Mathematiklernen beim Einsatz eines mathematischen Instruments. Das Wahrnehmen von Ideen und die Entwicklung eines Ideenkonglomerats am Beispiel des Parabelzirkels von Frans van Schooten

CHRISTIAN VAN RANDENBORGH, BIELEFELD

***Zusammenfassung**:*
Der vorliegende Beitrag will zeigen, dass die Untersuchung von historischen Zeichengeräten grundlegende Einsichten in aktuelle didaktische Themen bietet. So werden im Verlauf des Artikels z. B. Bezüge zum Modellieren herausgearbeitet. Es wird der Begriff des Ideenkonglomerats vorgestellt und in Beziehung zum Konzept der instrumentellen Genese gesetzt. Zentrale Ergebnisse einer empirischen Studie, die der Frage nachging, welche Lernprozesse beim Einsatz und Bildung eines Ideenkonglomerats auftreten und wie die instrumentelle Genese eines Zeichengeräts stattfindet, werden zusammengefasst.
Dadurch können Anregungen für einen medienbasierten Mathematikunterricht entwickelt werden.

Abstract:
The present article aims to show that the investigation of historical drawing instruments offers basic insights into current didactic topics. In the course of the article, references to modeling are worked out. The concept of a conglomerate of ideas is introduced and placed in relation to the theory of instrumental genesis. Important results of an empirical study are summarized. Two key questions of the study were: Which learning processes happen when using and forming an idea-conglomerate in the classroom? How does the instrumental genesis of a drawing device take place?
Finally, suggestions for a media-based mathematics education are given.

1. Einleitung

Im Mittelpunkt des Artikels steht ein historisches Zeichengerät aus dem 17. Jahrhundert. Der Parabelzirkel von Frans van Schooten Jr. (1646) wurde in einer bestimmten (mathematik-)historischen Situation mit einer konkreten Absicht erschaffen. Er entstand im Kontext der Herausbildung und Verbreitung der kartesischen Geometrie. Instrumente tragen eine theoretische und eine praktische Seite in sich. Dabei zeigt sich, dass das theoretische Interesse (fast) immer im Vordergrund stand oder zumindest stets ein entscheidender Ausgangspunkt für diese war (vgl. van Randenborgh, 2015a, S.14 ff).

Werkzeuge werden auch heute noch als bedeutend für die Entwicklung des Denkens und umgekehrt als materieller Ausdruck von Denkprozessen aufgefasst. Im Unterricht sollen Denkprozesse angestoßen werden. Dieses ist zumindest ein wichtiges Ziel, das in unterschiedlichen Fachdidaktiken mit der Forderung einer *kognitiven Aktivierung* umschrieben wird. Für den Mathematikunterricht heben das etwa Ufer, Heinze und Lipowski (2015, S. 419) hervor.
Vollrath (2013) beschreibt die Erstbegegnung mit einem unbekannten Instrument so:

> Sehen wir ein uns unbekanntes Instrument, so fragen wir: Was für ein Instrument ist das? Was macht man damit? Wie geht man mit ihm um? Oder vielleicht noch anspruchsvoller: Warum funktioniert es? Welche Idee liegt ihm zugrunde? … Wenn ich in diesem Zusammenhang von Ideen spreche, dann sehe ich dies im Kontext des Problemlösens. Damit sind Einfälle, Gedanken und Vorstellungen gemeint, wie die Lösung aussehen könnte. Und am fertigen Instrument lässt die Art der Lösung dann meist auch die zugrundeliegenden Ideen erkennen. Mathematische Instrumente lösen mathematische Probleme auf praktische Weise. (Vollrath, 2013, S. 5)

Bereits hier wird das mathematik-didaktische Potenzial eines solchen Prozesses deutlich. Der Einsatz eines unbekannten Geräts im Unterricht liefert eine Problemstellung, die zur mathematischen Idee des Geräts und so zum mathematischen Kern der Unterrichtsstunde führt. Wird es im Unterricht analysiert, führt die Erklärung seiner Bau- und Funktionsweise zu der in ihm verborgenen Mathematik. Das ist der Grund, warum dieses Gerät im Mathematikunterricht untersucht wird. Würde es beispielsweise im Kunst- oder Geschichtsunterricht betrachtet, wäre der Beschäftigungsschwerpunkt ein anderer. Beim hier vorgestellten Einsatz ist die prozessbezogene Kompetenz des Argumentierens entscheidend. Daher scheint ein solches Gerät besonders dafür geeignet zu sein, eine kognitive Aktivierung der Lernenden zu initiieren und die Lernenden zu Denkprozessen anzuregen.

Im Mathematikunterricht wurden und werden Instrumente eingesetzt – heute allerdings oft digitale Technologien (z. B. graphikfähige Taschenrechner, dynamische Geometriesoftware oder Tabellenkalkulationen). Reale Zeichengeräte werden in Form von Zirkeln, Linealen und Geodreiecken auch weiterhin verwendet. Sie sind fester Bestandteil der Lehrpläne.

Wird ein Zeichengerät im heutigen Mathematikunterricht mit dem Ziel eingesetzt, die in ihm verborgene Mathematik von den Lernenden entdecken zu lassen, kann man von einer besonderen Art des (instrumentellen) Lernens sprechen. Die mathematikdidaktische Relevanz einer derartigen Beschäftigung liegt einerseits an der Möglichkeit eines enaktiven Zugangs. Andererseits können auch gerade mit Blick auf den Einsatz digitaler Technologien im Mathematikunterricht die Beobachtungen von Lernprozessen mit realen und digitalen Zeichengeräten weiterführend sein. Denn über den Vergleich des Zugangs zur inhärenten Mathematik und den Wegen ihres Sichtbarwerdens in den Lernwegen der Schülerinnen und Schüler kann deutlich werden, worauf beim Einsatz einer digitalen Lernumgebung geachtet werden sollte, um zielführende Lernprozesse zu initiieren.

Letztlich geht es um Fragestellungen wie: Wie findet Mathematiklernen beim Einsatz von Geräten statt? Welches Potenzial bietet ein Instrument für mathematische Lernprozesse?

