werden kann. Um einen ersten Eindruck von dem Organum mathematicum und dessen Vielseitigkeit zu vermitteln, bietet sich als Ausgangspunkt für eine unterrichtliche Auseinandersetzung ein Material an, das den mathematischen Schrein in seiner Gesamtheit präsentiert und eine Idee über die Inhalte der einzelnen Fächer den Lernenden nahebringt.

Im Regelfall wird jedoch der Schrein nicht im Schulunterricht zur Verfügung stehen und höchstens durch einen Museumsbesuch – ein ähnlicher Schrein befindet sich beispielsweise im Istituto e Museo di Storia della Scienza in Florenz – für die Schülerinnen und Schüler erlebbar. Für den Regelunterricht ist daher auf verschiedene Materialien zur Schreinbeschreibung zurückzugreifen.

Erprobt wurde dieser Einsatz durch die Autoren in einer Arbeitsgemeinschaft mit Schülerinnen und Schülern der Jahrgangsstufen 5–7, im Rahmen einer Projektwoche in der 5. Klasse sowie im Regelunterricht der Jahrgangsstufe 8 und 9.

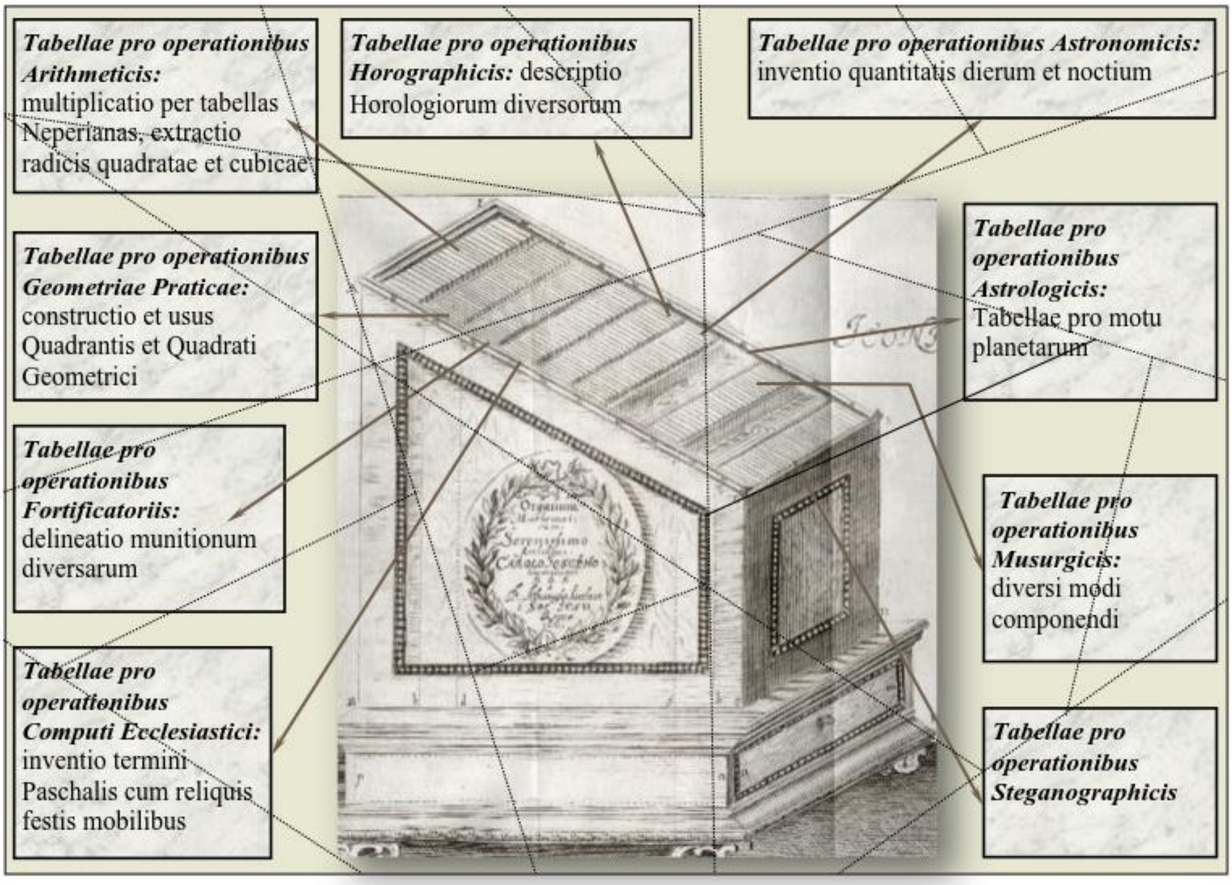


Abb. 2: Organum mathematicum als Puzzle unter Verwendung der Vorlage aus (Schott, 1668, S. vor 55)

Gestalterisch wurde dabei auf die Form eines Puzzles zurückgegriffen (vgl. Abb. 2), um den Gedanken des Zusammensetzens der Mathematik aus unterschiedlichen Teildisziplinen allegorisch aufzugreifen und dies im Mathematikunterricht im Kontext der damaligen und heutigen Zeit zu besprechen. Die kurzen inhaltlichen Informationen wurden zu Unterrichtszwecken auf der Grundlage der Anleitungsbüchlein von Kircher erstellt

Nach dem erfolgreichen Zusammensetzen der einzelnen Teile sind die Schülerinnen und Schüler gefordert, anhand der gegebenen Informationen die entsprechenden Disziplinen Musik, Festungsbau, Arithmetik, Geheimschriften, Kirchenrechnung, Astronomie, Geometrie, Astrologie und die Lehre von den Sonnenuhren zuzuordnen. Dies verhindert ein einfaches Aneinanderlegen der Teile, ohne sich mit dem Organum mathematicum zu beschäftigen. Je nach Jahrgangsstufe und vorhandenen Sprachkenntnissen werden die sprachlichen Gestaltungselemente angepasst.

Die Geschichte über die Konzeption des Unterrichtsmittels für den Mathematikunterricht des damals zwölfjährigen Erzherzogs bietet darüber hinaus eine gute Motivationsquelle, die nicht nur das Interesse der Schülerinnen und Schüler in demselben Alter weckt, sondern auch in deutlich höheren Jahrgangsstufen. Eine wichtige Quelle stellt in diesem Kontext der Begleitbrief von Kircher an Kinner, den Erzieher des Erzherzogs, dar, der ebenfalls in lateinischer und deutscher Fassung unter obiger Internetquelle eingesehen werden kann. Um den mathematischen Schrein nicht losgelöst in das Zentrum unterrichtlicher Betrachtungen zu setzen, sondern auch in dem entsprechenden Kontext zu verorten, bietet sich zudem eine Auseinandersetzung mit dem Jesuiten und Universalgelehrten Athanasius Kircher an. Dies kann durch Internetrecherche oder auch durch entsprechende Arbeitsmaterialien geschehen (vgl. Richter & Schöneburg, 2008, S. 145 f.).

Um den Gedanken des Ordnens und die Idee des unmittelbaren Hineindenkens der Schülerinnen und Schüler in die Situation des zwölfjährigen Erzherzogs stärker für die Lernenden erfahrbar zu machen, empfiehlt es sich (insbesondere in jüngeren Klassenstufen), die einzelnen Materialien in ihren entsprechenden Farben und die Fächer (z. B. Quadernetz als Bastelvorlage) nachzubasteln bzw. zur Verfügung zu stellen. So entsteht ein möglichst plastisches Bild der Quelle vor den Augen der Lernenden, mit der es zu arbeiten gilt.

Im Folgenden werden konkret einige Unterrichtsideen und Erfahrungen zum 1. Fach (Arithmetik) und zum 3. Fach (Fortifikation) vorgestellt, um die Nutzung des Organum mathematicum als Quelle für ein problem- und handlungsorientiertes Arbeiten im Mathematikunterricht im Jankvist'schen Sinne aufzuzeigen. Eine vorherige Auseinandersetzung mit den Inhalten der beiden Fächer ist dafür unerlässlich.

3.2 Das Arithmetikfach im Mathematikunterricht

3.2.1 Grundlagen aus dem Organum mathematicum

Das erste Fach des Organum mathematicum enthält 3 verschiedene Arten von Hilfstäfelchen für die Multiplikation und Division sowie das Quadrat- und Kubikwurzelziehen:

1) 3 Sätze von je 10 Napierstäbchen (Tabulae Arithmeticae)
2) 1 Anlegetäfelchen (Tabula applicatoria)
3) Je 1 Quadrat- und Kubikwurzeltäfelchen

Entsprechend Kirchers Ordnungsgedanken sind diese je nach Art unterschiedlich eingefärbt. So haben die Napierstäbchen eine rote, das Anlegetäfelchen eine schwarze und die restlichen beiden Täfelchen eine weiße Färbung (vgl. Schott, 1668, S. 68). Die Arithmetiktäfelchen bzw. Napierstäbchen sind sowohl vorderseitig als auch rückseitig beschriftet. Auf der Rückseite befindet sich jedoch jeweils eine andere Multiplikationsreihe als auf der Vorderseite. Die Täfelchen sind voneinander getrennt, so dass sie untereinander gemischt und beliebig, je nach Notwendigkeit, kombiniert werden können (vgl. Schott, 1668, S. 70). Das Anlegetäfelchen hingegen ist nicht zwingend notwendig, sondern dient lediglich der Absicherung, dass man sich in der richtigen Zeile befindet. Die beiden verbleibenden Täfelchen zum Quadrat- und Kubikwurzelziehen sind in 3 bzw. 4 Spalten unterteilt.

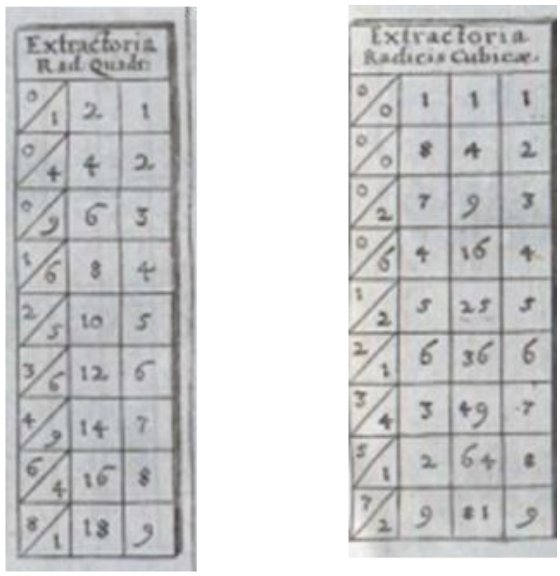


Abb. 3: Quadrat- und Kubikwurzeltäfelchen (Schott, 1668, vor S. 69)

In der linken Spalte des Quadratwurzeltäfelchens (vgl. Abb. 3) befinden sich die ersten 9 Quadratzahlen, in der rechten die entsprechenden ersten 9 Quadratwurzeln und in der Mitte das Doppelte der jeweiligen Quadratwurzel. Das Kubikwurzeltäfelchen (vgl. Abb. 3) hingegen beinhaltet in der rechten Spalte die Zahlen 1 bis 9, in der zweiten sowie dritten und vierten Spalte die entsprechenden Quadrat- und Kubikzahlen. Auf der Rückseite wird dies entsprechend bis zur Zahl 20 fortgesetzt.

