Aufgaben als Lerngelegenheiten für konzeptuelles und prozedurales Wissen zu Brüchen – Eine vergleichende Schulbuchanalyse

KATJA LENZ, GERALD WITTMANN, LARS HOLZÄPFEL, FREIBURG

Zusammenfassung:
Das Verständnis von Brüchen umfasst sowohl konzeptuelles als auch prozedurales Wissen. In einer vergleichenden Analyse werden fünf Schulbücher daraufhin untersucht, in welcher Weise sie in den Kapiteln zu den Grundrechenarten beide Wissensarten ansprechen und welche Rolle dabei Visualisierungen spielen. Die Aufgaben werden kodiert und häufigkeitsanalytisch ausgewertet. Es zeigt sich, dass nach einem auf beide Wissensarten zielenden Wissensaufbau, der sich auch auf Visualisierungen stützt, die folgenden Aufgaben vorwiegend, wenn auch in unterschiedlichem Maß, auf prozedurales Wissen fokussieren und der Einsatz von Visualisierungen weitgehend hinter den fachdidaktischen Forderungen zurückbleibt.

Abstract: *When learning fractions, students are expected to develop conceptual knowledge as well as procedural knowledge. In a comparative analysis of five textbooks we thus examined the chapters on fraction operations with a focus on the ways in which both knowledge types were addressed. Moreover, we investigated which role visualizations play in corresponding learning opportunities. A quantitative content analysis revealed that after a visualization-based introduction focusing on both knowledge types, the following tasks focused predominantly on procedural knowledge whereas the use of visualizations did not live up to the state of the art in mathematics education.*

1. Einleitung

Das Verständnis von (gemeinen) Brüchen umfasst zwei zentrale Aspekte: den Bruchzahlbegriff und das Rechnen mit Brüchen, die später als konzeptuelles und prozedurales Wissen weiter ausdifferenziert werden. Es besteht Konsens darüber, dass diese beiden Wissensarten im Hinblick auf die Unterschiede in den Leistungen von Schüler*innen zentral sind (z. B. Cramer, Post & del Mas, 2002; Gabriel, Coché, Szucs, Carette, Rey & Content, 2013; Hecht & Vagi, 2010; Siegler & Lortie-Forgues, 2015). Insbesondere wird angenommen, dass es Schüler*innen an konzeptuellem Wissen zu Brüchen mangelt (z. B. Bempeni, Poulopoulou, Tsiplaki & Vamvakoussi, 2018; Moss & Case, 1999). Ein Erklärungsansatz hierfür sind unter anderem unzureichende Lerngelegenheiten der Schüler*innen im Unterricht (Lortie-Forgues, Tian & Siegler, 2015; Obersteiner, Dresler, Bieck & Moeller, 2019). Internationale Schulbuchanalysen zeigen, dass Aufgaben als Indikator für Lerngelegenheiten überwiegend auf prozedurales Wissen fokussieren, während konzeptuelles Wissen nur in geringem Maß angesprochen wird (Alajmi, 2012; Son & Senk, 2010; Yang, Reys & Wu, 2010). Analog hierzu wird in der deutschsprachigen Literatur vielfach die überwiegend erfahrungsbasierte, jedoch nicht empirisch geprüfte These vertreten, dass im Unterricht zu schnell formalregelhaft agiert und auf prozedurales Wissen fokussiert wird (z. B. Malle, 2004; Padberg & Wartha, 2017). Gleichzeitig belegen empirische Untersuchungen, dass der Einsatz von Visualisierungen sich positiv auf das konzeptuelle Wissen zu Brüchen auswirken kann (z. B. Cramer & Henry, 2002; Cramer & Wyberg, 2009; Rau, Aleven & Rummel, 2009, 2013). Die Interpretation von Visualisierungen erfordert die Aktivierung von Grundvorstellungen und kann insofern den Erwerb von konzeptuellem Wissen unterstützen (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Cramer et al., 2002; Ni, 2001). Eine vergleichende Analyse fünf deutscher Schulbücher soll deshalb aufzeigen, in welcher Weise dort Lerngelegenheiten für konzeptuelles und prozedurales Wissen angeboten werden und inwiefern Visualisierungen zur Förderung von konzeptuellem Wissen eingesetzt werden.

2. Theoretische Grundlagen

Als wesentliche Grundlagen werden im Folgenden drei relevante Theoriebausteine (Wissensarten, Visualisierungen, Schulbücher) referiert.

2.1 Konzeptuelles und prozedurales Wissen

Die grundlegende Unterscheidung von konzeptuellem und prozeduralem Wissen als zwei verschiedene Wissensarten ist nicht nur in der Kognitionspsychologie (z. B. Anderson, Funke, Neuser-von Oettingen & Plata, 2013) sondern auch in der Mathematikdidaktik üblich (Geary, 2004; Geary et al., 2008; Hiebert & Lefevre, 1986; Moss & Case, 1999; Rittle-Johnson & Schneider, 2015; Schneider & Stern, 2010).

Prozedurales Wissen wird in Anlehnung an Hiebert und Lefevre (1986) als Wissen bezüglich der Ausführung von mathematischen Verfahren definiert. Es umfasst sowohl Wissen zu den Teilschritten eines (mathematischen) Verfahrens und deren Abfolge als auch Wissen zu deren Anwendbarkeit (Byrnes & Wasik, 1991; Hiebert & Lefevre, 1986; Malle, 2004; Prediger, Barzel, Leuders & Hußmann, 2011; Rittle-Johnson, Siegler & Alibali, 2001). Prozedurales Wissen zu Brüchen ist ausgesprochen komplex, da Brüche in den jeweiligen Rechenverfahren auf unterschiedliche Weise verarbeitet werden. Die Multiplikation von Brüchen erlaubt beispielsweise eine komponentenweise Verarbeitung von Zähler und Nenner, was für Addition und Subtraktion nicht möglich ist.

Konzeptuelles Wissen wird definiert als Wissen zu mathematischen Begriffen (Byrnes & Wasik, 1991; Hiebert & Lefevre, 1986; Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001) und Wissen darüber, warum ein mathematisches Verfahren funktioniert (Crooks & Alibali, 2014; Kilpatrick et al., 2001). Konzeptuelles Wissen zu Brüchen umfasst insbesondere Eigenschaften von Brüchen (z. B. Zähler-Nenner-Relation, Dichte) als auch Grundvorstellungen zu Brüchen (z. B. Kieren, 1976; Malle, 2004; Padberg & Wartha, 2017).

Um beispielsweise zwei Brüche zu addieren, wird in der Regel auf prozedurales Wissen zurückgegriffen, u. a. Wissen zu den Teilschritten des Lösungsverfahrens (Hauptnenner bestimmen, Brüche gleichnamig machen, Zähler addieren) und deren Reihenfolge sowie Abgrenzungswissen (eine isolierte Verarbeitung von Zähler und Nenner ist bei der Addition nicht korrekt). Um hingegen zu verstehen, warum das Verfahren auf entsprechende Weise funktioniert, ist konzeptuelles Wissen notwendig, u. a. die Grundvorstellung eines Bruchs als Teil eines Ganzen und die Grundvorstellung des Addierens von Brüchen als Zusammenfügen gleichartiger Objekte sowie deren Visualisierung durch geeignete Modelle.

Aus diesem Grund wird das Wissen, warum ein Rechenverfahren funktioniert, dem konzeptuellen Wissen zugeordnet, wenngleich der Begriff ‚konzeptuelles Wissen' so nah an den des tiefergehenden prozeduralen Wissens nach Star (2005) rückt. Dennoch erfolgt diese Begriffsverwendung in Anlehnung an Crooks und Alibali (2014), da sie auf der Annahme gründet, dass Wissen darüber, warum ein Verfahren funktioniert, auf konzeptuellen Wissenselementen (z. B. Zahleigenschaften; Grundvorstellungen) basiert (z. B. Crooks & Alibali, 2014; Kilpatrick et al., 2001).

Im Unterschied zur Begriffsdefinition nach Hiebert und Lefevre (1986), die konzeptuelles Wissen als vernetztes Wissen und prozedurales Wissen als oberflächliches Wissen beschreibt, werden im Folgenden beide Begriffe unabhängig von der Wissensqualität verstanden (de Jong & Ferguson Hessler, 1996; Star, 2005; Star & Stylianides, 2013).

Studien zeigen, dass Schüler*innen beim Rechnen mit Brüchen häufig ausschließlich auf prozedurales Wissen zurückgreifen (Moss & Case, 1999; Prediger, 2012). Zudem scheint konzeptuelles Wissen bei Schüler*innen unzureichend ausgebildet zu sein (z. B. Bempeni et al., 2018; Moss & Case, 1999; Prediger, 2012; Siegler & Pyke, 2013). Dieser Fakt erweist sich insofern als problematisch, weil die Ablösung des prozeduralen Wissens von konzeptuellem Wissen dazu führen kann, dass die Rechenverfahren zu Brüchen in ihrer Komplexität von Schüler*innen nur schwer memoriert und abgerufen werden können (Siegler & Pyke, 2013). In der Folge können sich falsche Vorgehensweisen bei der Ausführung der Verfahren ergeben. Beispielsweise ist die Prozedur „Zähler mit Zähler, Nenner mit Nenner" für das Multiplizieren von Brüchen angemessen, nicht jedoch für das Addieren. Gelänge es den Schüler*innen, konzeptuelles Wissen in die Ausführung des Verfahrens einzubeziehen und sich die Rechnung bildhaft vorzustellen, könnten sie erkennen, dass einerseits das ermittelte Ergebnis nicht stimmen kann, und andererseits eine Vorstellung davon entwickeln, warum die Brüche bei der Addition zunächst gleichnamig gemacht werden müssen. Die Einsicht, warum ein Rechenverfahren funktioniert, kann dazu beitragen, Fehler beim Ausführen der Prozedur zu vermeiden (Hecht, Close & Santisi, 2003; Wearne & Hiebert, 1989). Für das Angebot an Lerngelegenheiten bedeutet dies, dass die Aneignung von konzeptuellem Wissen zu Brüchen nicht auf die Entwicklung des Bruchzahlbegriffs beschränkt sein sollte, sondern auch für das Rechnen mit Brüchen bedeutsam ist (z. B. Baroody, 2003; Cramer & Henry, 2002; Hecht, 1998; Hiebert & Lefevre, 1986; Kilpatrick et al., 2001). Als Ziel des Mathematikunterrichts wird daher heute gesehen, Schüler*innen durchgängig sowohl konzeptuelles als auch prozedurales Wissen zu vermitteln und beide Wissensarten miteinander zu verknüpfen (Geary et al., 2008; Hiebert & Lefevre, 1986; Prediger et al., 2011).

Die Unterscheidung der beiden Wissensarten bietet somit eine Orientierung im Hinblick auf Wissen, das im Mathematikunterricht erworben werden soll (Barzel, Hußmann, Leuders & Prediger, 2012; Geary et al., 2008; Hiebert & Lefevre, 1986). Insbesondere ermöglicht sie eine Kategorisierung von Aufgaben hinsichtlich der angesprochenen Wissensart (Anderson & Krathwohl, 2001; Hiebert & Lefevre, 1986).