2. Die Bedeutung von Instrumenten für das Lernen von Mathematik

Zeichengeräte sind mathematische Instrumente. In allen Gebieten der Mathematik und in allen Altersstufen vom Kindergarten bis zur Universität haben Instrumente eine große Bedeutung. Im Bereich der Arithmetik lernen Kinder beispielsweise Zahlen und das Rechnen mit diesen oft mit einem Abakus (Rechenrahmen) kennen. Diese Zugangsweise ist offensichtlich sogar geeignet, um Lernenden mit Rechenschwierigkeiten bei der Entwicklung eines Zahlbegriffs, von Grundvorstellungen und den Operationen mit Zahlen zu unterstützten (Wartha & Schulz, 2014). Das Instrument ist somit ein wichtiges Hilfsmittel zum Lernen von Mathematik.

Im Geometrieunterricht werden verschiedenen Lineale bzw. Schablonen (z. B. für Parabeln), ein Geodreieck und der Zirkel eingesetzt. Mit Hilfe von Instrumenten wird mindestens seit der Antike konstruiert. Der Zirkel gilt sogar als das Werkzeug eines Mathematikers (s. Aristophanes, Die Wolken oder Die Vögel, 423 bzw. 414 v. Chr. uraufgeführt). Euklid legt Zirkel und Lineal als einzige Konstruktionswerkzeuge fest (vgl. Davis & Hersh, 1981, S. 13). Doch dieses geschieht implizit. Denn er spricht zwar davon, einen Kreis zu zeichnen (κυκλος γεγραφθω, so z. B. in Euklids Elementen, Buch I, §2), aber wie bzw. womit ein solcher gezeichnet werden soll, wird nicht thematisiert. Seine ersten drei Postulate sind aber so formuliert, dass sie Zirkel und Lineal als einzige zulässige geometrische Werkzeuge implizit festlegen (van Randenborgh, 2015a, S. 15 ff). Dieses führte einerseits zu einer intensiven und langen Beschäftigung mit den drei klassischen Problemen der Antike und andererseits zur Erfindung neuer Werkzeuge (vgl. Ludwig & Schelldorfer, 2015, S. 4).

Seit dem Herausbilden einer mathematischen Disziplin bis zur heutigen Zeit werden Instrumente im Kontext des Entdeckens, Verstehens und Anwendens von Mathematik gebraucht. In der Geschichte der Geometrie, Mechanik oder Landvermessung wurden immer wieder neue Geräte erfunden, die im heutigen Mathematikunterricht eingesetzt, interessante mathematische Entdeckungen erlauben. Einige Beispiele und ihr Einsatz in verschieden Jahrgangsstufen finden sich etwa bei Ludwig und Schelldorfer (2015).

Die besondere Bedeutung, die mathematische Instrumente in verschieden Berufsfeldern, wie Architektur, Handwerk, Nautik und Wirtschaft, oder den Wissenschaften, wie Archäologie oder Astronomie, auch heute noch haben, ist ein wichtiger Aspekt. Darüber hinaus sind Instrumente mit dem »Betreiben« und Denken von Mathematik aufs Engste verbunden.

> Zählen, Rechnen, Messen und Konstruieren sind die Wurzeln, aus denen die Mathematik erwachsen ist. Zwar spielt sich das Wesentliche dabei im Denken des Menschen ab, doch im praktischen Vollzug werden Hilfen beim Rechnen verwendet, wird mit Instrumenten gemessen und mit Werkzeugen gezeichnet. (Vollrath, 2013, Buchrücken)

Ludwig und Schelldorfer (2015) wägen Vor- und Nachteile des Einsatzes von Werkzeugen im Unterricht ab und kommen zu einer positiven Bilanz. Dem schließe ich mich an und möchten an dieser Stelle nur vier mir wichtig erscheinende Aspekte hervorheben. Der Unterrichtseinsatz eines unbekannten Zeichengeräts weckt die Neugier der Lernenden (*motivationaler Aspekt*). Die genauere Beschäftigung führt zur verborgenen Mathematik, zu der ein handlungsorientierter, enaktiver Zugang ermöglicht wird (*methodischer Aspekt*). Neben den dazu erforderlichen inhaltsbezogenen Kompetenzen werden auch prozessbezogene, z. B. Argumentieren oder Problemlösen, benötigt (*mathematischer Aspekt*). Darüber hinaus sind durch mathematische Geräte immer mathematik-historische Aspekte vorgegeben. Beim hier vorgestellten Gerät ist es das 17. Jahrhundert. In dieser Zeit wird gerade auch bei René Descartes (1596 – 1650) die enge und wechselseitige Verbindung von theoretischem Denken und praktischem Gebrauch von Geräten deutlich. In seiner Géométrie (1637) beschäftigt sich Descartes mit der geometrischen Erzeugung von Kurven und er gibt drei Kriterien dafür an. Er möchte Kurven als »geometrisch« bezeichnen, wenn sie durch eine kontinuierliche Bewegung (1) gewonnen wurden, eine punktweise Konstruktion (2) angegeben werden kann oder es eine bestimmte Fadenkonstruktion (3) gibt. Dabei scheint die beste Art der Erzeugung für Descartes die kontinuierliche Bewegung zu sein. Bei diesem Kriterium spielen Zeichengeräte eine besondere Rolle. Darüber hinaus erfindet er »neue Zirkel«, die für ihn eine besondere

Zugangsweise zu bestimmten Eigenschaften von Kurven zu seien scheinen. Die dabei gewonnenen Erkenntnisse lassen sich dann in Gleichungen zusammenfassen. Aber eine Gleichung als solche scheint ihm nicht auszureichen, um eine Kurve vollständig zu erfassen, es ist eine Methode der Erzeugung erforderlich (vgl. Bos, 1981). Geht man in dieser Richtung einen Schritt weiter, würde es in der Konsequenz bedeuten, dass jede Kurve mit einer algebraischen Gleichung mit Hilfe eines Zeichengeräts zu erzeugen sei. Ein Beweis dafür gelingt zwar erst im 19. Jahrhundert durch Kempe (1876), aber im 17. und 18. Jahrhundert wird die Kurvenerzeugung durch eine kontinuierliche Bewegung mit Hilfe eines Zeichengeräts zunehmend wichtiger. Ja es kommt sogar zu der Entwicklung der sogenannten *organischen Geometrie*. Dabei kommt das Wort organisch aus dem Griechischen (οργανον) und bedeutet Werkzeug. Es handelt sich also um eine durch Werkzeuge entwickelte Geometrie, bei der insbesondere Gelenkmechanismen eine wichtige Rolle spielen.