Während die Handhabung der Täfelchen von Kircher nur sehr kurz anhand von recht einfachen Beispielen beschrieben wird, erläutert Schott in dem gleichnamigen Lehrbuch sehr ausführlich die einzelnen Rechenoperationen mit und ohne Nutzung der im Organum mathematicum enthaltenen Hilfstäfelchen.

Die Grundidee beim Quadratwurzelziehen mit Hilfe des Quadratwurzeltäfelchens wird im nachfolgenden Beispiel (Abb. 4) aus dem Anleitungsbüchlein ohne Weiteres deutlich, allerdings lässt sich anhand der einfachen Beispiele kaum das Potenzial der Hilfstäfelchen erschließen, da diese nahezu überflüssig sind.

Schotts gewählte Beispiele (vgl. z. B. Abb. 5) sind unter diesem Blickwinkel viel aussagekäftiger. Aufgrund der größeren Zahlen, bei denen die Quadratwurzel nicht auf den ersten Blick zu erkennen ist und die auszuführenden Rechenoperationen komplexer sind, werden von ihm sowohl die Napierstäbchen als auch das Quadratwurzeltäfelchen zielführend eingesetzt.

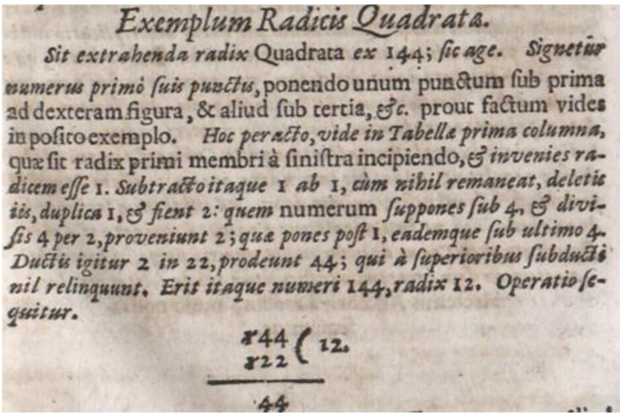
Die hier beschriebene Vorgehensweise ist sehr anschaulich und gut nachvollziehbar.

Aber bietet dieses doch sehr rechenlastige Verfahren wirklich einen geeigneten Ansatzpunkt für den Mathematikunterricht? Lohnt sich eine Auseinandersetzung mit dem gesamten Fach, obgleich den Schülerinnen und Schülern ein Taschenrechner zur Verfügung steht, der alles viel schneller und sicherer macht? Können die Lernenden unter diesem Blickwinkel wirklich zur Auseinandersetzung mit diesen Materialien und Inhalten motiviert werden? Ist es darüber hinaus auch noch möglich einen zusätzlichen mathematischen Erkenntnisgewinn zu ziehen?

Die Antwort auf diese Fragen lautet ganz klar: ja.

3.2.2 Anregungen für und Erfahrungen aus dem Mathematikunterricht

Die Einbeziehung dieses Faches in den Mathematikunterricht ist zu unterschiedlichen Zeitpunkten mit unterschiedlichen Intentionen möglich. Bestimmte Inhalte, wie etwa die Napierstäbchen können bereits am Ende der Grundschule und in den Anfangsjahren der Sekundarstufe I gewinnbringend im Unterricht eingesetzt werden. Dass dies geschieht, beweisen zahlreiche Lehrbücher (vgl. Baum et al., 2010, S. 42; Kliemann et al., 2006, S. 150 f.; Böttner et al., 2008, S. 53; Müller & Wittmann, 2013, S. 77f.) und Unterrichtsmaterialien (Richter & Schöneburg, 2013, S. Material 1 ff.)


Exemplum Radicis Quadratæ.

Sit extrahenda radix Quadrata ex 144; ſic age. Signetur numerus primò ſuis punctis, ponendo unum punctum ſub prima ad dexteram figura, & aliud ſub tertia, &c. prout factum vides in poſito exemplo. Hoc peracto, vide in Tabellæ prima columna, quæ ſit radix primi membri à ſiniſtra incipiendo, & invenies radicem eſſe 1. Subtracto itaque 1 ab 1, cùm nihil remaneat, deletis iis, duplica 1, & fient 2: quem numerum ſuppones ſub 4, & diviſis 4 per 2, proveniunt 2; quæ pones poſt 1, eademque ſub ultimo 4. Ductis igitur 2 in 22, prodeunt 44; qui à ſuperioribus ſubducti nil relinquunt. Erit itaque numeri 144, radix 12. Operatio ſequitur.

144 (12.
122

44

Beispiel der Quadratwurzel: Um die Quadratwurzel aus 144 zu ziehen, gehe so vor: Zuerst wird die Zahl mit Punkten versehen, indem man einen Punkt unter die erste Ziffer von rechts setzt und einen zweiten unter die dritte etc.; wie das gemacht wird, ersieht man aus obigem Beispiel.

Ist dies geschehen, siehe im Täfelchen in der ersten Spalte nach, was die Wurzel der ersten Zahl von links angefangen ist, und du wirst feststellen, die Wurzel ist 1. Diese 1 wird von 1 abgezogen. Da nichts übrigbleibt, bleibt die Stelle leer. Verdopple dann die 1, was 2 ergibt. Diese Zahl setze unter die nächste 4. 4 geteilt durch 2 ergibt 2. Diese 2 setzt man nach der 1 und noch mal unter die zweite 4. Nun multipliziert man die 22 mit 2 und erhält 44; diese Zahl 44 von den oberen abgezogen läßt keinen Rest. Deshalb hat die Zahl 144 die Wurzel 12. Die Durchführung sieht wie folgt aus:

144 (12
122

Abb. 4: Das Beispiel der Quadratwurzel aus dem Anleitungsbüchlein (Schott, 1668, S. 73) samt Übersetzung von P. Alban Müller SJ (Müller, 2016, S. 7)

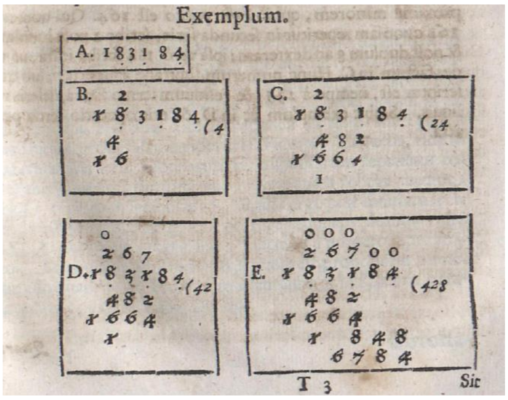
Durch einen aktiven Einsatz und den handlungsorientierten Umgang mit den Napierstäbchen erfahren die Kinder die Leistungsfähigkeit dieser historischen Rechenhilfen für die Multiplikation, und nicht zuletzt auch für die Division. Insbesondere ermöglicht der Vergleich des Einsatzes der Napierstäbchen und des schriftlichen Rechenverfahrens bei der Multiplikation zweier mehrstelliger Zahlen einen mathematischen Mehrwert. Aufgaben, wie:

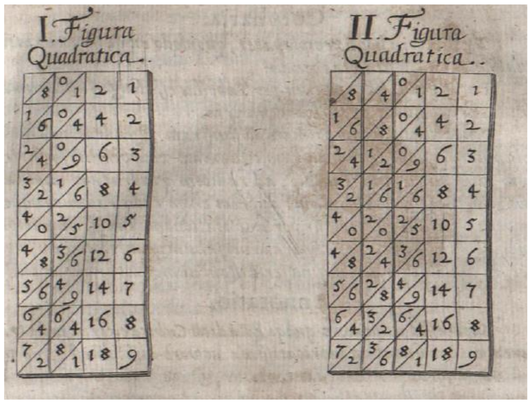
> Lara behauptet: „Das Rechnen mit den Rechenstäben funktioniert ganz genau wie die schriftliche Multiplikation.“ Was meinst du? Begründe deine Meinung. Du kannst hierfür eine Beispielaufgabe auswählen, beide Verfahren nebeneinander aufschreiben und sie Schritt für Schritt vergleichen. (Baum et al., 2010, S. 42)

laden zu einem expliziten Vergleich beider Methoden ein. Die Bedeutung des stellenweisen Multiplizierens und des stellengerechten Addierens wird damit noch einmal bewusst in den Blick der Lernenden gerückt und führt somit indirekt zu einem mathematischen Mehrwert.

.

Es sei die Wurzel aus 183184 zu ziehen.





Schritt 1: Unterteile jene Zahl, wie du es in A siehst, in drei Glieder.
Schritt 2: Schreibe die Wurzel der größten Quadratzahl, die in dem ersten Glied links, also der 18, enthalten ist, das ist die 4, hinter den kleinen Halbmond und unter die mit dem ersten Punkt gekennzeichnete 8. Das Quadrat aber, welches 16 ist, schreibe unter das erste Glied, wie es in B erscheint. Dieses subtrahiere von der 18. Den Rest 2 schreibe oberhalb und lösche die übrigen Zahlen, wie du es in B siehst. Damit ist die 2. Operation vollendet.
Schritt 3: Verdoppele die vorhergehende Wurzel, das ist 8 und setze sie unterhalb des folgenden Kennzeichens des zweiten Gliedes, nämlich unter die 3, wie du es in C gemacht siehst. Eben diese verdoppelte Zahl suche im Scheitel der Napier-Stäbchen und füge diese Tabelle an die linke Seite der Quadratwurzeltabelle, wie du es in der folgenden Figur I siehst. Siehe nun, in der wievielten Transversalenreihe der Quadratspalte, die dieser Tabelle links angeheftet wurde, das gesamte zweite Glied, zusammen mit dem übrig gebliebenem Rest, gefunden wird, nämlich 231. Wenn 231 nicht gefunden wird, suche die nächst kleinere Nummer, welche im vorliegenden Fall 164 ist. Da ja die Zahl 164 in der zweiten Reihe gefunden wird, schreibe 2 nach dem kleinen Halbmond und nach dem Doppelten 8 rechts. Die 164 schreibe aber darunter, wie du es in C siehst. Diese Zahl subtrahiere von der größeren, unter der sie geschrieben ist, nämlich die 231 und den Rest schreibe darüber, nachdem du das Übrige gelöscht hast. Dies zeigt dir das Beispiel in D und die dritte Operation ist vollendet.
Schritt 4: Das Doppelte der nach dem Halbmöndchen geschrieben gesamten Wurzel, nämlich 84, schreibe unter das folgende dritte Glied, wie du es in E gemacht siehst. Dasselbe Doppelte suche im Scheitel der beiden Napiertäfelchen, von denen nämlich die eine im Scheitel eine 8 und die andere eine 4 hat. Füge diese beiden Täfelchen links an das Quadrattäfelchen, wie du es in Figur II gemacht siehst. Nachdem dies gemacht worden ist, sieh, in welcher transversalen Reihe der so gelegten Täfelchen das gesamte dritte Glied zusammen mit dem zuvor übriggebliebenen Rest zu finden ist, nämlich 6784. Du wirst es in der achten Reihe finden. Die hinter das Halbmöndchen zu schreibende Wurzel muss also 8 sein. Diese schreibe auch hinter das vorhergehende Doppelte, wie du es in E siehst. Die Zahl der achten Reihe subtrahiere von der oberhalb geschriebenen Zahl. Und da ja nichts übrigbleibt, bedeutet dies, dass die vor Augen stehende Zahl das Quadrat ist.