2.2 Visualisierungen

Mathematische Inhalte müssen über die Nutzung unterschiedlicher externer Repräsentationen (Darstellungen) für Lernende „sichtbar“ gemacht werden, da sie in einer abstrakten Form vorliegen (Duval, 2002, 2006). Hierzu können, ebenfalls nach Duval (2002, 2006), vier unterschiedliche *Repräsentationsformen* genutzt werden: (1) bildliche Repräsentationsform (z. B. Zeichnungen, Skizzen), (2) grafische Repräsentationsform (z. B. Diagramme, Graphen), (3) sprachliche Repräsentationsform sowohl in mündlicher Form (z. B. Erklärungen) als auch in schriftlicher Form (z. B. Sätze) und (4) symbolische Repräsentationsform (z. B. Rechnungen).

Innerhalb der Repräsentationsformen gibt es Repräsentationen mathematischer Inhalte, die gleiche Eigenschaften aufweisen. Diese werden in sogenannten *Darstellungsregistern* (Duval, 2002, 2006) zusammengefasst. Darstellungsregister sind somit Unterklassen der Repräsentationsformen, die eine feinere Unterscheidungsmöglichkeit im Hinblick auf mathematische Repräsentationen ermöglichen. Beispiele für unterschiedliche Darstellungsregister in bildlicher Repräsentationsform sind die bekannten Modelle zu Brüchen, wie z. B. Kreismodell, Rechteckmodell, Zahlenstrahl und Bruchstreifen.

Unter dem Begriff ‚Visualisierung‘ werden in der vorliegenden Arbeit externe bildliche Repräsentationen gefasst (z. B. Presmeg, 2006; Rau et al., 2009). Demnach ist Visualisierung als Unterbegriff von Repräsentation zu verstehen.

Empirische Studien belegen, dass die Verwendung von Visualisierungen positive Effekte auf die Entwicklung von konzeptuellem Wissen haben kann (z. B. Cramer & Henry, 2002; Cramer & Wyberg, 2009; Rau et al., 2009, 2013). Deshalb werden in diesem Beitrag Aufgaben in Schulbüchern im Hinblick auf Visualisierungen analysiert. Als wesentliche Kategorien hierfür erwiesen sich die im Folgenden erläuterten Gesichtspunkte aus der Visualisierungsforschung.

Funktion

Visualisierungen können bei der Wissensvermittlung fünf Funktionen zukommen (Carney & Levin, 2002; Levin, Anglin & Carney, 1987): (1) Sie können eine *Dekorationsfunktion* besitzen, wenn sie der Motivation dienen und keinen direkten Bezug zum Lerninhalt haben. (2) Visualisierungen können eine *Repräsentationsfunktion* haben, indem sie verbal beschriebene Elemente abbilden und so konkretisieren. (3) Visualisierungen können eine *Organisationsfunktion* übernehmen, indem sie einen Überblick über einen Sachverhalt geben. (4) Die *Interpretationsfunktion* von Visualisierungen liegt darin, Wissensinhalte über bildliche Analogien zu verdeutlichen. (5) Visualisierungen können eine *Transformationsfunktion* einnehmen, indem sie Informationen für das Merken und Abrufen in geeigneter Form darbieten und somit zur Verankerung von Lerninhalten im Gedächtnis beitragen.

Da die Dekorationsfunktion von Visualisierungen für das Lernen eines konkreten Sachverhaltes von untergeordneter Bedeutung ist, wird sie in anderen Funktionsbeschreibungen von Visualisierungen nicht erwähnt (z. B. Schnotz, 2010).

Die domänenunspezifischen Funktionsbeschreibungen nach Levin et al. (1987) wurden im Forschungsprozess induktiv erweitert. Obwohl sie nach Slough und Mc Tigue (2013) bis heute das gängigste Klassifikationsschema in Bezug auf Visualisierungen in Schulbüchern darstellen, erwies sich ihre Passung im Zuge der Analyse als begrenzt. So konnten in den analysierten Mathematikschulbüchern innerhalb der Repräsentationsfunktion zweierlei Visualisierungen unterschieden werden: (1) Visualisierungen, die Informationen bereitstellen, (2) Visualisierungen, welche verbal beschriebene Aufgabenstellungen redundant veranschaulichen und somit einem besseren Verständnis derselben dienen. Zudem erwies sich die Unterscheidung von Interpretations- und Transformationsfunktion in Bezug auf die vorliegende Analyse als nicht relevant, da Visualisierungen, die auf konzeptuelles Wissen zielen, jeweils beide Funktionen umfassen. Des Weiteren traten im Analysematerial keine Visualisierungen mit Organisationsfunktion auf. Aus diesem Grund wurden zusätzlich zur Dekorationsfunktion induktiv drei Unterkategorien bezüglich der *Funktion* von Visualisierungen in Mathematikschulbüchern gewonnen: Visualisierungen dienen (1) dem Bereitstellen von Information, (2) dem Verständnis der Aufgabenstellung und (3) dem Verständnis des mathematischen Inhalts.

Nutzung

Bezüglich der Nutzung von Visualisierungen unterscheiden Gagatsis und Elia (2004) im mathematikdidaktischen Kontext zwischen *auxiliaren Visualisierungen*, die unterstützend genutzt werden können, für den Lösungsprozess aber nicht unbedingt notwendig sind, und *autonomen Visualisierungen*, die genutzt werden müssen, da sie relevante Informationen für den Lösungsprozess beinhalten.

Tätigkeit

Im Hinblick auf Tätigkeiten von Lernenden im Umgang mit Visualisierungen arbeitet Schmitz (2017, S. 22 ff.) die Unterscheidung zwischen dem Verwenden von Visualisierungen und dem Erstellen von Visualisierungen heraus. Die Schüler*innentätigkeit *Verwenden* erfordert von Lernenden, in den Visualisierungen das mathematisch Relevante zu erkennen und zu deuten (Duval, 2014). Die Schüler*innentätigkeit *Erstellen* erfordert von Lernenden, mathematische Inhalte zu interpretieren und in eine Visualisierung umzusetzen. Dementsprechend wird für diese Schüler*innentätigkeit die Kenntnis entsprechender Visualisierungen vorausgesetzt. Empirische Befunde verweisen auf differenzielle Effekte zwischen dem Erstellen von Visualisierungen und dem Verwenden von vorgegebenen Visualisierungen (Deliyianni, Panaoura, Elia & Gagatsis, 2008). Insbesondere wird angenommen, dass das Erstellen von Visualisierungen höhere kognitive Anforderungen an die Lernenden stellt als das Verwenden von Visualisierungen (Dreher, Kuntze & Winkel, 2014). Demnach ist es relevant, ob die Visualisierungen in vorgefertigter Form vorliegen und verwendet werden sollen oder von den Schüler*innen selbst zu erstellen sind.

Übersetzungsprozess

Übersetzungsprozesse erfordern eine Verknüpfung der strukturellen Eigenschaften des jeweiligen Darstellungsregisters mit inhaltlichen und strukturellen Aspekten des mathematischen Inhalts (Bruner, Olver & Greenfield, 1971; Duval, 2006; English & Halford, 1995; Lesh, Post & Behr, 1987; Rau et al., 2009). Duval (2006) unterscheidet in Bezug auf Übersetzungsprozesse zwei unterschiedliche Aktivitäten. *Treatments* beziehen sich auf Übersetzungen innerhalb einer Repräsentationsform (z. B. algebraische oder arithmetische Umformungen). *Conversions* sind Übersetzungsprozesse, die einen Wechsel zwischen verschiedenen Repräsentationsformen erfordern (z. B. Notieren einer Bruchzahl zu einem bildlich dargestellten Anteil). Nach Duval (2006) sind Conversions entscheidend, um konzeptuelles Wissen zu entwickeln, da sie das Übertragen der zentralen Aspekte eines mathematischen Konzepts in ein anderes Darstellungsregister erfordern. Treatments hingegen stellen geringere Anforderungen an Schüler*innen, da sie oft im Sinne eines Algorithmus ausgeführt werden können. Entscheidend für das Lernen aus mathematikdidaktischer Sicht sind daher vor allem Conversions (Duval, 2006; Goldin & Shteingold, 2001; Kuntze, 2013; Lesh et al., 1987), wobei nach Duval (2006) jeweils beide Übersetzungsrichtungen berücksichtigt werden sollten.

Eine ähnliche, allerdings nicht identische Unterscheidung ist die Differenzierung zwischen intramodalem und intermodalem Transfer, die auf der Unterscheidung von Repräsentationsformen gemäß dem EIS-Prinzip nach Bruner et al. (1971) beruht. Ein intermodaler Transfer beschreibt einen Übersetzungsprozess zwischen zwei unterschiedlichen Repräsentationsformen, beispielsweise von einer symbolischen zu einer ikonischen Darstellung. Ein intramodaler Transfer beschreibt einen Übersetzungsprozess innerhalb einer Repräsentationsform, beispielsweise von einer ikonischen zu einer anderen ikonischen Darstellung. Er ist jedoch nach dem Ansatz von Duval (2006) als Conversion einzuordnen, da unterschiedliche Darstellungsregister auftreten, obwohl beide Darstellungen in bildlicher Form repräsentiert sind.

Um Rechnungen mit Brüchen in einen entsprechenden Sachkontext oder eine bildliche Darstellung zu übersetzen bzw. Sachkontexte in eine symbolische Darstellung zu überführen, ist die Nutzung von Grundvorstellungen notwendig (vom Hofe, 1995). In Bezug auf Grundvorstellungen zu Brüchen finden sich in der Literatur unterschiedliche Auflistungen (z. B. Kieren, 1976; Malle, 2004; Padberg & Wartha, 2017), welche international als *subconstructs* (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Kieren, 1976; Lamon, 2007) bezeichnet werden. In der vorliegenden Arbeit werden unter Grundvorstellungen zu Brüchen in Anlehnung an Kieren (1976) die folgenden gefasst: (1) Bruch als Teil eines Ganzen, (2) Bruch als Verhältnis, (3) Bruch als Resultat einer Division; (4) Bruch als Vergleichsoperator und (5) Bruch als Maßzahl.

Modell

In Bezug auf Brüche haben sich unterschiedliche Modelle (Darstellungsregister in Anlehnung an Duval, 2006) für die bildliche Repräsentation von Brüchen etabliert.

Kreismodell und Rechteckmodell repräsentieren z. B. die Grundvorstellung ‚Bruch als Teil eines Ganzen‘ durch Einteilung einer Fläche in gleich große Teile und lassen das Ganze deutlich sichtbar werden. Insbesondere Rechteckmodelle sind nach Wartha und Wittmann (2009) universelle und vor allem erweiterbare Visualisierungen, die für alle Grundrechenarten einsetzbar und auch später bei der Dezimal- und Prozentschreibweise tragfähig sind. Der Zahlenstrahl veranschaulicht die Grundvorstellung ‚Bruch als Maßzahl‘ und kann Lernende dabei unterstützen, eine Vorstellung hinsichtlich der Ordnungsrelation von Brüchen zu entwickeln. Ebenso kann die Einbettung der natürlichen Zahlen in die Bruchzahlen am Zahlenstrahl veranschaulicht werden (z. B. Cramer et al., 2002; Geary et al., 2008). Mit Hilfe der Vorstellung hinsichtlich der Ordnungsrelation von Brüchen lassen sich Ergebnisse von Rechnungen abschätzen, was eine Plausibilitätsprüfung der Ausführung der Rechenverfahren ermöglicht (Cramer & Wyberg, 2009; Geary et al., 2008, Keijzer & Terwel, 2003).