3. Theoretische Grundlagen

Der Blick in die Literatur zeigt, dass es zwei erprobte theoretische Zugangsweisen zur Analyse von mathematischen Lernprozessen beim Einsatz von Geräten gibt. Hier ist zunächst die Theorie der *instrumentellen Genese* (Kap. 3.2) zu nennen, die v. a. im Rahmen des Einsatzes digitaler Technologien weiterentwickelt wurde (Trouche, 2005a). Außerdem wurde das Modell der *semiotischen Vermittlung* (Kap. 3.3) bei unterschiedlichen Geräten und Altersstufen der Lernenden angewandt (z. B. Bartolini Bussi & Mariotti, 2008). Darüber hinaus habe ich in Anlehnung an Vollrath (2003) den ***Begriff des Ideenkonglomerats*** entwickelt (van Randenborgh, 2012). Dieser soll nun zunächst vorgestellt und im Kontext der beiden Theorien eingeordnet werden.

3.1 Der Begriff des Ideenkonglomerats

Betrachten wir zunächst *den Begriff des Konglomerats*. Er stammt vom lateinischen Wort *conglomerare* – zusammenballen. In der Geologie versteht man dementsprechend unter einem Konglomerat ein Gestein, das aus einzelnen Steinbestandteilen zu einem Ganzen zusammengeballt ist. Die einzelnen Bestandteile sind durch eine Art Mörtel fest miteinander verkittet. Dieses Gebilde wird Konglomerat genannt. Ein *Ideenkonglomerat* besteht dementsprechend aus Ideen, die zu einem solchen Gebilde miteinander verwoben sind. Mit Hilfe des Begriffs des Ideenkonglomerats lässt sich ein historisches Zeichengerät als ein *Gebilde* auffassen. Es ist etwas, was vor einiger Zeit (hier im 17. Jahrhundert) gebildet worden ist und bestimmte Ideen enthält. Anders aber als in der Geologie, ist dieser Bildungsprozess nicht endgültig abgeschlossen. Denn im Augenblick der Beschäftigung mit einem Zeichengerät entstehen eigene Ideen des Betrachters. Hierin liegt eine Analogie zum Erfassen eines Gedichts. Eine entsprechende Sicht scheint etwa Bobrowski (1987) zu vertreten:

> […] dieses Gedicht, dieses lyrische Gebilde erfassen wir mit unseren Sinnen. Indem wir lesen […] ergreift es uns über die Sinne, die Organe der Wahrnehmung […]. (Bobrowski, 1987, S. 424 f.)

Dabei wird ein Gedicht von ihm verstanden als ein

> komplexes Gebilde, in dem sich Inhalt, Sprachführung, Lautstand, rhythmische Bewegung usw. miteinander unlösbar verbunden haben. So unlösbar, dass die einzelnen Elemente nicht austauschbar sind. (ebd.)

Der Begriff des Ideenkonglomerats muss nun zeigen, welche einzelnen Elemente bei einem Zeichengerät angegeben werden können und wie diese miteinander verbunden sind. Darüber hinaus soll er es ermöglichen, dem Phänomen gerecht zu werden, dass ein historisches Zeichengerät einerseits in der Vergangenheit gebildet worden ist und andererseits im Augenblick der Auseinandersetzung, z. B. im Mathematikunterricht, gebildet wird.

Das Wort *Element* weist, zumindest in der Sprache der Mathematik, auf den Begriff der *Menge* hin. Hier ist die von Cantor gegebene Definition (der sog. naiven Mengenlehre) hilfreich:

> Unter einer ‚Menge' verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen 0bjecten m unsrer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente' von M genannt werden) zu einem Ganzen (Cantor, 1895, S.481)

Ein in diesem Zusammenhang wichtiger Aspekt findet sich in der Umschreibung des Mengenbegriffs bei Hausdorff (1914). Er formuliert:

> Eine Menge ist eine Zusammenfassung von Dingen zu einem Ganzen, d. h. zu einem neuen Ding. (Hausdorff 1914, S.1)

Damit wird erfasst, dass ein Ideenkonglomerat etwas Neues ist. Es werden mit ihm unterschiedliche Ideen zu einem *neuen Ganzen* zusammengefasst. An dieser Stelle soll nicht auf die philosophische Diskussion des Ideenbegriffs eingegangen werden, sondern es sollen nur gezielte Hinweise zur Bedeutung des Wortes gegeben werden, die deutlich machen, warum es sinnvoll erscheint, ihn im Kontext eines historischen Zeichengerätes zu verwenden. Betrachtet man den griechischen Ursprung des Wortes, so ist festzuhalten, dass das Nomen (ιδεα) Aussehen, Erscheinung, Gestalt und auch Meinung oder Vorstellung bedeuten kann. Das zugrundeliegende Verb bedeutet: sehen, erblicken, wahrnehmen oder erkennen. An diesen Bedeutungsaspekt möchte ich anknüpfen, denn hier wird deutlich, dass es bei einer so verstanden *Idee* ein Subjekt gibt, das etwas in einem Gegenstand – hier dem Zeichengerät – wahrnimmt oder erkennt. Darüber hinaus ist das Wort auch für den Zeitpunkt der Erschaffung eines historischen Zeichengeräts anwendbar, im Sinne von Idee als Einfall, den der Erfinder gehabt hat und der im Gerät Gestalt angenommen hat. Eine Idee ist also mit der Wahrnehmung eines Subjekts aufs Engste verbunden. Zusammenfassend ergibt sich damit die folgende Definition bzw. Umschreibung eines **Ideenkonglomerats**:

Ein Ideenkonglomerat ist ein Gebilde oder eine Menge von Ideen, die eine Person in einem Gegenstand (hier: Zeichengerät) wahrnimmt und mit ihm verbindet.

Ein mathematisches Instrument kann die folgenden *sechs Ideen* enthalten. Dabei sind die einzelnen Elemente (Ideen) vom Subjekt, dem Zeitpunkt und Ort der Begegnung abhängig (s. u.). Die einzelnen Ideen sind darüber hinaus ineinander »verwoben«, wie gleich deutlich werden wird.

So kann zunächst eine *Einsatzidee* (1) wahrgenommen werden. Ein Zeichengerät wird beispielsweise dazu benutzt, um mit seiner Hilfe etwas zu zeichnen. Je nach dem, was und wie damit gezeichnet wird, lassen sich genauere Unterteilungen vornehmen, etwa in:

- Lineale und Schablonen,
- Pantographen oder
- Kurvenzeichner

  (vgl. Bartolini Bussi & Pergola 1996, S. 45; van Randenborgh, 2015a, S. 5 ff.).