Abb. 5: Übersetzung des Wurzelziehalgorithmus von Schott aus Richter und Schöneburg (2011, S. 133) (vgl. auch Schott, 1668, S. 149 ff.)

Allerdings stellt sich die Frage, ob sich die Einbeziehung des Organum mathematicum in den Mathematikunterricht überhaupt noch lohnt, wenn durch Lehrbücher und andere Unterrichtsmaterialien die Napierstäbchen bereits im Unterricht thematisiert werden?

Die Tatsache, dass das Unterrichtsmittel für den Mathematikunterricht des damals zwölfjährigen Erzherzog Karl Joseph entwickelt wurde, also einen Jungen, der in etwa demselben Alter wie unsere Schülerinnen und Schüler bei der heutigen Auseinandersetzung ist, ist Antwort genug. Hier steckt ein großes Potenzial der Einbeziehung dieser Quelle in den Mathematikunterricht. Die Schülerinnen und Schüler fühlen sich dadurch angesprochen. Sie sind neugierig und wollen wissen, wie hat der Mathematikunterricht damals stattgefunden. Und diese Motivation gilt es auszunutzen. Die Napierstäbchen werden in einen Kontext eingebettet, in dem aufgezeigt wird, dass sie schon vor über 300 Jahren im Mathematikunterricht zum Tragen kamen. Durch das Nachempfinden dieser Situation bzw. das praktische Beispiel und die damit in Verbindung stehende Auseinandersetzung mit diesen Hilfstäfelchen gewinnen die Lernenden einen Einblick in den historischen Kontext und die Einsicht, dass diese durchaus ihre Anwendung gefunden haben und zu einem gewissen Zweck, nämlich dem der Rechenerleichterung, entwickelt worden sind. Um in diesen historischen Kontext einzutauchen, sollten mit den Schülerinnen und Schülern die Napierstäbchen nachgebastelt werden. Dafür bieten sich unterschiedliche Möglichkeiten an:

1) wie im Organum mathematicum aus Holz, was leider sehr arbeitsaufwendig ist,

2) aus Mundspateln, so bleibt zumindest der Holzgedanke, wenn auch nicht die ursprünglich von Kircher und Schott vorgesehene Form der Stäbchen erhalten (vgl. Richter & Schöneburg, 2013, Material S. 2)

3) aus Papier, das anschließend laminiert wird (vgl. (Richter & Schöneburg, 2013, Material S. 3)

Mit den eigenen Stäbchen ausgestattet, können die Schülerinnen und Schüler eigene Erfahrungen beim Multiplizieren und Dividieren sammeln und Entdeckungen machen, wie oben bereits angesprochen.

Ebenfalls bereits durchaus in den unteren Klassenstufen der Sekundarstufe 1 einsetzbar sind die Wurzelziehtäfelchen bzw. allgemein das Verfahren zum Wurzelziehen, nachdem die Quadratzahlen und die Quadratwurzel als Umkehrung besprochen wurden (vgl. z. B. Sächsische Lehrpläne, Mittelschule und Gymnasium Mathematik, S. 8).

Die Schülerinnen und Schüler lernen die Quadratzahlen und ihre entsprechenden Quadratwurzeln bis 20 oder 25 kennen, aber häufig kommt im Unterricht die Frage auf, wie es sich mit größeren Zahlen verhält? Kann die Wurzel auch aus größeren Zahlen gezogen werden und vor allem wie mache ich das? Der Verweis auf den Taschenrechner als ein ständiger Begleiter der Schülerinnen und Schüler kommt dabei schnell. Im Kontext des Organum mathematicum entsteht aber – insbesondere, wenn man sich bereits mit den Napierstäbchen aus dem 1. Fach beschäftigt hat – ebenso schnell die Frage, wie das früher denn gemacht wurde, als es noch keinen Taschenrechner gab.

Ein Studium der Originalquellen scheint hier zum einen aufgrund der Sprachbarrieren, zum anderen aber auch aufgrund der Komplexität des Themas nahezu ausgeschlossen. Als eine besonders motivierende und zielführende Variante hat sich die Idee erwiesen, die Schülerinnen und Schüler in einen fiktiven Monolog des Erzherzogs Karl Joseph eintauchen zu lassen, in dem er noch einmal die Worte seines Lehrers Gottfried Aloys Kinner Revue passieren lässt und versucht den Wurzelziehalgorithmus zunächst erst einmal ohne Hilfsmittel durchzuführen. Anhand des Quellenmaterials aus Schotts Werk „organum mathematicum“ wurde ein Monolog entwickelt (vgl. Abb. 6), der die Schülerinnen und Schüler schrittweise anhand eines Beispiels mit dem Algorithmus vertraut macht. Die kleinen Leerstellen sollen zur kognitiven Aktivierung der Lernenden beitragen, indem sie sich intensiv mit dem Vorgehen beschäftigen.

Um eine Identifizierung der Lernenden mit dem Erzherzog zu ermöglichen, wurde darauf geachtet, dass sich bei der Übersetzung und der Konzeption des Monologs möglichst nah an die Originalquelle gehalten wurde.

Das Lösen weiterer Beispiele ist für eine vollständige Durchdringung des Algorithmus unbedingt erforderlich. Die Auseinandersetzung erfolgt hier auf einer rein phänomenologischen Ebene. Die Abstraktionsleistung, die erbracht werden muss, ist die Verallgemeinerung des Exempels auf einen allgemeinen Algorithmus, was dem ein oder anderen Lernenden schwerfiel.

Dennoch haben sich die Schülerinnen und Schüler mit viel Enthusiasmus und Engagement auf diese Aufgabe im Mathematikunterricht eingelassen und ganz nebenbei auch das Kopfrechnen mittrainiert. Mit großem Interesse kamen auch Fragen, wozu ein Erzherzog so etwas brauchte? Auch hier liefert die Quelle, nicht so sehr der mathematische Schrein selbst, sondern vielmehr das gleichnamige Werk die passende Antwort. Es werden verschiedene Beispiele angeführt, die relevant für die Zukunft des Erzherzogs sind, z. B. bei Fragen zur Heeresaufstellung (vgl. Schott, 1668, S. 142 ff.).

Da es sich bei dem Monolog ebenso wie bei Kircher und Schott vorrangig um ein rezeptartiges Abhandeln eines Algorithmus handelt und die Schülerinnen und Schüler, insbesondere in den jüngeren Jahrgangsstufen Schwierigkeiten hatten, dies auch nur in Ansätzen mathematisch zu durchdringen, wurde bereits in (Richter & Schöneburg, 2011, S. 131) ein fiktiver Dialog zwischen Athanasius Kircher und dem Erzherzog entwickelt (vgl. Abb. 7), der bereits einen ersten Einblick in die Mathematik vermittelt. Bewusst wurde hier, obgleich es nicht den historischen Tatsachen entspricht, die Person Kirchers gewählt, um dessen Person noch stärker in das Blickfeld der Lernenden zu rücken. Der Dialog mit seinen Leerstellen fordert dazu auf, sich noch intensiver in die Thematik hineinzudenken. Es hat sich als hilfreich erwiesen, diesen Dialog in Partnerarbeit bearbeiten zu lassen, um sich gegenseitig auszutauschen und Verständnisschwierigkeiten zu klären.

Einen ebenso hohen Motivationsfaktor haben Monolog und Dialog in den Klassenstufen 8 und 9 erzielt. Hier bietet sich eine Auseinandersetzung mit dem Thema nach der Behandlung der binomischen Formeln oder im Rahmen der Beschäftigung mit Wurzeln und Potenzen an. Eine Vertiefung der Thematik ist beispielsweise durch den Vergleich mit dem Heron-Verfahren in Klassenstufe 9 denkbar.