2.3 Schulbücher

Schulbücher besitzen eine hohe Relevanz für die Unterrichtsvorbereitung der Lehrkräfte und damit für die Struktur und Durchführung des Unterrichts (Pepin & Haggarty, 2001; Valverde, Bianchi, Wolfe, Schmidt & Houang, 2002). Sie haben einen größeren Einfluss auf das Unterrichtsgeschehen als Lehrpläne (Chen, 2002; Heinze, 2005; Oelkers & Reusser, 2008), weshalb sie als wichtige Unterstützung bei Bildungsreformen angesehen werden (Bölsterli Bardy, 2015). Speziell im deutschen Mathematikunterricht gelten Schulbücher als Leitmedium, welches über das Aufgabenangebot die möglichen Entscheidungen von Lehrpersonen hinsichtlich inhaltlicher Ziele und methodischer Wege zu deren Erreichung stark beeinflusst (Leuders, 2016; Remillard, Herbel-Eisenmann & Lloyd, 2012). Beispielsweise gaben in einer vergleichenden Analyse der Nutzung von Schulbüchern in Deutschland, England und Frankreich (Haggarty & Pepin, 2002; Pepin & Haggarty, 2001) die meisten Lehrer*innen im Interview an, sich mit dem Schulbuch auf ihren Unterricht vorzubereiten und es in nahezu jeder Unterrichtsstunde zu nutzen. Hierbei wurde die Bedeutung von Schulbüchern im Hinblick auf Übungsaufgaben besonders betont.

Internationale Analysen von Schulbüchern zeigen, dass die dort dargebotenen Lerngelegenheiten zum Thema Brüche vorwiegend auf prozedurales Wissen zielen und das Ausführen von Algorithmen erfordern, weniger auf konzeptuelles Wissen (Alajmi, 2012; Son & Senk, 2010; Yang et al., 2010). Für den deutschsprachigen Raum sind derartige Analysen bislang ein Forschungsdesiderat.

3. Anlage der Untersuchung

3.1 Forschungsfragen

Vor dem Hintergrund, dass Lernende für das Verständnis von Brüchen sowohl konzeptuelles als auch prozedurales Wissen erwerben sollen, erscheint eine entsprechende Analyse der in Schulbüchern angebotenen Lerngelegenheiten als aufschlussreich. Da Visualisierungen von großer Bedeutung für den Erwerb konzeptuellen Wissens sein können, soll weiter untersucht werden, welche Rolle sie in Schulbüchern für das Thema Brüche spielen.

In einem ersten Schritt werden die Aufgaben in Schulbüchern als Lerngelegenheiten für konzeptuelles und prozedurales Wissen analysiert. In einem zweiten Schritt werden die Aufgaben mit Visualisierung näher betrachtet. Dabei wird die Bedeutung der Visualisierung anhand der Funktion und ihres Einsatzes in Bezug auf Nutzung und Lernendentätigkeit analysiert. Da Visualisierungen, die dem mathematischen Verständnis dienen, für konzeptuelles Wissen zu Brüchen von besonderem Interesse sind, werden diese zusätzlich hinsichtlich Übersetzungsprozess und Modell ausgewertet.

Folgende Forschungsfragen, jeweils in Bezug auf Brüche, sind dabei leitend:

1) Auf welche Wissensart (prozedural, konzeptuell) zielen die in Schulbüchern angebotenen Lerngelegenheiten?
2) Welche Arten von Visualisierungen (Funktion, Modell) werden in Schulbüchern verwendet und wie werden sie im Hinblick auf Nutzung, Lernendentätigkeit und Übersetzungsprozess eingesetzt?
3) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Arten der Visualisierungen und den Wissensarten sowie den Phasen im Lernprozess (Wissensaufbau, Üben)?

3.2 Methodisches Vorgehen

Es werden exemplarisch fünf Schulbücher untersucht, die in Baden-Württemberg und weiteren Ländern zugelassen sind[1]: „Lambacher Schweizer 2“ (Baum et al., 2005), „Neue Wege 2“ (Lergenmüller & Schmidt, 2005), „Mathewerkstatt 2“ (Prediger, Barzel, Hußmann & Leuders, 2013), „Schnittpunkt 2“ (Backhaus et al., 2015) sowie „Mathe live 6“ (Kliemann et al., 2007) und „Mathe live 7“ (Böer et al., 2007)[2].

Die Analyse erfasst jeweils die Kapitel zur Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von Brüchen. Ausgehend von unserer Definition konzeptuellen Wissens, das auch das Wissen über die Funktionsweise eines Verfahrens umfasst, erscheinen diese Kapitel besonders interessant, da in ihnen beide Wissensarten gleichermaßen angesprochen werden könnten, es gerade in ihnen darüber hinaus von besonderem Interesse ist, ob beide Wissensarten miteinander verbunden werden.

Im Rahmen einer Frequenzanalyse wird eine kategoriengeleitete Analyse von Texten und Bildern in Schulbüchern vorgenommen (Döring & Bortz, 2016, S. 552 f.; Mayring, 2015, S. 11 ff.). Diese Form der quantitativen Inhaltsanalyse ermöglicht es, in den Analyseeinheiten die Häufigkeit des Auftretens bestimmter Kategorien festzustellen, um Aussagen über das relative Gewicht der Kategorien im Vergleich zu anderen Kategorien treffen zu können. Ausprägungen, die im Material besonders häufig vorkommen, können so erkannt und näher beschrieben werden (Mayring, 2015, S. 14 ff.).

Das Datenmaterial wird in Anlehnung an das Vorgehen der TIMS-Studie in kleinere Einheiten zerlegt (Valverde et al., 2002, S. 53 ff.), wozu die *Mikrostruktur der Schulbücher* genutzt wird. Auf der Mikrostrukturebene ist die Unterteilung in Abschnitte (z. B. Lehrtexte, Merkwissen, Musterbeispiele, Übungsaufgaben) charakteristisch für Schulbücher (Rezat, 2009, S. 80 ff.; Valverde et al., 2002, S. 56), die als *Strukturelemente* bezeichnet werden (Rezat, 2009, S. 70). Sie sind als Sinneinheiten zu betrachten, da die darin enthaltenen Lerngelegenheiten zusammengehören und sich meist auf einen bestimmten Lerninhalt beziehen. Allerdings unterscheiden sich die fünf Lehrbuchreihen in Bezug auf die Gestaltung auf der Mikrostrukturebene deutlich. Speziell in „Mathewerkstatt" werden neue Inhalte ausgehend von Sachkontexten präsentiert und erarbeitet, weshalb die einzelnen Aufgaben meist umfangreicher sind, ihre Anzahl jedoch geringer ausfällt, während insbesondere „Schnittpunkt" eine Fülle an Automatisierungsaufgaben anbietet.

Dementsprechend musste eine Analyseeinheit bestimmt werden, die zu allen fünf Schulbüchern passt. Grundlage hierfür ist ein *erweiterter Aufgabenbegriff*. Eine Aufgabe wird definiert als Aufforderung an Lernende zur Auseinandersetzung mit einem mathematischen Inhalt (Leuders, 2014). Somit werden neben den klassischerweise durchnummerierten Aufgaben im engeren Sinne z. B. auch Informationstexte oder Lösungsbeispiele in der Analyse berücksichtigt. Da die Aufgaben in den betrachteten Schulbüchern jeweils unterschiedlich viele Teilaufgaben umfassen, also unterschiedlich umfangreich sind, wäre eine Kodierung auf der Ebene von Teilaufgaben eine mögliche Alternative. Davon wurde jedoch abgesehen, weil sich die Lehrbuchreihen im Hinblick auf deren Anzahl stark unterscheiden, wodurch ein noch größeres Ungleichgewicht in der Anzahl analysierter Einheiten entstehen würde. Hinzu kommt, dass die Anzahl an Teilaufgaben im Hinblick auf das Angebot an unterschiedlichen Lerngelegenheiten nicht zwangsläufig als relevant erachtet wird, da diese häufig dieselbe mathematische Aktivität erfordern.

Jeder Analyseeinheit wurden Kategorien zugewiesen. Die Kategorien wurden deduktiv aus den empirischen Befunden der Visualisierungsforschung abgeleitet, mit Ausnahme der Kategorien zur Funktion von Visualisierungen (s. Abschnitt 2.2).

Das Kategoriensystem (Abb. 1) ist in einem ausführlichen Kodierleitfaden mit Definitionen, Ankerbeispielen und Kodierregeln festgehalten. Die Kategorien wurden weiter ausdifferenziert in Unterkategorien, welche jeweils dichotom kodiert wurden (0: trifft nicht zu; 1: trifft zu).

Für die Kategorien Inhaltsbereich, Wissensart, Funktion, Übersetzungsprozess und Modell sind Mehrfachkodierungen zugelassen. Die in den Ergebnistabellen (Tab. 1 und Tab. 2) angegebenen relativen Häufigkeiten berechnen sich als Quotient aus der jeweiligen Unterkategorie und der jeweils darüber angegebenen Grundmenge an Aufgaben.

Zur Bestimmung der Intercoder-Reliabilität wurde eine Zufallsstichprobe des Analysematerials im Umfang von 20 % durch eine zweite, entsprechend geschulte Person kodiert. Cohens Kappa lag je nach Kategorie zwischen $\kappa = 0{,}652$ und $\kappa = 1$, was als gute bis sehr gute Übereinstimmung gewertet werden kann (Döring & Bortz, 2016, S. 346). Die Unterkategorien „Verständnis der Aufgabenstellung"; „erstellen"; „Zahlenstrahl", „bildlich → verbal" mit $\kappa < 0{,}7$ wurden einer inhaltlichen Prüfung unterzogen: Es handelt sich um Variablen, deren Grundhäufigkeit in der untersuchten Stichprobe für die Ausprägung „0" wesentlich größer ist als für die Ausprägung „1". Diese Prävalenz einer Variablenausprägung verzerrt Cohens Kappa aufgrund einer höheren Ratewahrscheinlichkeit (Gwet, 2012, S. 165 ff.; Wirtz & Kutschmann, 2007), weshalb die Kodiererübereinstimmung auch bei den genannten Variablen als angemessen betrachtet wird.

3.3 Kategoriensystem

Das entwickelte Kategoriensystem (Abb. 1) bezieht sich zunächst auf die Analyse der Aufgaben. Beinhaltet eine Aufgabe eine Visualisierung, wird diese entsprechend detailliert weiter analysiert.

3.3.1 Analyse der Aufgaben

Im Folgenden werden die Kategorien und Unterkategorien der ersten Analyseebene näher beschrieben.