Ein Zeichengerät ist zunächst einfach ein physikalischer Gegenstand. Die *mechanische Idee* (2) steht für die technische Umsetzung und ist in der Bauweise des Geräts vorhanden. Vollrath (2003) spricht daher von einer „technischen Idee“. An Hand eines Zirkels erläutert er das folgendermaßen:

> Mit dem Zirkel kann man seit jeher Kreis verschiedener Radien zeichnen, denn die Schenkel des Zirkels wurden bereits im Altertum über ein Gelenk drehbar miteinander verbunden. Das war die entscheidende *technische Idee* dieses Instruments.
> (Vollrath, 2003, S. 256)

Hier wird auch noch einmal deutlich, was die *Einsatzidee* des Zirkels ist, nämlich das Zeichnen von Kreisen mit unterschiedlichen Radien.

Die entscheidende *Idee* ist die *mathematische* (3). Denn auf dieser beruht die ganze Konstruktion des Instruments. Beim Zirkelbeispiel ist die mathematische Idee, dass alle Punkte auf der Kreislinie den gleichen Abstand zu einem festen Punkt (Zirkelspitze = Kreismittelpunkt) haben. Für Zeichengeräte allgemein bedeutet das, dass die mathematische Idee für die erzeugte Kurve oder Zeichnung verantwortlich ist. Somit ist sie in der *Funktionsweise* des Geräts wiederzufinden. Andererseits setzt das Gerät auch diese Idee um und ist daher für seine *Bauweise* verantwortlich. Im Zusammenspiel von Bau- und Funktionsweise lässt sich daher die mathematische Idee erkennen.

An dieser Stelle wird bereits deutlich, dass die einzelnen Ideen miteinander verbunden bzw. verwoben sind. Ursprünglich wurde sie durch den Erfinder miteinander verknüpft. Heute kann man diese *Verknüpfungsidee* der Entstehungszeit des Instruments nur erahnen, indem man sich mit der Person des Erfinders beschäftigt und eine historische Einordnung vornimmt. Denn ein historisches Gerät, speziell ein Zeichengerät, ist in einer bestimmten Zeitsituation entstanden und verkörpert ein besonderes Interesse an der Mathematik oder Geometrie. Das ist die *kulturell-historische Idee* (4) (zu dieser Idee siehe auch Vollrath, 1999; 2003; Bartolini Bussi, 2001).

Diese Ideen können bei einer heutigen Beschäftigung mit einem historischen Gerät entdeckt werden. Dabei sind im Wesentlichen zwei grundsätzliche Szenarien denkbar. Ein Mensch kann ein ihm unbekanntes Zeichengerät real vor sich haben (Situation A). Es wurde beispielsweise auf einem Flohmarkt gefunden. Eine andere Situation (B) ist gegeben, wenn das historische Gerät z. B. als Abbildung in einem Buch entdeckt wurde. Denn in der ersten Situation kann das Subjekt enaktiv vorgehen und so zur Einsatzidee gelangen. Auch ein direkter Zugang zur mechanischen Idee ist hier gegeben. Beide Ideen können dann auch zur mathematischen Idee führen. Die zweite Situation ist schwieriger. Es können hier zwar auch bestimmte Elemente der mechanischen Idee gesehen werden, etwa, ob bestimmte Schienen gleich lang sind. Das Zusammenspiel der einzelnen Bestandteile ist aber nicht direkt zugänglich. In beiden Fällen entwickelt jedoch das Subjekt *Nutzungs- und Erklärungsideen* (5), wie die einzelnen Bestandteile und Ideen (Einsatzidee, mechanische und mathematische Idee) zusammenhängen. Diese Ideen bilden ein Ideenkonglomerat insofern, dass die eben aufgezählten Ideen als Elemente des Geräts erfasst werden und nun miteinander zu einem Ganzen verbunden werden.

Wie die einzelnen Bestandteile eines Konglomeratgesteins durch eine Art Mörtel fest miteinander verkittet sind, werden die einzelnen Ideen durch die Nutzungs- und Erklärungsideen des Subjekts zu einem Ideenkonglomerat verbunden. Denn diese verbinden die einzelnen Ideen – insbesondere die mechanische und die mathematische Idee.

So gesehen ist die Verknüpfungsidee des Erfinders auch nichts anderes als die ursprüngliche Nutzungs- und Erklärungsidee. Sie kann heute als wichtiger Bestandteil der kulturell-historischen Idee entdeckt werden.

Wird ein mathematisches Gerät im heutigen Unterricht betrachtet, geschieht es mit einem bestimmten Ziel oder einer besonderen Absicht. Damit ist die *didaktische Idee* (6) angesprochen. Auch diese ist durch die mathematische Idee bedingt. Denn das Zusammenspiel zwischen Bau- und Funktionsweise kann im Mathematikunterricht entdeckt werden und führt dann zur mathematischen Idee. Dieser Unterrichtseinsatz ermöglicht es, die dem Gerät zugrundeliegende Mathematik aufzudecken. Das Gerät selbst wird so zum Träger einer didaktischen Idee. Man kann sagen, dass es sich hierbei um eine Nutzungs- und Erklärungsidee des Lehrenden handelt, der das Gerät als *Vermittlungsinstrument* der zugrundeliegenden Mathematik einsetzen möchte. Bei einem derartigen Unterrichtseinsatz entwickeln nun die Schülerinnen und Schüler, indem sie das Zeichengerät analysieren, eigene *Nutzungs-* oder *Erklärungsideen*. Sie generieren Ideen, wie und wozu das Gerät eingesetzt werden kann. Diese Ideen können über die Einsatzidee hinausgehen und beispielsweise auch eine Verbindung von mechanischer und mathematischer Idee sein. Prinzipiell ist auch die didaktische Idee – ähnlich wie die kulturell-historische Idee – erkennbar.