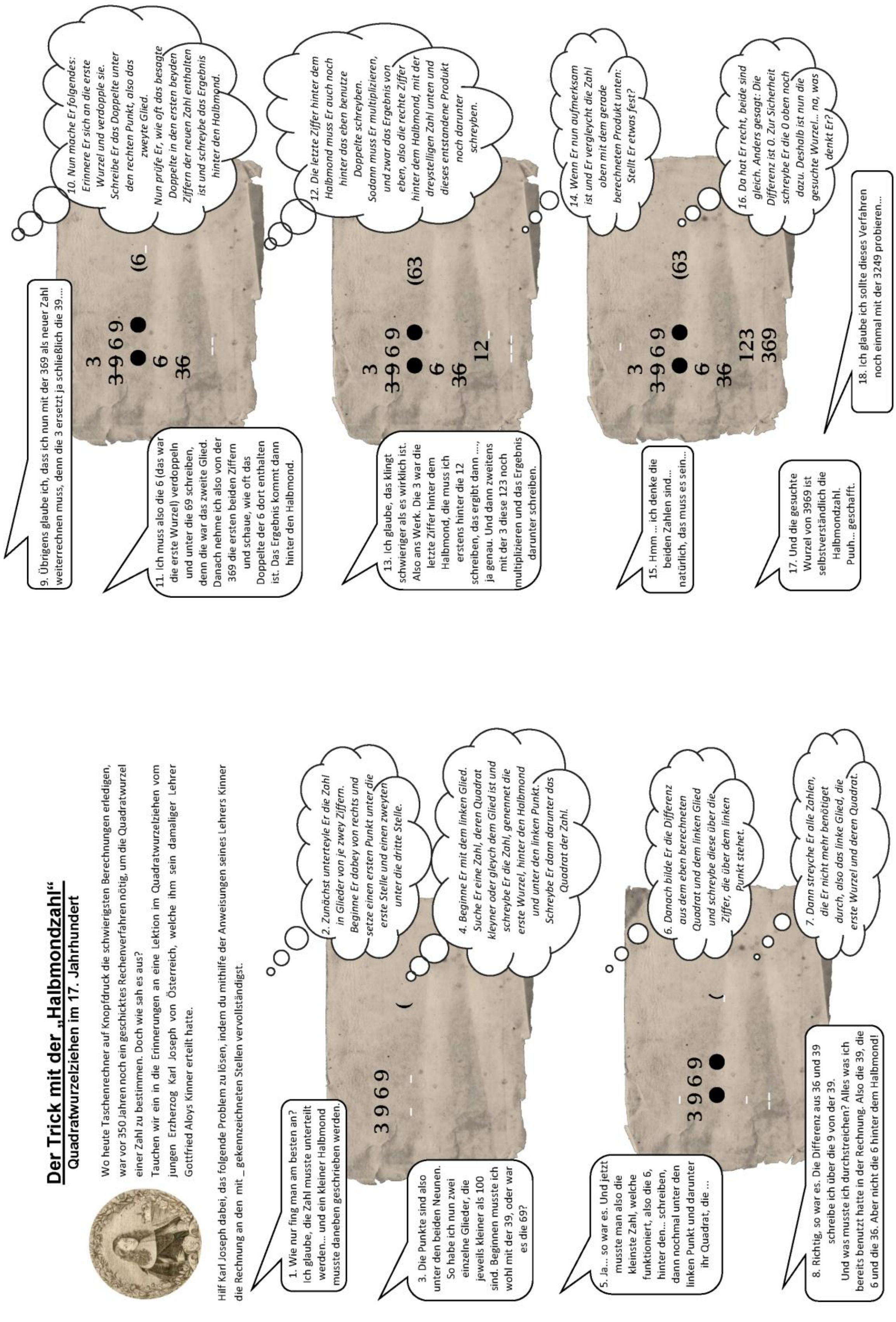


Abb. 6: Arbeitsblatt zu einem fiktiven Monolog des Erzherzogs Karl Joseph zum Training des Wurzelziehalgorithmus.

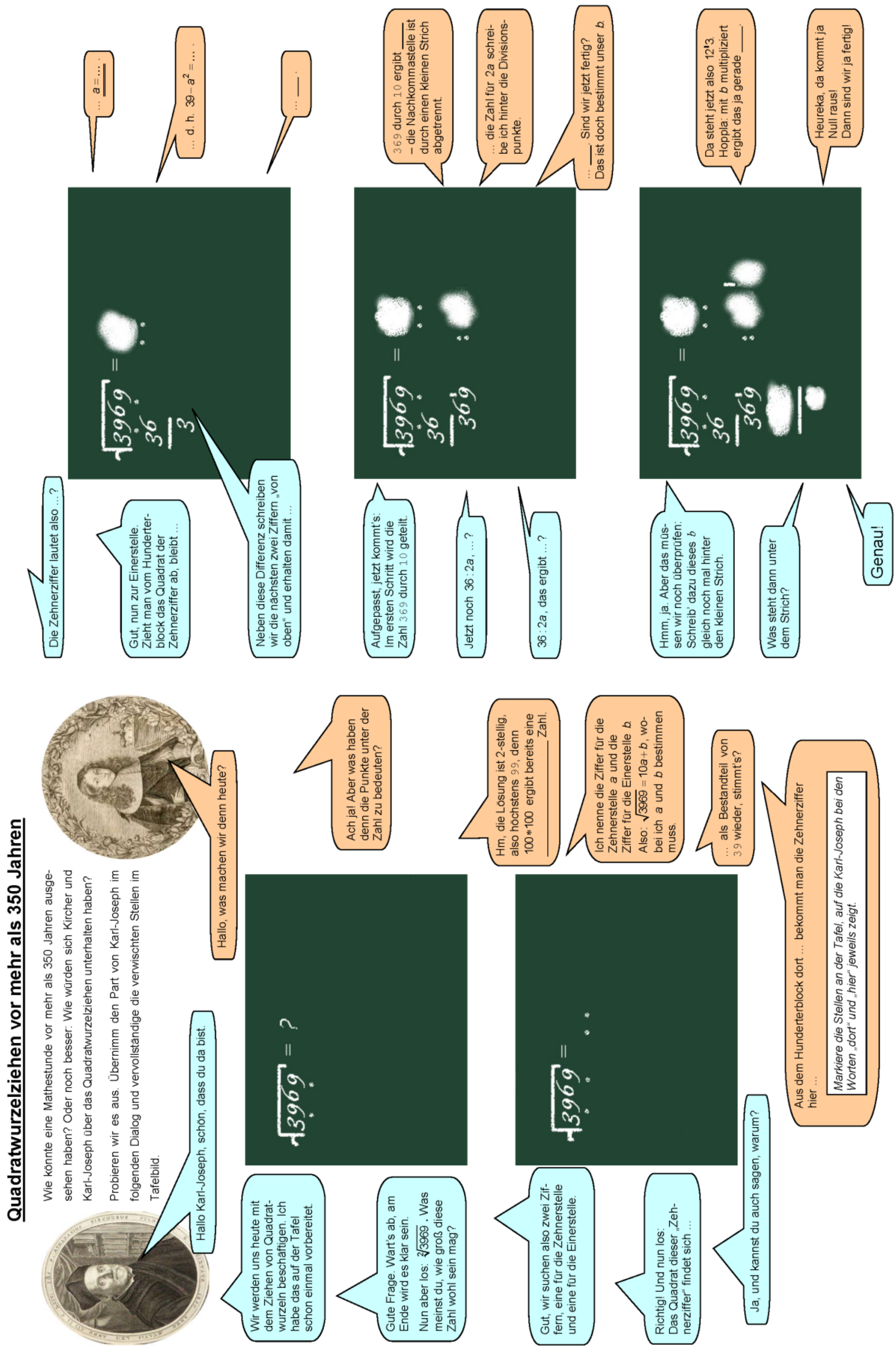


Abb. 7: Arbeitsblatt zu einem fiktiven Dialog zwischen Erzherzog Karl Joseph und Kircher (Richter & Schöneburg, 2011, S. 131).

Für eine erste Berührung mit dem Thema ist eine ähnliche Herangehensweise wie in den niedrigeren Klassenstufen ohne weiteres möglich.

Das Wurzelziehen per Hand erweist sich aber insbesondere bei größeren Zahlen als sehr rechenaufwendig und stellt die Angemessenheit dieses Vorgehens in Frage. Die Nutzung entsprechender Hilfsmittel rückt in den Blick der Lernenden, in diesem Fall die Napierstäbchen und das Quadartwurzeltäfelchen.

Entsprechend dem Alter der Lernenden ist jetzt ein stärkeres Einbeziehen der konkreten Quelle denkbar. Je nach vorhandenen lateinischen Sprachkenntnissen kann die Erläuterung zum Quadratwurzelziehen mit Hilfe der Täfelchen aus dem Anleitungsbüchlein von Kircher und / oder ein Exempel aus Schotts „organum mathematicum“, wie in Abb. 4 bzw. Abb. 5 in deutscher oder lateinischer Sprache die Grundlage für eine tiefgründigere Auseinandersetzung mit dem Thema bieten. Die in diesen Abbildungen angegebenen Übersetzungen sind sehr nah am lateinischen Original gehalten, um die lateinsprachigen Gedankengänge von Kircher und Schott möglichst gut erkennen zu können. Die Auseinandersetzung mit den lateinischen Texten ist aufgrund der beigefügten Beispiele und insbesondere der umfassenden schematischen Darstellungen bei Schott für Schülerinnen und Schülern nach zwei Jahren Lateinunterricht durchaus zu bewältigen und schafft aufgrund der für den Lateinunterricht nicht typischen Inhalte bei einigen Schülerinnen und Schülern eine zusätzliche Motivation, sich mit der lateinischen Sprache auseinanderzusetzen, um das algorithmische Vorgehen beim Quadratwurzelziehen zu entschlüsseln.

Die Lernenden erhalten durch die Arbeit mit der Originalquelle einen Einblick in die mathematische Sprache und Notation jener Zeit. Durch das Lösen und Präsentieren weiterer Beispiele werden sie zum Übertragen in eine korrekte, der heutigen Zeit angemessene mathematische Fachsprache angehalten und können so das Potenzial der heute verwendeten mathematischen Symbolsprache erkennen.

Neben dem Lösen weiterer Beispiele kann die Kreativität der Schülerinnen und Schüler durch die Konzeption eines eigenen Dialogs anregt werden. Dies kann sowohl in lateinischer als auch in deutscher Sprache geschehen. Alle Schülerinnen und Schüler der 8. Klasse haben sich dabei für einen lateinsprachigen Dialog entschieden mit der Begründung, dass dies doch die damalige Unterrichtssprache gewesen sei und sie die Unterweisung in diesen Kontext einbetten wollen.

Das in Abb. 8 dargebotene Exempel eines solchen Schülerprodukts zeigt, dass der Algorithmus durchdrungen wurde und die Schülerin/der Schüler in der Lage ist, diesen auch anderen zu erklären. Die verwendeten Vokabeln lehnen sich der Sprache Kirchers bzw. Schotts an, sind aber dem lateinischsprachigen Niveau der Lernenden angepasst. Entsprechend der Größe der Zahlen wurde hier von einer unterstützenden Verwendung der Täfelchen abgesehen.

BONI AMICI SE ADIUVANT

Quaesita radix quadrata ex 2116

Post horam mathematicam Carlus cucurrit ad amicum Josephum, quod operationem non intellexerat.