Inhaltsbereich

Zunächst werden die Aufgaben nach dem *Inhaltsbereich* (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) kodiert. Wenn in einer Aufgabe mehrere Operationen angesprochen werden, ist eine Doppelkodierung möglich.

Phase im Lernprozess

Aus der Art der Aufgabe und der Reihenfolge, in der die Aufgaben in den Schulbüchern dargeboten werden, können Rückschlüsse auf die *Phase im Lernprozess* gezogen werden, in der sie eingesetzt werden sollen (Bruder, 1991; Rezat, 2009; Zech, 1998). Hierbei wird zwischen den zentralen Phasen Wissensaufbau und Üben unterschieden (vgl. Herbart, zitiert nach Prediger, Hußmann, Leuders & Barzel, 2014).

Analyse der Aufgaben		
	Inhaltsbereich*	Addition
		Subtraktion
		Multiplikation
		Division
	Phase im Lernprozess	Wissensaufbau
		Üben
	Wissensart*	prozedural
		konzeptuell
	Repräsentationsform	mit Visualisierung →
		ohne Visualisierung

Analyse der Aufgaben mit Visualisierung		
	Funktion*	Bereitstellen von Information
		Verständnis. d. Aufgabenstellung
		Verständnis d. math. Inhalts
		Dekoration
	Nutzung	unterstützend
		notwendig
	Tätigkeit	verwenden
		erstellen
	Übersetzungsprozess*	bildlich → symbolisch
		symbolisch → bildlich
		bildlich → verbal
		verbal → bildlich
		bildlich ↔ bildlich
	Modell*	Kreis
		Rechteck
		Zahlenstrahl
		Bruchstreifen
		sonstiges

Abb. 1: Kategoriensystem mit Kategorien (grau unterlegt) und Unterkategorien (für mit * markierte Kategorien bzw. Unterkategorien sind Mehrfachkodierungen zugelassen.

Dem Wissensaufbau werden Einstiegsaufgaben, erläuternde Lehrtexte, Musterbeispiele und Merkwissen zugeordnet, mit deren Hilfe die Erarbeitung und Systematisierung von neuem Wissen erfolgt. Dem Üben werden Aufgaben zugeordnet, die auf die Festigung von Wissen zielen.

Wissensart

Im Hinblick auf die *Wissensart* werden die Aufgaben als *auf konzeptuelles Wissen zielend* oder als *auf prozedurales Wissen zielend* kodiert, wobei Doppelkodierungen möglich sind. Die Aufgabe in Abb. 2 zielt ausschließlich auf prozedurales Wissen, da ein mathematisches Verfahren ausgeführt werden soll. Die Textaufgabe in Abb. 3 zielt auf konzeptuelles und prozedurales Wissen: Für die Überführung der Sachsituation in ein mathematisches Modell ist konzeptuelles Wissen vonnöten, während die anschließende Berechnung prozedurales Wissen verlangt. Die Aufgabe in Abb. 4 zielt auf konzeptuelles Wissen, da Grundvorstellungen (Bruch als Teil eines Ganzen) und Zusammenhänge (Aufgabenbeziehungen) angesprochen werden. Sie zielt nicht auf prozedurales Wissen, da keine Ausführung eines Rechenverfahrens gefordert ist.

○3 Berechne.
a) $\frac{1}{2} + \frac{3}{8}$ b) $\frac{7}{15} - \frac{1}{3}$

Abb. 2: Aufgabe, die auf prozedurales Wissen zielt.

(Quelle: Schnittpunkt 6, 2015, S. 47 © Ernst Klett Verlag GmbH)

●17 Jan spart für ein neues Mountainbike. Die Hälfte des Kaufpreises hat er schon. Von seinen Eltern erhält er 50 €. Jetzt fehlt ihm nur noch $\frac{1}{3}$ des Kaufpreises. Wie teuer ist das Rad?

Abb. 3: Aufgabe, die auf konzeptuelles Wissen und prozedurales Wissen zielt.

(Quelle: Schnittpunkt 6, 2015, S. 49 © Ernst Klett Verlag GmbH)

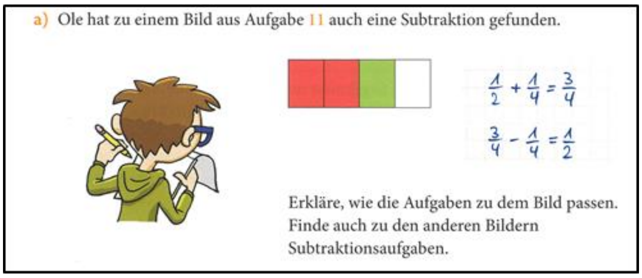

Abb. 4: Aufgabe, die auf konzeptuelles Wissen zielt.

(Quelle: Mathewerkstatt 2, 2013, S. 58 © 2013 Cornelsen Schulverlage GmbH, Berlin/Christian Nusch © 2018 Cornelsen Verlag GmbH/Christian Nusch)

Repräsentationsform

Aufgaben werden bezogen auf die *Repräsentationsform* dahingehend unterschieden, ob sie eine Visualisierung enthalten bzw. einfordern oder ohne Visualisierung auskommen.

Bei Aufgaben ohne Visualisierungen endet die Analysetiefe an dieser Stelle (vgl. Abb. 2 und Abb. 4). Enthält die Aufgabe hingegen eine Visualisierung, wird diese entsprechend weiter kodiert.

3.3.2 Analyse der Aufgaben mit Visualisierung

Im Folgenden werden die Kategorien und Unterkategorien der zweiten Analyseebene näher beschrieben.

Funktion

In Bezug auf die Funktion von Visualisierungen werden die folgenden vier Unterkategorien unterschieden: (1) Visualisierungen, die dem Bereitstellen von Information dienen, (2) Visualisierungen, die auf das Verständnis der Aufgabenstellung zielen, (3) Visualisierungen, die auf das Verständnis des mathematischen Inhalts zielen, oder (4) Visualisierungen, die rein dekorativ sind. Letztere Unterkategorie ist für den mathematischen Wissensaufbau kaum von Bedeutung (vgl. Abb. 5). Sie wird zwar in der Analyse erfasst, aber nicht weiter untersucht. Mehrfachkodierungen sind zugelassen für die ersten drei Unterkategorien, nicht jedoch für die vierte. Die Visualisierung in Abb. 6 stellt Informationen bereit und wird auch so kodiert. Dass sie darüber hinaus auch dekorativ ist, ist für die Informationsfunktion der Visualisierung nicht von Bedeutung, weshalb dieser Aspekt nicht kodiert wird. Visualisierungen, die verbal beschriebene Elemente der Aufgabenstellung redundant in bildlicher Form darbieten, werden der Kategorie Visualisierungen, die auf das Verständnis der Aufgabenstellung zielen, zugeordnet (vgl. Abb. 7). Im Hinblick auf konzeptuelles Wissen sind vor allem Visualisierungen von Bedeutung, die Grundvorstellungen zu Brüchen oder Eigenschaften von Brüchen zugänglich machen, also auf das Verständnis des mathematischen Inhalts zielen (vgl. Abb. 8). Nur solche Visualisierungen werden später im Hinblick auf die Kategorien Übersetzungsprozess und Modell weiter ausgewertet (Tab. 2).

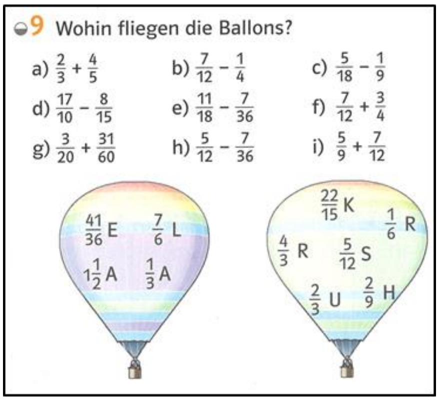

Abb. 5: Visualisierung, die ausschließlich der Dekoration dient.

(Quelle: Schnittpunkt 6, 2015, S. 48 © Ernst Klett Verlag GmbH)

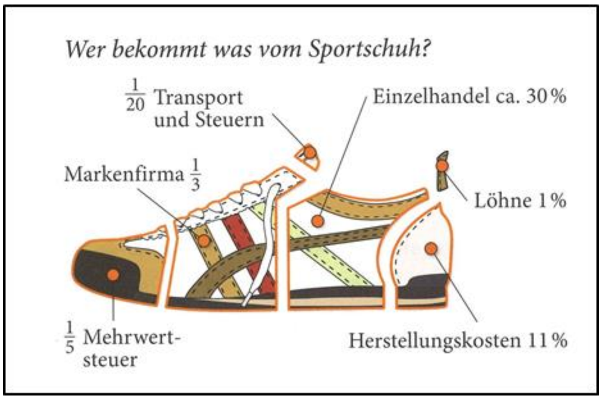

Abb. 6: Visualisierung, die Informationen bereitstellt.

(Quelle: Mathewerkstatt 2, 2013, S. 154 © 2013 Cornelsen Schulverlage GmbH, Berlin/Christian Nusch © 2018 Cornelsen Verlag GmbH/Christian Nusch)

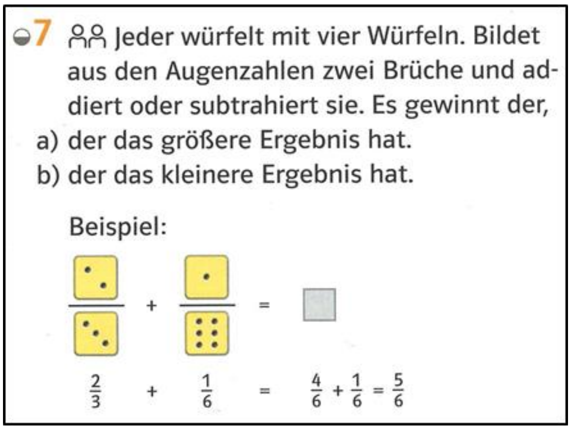

Abb. 7: Visualisierung, die auf das Verständnis der Aufgabenstellung zielt.

(Quelle: Schnittpunkt 6, 2015, S. 47 © Ernst Klett Verlag GmbH.)

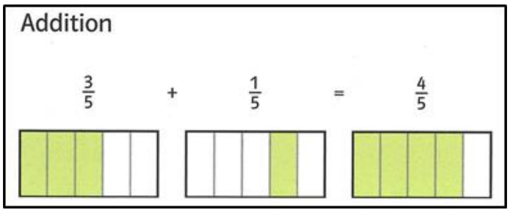

Abb. 8: Visualisierung, die auf das Verständnis des mathematischen Inhalts zielt.

(Quelle: Schnittpunkt 6, 2015, S. 44 © Ernst Klett Verlag GmbH)

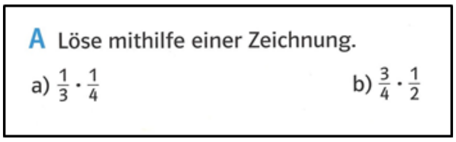

Abb. 9: Aufgabe, die das Erstellen einer Visualisierung fordert.