Zum Zeitpunkt des Unterrichtseinsatzes besteht das Ideenkonglomerat für den Lehrenden aus den folgenden „Gesteinsstücken“ oder Elementen: Einsatzidee, mechanische, mathematische, kulturell-historische und didaktische Idee. Die Schülerinnen und Schüler finden einzelne Idee und verbinden diese miteinander in Form ihrer Nutzungs- und Erklärungsideen. So wird das Ideenkonglomerat der Lernenden zu diesem Zeitpunkt neu gebildet. Bei erfolgreicher Erschließung ist das Gerät dann zu einem *Lerninstrument* geworden. Betrachtet der Didaktiker (oder der Lehrende) nun dieses nach dem erfolgten Unterricht, werden die Nutzungs- und Erklärungsidee der Lernenden nun selbst zu einem „Gesteinsstück“ des Ideenkonglomerats des Didaktikers. Damit stellt sich die Frage, wodurch nun diese Ideen und ihr Zusammenspiel erschlossen werden können. Hier bietet sich aus meiner Sicht der Zugang der Semiotik an (siehe Kap. 3.3).

Ein Ideenkonglomerat hat also einerseits – ab dem Zeitpunkt seiner Erfindung – feste Bestandteile. Das sind in erster Linie die mathematische und die mechanische Idee. Diese Kernelemente sind seitdem vorgegeben und im Gerät existent. Die Einsatzidee ist auch gegeben, sie kann durch weitere Nutzer beibehalten, verändert oder weiterentwickelt werden. Somit ändert sich andererseits auch seine »Konsistenz«. Es findet eine Anreicherung oder Entwicklung von subjektiven Nutzungs- und Erklärungsideen statt. Damit ist ein Ideenkonglomerat von der Zeit abhängig. Es können neue Ideen zum ursprünglichen Ideenkonglomerat hinzukommen, so dass ein Ideenkonglomerat von dem sich mit ihm beschäftigenden Subjekt zum jeweiligen Zeitpunkt neu konstruiert wird. Es kommt also auch auf die Situation an, in der das Subjekt dem Gegenstand begegnet.

3.1.1 Zwei Arten von Ideen

Es lassen sich zusammenfassend *zwei Arten von Ideen* unterscheiden. Zum einen gibt es Ideen, die im Gegenstand (Zeichengerät) manifestiert vorliegen. Diese *gegenständlichen Ideen* sind die Einsatzidee, die mechanische und die mathematische Idee. Zum anderen gibt es Ideen, die in einer Person entstanden sind oder entstehen: Die *personalen Ideen*. Das sind die Nutzungs- und Erklärungsideen. Sie sind von Zeit und Ort (Situation) abhängig. Liegen sie in der Vergangenheit, können sie als kulturell-historische oder auch als didaktische Idee identifiziert werden. Eine Besonderheit bilden die ursprünglichen Nutzungs- und Erklärungsideen des Erfinders, da diese den gegenständlichen Ideen überhaupt erst eine physikalische Wirklichkeit verschafft haben. Aber seit der Erfindung können die beiden Arten von Ideen unterschieden werden. Für den Mathematikunterricht bedeutet das, dass in ihm das Ideenkonglomerat des Lehrenden eingesetzt wird und dass die Ideenkonglomerate der Lernenden im Lernprozess gebildet werden.

Ein historisches Zeichengerät ist ein *mathematisches Gebilde*. Es erschließt sich dem Subjekt erst im Ausprobieren des Geräts und Nachdenken über die diesem zugrundeliegenden gegenständlichen Ideen. In dieser Spannung zwischen »ist gebildet worden« und »wird gebildet« im Augenblick der Auseinandersetzung mit dem Gegenstand kann man eine Analogie zum Erfassen eines Gedichts sehen (s. o.).

Der Begriff des Ideenkonglomerats veranschaulicht, dass wir es mit einem mathematischen Gebilde zu tun haben, welches aus gegenständlichen und personalen Ideen entstanden ist und – z. B. im Mathematikunterricht eingesetzt – jeweils subjektiv neu konstruiert wird. In Abb. 1 wird der Zusammenhang zwischen gegenständlichen und personalen Ideen eines Ideenkonglomerats im Mathematikunterricht dargestellt.

Zum Zeitpunkt des Unterrichtseinsatzes liegen die gegenständlichen Ideen (Kästen) und die personalen Ideen der Vergangenheit (graue Ideen in gestrichelter Ellipse) vor. Im Unterricht beschäftigen sich die

Schülerinnen und Schüler mit den gegenständlichen Ideen.

Die kulturell-historische und die didaktische Idee sind im Hintergrund vorhanden, aber die personalen Ideen der Lernenden, ihre Nutzungs- und Erklärungsideen, verbinden die vorgefunden gegenständlichen Ideen miteinander, so dass einerseits das Ideenkonglomerat des Lehrenden im Mathematikunterricht bereits vorliegt und andererseits das jeweilige Ideenkonglomerat der Lernenden erst noch gebildet wird.