***Carlus*:** „Potesne operationem explicare?“
***Josephus*:** „Possum dividere numerum in membrum et ponis punctum sub primam figuram.“
***Carlus*:** „Bene! Feci! Et nunc?“

Marianna advenit et dixit….

```
 5
2116
 • •
 ~~4~~          (46
~~16~~86
 516
```

Marianna: „Et alium punctum infra figuram tertiam, incipe sed a dextra.“
Josephus: „Radix invenienda debet habere tot figuras, quot membra notavisti.“
Marianna: „Continua ab ultimo ad sinistram membro. Quaere quadratum proxime minorem numero dato, qui est 16. Eiusque radicem 4 est.“
***Josephus*:** „Scribe 4 post lunulam et infra 21.“
***Carlus*:** „Bene! Ego intellexi!“
***Marianna*:** „Multiplica 4 per 4 et scribe productum 16 infra 4 et subtrahe 16 ab 21. Residuum 5 scribe supra 21 et dele 4 et 16.“
***Carlus* :** „Hic stultum est…“
***Josephus* :** „Non, magnificum est. Nunc duplica radicem 4 inventam et duplum, quod est 8, pone infra 1.“
***Marianna*:** „Vide, quoties 8 contineatur in 51, sexies. Pone 6 post lunulam et post 8 infra 6. Nunc multiplica 6 per 86, productum 516 scribe infra. Idem subtrahe a 516, residuum 0. Itaque radix quadrata ex numero 2116 est 46.“
***Carlus*:** „Quale miraculum est…“

Abb 8: Von Schülerinnen erstellter Dialog zur Anwendung des Wurzelziehalgorithmus

Die einzelnen Schritte des Algorithmus können von allen Schülerinnen und Schülern nach der Auseinandersetzung mit den Materialien durchgeführt werden, die Frage nach dem „Warum funktioniert das so?“ bleibt bis dahin unbeleuchtet. Eine Durchdringung des mathematischen Hintergrundes ist mit Hinblick auf „das Verständnis der eigentlichen Mathematik“ unerlässlich und für Schülerinnen und Schüler der 8./9. Klasse durchaus leistbar.

Voraussetzungen dafür sind die Einsicht in das dekadische Positionssystem und die Kenntnis der binomischen Formeln. Ausgehend von dem in Abb. 8 verwendeten Beispiel und der Notation im Dialog zwischen Kircher und Karl Joseph (Abb. 7) stellt sich der mathematische Hintergrund folgendermaßen dar:

Mathematischer Hintergrund:

Warum funktioniert der Wurzelziehalgorithmus? Gesucht ist die Wurzel von 2116.

Die gesuchte Quadratwurzel muss zweistellig sein, wie sich mit Hilfe einer Doppelungleichung zeigen lässt:

$$10^2 = 100 \leq 2116 \leq 10000 = 100^2$$

Mit analogen Abschätzungen begründet sich auch im allgemeinen Fall, dass die Anzahl der Stellen der Quadratwurzel mit der Anzahl der gesetzten Punkte unter den Ziffern übereinstimmt. Der Übersichtlichkeit wegen verzichten wir im Folgenden darauf, die offensichtlichen Anpassungen für Zahlen mit einer höheren Stellenzahl zu erwähnen Jede zweistellige Zahl lässt sich allgemein mit $10a + b$ darstellen, wobei a die Ziffer für die Zehnerstelle angibt und b die für die Einerstelle.
Es ergibt sich also:

$$2116 = (10a + b)^2 = 100a^2 + 2 \cdot 10ab + b^2$$

Division durch 100 ergibt:

$$21{,}16 = a^2 + \frac{2}{10}\, ab + \frac{1}{100} b^2$$

Hier lässt sich der nächste Bezug zum Wurzelziehalgorithmus herstellen. Es ist zu erkennen, warum zunächst die ersten beiden Ziffern in den Blick genommen werden. a^2 kann nun nach oben abgeschätzt werden:

$$a^2 \leq 21{,}16; \qquad a \in \{0, 1{,}2, \ldots 9\}$$

$$a = 4$$

Einsetzen von a und Umformen der Gleichung ergibt:

$$21{,}16 = 16 + \frac{2 \cdot 4}{10}\, b + b^2 \qquad | -16$$

$$5{,}16 = \frac{8}{10} b + \frac{1}{100} b^2$$

Hier findet sich die ermittelte Differenz wieder.

$$516 = 20 \cdot 4\, b + b^2 \quad | \,:10$$

$$51{,}6 = 2 \cdot 4\, b + \frac{1}{10}\, b^2 \quad | \,:8$$

$$\frac{51{,}6}{2 \cdot 4} = b + \frac{1}{80} b^2$$

Hier wird offensichtlich, warum geprüft wird, wie oft das Doppelte der gefundenen Zehnerziffer in die 51 passt. Die Einerziffer b kann nun abgeschätzt werden:

$$b \leq \frac{51{,}6}{8}\,; b \ \in \{0{,}1{,}2, \ldots, 9\}$$

$$b = 6$$

Durch Einsetzen wird geprüft, dass gilt:

$$516 = 20 \cdot 4 \ \cdot 6 + 6^2$$

Somit ist die Wurzel mit 46 korrekt berechnet.

Für eine Darstellung dieses mathematischen Hintergrundes im Unterricht hat sich die Stellenwerttafel als hilfreich erwiesen (vgl. Malitte et al., 2011, S. 249 f.), die den Lernenden bereits seit der Grundschule als effizientes Hilfsmittel vertraut ist. Obgleich sie in den höheren Jahrgangsstufen kaum noch Anwendung findet, empfiehlt sie sich dennoch als geeignetes Darstellungsmittel aufgrund ihrer Übersichtlichkeit und Leistungsfähigkeit.

Das Arithmetikfach bietet also verschiedene Möglichkeiten, Mathematikgeschichte in den Mathematikunterricht einzubringen. Je nach Altersstufe der Schülerinnen und Schüler lassen sich algorithmische Herangehensweisen an die Grundrechenarten und insbesondere an das Quadratwurzelziehen thematisieren. Zusätzlich bietet sich gegebenenfalls ein fächerübergreifender Unterricht mit einer Kombination aus Latein und Mathematik an. Aber auch ohne die Verknüpfung mit Latein bietet das Organum mathematicum Potential, mathematische und mathematikgeschichtliche Aspekte zum Nutzen für die Schülerinnen und Schüler zu verbinden.

Während die Schülerinnen und Schüler im Arithmetikfach mit der Funktion der Hilfstäfelchen als Rechenhilfen in Berührung gekommen sind, wird durch die Auseinandersetzung mit dem nächsten Fach, dem zum Festungsbau, die Funktion der Täfelchen als Konstruktionshilfen in den Blick genommen.

3.3 Das Fach zum Festungsbau im Mathematikunterricht

3.3.1 Grundlagen aus dem Organum mathematicum

Das dritte Fach des Organum mathematicum enthält zwei Arten von je sieben Täfelchen zur Konstruktion von Festungen (Abb. 9). Die Täfelchen erster Art weisen eine Rotfärbung auf, die der zweiten Art sind in Weiß gehalten. Auch hier nutzt Kircher wieder die farbliche Gestaltung, um die beiden unterschiedlichen Verwendungszwecke und die Zugehörigkeit der einzelnen Täfelchen zu verdeutlichen.

Die rot gefärbten Täfelchen (Abb. 9 links und mittig) sind auf der Vorder- und Rückseite beschrieben und mit Angaben versehen, die zur Konstruktion des Festungsgrundrisses erforderlich sind. Auf der Vorderseite befinden sich die wichtigsten Winkelgrößen von sieben verschiedenen Festungsvielecken, die sich im Grundvieleck vom Quadrat bis zum regelmäßigen Zehneck erstrecken. Die Rückseite umfasst die Angabe der Längen der wichtigsten Seiten und Linien in eben diesen Polygonen. Den sieben Täfelchen ist ein Anlegetäfelchen in schwarzer Farbe beigefügt, das die Namen der betreffenden Winkel und Seiten bzw. Linien enthält.

Die weiß gefärbten Täfelchen (Abb. 9 rechts) sind dagegen nur auf einer Seite beschrieben und umfassen Größen und Verhältniszahlen der räumlichen Teile eben dieser sieben Festungsanlagen, wie z. B. des Grabens, der Brustwehr, des Walls etc., deren Namen ebenfalls auf einem weiteren Anlegetäfelchen zu finden sind.

Zu weiteren Ordnung und Systematisierung haben die Täfelchen – wie auch die Napierstäbchen im Arithmetikfach – am oberen Ende „Zähne“. Anhand der Zähne ist neben den Farben zu erkennen, welche Täfelchen zusammengehören. Stimmen die Spitzen der Zähne nicht überein, d. h. die eine zeigt nach rechts, die andere nach links, dann ist sofort ersichtlich, dass die Täfelchen nicht ordnungsgemäß kombiniert wurden, was nicht zuletzt auch die Handhabung für den Lernenden erleichtert.

Bei den auf den Täfelchen befindlichen Zahlen handelt es sich um Angaben, die Kircher aus dem 2. Teil der Schrift „Geometria practica“ (1625) des niederländischen Mathematikers, Landvermessers und Astronomen Adriaan Metius (1571–1635) bezogen hat. Da diese bereits überholt waren, als Schott sein Buch schrieb, nimmt Schott eine Anpassung dieser vor und verweist auf eine ausführlichere diesbezügliche Behandlung im 22. Buch seines „Cursus mathematicus“ (vgl. Schott, 1668, S. 239 f.).

Die recht einfache Handhabung der Täfelchen wird von Kircher entsprechend seinem Stil exemplarisch anhand der Konstruktion einer fünfeckigen Festung erklärt. Dabei liegt das Augenmerk auf der Verwendung der Täfelchen erster Art. Aus diesen wird das entsprechend zu konstruierende Polygon sowie das Anlegetäfelchen mit den Bezeichnungen ausgewählt.