(Quelle: Schnittpunkt 6, 2015, S. 55 © Ernst Klett Verlag GmbH)

Nutzung

Als Nächstes wird unterschieden, ob die *Nutzung der Visualisierung* im Sinne einer unterstützenden Visualisierung (auxiliar) erfolgt (vgl. Abb. 7) oder für den Lösungsprozess notwendig (autonom) ist (vgl. Abb. 8).

Tätigkeit

Im Hinblick auf die *Tätigkeit* können Visualisierungen vorgegeben sein (vgl. Abb. 8) oder sie müssen von den Schüler*innen erstellt werden (vgl. Abb. 9).

Übersetzungsprozess

Es werden die folgenden Übersetzungsprozesse erfasst, die nach Duval (2006) als Conversions bezeichnet werden, da insbesondere diese zur Ausbildung von konzeptuellem Wissen beitragen können: (1) bildlich → symbolisch, (2) symbolisch → bildlich, (3) bildlich → verbal, (4) verbal → bildlich, (5) bildlich ↔ bildlich.

Modell

In der Kategorie *Modell* werden Rechteckmodell, Kreismodell, Zahlenstrahl, Bruchstreifen (basierend auf der Streifentafel) und sonstiges Modell (z. B. realistisches Bild, Mengenmodell, Pfeilbild) unterschieden. Demnach werden fotorealistische oder gezeichnete Darstellungen mit Bezug zur alltäglichen Erfahrungswelt (wie Pizza- oder Kuchenbilder) der Kategorie sonstiges Modell zugeordnet. Wenn eine Aufgabe mehrere Visualisierungen enthält, sind teilweise Mehrfachkodierungen erforderlich.

4. Ergebnisse

Die Ergebnisdarstellung ist zweigeteilt: Sie bezieht sich zunächst auf die erste Analyseebene (Aufgaben gesamt) und anschließend auf die zweite Analyseebene (Aufgaben mit Visualisierungen). Die relativen Häufigkeiten basieren jeweils auf unterschiedlichen Grundmengen. Diese werden in den Ergebnistabellen jeweils in einer Zeile oberhalb der Kategorien angegeben.

4.1 Analyse der Aufgaben

Zunächst werden die Ergebnisse der Aufgabenanalyse vorgestellt (vgl. Tab. 1); hierbei wird N als Bezeichnung für die absoluten Häufigkeiten verwendet.

Inhaltsbereich

In „Lambacher Schweizer“, „Neue Wege“, „Mathewerkstatt“ und „Mathe live“ beinhaltet das Kapitel zur Multiplikation die meisten Aufgaben, in „Schnittpunkt“ hingegen das Kapitel zur Addition.

Phase im Lernprozess

Erwartungsgemäß enthalten alle Schulbücher weniger Aufgaben für den Wissensaufbau als für das anschließende Üben.

Wissensart

Im Hinblick auf die Wissensart zeigt sich ein markanter Unterschied zwischen den Schulbüchern: Alle, bis auf „Schnittpunkt“, enthalten vorwiegend Aufgaben, die auf beide Wissensarten zielen. Während der Anteil an rein prozeduralen Aufgaben in „Lambacher Schweizer“, „Neue Wege“ und „Mathe live“ bei ungefähr 40 % (N = 30 bis 60) liegt, stellt „Schnittpunkt“ mit 56 % (N = 79) vorwiegend rein prozedurale Aufgaben zur Verfügung. In „Mathewerkstatt“ finden sich dagegen nur 5 % (N = 4) rein prozedurale Aufgaben. Der Anteil an rein konzeptuellen Aufgaben ist mit 26 % (N = 20) in „Mathewerkstatt“ höher als in den anderen Schulbüchern, die einen Anteil von weniger als 10 % aufweisen.

Repräsentationsform

Auch in Bezug auf die Repräsentationsform ist „Mathewerkstatt“ auffällig: Der Anteil an Aufgaben mit Visualisierung liegt bei 78 % (N = 60), während die übrigen Schulbücher Anteile unter 50 % (N = 23 bis 59) aufweisen. Dies steht im Einklang mit der Erwartung, dass Visualisierungen häufiger eingesetzt werden, wenn auf konzeptuelles Wissen gezielt wird.

		Lambacher Schweizer		Mathe live		Mathewerkstatt		Neue Wege		Schnittpunkt	
Aufgaben gesamt		99		76		76		145		141	
Inhaltsbereich*	Addition	27	27 %	23	30 %	27	36 %	43	30 %	53	38 %
	Subtraktion	27	27 %	16	21 %	17	22 %	38	26 %	50	35 %
	Multiplikation	48	48 %	38	50 %	48	63 %	58	40 %	44	31 %
	Division	38	38 %	14	18 %	12	16 %	49	34 %	42	30 %
Phase im Lernprozess	Wissensaufbau	23	23 %	13	17 %	16	21 %	43	30 %	47	33 %
	Üben	76	77 %	63	83 %	60	79 %	102	70 %	94	67 %
Wissensart	weder noch	1	1 %	2	3 %	0		1	1 %	0	
	rein prozedural	43	43 %	30	39 %	4	5 %	60	41 %	79	56 %
	konzeptuell u. prozedural	48	48 %	39	51 %	52	68 %	71	49 %	52	37 %
	rein konzeptuell	7	7 %	5	6 %	20	26 %	13	9 %	10	7 %
Repräsentationsform	mit Visualisierung	28	28 %	23	32 %	60	78 %	59	41 %	44	31 %
	ohne Visualisierung	71	72 %	53	68 %	16	22 %	86	59 %	97	69 %

Tab. 1: Ergebnisse der ersten Analyseebene (absolute und relative Häufigkeiten; für mit * markierte Kategorien sind Mehrfachkodierungen zugelassen, die relativen Häufigkeit können sich hier zu über 100% aufsummieren).

4.2 Analyse der Aufgaben mit Visualisierung

Im Folgenden werden die Ergebnisse der Analyse der Aufgaben mit Visualisierung (vgl. Tab. 2) vorgestellt. Die Kategorien Übersetzungsprozess und Modell werden nur in Bezug auf die Funktion „Verständnis des mathematischen Inhalts“ ausgewertet.

Funktion

„Lambacher Schweizer“ setzt mit einem Anteil von 46 % (N = 13) mehr rein dekorative Bilder ein als die übrigen Schulbücher. „Mathewerkstatt“ weist die meisten Aufgaben mit Visualisierungen auf und verwendet diese nur in 12 % (N = 8) der Fälle rein dekorativ. In allen Schulbüchern zielen die für die Aufgabe relevanten Visualisierungen vorwiegend auf das Verständnis des mathematischen Inhaltes. An zweiter Stelle stehen Visualisierungen, die Informationen bereitstellen. Visualisierungen, die auf ein besseres Verständnis der Aufgabenstellung zielen, kommen am wenigsten vor. Insgesamt lässt sich festhalten, dass in den Kapiteln zu den Operationen Visualisierungen, die relevant für die Bearbeitung von Aufgaben sind (Bereitstellen von Information; Verständnis der Aufgabenstellung, Verständnis des mathematischen Inhalts), in den Schulbüchern häufiger verwendet werden als Visualisierungen mit Dekorationsfunktion. Da Visualisierungen mit Dekorationsfunktion für das Lernen eines konkreten Sachverhaltes von untergeordneter Bedeutung sind, werden entsprechende Aufgaben im Folgenden nicht weiter analysiert. Deshalb bezieht sich die Betrachtung der folgenden Kategorien auf Aufgaben mit relevanten Visualisierungen (Bereitstellen von Information, Verständnis der Aufgabenstellung, Verständnis des mathematischen Inhalts).

Nutzung

Die Nutzung der Visualisierungen ist vorwiegend notwendig. Die Visualisierungen enthalten also keine redundanten Informationen, sondern bilden für die Bearbeitung der Aufgaben einen wichtigen Bestandteil.

Tätigkeit

Das Verwenden einer vorgegebenen Visualisierung ist die hauptsächlich angedachte Tätigkeit, während das Erstellen einer Visualisierung weitaus weniger verlangt wird (vgl. Tab. 2). „Mathewerkstatt“ unterscheidet sich hier von den übrigen Büchern dahingehend, dass anteilig 38 % (N = 20) der Aufgaben das Erstellen einer Visualisierung einfordern, während die übrigen Schulbücher nur vereinzelt derartige Aufgaben enthalten.

		Lambacher Schweizer		Mathe live		Mathewerkstatt		Neue Wege		Schnittpunkt	
Aufgaben mit Visualisierung		28		23		60		59		44	
Funktion*	Dekoration	13	46 %	4	17 %	8	12 %	4	7 %	12	27 %
	Information	4	14 %	8	33 %	23	39 %	31	53 %	13	30 %
	Aufgabenstellung	3	11 %	4	17 %	1	2 %	3	5 %	5	11 %
	mathematischer Inhalt	9	32 %	12	52 %	42	70 %	44	75 %	22	50 %
Aufgaben mit Visualisierung ohne Dekorationsfunktion		15		19		52		55		32	
Nutzung	unterstützend	4	27 %	4	21 %	1	2 %	12	22 %	4	13 %
	notwendig	11	73 %	15	79 %	51	98 %	43	78 %	28	87 %
Tätigkeit	Verwenden	13	86 %	14	74 %	32	62 %	51	91 %	30	94 %
	Erstellen	2	14 %	5	26 %	20	38 %	4	9 %	2	6 %
Aufgaben mit Visualisierung Verständnis des math. Inhalt		9		12		42		44		22	
Übersetzungsprozess*	bildlich → symbolisch	8	89 %	11	92 %	27	64 %	39	87 %	17	77 %
	symbolisch → bildlich	8	89 %	8	66 %	27	64 %	26	59 %	13	59 %
	bildlich → verbal	1	11 %	3	25 %	23	58 %	6	14 %	6	27 %
	verbal → bildlich	7	78 %	7	58 %	21	50 %	22	50 %	11	50 %
	bildlich ↔ bildlich	2	22 %	0	0 %	5	12 %	1	2 %	1	5 %
Modell*	Kreis	6	67 %	3	25 %	2	7 %	19	43 %	1	5 %
	Rechteck	3	33 %	7	58 %	16	38 %	20	45 %	17	77 %
	Zahlenstrahl	1	11 %	0		5	12 %	1	2 %	0	0 %
	Bruchstreifen	0		0		10	24 %	0		0	
	sonstiges	0		2	17 %	6	14 %	9	20 %	5	23 %

Tab. 2: Ergebnisse der zweiten Analyseebene (absolute und relative Häufigkeiten; für mit * markierte Kategorien sind Mehrfachkodierungen zugelassen, die relativen Häufigkeit können sich hier zu über 100% aufsummieren).

Übersetzungsprozess

Im Folgenden werden nur Übersetzungsprozesse betrachtet, die sich auf Visualisierungen beziehen, die auf das Verständnis des mathematischen Inhalts zielen. Am häufigsten wird in allen Schulbüchern die Übersetzung von einer bildlichen zu einer symbolischen Repräsentationsform angeregt, gefolgt von einer symbolischen zu einer bildlichen Repräsentationsform. Die Übersetzung von einer verbalen zu einer bildlichen Repräsentationsform kommt ebenfalls häufig in allen Schulbüchern vor. Die Übersetzung von einer bildlichen Repräsentationsform zu einer verbalen Repräsentationsform liegt in „Mathewerkstatt“ mit 58 % (N = 23) deutlich höher als in den anderen Schulbüchern, die einen Anteil unter 30 % (N = 1 bis 6) aufweisen. In allen Schulbüchern treten Übersetzungen von einer bildlichen Darstellung zu einer anderen bildlichen Darstellung am seltensten auf. So werden in „Mathe live“ derartige Übersetzungen überhaupt nicht gefordert.