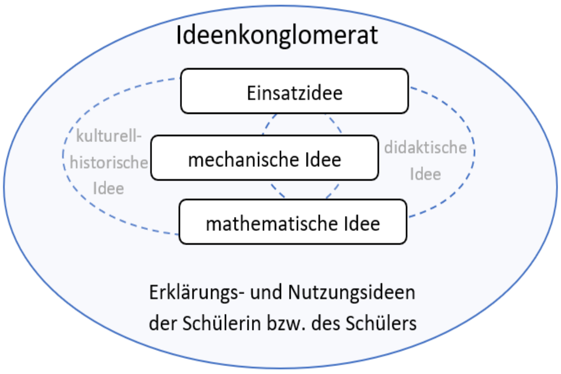

Abb. 1: Ideen und die Entwicklung eines Ideenkonglomerats der Lernenden

3.1.2 Wann ist ein Zeichengerät ein mathematisches Instrument?

Es ist durchaus denkbar, ein Zeichengerät zu benutzen, ohne es als mathematisches Instrument zu betrachten. Beispielsweise lässt sich ein Zirkel gebrauchen, um damit Kreise etwa als Ornamente herzustellen. Bei einem derartigen künstlerischen Gebrauch fasst man den Kreis nicht als mathematisches Objekt auf und die mathematische Idee des Zirkels spielt keine Rolle. Hier genügt es, wenn man mit dem Zirkel – besser als mit der Hand oder mit Hilfe anderer Gegenstände – Dinge zeichnen kann, die wie Kreise aussehen. Anders als bei diesem künstlerischen, rein praktischen Gebrauch, bei dem es reicht, eine Figur zu erzeugen, die augenscheinlich wie ein Kreis aussieht, geht es bei einer mathematischen Betrachtung, um die (verborgene) theoretische Seite des Zirkeleinsatzes. Das theoretische Interesse fragt nach der mathematischen Idee: Lässt sich mit dem Zirkel – theoretisch – die geometrische Figur Kreis erzeugen? Bei dieser Sichtweise, muss das Zeichengerät so gebaut bzw. konstruiert sein, dass mit ihm theoretisch eine exakte geometrische Lösung möglich ist. Die mathematische Idee ist somit die *Leitidee* und führt dann direkt zur mechanischen Idee und zur Einsatzidee. Für eine solche theoretische Betrachtungsweise ist die mathematische Idee, auch wenn mit dem Gerät gezeichnet wird, die entscheidende. Das Zeichengerät ist dann ein *mathematisches Instrument*. Beim Erfinder eines derartigen Gerätes hat die Verknüpfung der einzelnen Ideen dazu geführt, dass dieses Gerät als mathematisches Instrument geschaffen wurde. Die Instrumentwerdung hat somit im Entwicklungsprozess stattgefunden. Im Mathematikunterricht lernen Schülerinnen und Schüler bereits existierende Zeichengeräte kennen. Das Entdecken der gegenständlichen Ideen und ihrer Verknüpfung führt zur Wahrnehmung des Gegenstands als mathematisches Instrument. Ein solcher Instrumentbildungsprozess verläuft also sozusagen rückwärts zu dem des Erfinders. Ein Modell zur Beschreibung einer derartigen Instrumentwerdung stellt die instrumentelle Genese bereit.

3.2 Die instrumentelle Genese eines historischen Zeichengeräts

Bei diesem Ansatz wird eine grundsätzliche ***Unterscheidung*** zwischen einem *Artefakt* (Gerät) und einem *Instrument* vorgenommen (vgl. Schmidt-Thieme & Weigand, 2015, S. 482; Verillon & Rabardel, 1995, S. 84; Trouche, 2005a, S. 144). Beide Begriffe beziehen sich auf den gleichen Gegenstand, meinen aber etwas Verschiedenes (so auch Verillon & Rabardel, 1995, S. 8; Maschietto & Trouche, 2010, S. 3).

Eine wesentliche Grundannahme der instrumentellen Genese ist außerdem, dass ein Gerät nicht unmittelbar oder zwangsläufig ein Instrument für das Subjekt ist. Erst durch die Bildung eines *instrumentellen Bezuges* zwischen Artefakt und Subjekt kann ein Instrument entstehen (Verillon & Rabardel, 1995). Die Differenzierung macht deutlich, dass ein Instrument nicht ein a priori gegebener Gegenstand ist, sondern erst in einem *wechselseitigen Beeinflussungsprozess* zwischen Gerät und Nutzer entsteht. Es gibt demzufolge zwei Richtungen:

> Instrumental genesis is a process […] and has two components, the first one (instrumentalisation) directed toward the artefact shaped by the users' activity, the second one (instrumentation) directed toward the subject (the artefact shaping an user's activity). (Maschietto & Trouche, 2010, S. 37)

In Abb. 2 ist dieser Zusammenhang grafisch durch den Pfeilkasten in der Mitte dargestellt. Mit den Begriffen ***Instrumentation***, als Beeinflussungsrichtung vom Gerät zum Nutzer, und ***Instrumentalisation***, als umgekehrte Richtung vom Nutzer zum Gerät, ist das Wesen des instrumentellen Bezugs, in dessen Folge aus einem Gerät ein Instrument wird, beschrieben.

Auf der Seite des Geräts werden Zwänge (*constraints)* und Möglichkeiten (*potentialities)* und auf Seiten des Subjekts werden sein Wissen (*knowledge*) und seine Fertigkeiten (*work method*) als relevant und grundlegend für den Prozess der Instrumentwerdung gesehen (vgl. Maschietto & Trouche, 2010, S. 37). Das entstandene Instrument ist nach Drijvers et al. (2009)