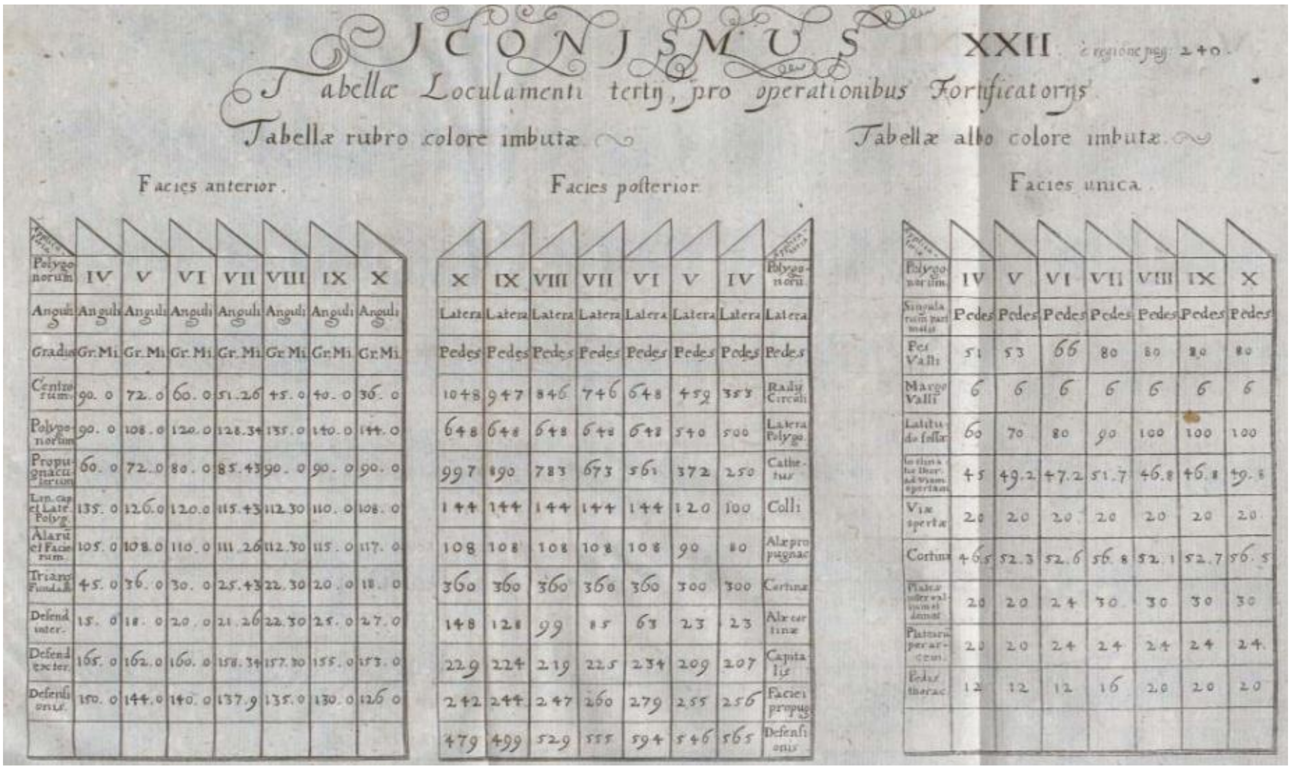
Für die Anfertigung der Konstruktion bedarf es einer Maßstabsskala, aus der die Zahlen der wichtigsten Seiten und Linien des Fünfecks oder jedes beliebig anderen Polygons übertragen werden. Hier zeigt sich einmal mehr die Bedeutung der Täfelchen im Organum mathematicum als „Datenträger“, nehmen sie doch dem Lernenden die Arbeit ab, die einzelnen für die Konstruktion des Festungsgrundrisses benötigten Größen zu berechnen.

Das Augenmerk wird demnach von Kircher auf die Fähigkeit des Konstruierens gelegt. Auch die zweite Art der Täfelchen, mit der man den Aufriss bzw. das Profil einer Festung erstellen kann, erleichtert die Arbeit immens.

> Sed uti res nullam difficultatem habet, ita quoque ulteriore expositione non indiget. – Aber da die Sache keine Schwierigkeit bereitet, bedarf sie auch keiner umfangreicheren Erklärung. (Schott, 1668, S. 243, Übersetzung der Autoren)

Das Fach ist insbesondere unter geometrischem und anwendungsorientiertem Blickwinkel für den Mathematikunterricht interessant. Für die Konstruktion benötigte Kenntnisse lassen sich vorrangig mit dem bis Klassenstufe 7 erworbenen Wissen bewältigen.

Die recht einfache Handhabung der Täfelchen ermöglicht für Schülerinnen und Schüler unterschiedlicher Altersklassen einen guten Zugang und bietet eine Vielzahl von Möglichkeiten für eine handlungsaktivierende Auseinandersetzung, die im Folgenden teilweise detailliert, teilweise konzeptionell beschrieben werden sollen.



ICONISMUS XXII è regione pag. 240.

Tabellæ Loculamenti tertij, pro operationibus Fortificatorijs

Tabellæ rubro colore imbutæ

Facies anterior.

Polygonorum	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
Anguli	Anguli	Anguli	Anguli	Anguli	Anguli	Anguli	Anguli
Gradus	Gr. Mi	Gr. Mi	Gr. Mi	Gr. Mi	Gr. Mi	Gr. Mi	Gr. Mi
Centrorum	90. 0	72. 0	60. 0	51. 26	45. 0	40. 0	36. 0
Polygonorum	90. 0	108. 0	120. 0	128. 34	135. 0	140. 0	144. 0
Propugnaculorum	60. 0	72. 0	80. 0	85. 43	90. 0	90. 0	90. 0
Lin. cap. et Late. Polyg.	135. 0	126. 0	120. 0	115. 43	112. 30	110. 0	108. 0
Alarum et Facierum	105. 0	108. 0	110. 0	111. 26	112. 30	115. 0	117. 0
Triang. Fundam.	45. 0	36. 0	30. 0	25. 43	22. 30	20. 0	18. 0
Defend. inter.	15. 0	18. 0	20. 0	21. 26	22. 30	25. 0	27. 0
Defend. exter.	165. 0	162. 0	160. 0	158. 34	157. 30	155. 0	153. 0
Defensionis	150. 0	144. 0	140. 0	137. 9	135. 0	130. 0	126. 0

Facies posterior.

X	IX	VIII	VII	VI	V	IV	Polygonorum
Latera	Latera	Latera	Latera	Latera	Latera	Latera	Latera
Pedes	Pedes	Pedes	Pedes	Pedes	Pedes	Pedes	Pedes
1048	947	846	746	648	459	353	Radij Circuli
648	648	648	648	648	540	500	Latera Polygo.
997	890	783	673	561	372	250	Cathetus
144	144	144	144	144	120	100	Colli
108	108	108	108	108	90	80	Alæ propugnac.
360	360	360	360	360	300	300	Cortinæ
148	128	99	85	63	23	23	Alæ cortinæ
229	224	219	225	234	209	207	Capitalis
242	244	247	260	279	255	256	Faciei propug.
479	499	529	555	594	546	565	Defensionis

Tabellæ albo colore imbutæ

Facies unica.

Polygonorum	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
Singularum partium	Pedes	Pedes	Pedes	Pedes	Pedes	Pedes	Pedes
Pes Valli	51	53	66	80	80	80	80
Margo Valli	6	6	6	6	6	6	6
Latitudo fossæ	60	70	80	90	100	100	100
[illegible] ad Viam apertam	45	49.2	47.2	51.7	46.8	46.8	49.8
Viæ apertæ	20	20	20	20	20	20	20
Cortina	46.5	52.3	52.6	56.8	52.1	52.7	56.5
Plateæ inter vallum et domos	20	20	24	30	30	30	30
Platearum per arcem	20	20	24	24	24	24	24
Pedes thorac.	12	12	12	16	20	20	20

Abb. 9: Die Täfelchen aus dem Fach Fortifikation (Schott, 1668, S. vor 241)

3.3.2 Anregungen für und Erfahrungen aus dem Mathematikunterricht

Obgleich die Daten der Täfelchen leicht zu erfassen sind, bereiten insbesondere die Begrifflichkeiten einer frühneuzeitlichen Festung den Schülerinnen und Schülern gewisse Schwierigkeiten. Die erste Schwierigkeit stellt die verwendete lateinische Sprache für die Begriffe dar, die entsprechend der Vorkenntnisse der Lernenden gemeinsam übersetzt werden können oder in der Übersetzung vorgegeben werden müssen.

Problematischer ist jedoch das Erfassen der Bedeutung der einzelnen Seiten- und Winkelbegriffe aus der Festungsarchitektur, deren Kenntnis für die Konstruktion unerlässlich ist. Hier bietet sich eine exemplarische schematische Darstellung eines Festungsgrundrisses an (vgl. Abb. 10), anhand derer die Begriffe gemeinsam im Unterricht erläutert und in einer Übersicht, die stets zur Verfügung steht, festgehalten werden kann (vgl. Abb. 11).

Auch die in Fuß angegebenen Längen auf den Täfelchen stellen eine Verständnishürde dar. Hier ist zwingend ein Exkurs bzw. ein Verweis auf diese alten Längenmaße, die möglicherweise bereits im Mathematikunterricht der Klassenstufe 4 oder 5 thematisiert wurden, und deren Umrechnung in das heutige Metermaß erforderlich, damit die Schülerinnen und Schüler die Angaben richtig deuten können. So bietet sich die Gelegenheit, den Lernenden die Notwendigkeit der Kenntnis historischer Längeneinheiten und ihrer Umrechnung in das metrische Maßsystem bewusst zu machen. Auch die Problematik eines geeigneten Maßstabs für die Konstruktion sollte in diesem Kontext besprochen werden.

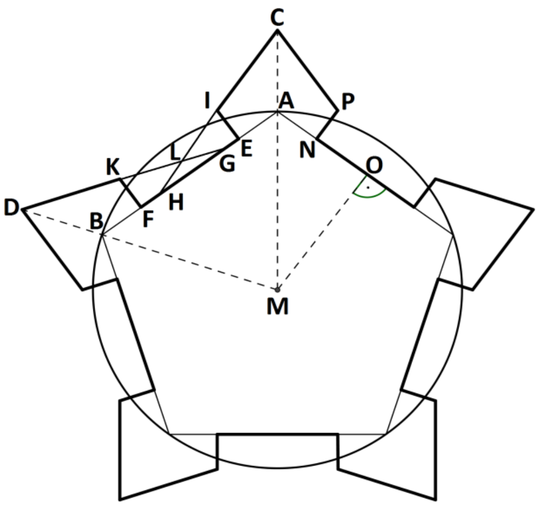


Abb. 10: Schematische Darstellung eines Festungsgrundrisses mit fünf Bastionen (Krohn & Schöneburg, 2017, S. 86)

Geraden- und Seitenbezeichungen

MA	Radius des Kreises	Radius circuli
AB	Seitenlänge des Grundpolygons	Latus polygoni
MO	Kathete	Cathetus
EA	Kehllinie	Linea colli
EI	Streich	Ala propugnaculi
EF	Kortina	Cortina
EG	Streichplatz	Ala cortinae
CA	Hauptlinie	Linea capitalis
CI	Gesichtslinie	Facies propugnaculi
CH	Bewegliche Streichlinie	Linea defensionis

Winkelbezeichnungen

∡CMD	Mittelpunktswinkel	Angulus centri
∡EAN	Polygonwinkel	Angulus polygoni
∡ICP	Bollwerkswinkel	Angulus propugnaculi
∡CAB	Winkel zw. Hauptlinie und Seitenlänge des Polygons	Angulus linea capitalis et lateris polygoni
∡CIE	Gesichtswinkel	Angulus alarum et facierum
∡AMO	Winkel zw. Radius & Kathete	Angulus trianguli fundamentali
∡CHA	Kleiner Streichwinkel	Angulus defendens interior
∡CHB	Großer Streichwinkel	Angulus defendens exterior
∡CLD	Schützwinkel	Angulus defensionis

Abb. 11: Übersicht über wichtige Begriffe im Festungsbau (Krohn & Schöneburg, 2017, S. 86)

Für die konkrete unterrichtliche Umsetzung gibt es nunmehr verschiedene Möglichkeiten. Bereits gegen Ende der Primarstufe und zu Beginn der Sekundarstufe I ist eine Auseinandersetzung mit dem dritten Fach des Organum mathematicum möglich. Der Schwerpunkt ist hierbei altersgerecht auf eine enaktive Feldkonstruktion ausgerichtet, worauf im Folgenden noch genauer eingegangen werden soll:

Statt mit Zirkel und Lineal ausgestattet, bekommen die Lernenden die Gelegenheit, mit einfachsten Hilfsmitteln einen Festungsgrundriss im freien Feld statt in der Schule auf einem Blatt Papier zu konstruieren. Da dabei trotz vereinfachter Konstruktionsprinzipien eine angemessene Exaktheit erreicht wird, steht einer solchen Umsetzung nichts im Wege.