Modell

Die folgenden Angaben beziehen sich ebenfalls nur auf Visualisierungen, die auf das Verständnis des mathematischen Inhalts zielen. In den gesichteten Schulbüchern werden vorwiegend die Modelle Kreis und Rechteck verwendet um Brüche zu veranschaulichen, wobei das Rechteckmodell häufiger eingesetzt wird als das Kreismodell. Beide Modelle betonen die Grundvorstellung vom Bruch als Anteil eines Ganzen. Der Bruchstreifen gelangt nur in „Mathewerkstatt“ zum Einsatz. Der Zahlenstrahl, als lineares Modell, kommt nicht in allen Büchern vor und wird im Vergleich eher selten verwendet. Im Unterschied zu den anderen Schulbüchern, die sich weitgehend auf Kreis- und Rechteckmodelle und somit die Grundvorstellung vom Bruch als Teil eines Ganzen beschränken, setzt „Mathewerkstatt“ mehrere unterschiedliche Modelle ein.

Visualisierungen und Phase im Lernprozess

Im Hinblick auf die Phase im Lernprozess ist der Anteil an Visualisierungen, die auf das Verständnis des mathematischen Inhalts zielen, in allen Schulbüchern in der Phase des Wissensaufbaus deutlich höher als in der Phase des Übens. In anderer Betrachtung: Mehr als 85 % der Visualisierungen im Bereich des Übens dienen in „Lambacher Schweizer“, „Mathe live“ und „Schnittpunkt“ nicht dem mathematischen Verständnis, während in „Neue Wege“ 24 % (N = 24) und in „Mathewerkstatt“ 47 % (N = 28) auf das mathematische Verständnis zielen.

5. Diskussion und Ausblick

Abschließend werden die methodischen Grenzen der beschriebenen Vorgehensweise aufgezeigt, die zentralen Ergebnisse diskutiert und zwei Desiderate mathematikdidaktischer Forschung skizziert.

5.1 Methodische Grenzen

Die vorliegende Analyse fokussiert auf Aufgaben zu den Grundrechenarten im Bereich der Brüche und insbesondere auf Visualisierungen als eine Möglichkeit, konzeptuelles Wissen zu entwickeln. Dabei werden die Visualisierungen primär nach Kriterien kategorisiert, die der Forschung zum Lernen mit Visualisierungen entstammen, also nur bedingt inhaltsspezifisch sind und deshalb auch die mathematikdidaktischen Aspekte der Visualisierung von Brüchen nur teilweise erfassen. Nicht untersucht wurden ferner weitere mathematikdidaktische Aspekte bezüglich Aufgaben (z. B. Aufgabenformate, Impulse zur Verbalisierung, gegebene Zahlen im Hinblick auf die Prävention von Fehlermustern). Insofern lassen sich die betrachteten Schulbücher zwar bezüglich der analysierten Kriterien charakterisieren, es können aber keine Aussagen über deren Lernwirksamkeit in Bezug auf konzeptuelles und prozedurales Wissen zu Brüchen getroffen werden. Die Frage nach ihrer Wirkung auf Lehrende und Lernende bleibt in der vorliegenden produktbezogenen Schulbuchanalyse offen (Mayer, Mullens & Moore, 2000). An dieser Stelle könnte eine wirkungsorientierte Schulbuchforschung anknüpfen.

5.2 Diskussion der Ergebnisse

In der vorliegenden Studie werden fünf Schulbücher aus dem deutschsprachigen Raum im Hinblick auf die fokussierte Wissensart sowie den Einsatz von Visualisierungen analysiert. Alle Schulbücher haben gemein, dass sie insgesamt mehr Aufgaben zur Verfügung stellen, die auf prozedurales Wissen zielen, als Aufgaben, die konzeptuelles Wissen ansprechen. Dieses Ergebnis bestätigt für den deutschsprachigen Raum bereits vorliegende Befunde internationaler Schulbuchvergleiche (Alajmi, 2012; Son & Senk, 2010; Yang et al., 2010).

Diese Fokussierung auf prozedurales Wissen kann eine Erklärung dafür liefern, dass konzeptuelles Wissen zu Brüchen bei Schüler*innen häufig nur unzureichend ausgebildet ist und seit Langem bekannte Fehlermuster (z. B. Eichelmann, Narciss, Schnaubert & Melis, 2012) nach wie vor auftreten (Lortie-Forgues et al., 2015; Obersteiner et al., 2019), entgegen der Erwartung, dass sich langjährige fachdidaktische Forschung in besseren Leistungen der Schüler*innen niederschlagen müsste.

Obwohl Untersuchungen zu typischen Fehlermustern nahelegen, dass die Addition von Brüchen weitaus fehleranfälliger ist als die Multiplikation (z. B. Padberg & Wartha, 2017), werden in vier der fünf Schulbücher mehr Aufgaben zur Multiplikation angeboten. Außerdem werden deutlich weniger Aufgaben zur Division angeboten, welche im Vergleich zur Multiplikation ebenfalls als fehleranfälliger gilt (Siegler & Lortie-Forgues, 2017), was wiederum mit Ergebnissen internationaler Schulbuchvergleiche konsistent ist (Son & Senk, 2010).

Im Hinblick auf den Zusammenhang von Visualisierung, Wissensart und Phase im Lernprozess zeigen die Ergebnisse die Tendenz, dass sich der Einsatz von Visualisierungen, die auf das Verständnis des mathematischen Inhalts zielen, auf den Wissensaufbau konzentriert. Nach einer vorstellungsgestützten Phase des Wissensaufbaus mit Visualisierungen verengen sich die Aufgaben beim Üben weitgehend auf den Erwerb von prozeduralem Wissen ohne den Einsatz von Visualisierungen. Dieser Rückgang von

Aufgaben mit Visualisierungen, die auf das Verständnis des mathematischen Inhalts zielen, zeigt sich je nach Schulbuch in unterschiedlichem Ausmaß. Es gibt Schulbücher, die anteilig in weniger als 5 % derartige Aufgaben enthalten. Demgegenüber gibt es ein Schulbuch, das in nahezu 50 % der Übungsaufgaben Visualisierungen enthält, die auf das Verständnis des mathematischen Inhalts zielen. Die Konzentration von Aufgaben mit Visualisierungen, die auf das Verständnis des mathematischen Inhalts zielen, auf die Phase des Wissensaufbaus könnte eine Abkoppelung des konzeptuellen Wissens vom prozeduralen Wissen verursachen. Eine solche Abkoppelung ist insbesondere problematisch, da das schematische Ausführen von Rechenverfahren fehleranfällig ist (z. B. Dreher, 2013; Siegler & Pyke, 2013; Siegler, Thompson & Schneider, 2011). Eine durchgängige Nutzung von Visualisierungen nicht nur in Phasen des Wissensaufbaus, sondern auch während des Übens könnte dazu beitragen, prozedurales Wissen und konzeptuelles Wissen zu Brüchen bei Schüler*innen zu vernetzen (Cramer & Henry, 2002; Cramer & Wyberg, 2009).

Weiter zeigt sich, dass das Erstellen von Visualisierungen weitaus weniger gefordert wird als das Nutzen von Visualisierungen. Diese Schüler*innentätigkeit könnte im Hinblick auf das kognitive Aktivierungspotential (Hiebert et al., 2003; Jordan et al., 2006; Jordan et al., 2008) von Aufgaben stärker angesprochen werden.

Bezüglich der Modelle liefert die Analyse eine deutliche Fokussierung auf Kreis- und Rechteckmodelle, welche die Grundvorstellung ‚Bruch als Teil eines Ganzen' veranschaulichen. Dies birgt die Gefahr, dass Schüler*innen nur eingeschränkte Vorstellungen für den Umgang mit Brüchen erwerben (Behr, Lesh, Post & Silver, 1983; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Hannula, 2003; Prediger, 2006; Zhang, Clements & Ellerton, 2005). Demnach wäre ein gezielter Einsatz unterschiedlicher Modelle vonnöten, um verschiedene Grundvorstellungen zu Brüchen aufzubauen (Cady, Collins & Hodges, 2015; Duval, 2006; Lamon, 2007). Offen ist jedoch, wie dieser gezielte Einsatz unterschiedlicher Modelle aussehen kann. Studien, die sich mit der Wirksamkeit von Modellen zu Brüchen beschäftigen (z. B. Cramer et al., 2002; Cramer & Wyberg, 2009; Keijzer & Terwel, 2003), zeigen, dass diese je nach Einsatz sowohl Stärken als auch Schwächen aufweisen. Dies führt zum Teil zu widersprüchlichen Empfehlungen, aus denen sich bislang kein Gesamtkonzept ableiten lässt.

5.3 Forschungsdesiderate

Insgesamt deuten die berichteten Ergebnisse der Analyse auf ein Transferproblem von der fachdidaktischen Forschung zur Konzeption von Schulbüchern hin.

Die starke Fokussierung der untersuchten Schulbücher auf prozedurales Wissen verweist ferner darauf, dass die Frage, mit welchem Ziel Brüche in den Jahrgangsstufen 5 und 6 unterrichtet werden, auch fachdidaktisch keineswegs abschließend geklärt ist. Als Konsens gilt zwar schon seit längerem, dass bei der Behandlung von Brüchen das konzeptuelle Wissen nicht hinter dem prozeduralen zurückstehen darf – explizit auch für die Grundrechenarten (z. B. Prediger, 2006; Winter, 1999). Dennoch wurde bislang kaum diskutiert, in welcher Weise Rechenfertigkeiten zu Brüchen notwendig sind. So wird auch im Hinblick darauf, dass Brüche grundlegend für Termumformungen (insbesondere von Bruchtermen) in der Algebra der Sekundarstufe I sind, zumindest in der deutschsprachigen Diskussion nicht explizit zwischen prozeduralem und konzeptuellem Wissen unterschieden (vgl. Padberg & Wartha, 2017, S. 7 ff.). Auch wird nur selten genannt, dass in der Analysis der Sekundarstufe II konzeptuelles Wissen zu Brüchen beispielsweise Voraussetzung für ein Verständnis des Differenzenquotienten und die Berechnung einfacher Grenzwerte ist. Es erscheint deshalb angebracht, die Zieldiskussion bezüglich der Behandlung von Brüchen neu und differenzierter zu führen.