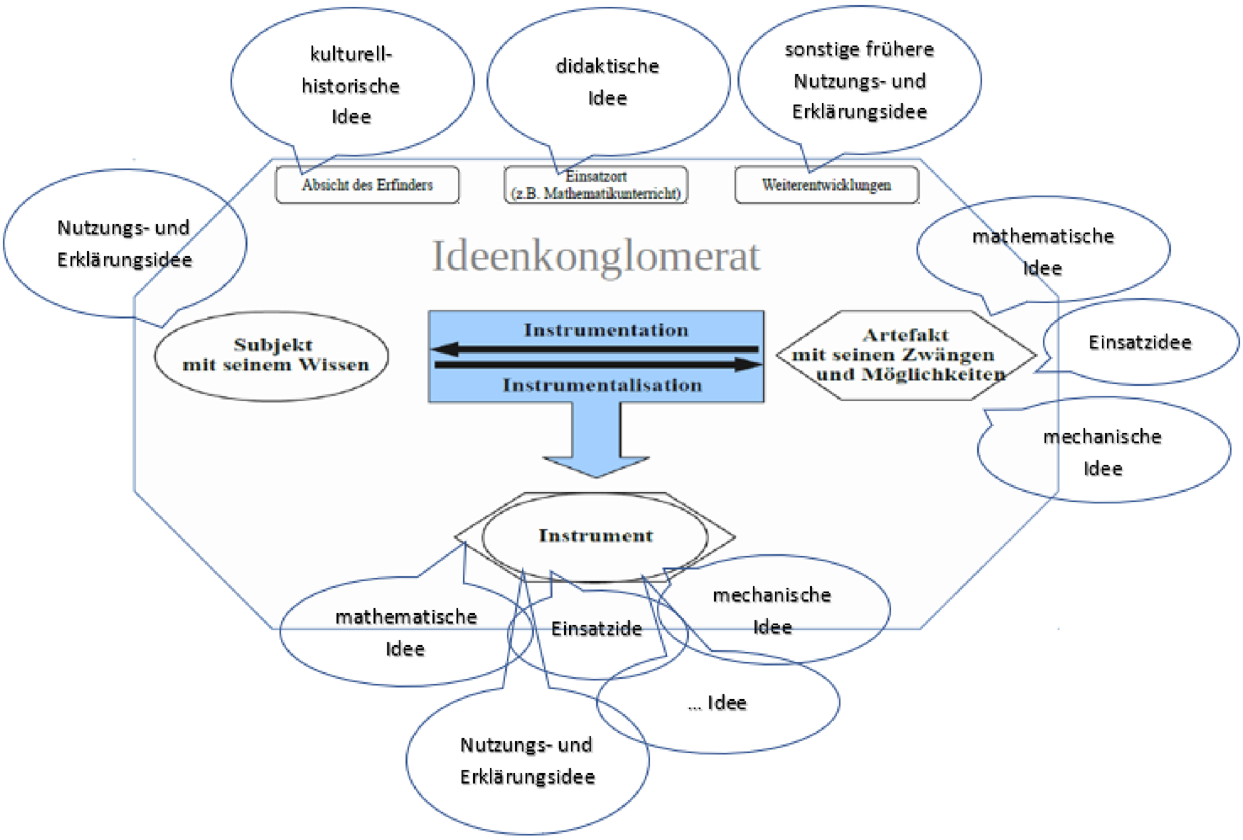

Abb. 2: Ein Ideenkonglomerat im Kontext der instrumentellen Genese

> the psychological construct of the artefact together with the mental schemes the user develops for specific types of tasks. In such schemes, technical knowledge and domain-specific knowledge (in our case mathematical knowledge) are intertwined. (Drijvers et al., 2009, S. 1349)

Damit sind die Grundzüge der instrumentellen Genese kurz umrissen und der innere Bereich von Abb. 2 beschrieben. Nun soll diese zunächst mit Hilfe eines konkreten Zeichengeräts erläutert und dann auf die Ideen eines Ideenkonglomerats bezogen werden.

Für den Gegenstand Zirkel (Achtung: Der Leser muss sich von seinen Assoziationen mit dem Begriff Zirkel freimachen und sich vorstellen, dass der Gegenstand ihm unbekannt ist.) heißt das, dass er zunächst einmal als Objekt mit mehr oder weniger verborgenen Ideen vorliegt. Man sieht vielleicht die beiden Spitzen, eine Bleistiftmine zum Zeichnen (Hinweis auf die Einsatzidee), ein Gelenk, das die zwei gleichlangen Schenkel miteinander verbindet (verweist auf die mechanische und mathematische Idee). Das sind in Übereinstimmung mit dem Modell der instrumentellen Genese die Zwänge und Möglichkeiten des Zeichengeräts. Dieses ist auch mit Vollraths (2013; 2003; 1999) Auffassung von einem mathematischen Instrument gedeckt. Die instrumentelle Genese lenkt den Blick darauf, dass zusätzlich zu Vollraths Ansatz noch zu bedenken ist, dass zu den eben genannten Ideen entsprechende Ideen des Subjekts (Erklärungs- und Nutzungsideen) hinzukommen müssen, damit aus dem Artefakt ein Instrument werden kann. Hier wird der Begriff des Ideenkonglomerats wichtig, da er auch dieses umfasst. Damit ist das ursprüngliche Artefakt, das Instrument und auch der zu ihm führende Prozess der instrumentellen Genese miteingeschlossen. Auf diese Weise wird deutlich, dass auch die Zeit bzw. unterschiedliche Zeitpunkte eine Rolle spielen. Ausgangspunkt ist das (vorgefundene) Artefakt. Eine Besonderheit ist der Zeitpunkt der Erfindung. Beim Erfinder ist der Verlauf des Instrumentwerdungsprozesses sicher anders gewesen. Hier ist anzunehmen, dass das Artefakt zunächst nur mental oder gedacht vorlag.

Für den Unterrichtseinsatz sind im Wesentlichen *drei Zeitpunkte* zu unterscheiden. Zunächst gibt es den Zeitpunkt, an dem der Lehrende das Gerät entdeckt und überlegt, wie es im Mathematikunterricht eingesetzt werden könnte, um mit ihm Mathematik zu lernen. Dadurch wird das Gerät zu einem *Vermittlungsgegenstand*. Somit liegt die didaktische Idee vor. Dann gibt es den Zeitpunkt des Unterrichtseinsatzes. Die Lernenden erforschen das Gerät und entwickeln eigene Nutzungs- und Erklärungsideen. Nun haben wir es mit einem *Lerngegenstand* zu tun. Dann (3. Zeitpunkt) werden die gefundenen und gebildeten subjektiven Idee vorgestellt und besprochen. Es erfolgt auf diese Weise auch eine Reflexion. Hier wird das ursprüngliche Artefakt als Instrument zum Lernen von Mathematik erfasst. Es tritt damit für alle am Lernprozess Beteiligten als ein im Unterricht von den Schülerinnen und Schülern gebildetes Ideenkonglomerat, als *Wissensaneignungsgegenstand*, in Erscheinung.

In Abb. 2 wird der komplexe Zusammenhang zwischen Artefakt, Subjekt und Instrument dadurch visualisiert, dass die Einrahmung des Wortes Instrument als Komposition von Artefakt- und Subjektrahmen dargestellt ist. So wird unterstrichen, dass ein Instrument aus dem Artefakt und Gebrauchsschemata des Subjekts zusammengesetzt ist. (Zum Begriff des Schemas siehe z. B. Trouche, (2005a, S. 149 ff.) oder Rabardel, (2014, S. 65 ff.). Mit Blick auf Zeichengeräte siehe van Randenborgh (2015a, S. 57 f.).) Entsprechendes gilt auch für die Ideen. So sind die Ideen, die dem Subjekt zunächst als einzelne Ideen erscheinen zu einen nun auch fürs Subjekt erkennbaren Ideenkonglomerat zusammengefügt. Es ist gebildet worden aus der Einsatzidee, der mechanischen und mathematischen Idee sowie der Nutzungs- und Erklärungsidee. Hinzugekommen sein können auch noch weitere Ideen, wie etwa die kulturell-historische Idee. Dieses wird in Abb. 2 durch die Blase mit der Bezeichnung »…Ideen« erfasst.

Abbildung 2 veranschaulicht außerdem, dass der Begriff des Ideenkonglomerats auch den Prozess der Instrumentwerdung enthält, indem das Ideenkonglomerat als graues Achteck diesen Prozess umgibt. Im Hintergrund stehen die Bestandteile des Ideenkonglomerats, die bei der Instrumentwerdung für das Subjekt nicht unmittelbar erkennbar wichtig sind. Das sind die ursprüngliche Absicht des Erfinders, der Einsatzort (praktischer Gebrauch, Schule etc.) und (technische, historische etc.) Weiterentwicklungen (Abb. 2 oben). Das Ideenkonglomerat umfasst so auch die konkrete Situation (hier: Lernumgebung im Mathematikunterricht) und das Subjekt (hier: Schülerin oder Schüler) in Form der jeweiligen Nutzungs- oder Erklärungsideen. Ebenso sind technische Weiterentwicklungen (hier: technische Veränderungen gemäß der didaktischen Idee des Lehrers; vgl. Kap. 3.4.2) auch miteingeschlossen.