Die dafür benötigten Kenntnisse beschränken sich auf elementare Grund- und Standardkonstruktionen (vgl. hierzu Weigand et al., 2013, S. 62 ff.; Helmerich & Lengnink, 2016, S. 83 ff.), wie etwa:

- das Abtragen von Streckenlängen
- das Verbinden von Punkten
- das Errichten einer Senkrechten durch einen Punkt
- das Zeichnen von Kreisen und regelmäßigen n-Ecken nach vorgegebenen Maßen,

welche bereits mit Kenntnissen aus dem Primarschulbereich zu bewältigen sind (vgl. Franke & Reinhold, 2016, S. 350–362).

Für die konkrete Einbindung in den Unterricht stellt sich die Frage nach der Wahl des dem Festungsgrundriss zugrundeliegenden n-Ecks. Für die Umsetzung im Mathematikunterricht einer 5. Klasse wurde sich dabei bewusst für das Fünfeck entschieden, da die Konstruktionsschritte und die für eine Feldkonstruktion benötigten Materialien überschaubar sind.

Folgende Materialien sollten zur Verfügung gestellt werden:

- ein langes Maßband
- 40 Zeltheringe
- wasserlösliche Markierungsfarbe
- ein mindestens 5 m langes Seil
- ein rechtwinkliges Tafelgeodreieck
- und die Täfelchen mit den Längenangaben.

Bevor es an die praktische Umsetzung geht, ist es sinnvoll zunächst die Konstruktion zu planen. Dies kann in Gruppen geschehen oder auch im Plenum. Um möglichst viele Schülerinnen und Schüler in die aktive Umsetzung einzubeziehen, empfiehlt sich eine Gruppengröße von max. 10 Personen.

Abb. 10, die Übersicht über die wichtigsten Begriffe und das Täfelchen zur Konstruktion einer Festung auf der Grundlage eines Fünfecks sowie das entsprechende Anlegetäfelchen unterstützen den Planungsprozess. Als Maßstab für die praktische Umsetzung empfiehlt es sich 1 Fuß als 1 cm anzunehmen, da so aufgrund der Ausdehnung eine vernünftige Konstruktion am Boden gewährleistet werden kann. Die Planung, der Umgang mit den Materialien, ist das Entscheidende, die Umsetzung macht dann „nur“ Freude.

Als eine tragfähige Planung haben sich folgende 5 Schritte erwiesen (vgl. Krohn & Schöneburg, 2017, S. 89):

1) Grundkreis: Mittels Maßband und Seil Konstruktion eines Kreises mit r = 4,59 m um einen Mittelpunkt (1 Zelthering), und Zeichnen des Kreises mit Markierungsfarbe.
2) Fünfeck: Konstruktion der Seiten des regelmäßigen Fünfecks mit der Länge 5,40 m mit Hilfe von Maßband (und Strick) und Markieren der Eckpunkte mit 5 × 1 Zeltheringen. (Zur besseren Orientierung kann das Fünfeck mit Farbe nachgezeichnet werden.)
3) Kehllinien und Streiche: Abtragen der Längen für die Kehllinien mit 1,20 m und Streiche mit 0,9 m mithilfe des rechten Winkels und des Maßbandes. Markieren der entstandenen Punkte mit 5 × 4 Heringen.
4) Hauptlinien: Verlängern der Geraden (Radien) vom Mittelpunkt zu den Fünfeckpunkten mit Hilfe des Seils nach außen um 2,09 m und Markieren der Endpunkte mit 5 × 1 Zeltheringen.
5) Entfernen der Fünfeckheringe und des Mittelpunktherings und Verbinden aller 30 „Festungsheringe“ mit einem langen Seil oder Nachzeichnen der Festung entlang den Zeltheringen mit Farbe.

Abb. 12: Festungsgrundriss auf der Grundlage eines Fünfeckes im Freien (Quelle: Autoren)

Das vor Augen stehende aktive Tun hat einen enormen Motivationsschub und Tatendrang der Lernenden zur Folge und das Resultat ist trotz der einfachen Hilfsmittel sehr gelungen (Abb. 12).

Die Bedeutung des Planungsprozesses bei der Auseinandersetzung mit dem 3. Fach des Organum mathematicum ist enorm. Denn hier setzen sich die Schülerinnen und Schüler intensiv mit den Materialien auseinander, durchdenken sie und planen detailliert, wie vielleicht auch Karl Joseph, die Lösung des Problems einen Festungsgrundriss mit fünf Bastionen zu konstruieren. Rückblickend bietet das Resultat eine gute Grundlage, die einzelnen Schritte kritisch zu bewerten und Verbesserungsvorschläge für eine erneute Durchführung, z. B. auf Grundlage eines anderen n-Ecks zu unterbreiten.

Aber auch in höheren Klassenstufen lässt sich das dritte Fach des Organum mathematicum sinnvoll in das Curriculum einbinden. So kann beispielsweise sobald die Lehrplaninhalte zu Kreisen und Vielecken behandelt wurden, die Feldkonstruktion des Festungsbaus ohne die vereinfachten Konstruktionen mit Maßband durchgeführt werden, wobei dann der klassische Konstruktionsanteil naturgemäß höher ausfällt.

Interessant ist hier noch die Verknüpfung mit dem Einsatz von Dynamischer Geometriesoftware (DGS), der gegenüber den händischen Papierkonstruktionen durch eine größere Vielseitigkeit zu überzeugen weiß. Dabei ist es durch den Einsatz gezielt vorgefertigter Module möglich, bekannte und grundlegende Konstruktionen zu vereinfachen, um mehr Zeit und Energie für die Entdeckung von Konstruktionen verschiedener besonderer Punkte, Geraden und Figuren innerhalb der entstehenden Festung zur Verfügung zu haben. Möglich wird dies durch die umfassenden Angaben auf Kirchers Täfelchen.

Daran anschließend ist dann der Übergang zur Berechnung von Flächeninhalten im Rahmen der DGS-Behandlung des Festungsbaus naheliegend, da die Software die Bearbeitung der entsprechenden Fragen direkt nahelegt. Ebenfalls lässt sich für die Schülerinnen und Schüler direkt reflektieren, ob der Einsatz computergestützter Methoden immer schneller zur Lösung des Problems innerhalb der geforderten Genauigkeit führt, oder ob nicht vielmehr mit etwas handwerklichen Geschick mittels der Maßband-Seil-Geodreieck-Methode im Rahmen der Feldkonstruktion die entsprechenden Resultate ebenso schnell – und emotional packender – erzielt werden können.

Eine ebenso interessante Erweiterungsmöglichkeit bietet der Übergang von der zweiten in die dritte Dimension, bei dem sich sogar gegebenenfalls die bisher nicht verwendeten weißen Täfelchen aus dem Schrein verwenden lassen. Der Einsatz entsprechender 3-dimensionaler DGS ermöglicht auch die Behandlung dieses Problem, wenngleich auch die Konstruktion deutlich anspruchsvoller ist (vgl. Abb. 13).

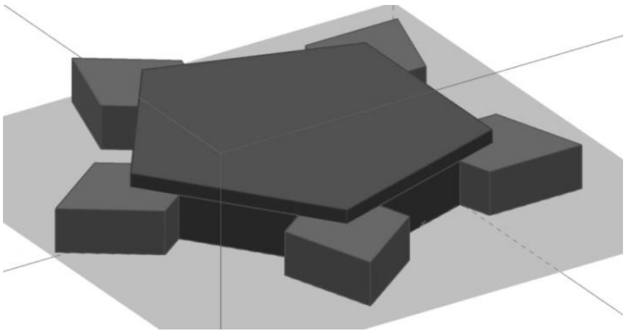


Abb. 13: Konstruktion einer dreidimensionalen Festungsanlage mit GeoGebra 3D (Krohn & Schöneburg, 2017, S. 92)

Ausgehend von der Volumenberechnung, also dem Baumaterialverbrauch einer – so natürlich wenig hilfreichen – Voll-Festungsanlage, können die Schülerinnen und Schüler mit entsprechenden von ihnen zu entwerfenden Modellierungsansätzen zur Mauerdicke und den verwendeten Steinen auch realistische Berechnungen zum Steinbedarf anstellen. So wird schließlich der Anwendungsbezug zumindest aus Sicht des vor über 300 Jahren zu unterrichtenden Erzherzogs thematisch abgeschlossen.

Abschließend lässt sich festhalten, dass die Auseinandersetzung mit dem dritten Fach des Organum mathematicum differenzierte Ansätze mit unterschiedlichen Intentionen ermöglicht.

Neben der motivierenden enaktiven Feldkonstruktion mit Seil und Maßband gegen Ende der Primarstufe oder zu Beginn der Sekundarstufe I rückt mit fortschreitendem Alter der Lernenden die Konstruktion mit Zirkel und Lineal sowie der DGS-Einsatz und das kritische Bewerten des Konstruktionsproblems und dessen Lösungsschritte stärker in den Fokus.

In den höheren Klassenstufen der Sekundarstufe I und in der Sekundarstufe II sind neben den Betrachtungen in der Ebene auch solche im Raum sowie entsprechende Modellierungen zum Materialverbrauch einer realen Festungsanlage möglich.

Von einem zunächst stärker phänomenologischen Arbeiten, das zusätzlicher Hilfestellungen von Seiten der Lehrkraft bedarf, ist mit zunehmendem Alter eine stärkere bewusste Auseinandersetzung mit dem Konstruieren und der Originalquelle, nicht nur mit dem von Kircher konzipierten Lehrmittel, sondern auch mit dem von Schott verfassten Lehrbuch, möglich (vgl. Abb. 14).