Anmerkungen

[1] Die Verzeichnisse der in den Bundesländern zugelassenen Schulbücher sind zugänglich über den Deutschen Bildungsserver unter http://www.bildungsserver.de/ Zugelassene-Lernmittel-und-Schulbuecher-522.html [14.09.2018]

[2] Die in der Stichprobe erfassten Schulbücher unterscheiden sich im Hinblick auf die Zielgruppe, den Entstehungszeitraum und die Konzeption. „Lambacher Schweizer" (gymnasial) und „Schnittpunkt" (nicht-gymnasial) als tradierte Werke, „Mathe live" (nicht-gymnasial) und „Neue Wege" (gymnasial) als Schulbücher, die im Rahmen der Reformbewegung der 2000er Jahre neu konzipiert wurden und „Mathewerkstatt" (nicht-gymnasial) als Schulbuch, das im Rahmen von Unterrichtsentwicklungsforschung entstanden ist.

Danksagung

Wir danken den gutachtenden Personen für die hilfreichen und konstruktiven Anmerkungen und Kommentare.

Literatur

Anderson, J. R., Funke, J., Neuser-von Oettingen, K. & Plata, G. (Hrsg.) (2013). *Kognitive Psychologie*. 7. Auflage. Berlin: Springer.

Anderson, L. W. & Krathwohl, D. R. (Hrsg.) (2001). *A taxonomy for learning, teaching, and assessing. A revision of Bloom's taxonomy of educational objectives.* New York: Longman.

Alajmi, A. (2012). How do elementary textbooks address fractions? A review of mathematics textbooks in the USA, Japan, and Kuwait. *Educational Studies in Mathematics 79*(2), 239–261. doi: 10.1007/s10649-011-9342-1.

Backhaus, M., Bernhard, I., Böttner, J., Fechner, G., Malzacher, W., Olpp, A., Stöckle, C., Straub, T. & Wellstein, H. (2015). *Schnittpunkt Mathematik*. Stuttgart: Klett.

Baroody, A. J. (2003). The development of adaptive expertise and flexibility: The integration of conceptual and procedural knowledge. In A. J. Baroody (Hrsg.), *The development of arithmetic concepts and skills. Constructing adaptive expertise* (S. 1–33), Mahwah NJ u. a.: Erlbaum.

Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T. & Prediger, S. (2012). Nachhaltig lernen durch aktives Systematisieren und Sichern. M. Ludwig & M. Kleine (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 93–96), Münster: WTM.

Baum, M., Bellstedt, M., Buck, H., Dürr, R., Freudigman, H. & Haug, F. (2005). *Lambacher Schweizer 2. Mathematik für Gymnasien*. Stuttgart: Klett.

Behr, M., Lesh, R. A., Post, T. R. & Silver, E. (1983). Rational number concepts. In R. A. Lesh & M. Landau (Hrsg.), *Acquisition of mathematics concepts and processes*. (S. 92–127), New York: Academic Press.

Bempeni, M., Poulopoulou, S., Tsiplaki, I. & Vamvakoussi, X. (2018). Individual differences in fractions' conceptual and procedural knowledge: what about older students? In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg & L. Sumpter (Hrsg.), *PME 42* (Vol. 2, S. 147–154). Umeå, Schweden: PME.

Bölsterli Bardy, K. (2015). *Kompetenzorientierung in Schulbüchern für die Naturwissenschaften. Eine Analyse am Beispiel der Schweiz*. Wiesbaden: Springer Spektrum. doi: 10.1007/978-3-658-10251-7.

Böer, H., Kliemann, S., Mallon, C., Puscher, R., Segelken, S., Schmidt, W., Trapp, M., Vernay, R. (2007). *Mathe live 7*. *Mathematik für die Sekundarstufe 1.* Stuttgart: Klett.

Bruder, R. (1991). Unterrichtssituationen – ein Modell für die Aus- und Weiterbildung zur Gestaltung von Mathematikunterricht. *Wissenschaftliche Zeitschrift der Brandenburgischen Landeshochschule Potsdam 2*, 129–134.

Bruner, J., Olver, R. & Greenfield, P. (1971). *Studien zur kognitiven Entwicklung*. Stuttgart: Klett.

Byrnes, J. P. & Wasik, B. A. (1991). Role of conceptual knowledge in mathematical procedural learning. *Developmental psychology 27*(5), 777–786. doi: 10.1037/0012-1649.27.5.777.

Cady, J., Collins, L. & Hodges, T. (2015). A comparison of textbooks´ presentation of fraction. *School, Science and Mathematics 115*(3), 105–116.

Carney, R. & Levin, J. (2002). Pictorial illustrations still improve students' learning from text. *Educational Psychology Review 14*(1), 101–120.

Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H.-Y. & Mesa, V. (2010). A comparative analysis of the addition and subtraction of fractions in textbooks from three countries. *Mathematical Thinking and Learning 12*(2), 117–151. doi: 10.1080/10986060903460070.

Charalambous, C. Y. & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics 64*(3), 293–316. doi: 10.1007/s10649-006-9036-2.

Chen, J. (2002). Reforming textbooks, reshaping school knowledge: Taiwan's textbook deregulation in the 1990s. *Pedagogy, Culture & Society 10*(1), 39–72. doi: 10.1080/14681360200200129.

Cramer, K. A. & Henry, A. (2002). Using manipulative models to build number sense for addition of fractions. In B. Litwiller & G. Bright (Hrsg.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (S. 41–48). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Cramer, K. A., Post, T. R. & del Mas, R. C. (2002). Initial fraction learning by fourth- and fifth-grade students. A comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the rational number project curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education 33*(2), 111–144. doi: 10.2307/749646.

Cramer, K. A. & Wyberg, T. (2009). Efficacy of different concrete models for teaching the part-whole construct for fractions. *Mathematical Thinking and Learning 11*(4), 226–257.

Crooks, N. M. & Alibali, M. W. (2014). Defining and measuring conceptual knowledge in mathematics. *Developmental Review 34*(4), 344–377. doi: 10.1016/j.dr.2014.10.001.

de Jong, T. & Ferguson-Hessler, M. (1996). Types and qualities of knowledge. *Educational Psychologist 31*(2), 105–113. doi: 10.1207/s15326985ep3102_2.

Deliyianni, E., Panaoura, A., Elia, I. & Gagatsis, A. (2008). A structural model for fraction understanding related to representations and problem solving. In O. Figueras & A. Sepúlveda (Hrsg.), *PME 32* (Vol. 2, S. 399–406). Morelia, Michoacán, Mexiko: PME.

Döring, N. & Bortz, J. (2016). *Forschungsmethoden und Evaluation in den Sozial- und Humanwissenschaften*. 5. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer.

Dreher, A. (2013). Den Wechsel von Darstellungsformen fördern und fordern oder vermeiden? In J. Sprenger, A. Wagner & M. Zimmermann (Hrsg.), *Mathematik lernen, darstellen, deuten, verstehen: Didaktische Sichtweisen vom Kindergarten bis zur Hochschule* (S. 227–237). Wiesbaden: Springer.

Dreher, A., Kuntze, S. & Winkel, K. (2014). Empirical study of a competence structure model regarding conversions of representations. In C. Nicol, P. Liljedahl, S. Oesterle & D. Allan (Hrsg.), *PME 38* (Vol. 2, S. 425–432). Vancouver, Kanada: PME.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics 61*(1-2), 103–131. doi: 10.1007/s10649-006-0400-z.

Duval, R. (2002). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In H. Fernando (Hrsg.), *Representa-*

tions and mathematics visualization (S. 311–336). Mexico-City: Cinvestav-IPN.

Duval, R. (2014). Commentary: Linking epistemology and semio-cognitive modeling in visualization. *ZDM Mathematics Education 46*(1), 159–170. doi: 10.1007/ s11858-013-0565-8.

Eichelmann, A., Narciss, S., Schnaubert, L. & Melis, E. (2012). Typische Fehler bei der Addition und Subtraktion von Brüchen – Ein Review zu empirischen Fehleranalysen. *Journal für Mathematik-Didaktik 33*(1), 29–57. doi: 10.1007/s13138-011-0031-5.

English, L. & Halford, G. (1995), *Mathematics education. Models and processes*. New York: Routledge.

Gabriel, F., Coché, F., Szucs, D., Carette, V., Rey, B. & Content, A. (2013). A componential view of children's difficulties in learning fractions. *Frontiers in Psychology* 4, 1–12. doi:10.3389/fpsyg. 2013.00715.

Gagatsis, A. & Elia, I. (2004). The effects of different modes of representation on mathematical problem solving. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Hrsg.), *PME 28 (Vol. 2,* S. 447–454). Bergen, Norwegen: PME.

Geary, D. C. (2004). Mathematics and learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities 37*(1), 4–15. doi: 10.1177/00222194040370010201.

Geary, D. C. et al. (Hrsg.) (2008). *The final report of the national mathematics advisory panel*. Washington DC: U.S. Department of Education.

Goldin, G. & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. In A. Cuoco & F. Curcio (Hrsg.), *The roles of representation in school mathematics* (S. 1–12). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Gwet, K. L. (2012). *Handbook of inter-rater reliability: The definitive guide to measuring the extent of agreement among multiple raters*. Gaithersburg: Advanced Analytics, LLC.

Haggarty, L. & Pepin, B. (2002). An investigation of mathematics textbooks and their use in english, french and german classrooms: Who gets an opportunity to learn what? *British Educational Research Journal 28*(4), 567–590. doi: 10.1080/01411 9202200000 5832.

Hannula, M. (2003). Locating fractions on a number line. In N. A. Pateman, B. Dougherty & J. T. Zilliox (Hrsg.), *PME 27* (Vol. 3, S. 17–24). Honolulu, Hawaii: PME.

Hecht, S. A. (1998). Toward an information-processing account of individual differences in fraction skills. *Journal of Educational Psychology 90*(3), 545–559. doi: 10.1037//0022-0663.90.3.545.

Hecht, S. A., Close, L. & Santisi, M. (2003). Sources of individual differences in fraction skills. *Journal of experimental child psychology 86*(4), 277–302. doi: 10.1016/j.jecp.2003.08.003.

Hecht, S. A. & Vagi, K. J. (2010). Sources of group and individual differences in emerging fraction skills. *Journal of Educational Psychology 102*(4), 843–859. doi: 10.1037/a0019824

Heinze, C. (2005). Das Schulbuch zwischen Lehrplan und Unterrichtspraxis: Zur Einführung in den Themenband. In E. Matthes & C. Heinze (Hrsg.), *Das Schulbuch zwischen Lehrplan und Unterrichtspraxis* (S. 9–17). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Hiebert, J., et al. (2003). *Teaching mathematics in seven countries: Results from the TIMSS video study*. Washington, DC: U.S. Department of Education.

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Hrsg.), *Conceptual and procedural knowledge. The case of mathematics* (S. 1–27). Hillsdale N. J. u .a.: Erlbaum.

Jordan, A., et al. (2006). *Klassifikationsschema für Mathematikaufgaben: Dokumentation der Aufgabenkategorisierung im COACTIV-Projek*t. Materialien aus der Bildungsforschung: Nr. 81. Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung.

Jordan, A., et al. (2008). Aufgaben im COACTIV-Projekt: Zeugnisse des kognitiven Aktivierungspotentials im deutschen Mathematikunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik 29*(2), 83–107. doi: 10.1007/ BF03339055

Keijzer, R. & Terwel, J. (2003). Learning for mathematical insight. A longitudinal comparative study on modelling. *Learning and Instruction 13*(3), 285–304. doi: 10.1016/S0959-4752(02)00003-8.

Kieren, T. E: (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In R. A. Lesh (Hrsg.), *Number and measurement* (S.101–150). Columbus, OH: Eric/SMEAC.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (Hrsg.) (2001). *Adding it up. Helping children learn mathematics.* Washington, DC: National Academy Press.

Kliemann, S., Mallon, C., Puscher, R., Segelken, S., Schmidt, W., Trapp, A. & Vernay, R. (2007). *Mathe live 6. Mathematik für die Sekundarstufe*. Stuttgart: Klett.

Kolovou, A., van den Heuvel-Panhuizen, M. & Bakker, A. (2009). Non-routine problem solving tasks in primary school mathematics textbooks – A needle in a haystack. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education 8(*2), 31–68.

Kuntze, S. (2013). Vielfältige Darstellungen nutzen im Mathematikunterricht. In J. Sprenger, A. Wagner & M. Zimmermann (Hrsg.), *Mathematik lernen, darstellen, deuten, verstehen. Didaktische Sichtweisen vom Kindergarten bis zur Hochschule* (S. 17–33). Wiesbaden: Springer.

Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In F. Lester (Hrsg.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning. A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (S. 629–677). Charlotte, NC: Information Age Pub.

Lergenmüller, A. & Schmidt, G. (2005). *Neue Wege 2. Arbeitsbuch für Gymnasien.* Braunschweig: Schroedel.

Lesh, R., Post, T. & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Hrsg.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (S. 33–40). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Leuders, T. (2014). Aufgaben in Forschung und Praxis. Aufgabenklassifikationen und Aufgabenforschung aus fachdidaktischer Perspektive. In B. Ralle, S. Prediger, M. Hammann & M. Rothgangel (Hrsg.), *Lernaufgaben entwickeln, bearbeiten und überprüfen: Ergebnisse und Perspektiven fachdidaktischer Forschung* (S. 33–50). Münster: Waxmann.

Leuders, T. (2016). Multiple Ziele im Mathematikunterricht. *Unterrichtswissenschaft 44*(5), 252–266.

Levin, J. R., Anglin, G. J., & Carney, R. N. (1987). On empirically validating functions of pictures in prose. In D. M. Willows & H. A. Houghton (Hrsg.), *The psychology of illustration: basic research* (S. 51–85). New York: Springer.

Lortie-Forgues, H., Tian, J. & Siegler, R. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult? *Developmental Review 38, 201–221.* doi: 10.1016/j.dr. 2015.07. 008.

Malle, G. (2004). Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. *Mathematik lehren* (123), 4–8.

Mayer, D., Mullens, J. & Moore, M. (2000). *Monitoring school quality - An indicators report*. Washington DC: National Center for Education Statistics, U.S. Department of Education.

Mayring, P. (2015). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken.* Weinheim: Beltz.

Moss, J. & Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers. A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education 30*(2), 122. doi: 10.2307/ 749607.

Ni, Y. (2001). Semantic domains of rational numbers and the acquisition of fraction equivalence. *Contemporary educational psychology 26*(3), 400–417. doi: 10.1006/ ceps.2000.1072.

Obersteiner, A., Dresler, T., Bieck, S. M. & Moeller, K. (2019). Understanding fractions: Integrating results from mathematics education, cognitive psychology, and neuroscience. In A. Norton & M. W. Alibali (Hrsg.), *Constructing number: Merging perspectives from psychology and mathematics education* (S. 135–162). New York: Springer.

Oelkers, J. & Reusser, K. (2008). *Expertise: Qualität entwickeln, Standards sichern, mit Differenz umgehen.* Bonn u. a.: BMBF.

Padberg, F. & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Bruchrechnung* (5. Aufl.). Berlin: Springer Spektrum.

Pepin, B. & Haggarty, L. (2001). Mathematics text books and their use in english, french and german classrooms: a way to understand teaching and learning cultures. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 33*(5), 158–175.

Prediger, S. (2006). Vorstellungen zum Operieren mit Brüchen entwickeln und erheben. Vorschläge für vorstellungsorientierte Zugänge und diagnostische Aufgaben. *Praxis der Mathematik in der Schule 48*(11), 8–12.

Prediger, S. (2012). Why Jonny can’t apply multiplication? Revisiting the choice of operations with fractions. *International Electric Journal of Mathematics Education 6*, 65–88.

Prediger, S., Barzel, B., Leuders, T. & Hußmann, S. (2011). Systematisieren und Sichern. Nachhaltiges Lernen durch aktives Ordnen. *Mathematik lehren* (164), 2–9.

Prediger, S., Barzel, B., Hußmann, S. & Leuders, T. (Hrsg.) (2013). *Mathewerkstatt 2*. Berlin: Cornelsen.

Prediger, S., Hußmann, S., Leuders, T. & Barzel, B. (2014). Kernprozesse – Ein Modell zur Strukturierung von Unterrichtsdesign und Unterrichtshandeln. In I. Bausch, G. Pinkernell & O. Schmitt (Hrsg.), *Unterrichtsentwicklung und Kompetenzorientierung* (S. 81–92). Münster: WTM.

Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In A. Gutiérrez & P. Boero (Hrsg.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education past, present and future* (S. 205–235). Rotterdam, Taipei: Sense Publishers.

Rau, M. A., Aleven, V. & Rummel, N. (2009). Intelligent tutoring systems with multiple representations and self-explanation prompts support learning of fractions. In V. Dimitrova, R. Mizoguchi & B. du Boulay (Hrsg.), *Proceedings of the 14th International Conference on Artificial Intelligence in Education* (S. 441–448). Amsterdam: IOS Press.

Rau, M. A., Aleven, V. & Rummel, N. (2013). Complementary effects of sense-making and fluency-building support for connection making: A matter of sequence? In H. Lane, K. Yacef, J. Mostow & P. Pavlik (Hrsg.), *Artificial intelligence in education* (S. 329–338). Berlin, Heidelberg: Springer.

Remillard, J., Herbel-Eisenmann, B. & Loyd, G. (Hrsg.) (2012). *Mathematics teachers at work. Connecting curriculum materials and classroom instruction*. New York: Routledge.

Rezat, S. (2009). *Das Mathematikbuch als Instrument des Schülers. Eine Studie zur Schulbuchnutzung in den Sekundarstufen.* Wiesbaden: Vieweg und Teubner.

Rittle-Johnson, B. & Schneider, M. (2015). Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. In R. Cohen Kadosh & A. Dowker (Hrsg.): *Oxford handbook of numerical cognition* (S. 1102–1118). Oxford, NY: Oxford University Press.

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S. & Alibali, M. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics. An iterative process. *Journal of Educational Psychology 93*(2), 346–362. doi: 10.1037/0022-0663.93.2.346.

Schmitz, A. (2017). *Beliefs von Lehrerinnen und Lehrern der Sekundarstufen zum Visualisieren im Mathematikunterricht.* Wiesbaden: Springer.

Schneider, M. & Stern, E. (2010). The developmental relations between conceptual and procedural knowledge: A multimethod approach. *Developmental psychology 46*(1), 178–192.

Schnotz, W. (2010). Visuelles Lernen. In D. Rost (Hrsg.), *Handwörterbuch Pädagogische Psychologie* (S. 927–934). Weinheim: Beltz.

Siegler, R. S. & Lortie-Forgues, H. (2015). Conceptual knowledge of fraction arithmetic. *Journal of Educational Psychology 107*(3), 909–918. doi: 10.1037/ edu0000025.

Siegler, R. S. & Lortie-Forgues, H. (2017): Hard lessons: Why rational number arithmetic is so difficult for so many people. *Current Directions in Psychololological Science 26*(4), S. 346–351. doi: 10.1177/096372141 7700129.

Siegler, R. S., Thompson, C. & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive psychology 62(4*), 273–296. doi: 10.1016/j.cogpsych.2011.03.001.

Siegler, R. S. & Pyke, A. (2013). Developmental and individual differences in understanding of fractions. *Developmental psychology 49*(10), 1994–2004. doi: 10.1037/a0031200.

Slough, S. W. & McTigue, E. (2013). Development of the graphical analysis protocol (GAP) for eliciting the graphical demands of science textbooks. In M. S.

Khine (Hrsg.), *Critical analysis of science textbooks. Evaluating instructional effectiveness* (S. 17–30). Dordrecht: Springer Netherlands.

Son, J. & Senk, S. (2010). How reform curricula in the USA and Korea present multiplication and division of fractions. *Educational Studies in Mathematics 74*(2), 117–142. doi: 10.1007/s10649-010-9229-6.

Star, J. R. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education 36*(5), 404–411. doi: 10.2307/30034943.

Star, J. R. & Stylianides, G. J. (2013). Procedural and conceptual knowledge: Exploring the gap between knowledge type and knowledge quality. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education 13(*2), 169–181.

Valverde, G., Bianchi, L., Wolfe, R., Schmidt, W. & Houang, R. (2002). *According to the book. Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks*. Dordrecht: Springer Netherlands. doi: 10.1007/ 978-94-007-0844-0.

Vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte.* Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Wartha, S. & Wittmann, G. (2009). Lernschwierigkeiten im Bereich der Bruchrechnung und des Bruchzahlbegriffs. In A. Fritz & S. Schmidt (Hrsg.), *Fördernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden* (S. 73–108). Weinheim: Beltz.

Wearne, D. & Hiebert, J. (1989). Cognitive changes during conceptually based instruction on decimal fractions. *Journal of Educational Psychology 81*(4), 507–513. doi: 10.1037/0022-0663.81.4.507.

Winter, H. (1999). *Mehr Sinnstiftung, mehr Einsicht, mehr Leistungsfähigkeit*, dargestellt am Beispiel der Bruchrechnung. Manuskript zum BLK-Programm „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts“. Online unter http://blk.mat.uni-bayreuth.de/material/db/37/bruchrechnung.pdf [20.03.2019].

Wirtz, M. & Kutschmann, M. (2007). Analyse der Beurteilerübereinstimmung für kategoriale Daten mittels Cohens Kappa und alternativer Maße. *Die Rehabilitation 46*, 1–8.

Yang, D., Reys, R. & Wu, L. (2010). Comparing the development of fractions in the fifth- and sixth-graders' textbooks of Singapore, Taiwan, and the USA. *School, Science and Mathematics 110*(3), 118–127.

Zech, F. (1998). *Grundkurs Mathematikdidaktik. Theoretische und praktische Anleitungen für das Lehren und Lernen von Mathematik*. 9. Aufl. Weinheim: Beltz.

Zhang, X., Clements, M. & Ellerton, N. (2005). Engaging students with multiple models of fractions. *Teaching Children Mathematics 22*(3), 138–147.

Anschrift der Verfasser*innen

Katja Lenz, Gerald Wittmann, Lars Holzäpfel
Pädagogische Hochschule Freiburg
Institut für Mathematische Bildung
Kunzenweg 21
79117 Freiburg
katja.lenz@ph-freiburg.de
gerald.wittmann@ph-freiburg.de
lars.holzäpfel@ph-freiburg.de