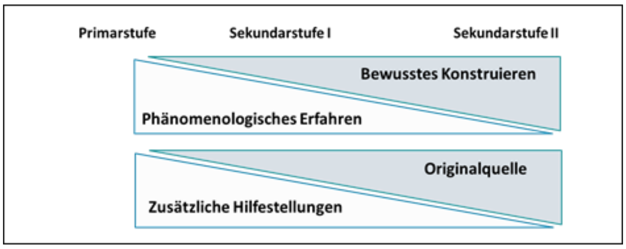


Abb. 14: Übergang vom phänomenologischen Erfahren zum bewussten Konstruieren bei gleichzeitiger Abnahme zusätzlicher Hilfen in Abhängigkeit des Alters der Schülerinnen und Schüler.

4. Fazit

Die Einbindung der mathematikhistorischen Quelle des Organum mathematicum in den Mathematikunterricht, die im vorliegenden Artikel anhand des ersten und dritten Faches des mathematischen Schreins beschrieben wurde, kann gemäß obiger Betrachtungen gleichsam als Ziel und als Werkzeug im Jankvistschen Sinne geschehen. Das Organum mathematicum lädt Schülerinnen und Schüler zu eigenen Entdeckungen ein, hilft den Mathematikunterricht aufzulockern und unterstützt dabei gleichzeitig die Ausbildung, Vertiefung wichtiger mathematischer Kompentenzen, wie etwas das Kommunizieren und Argumentieren oder auch das Problemlösen und Modellieren.

Die Einbeziehung der historischen Quelle folgte dabei dem Ziel, den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit zu geben, mathematische Inhalte auf einer weiteren Ebene zu begegnen und diese in einem vertieften Verständnisprozess zu durchdringen. Zwar ist dies beim Einsatz des Arithmetikfachs offensichtlicher, gilt aber gleichermaßen auch für die Untersuchung des Fortifikationsfachs, deren Parallelen zur und Abweichungen von der euklidischen Geometrie den Schülerinnen und Schülern sowohl Stärken als auch Grenzen der abstrakten Wissenschaft aufzeigte. Gleichsam wird so das fruchtbare Zusammenspiel historischer didaktischer Zugänge zur Mathematik, wie sie Athanasius Kircher nutzte, und moderner didaktischer Ansätze und Methoden verdeutlicht und das Potential dieser Symbiose angerissen.

Das Organum mathematicum vermittelt anhand konkreter und realer Unterrichtsmaterialien des 17. Jahrhunderts Lehrerinnen und Lehrern wie auch Schülerinnen und Schülern einen exemplarischen Einblick in die mathematische Lehre der Barockzeit und zeigt auf, dass mit Hilfe der Materialien grundlegende Problemstellungen leicht, ja fast spielerisch mit einfachen Hilfsmitteln bewältigt werden können, „ohne den Geist zu überanstrengen" (Schott, 1668, S. 58, Übersetzung der Autoren).

Danksagung

Wir danken den gutachtenden Personen für die hilfreichen und konstruktiven Anmerkungen und Kommentare.

Zusatzmaterial

Die Arbeitsblätter aus Abb. 6 und 7 stehen als Begleitmaterial (im PDF-Format) zur Verfügung.

Literatur

Arcavi, A., & Bruckheimer, M. (2000). Didactical uses of primary sources from the history of mathematics. *Themes in Education 1*(1), 55–74.

Barbin, E. (1991). The reading of original texts: How and why to introduce a historical perspective. *For the Learning of Mathematics*, *11*(2), 12–13.

Barzel, B. & Holzäpfel, L. (2010). Leitfragen zur Unterrichtsplanung. *Mathematik lehren, 158*, 4–9

Baum, M., Bellstedt M., Buck, H., Dürr, R., Freudigmann, H. & Haug, F. (2010). *Lambacher Schweizer 5. Mathematik für Gymnasien.* Sachsen. Stuttgart: Ernst Klett Verlag GmbH.

Böttner, J., Maroska, R., Olpp, A., Pongs, R., Stöckle, C., Wellstein, H. & Wontroba, H. (2008). *Schnittpunkt 5 Mathematik*. Stuttgart: Ernst Klett Verlag GmbH.

Förster; F. (2015). „Wofür braucht man das eigentlich?" – Reflexionen zum Anwenden von Mathematik. In G. Kaiser & W. Henn (Hrsg.), *Werner Blum und seine Beiträge zum Modellieren im Mathematikunterricht*. Festschrift zum 70. Geburtstag von Werner Blum (S. 135–149). Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Franke, M. & Reinhold, S. (2016). *Didaktik der Geometrie in der Grundschule*, Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Helmerich, M. & Lengnink, K. (2016). *Einführung Mathematik Primarstufe – Geometrie*. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Jahnke, H. N., Arcavi, A., Barbin, E., Bekken, O., Furinghetti, F., El Idrissi, A., Silva da Silva, C. M. & Weeks, C. (2000). The use of original sources in the mathematics classroom. In J. Fauvel & J. van Maanen (Hrsg.), *History in mathematics education: The ICMI study*, New ICMI Study Series, vol. 6 (S. 291–328). Dordrecht: Kluwer.

Jahnke, H. N., Furinghetti, F. & van Maanen, J. (Hrsg.) (2006). *Report No22/2006 on the Mini-Workshop on studying original sources in mathematics education* (S. 1285–1318). Oberwolfach: Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach.

Jahnke, H. N. & Richter, K. (2008). Geschichte der Mathematik. Vielfalt der Lebenswelten – Mut zum divergenten Denken. *Mathematik lehren, 151*, 4–7.

Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education, *Educational Studies in Mathematics*, *71*(3), 235–261.

Kliemann, S., Puscher, R., Segelken, S., Schmidt, W. & Vernay, R. (2006). *Mathe live 5, Mathematik für Sekundarstufe I*. Stuttgart, Leipzig: Ernst Klett Verlag GmbH.

Krohn, T. & Schöneburg, S. (2017) Festungsbau in der Theorie des 17. und der (Schul-) Praxis des 21. Jahrhunderts. In S. Reinhold, & K. Liebers (Hrsg.), *Mensch – Raum – Mathematik. Historische, reformpädagogische und empirische Zugänge zur Mathematik und ihrer Didaktik. Festschrift für Michael Toepell* (S. 77–93). Münster: WTM-Verlag

Maaß, K. (2007). Und man braucht sie doch! Die Nützlichkeit von Mathematik erfahrbar machen. *PM Praxis der Mathematik in der Schule, 49*(1), 1–9.

Malitte, E., Richter, K., Schöneburg, S. & Sommer, R. (2011). Auf den Spuren des Universalgelehrten ATHANASIUS KIRCHER. Gedanken zum Erkunden mathematischer Zusammenhänge im Kontext eines historischen Unterrichtsmittels. In T. Krohn, E. Malitte, G. Richter, K. Richter, S. Schöneburg & R. Sommer (Hrsg.), *Mathematik für alle. Wege zum Öffnen von Mathematik- Mathematikdidaktische Ansätze. Festschrift für Wilfried Herget* (S. 245–267). Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Müller, A. (2016). Übersetzung von Kaspar Schott, Organum mathematicum, Nürnberg 1668, online verfügbar unter http://www.history.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/organum/buch1.pdf, zuletzt abgerufen am 13.06.2018

Müller, G. N. & Wittmann, E. C. (2013). *Das Zahlenbuch 4*. Stuttgart, Leipzig: Ernst-Klett-Verlag GmbH

Pandel, H.-J. (2003). *Quelleninterpretation. Die schriftliche Quelle im Geschichtsunterricht*. Schwalbach/Ts: WochenschauVerlag.

Richter, K.; Schöneburg, S. (2008). Der Jesuitengelehrte Christoph Scheiner und sein Lehrbuch zum Zeichengerät Pantograph. In G. Biegel, K. Reich & T. Sonar (Hrsg.), *Historische Aspekte im Mathematikunterricht an Schule und Universität* (S. 137–198). Göttingen, Stuttgart Termessos.

Richter, K.; Schöneburg, S. (2011). Wurzelziehen mit einfachen Hilfsmitteln – Entdeckungen bei Athanasius Kircher und John Napier. In H. Henning, F. Freise (Hrsg.), *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht, Band 17 – Historisches für den Unterricht nutzbar gemacht* (S. 122–136). Hildesheim, Berlin: Verlag Franzbecker.

Richter, K. & Schöneburg, S. (2013). J. Napier, seine Stäbchen und die chinesische Multiplikation – eine (mathematische) Entdeckungsreise. *Raabits, 74*, Reihe 3.

Schöneburg-Lehnert, S. (2018). The Pantograph: A historical drawing device for math teaching. In K. M. Clark, T. H. Kjeldsen, S. Schorcht & C. Tzanakis (Hrsg.), *Mathematics, Education and History. Towards a Harmonious Partnership* (S. 323–340). Cham: Springer.

Schott, C. (1668). *Organum mathematicum libris IX. explicatum*. Würzburg: Endter.

Thomaidis, Y. & Tzanakis, C. (2008). Original texts in the classroom. In E. Barbin, N. Stehlíková, & C. Tzanakis (Hrsg.), *History and epistemology in mathematics education: Proceedings of the 5th European Summer University* (S. 49–61). Prague: Vydavatelskýservis, Plzeň.

van Randenborgh, C. (2015). *Instrumente der Wissenvermittlung im Mathematikunterricht*. Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Vollrath, H.-J. (2001). Das Organum mathematicum – Athanasius Kirchers Lehrmaschine. In H. Beinlich, H. J. Vollrath & K. Wittstadt (Hrsg.), *Spurensuche –Wege zu Athanasius Kircher*, (S. 101–117) Dettelbach: J. H. Röll.

Vollrath, H.-J. (2002). Kircher und die Mathematik. In H. Beinlich et al. (Hrsg.), *Magie des Wissens. Athanasius Kircher (1602-1680) – Universalgelehrter, Sammler, Visionär* (S. 161–168). Dettelbach: J. H. Röll.

Vollrath, H.-J. (2003). Das Organum mathematicum – Ein Lehrmittel des Barock. *Journal für Mathematikdidaktik*, *24*(1), 41–58.

Weigand, H.-G. et al. (2013). *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I*, 2. verbesserte Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Wittstadt, K. (2002). Der Jesuit Athanasius Kircher – Leben und Person. In H. Beinlich et al. (Hrsg.), *Magie des Wissens. Athanasius Kircher (1602–1680) – Universalgelehrter, Sammler, Visionär* (S. 15–22). Dettelbach: J. H. Röll.

Anschrift der Verfasser*innen

Silvia Schöneburg-Lehnert
Universität Leipzig
Institut für Mathematik
Augustusplatz 10
04109 Leipzig
schoeneburg@math.uni-leipzig.de

Thomas Krohn
Universität Leipzig
Institut für Mathematik
Augustusplatz 10
04109 Leipzig
krohn@math.uni-leipzig.de