3.2.1 Wie trägt der Begriff des Ideenkonglomerats zum Verständnis der instrumentellen Genese bei?

Je nach Gerät gibt es unterschiedliche mechanische oder mathematische Ideen. Das spezifische Zusammenspiel von Bau- und Funktionsweise ist der Grund dafür, warum ein Zeichengerät beispielsweise eine bestimmte Kurve zeichnet (Einsatzidee). Damit ist die entscheidende Begründung dafür gegeben, *warum* die Zwänge und Möglichkeiten eines Artefakts unterschiedlich sind. Im Laufe der instrumentellen Genese entstehen Nutzungs- und Erklärungsideen, die ihrerseits nun selbst ein wichtiger Bestandteil eines Ideenkonglomerats sind. Sie können allerdings auch in einer ganz anderen Richtung als die ursprünglich vom Erfinder des Geräts gedachte oder vom Unterrichtenden beabsichtigte Einsatzweise gehen. Sie schließen also die sog. Katachrese mit ein. Diese Möglichkeit ist auch im Begriff des Ideenkonglomerats enthalten, denn bei meiner Beschreibung der Ausbildung eines Ideenkonglomerats im Unterricht wird von der Entwicklung von Ideenkonglomeraten durch die Lernenden gesprochen. Ein solches Ideenkonglomerat ist vermutlich nicht automatisch identisch mit dem des Lehrenden. Beispielsweise enthält ein Ideenkonglomerat eines Lernenden nicht unbedingt die didaktische Idee des Ideenkonglomerats eines Lehrenden. An den Nutzungs- und Erklärungsideen wird also auch die Richtung der Instrumentalisation deutlich. Der Begriff des Ideenkonglomerats ist gut geeignet, die wechselseitige Beziehung der beiden Richtungen der instrumentellen Genese verständlicher zu machen.

Ein Artefakt ermöglicht es dem Subjekt, bestimmte Ideen wahrzunehmen. Andererseits sind einzelne Ideen ganz oder teilweise verborgen. Außerdem werden weitere, eigene personale Ideen durch die Präsenz des Artefakts erst generiert. Das Subjekt verbindet so die einzelnen Ideen zu einem Gebilde, seinem Ideenkonglomerat. Das Erkennen dieses Vorgangs und auch die Wahrnehmung des Gegenstandes als Ideenkonglomerat des Erfinders oder des Lehrenden sind für den Lernenden nur im Nachhinein möglich. Auch der Lehrer, Didaktiker oder Forscher kann retrospektiv den im Unterricht stattgefundenen Prozess analysieren und der Frage nachgehen, inwiefern das den Lernenden zunächst unbekannte Gerät zu einem Instrument der Wissensvermittlung der zugrundeliegenden Mathematik geworden ist und welche Ideen mit ihm verbunden wurden.

Es gibt auch einen charakteristischen Unterschied gegenüber dem traditionellen Modell der instrumentellen Genese. Denn für den Einsatz historischer Zeichengeräte im Mathematikunterricht genügt es für die Instrumentwerdung nicht, dass das Gerät irgendwie – z. B. zum Zeichnen – vom Subjekt genutzt wird. Es geht auch nur nebenbei darum, dass aus einem Zeichengerät ein Zeicheninstrument wird. Da es im Mathematikunterricht eingesetzt wird, liegt dieser Situation eine Absicht oder ein Ziel zugrunde, welches in der didaktischen Idee des Ideenkonglomerats des Lehrenden wiedergefunden werden kann. Die Intention ist nicht, das Gerät als Hilfsmittel (zur Zeichenerleichterung) zu verwenden, sondern als mathematischen *Lerngegenstand* zu untersuchen. Daher stellt sich die Frage der Übertragbarkeit des Ansatzes der instrumentellen Genese auf den Einsatz historischer Zeichengeräte.

3.2.2 Instrumentelle Genese und der Einsatz historischer Zeichengeräte

Zunächst ist zu bedenken, dass die Theorie der instrumentellen Genese oft bei empirischen Untersuchungen des Taschenrechner- oder Computereinsatzes zugrunde gelegt wurde (vgl. Artigue, 2002; Weigand 2006; 2008; Weigand & Bichler, 2010; Artigue & Bardini, 2010; Drijvers et al., 2010). Der Einsatz einer dynamischen Geometriesoftware (DGS) wurde demgegenüber eher selten mit Hilfe dieses Modells untersucht (z. B. Bretscher, 2010). Nur ganz vereinzelt wurde sie bei anderen Gegenständen, wie der Schulbuchnutzung, hinzugezogen (Rezat, 2009).

Beim Rechnereinsatz geht es in erster Linie um die Anwendung des Geräts zur Lösung eines mathematischen Problems. Dieser Einsatz steht beim Lernen mit historischen Zeichengeräten nicht im Fokus. Hier soll das Gerät selbst zum *Vermittler der Mathematik* werden. Indem die Lernenden die gegenständlichen Ideen eines Ideenkonglomerats, insbesondere die mathematische Idee entschlüsseln, entwickeln sie Nutzungs- und Erklärungsideen. Dieser Prozess kann als instrumentelle Genese aufgefasst werden. Im Laufe des Prozesses konstruieren die Lernenden so ihr eigenes Ideenkonglomerat. Drijvers et al. (2009) heben mit Blick auf digitale Technologien hervor:

> Instrumental genesis, in short, involves the co-emergence of mental schemes and techniques for using the artefact, in which mathematical meanings and understandings are embedded. (Drijvers et al., 2009, S. 1349)

Bei Zeichengeräten geht es v. a. um die Co-Emergenz von sichtbarem Gegenstand und zunächst verborgener Mathematik im Lernprozess der Schülerinnen und Schüler. Diese Herausbildung neuer Eigenschaften oder Strukturen (Emergenz) infolge des Zusammenwirkens seiner Elemente kommt in dem Begriff Ideenkonglomerat gut zum Ausdruck. Denn ein Ideenkonglomerat wird infolge der Lernprozesse der Schülerinnen und Schüler aus den wahrgenommen Ideen des Artefakts und den mit diesen verbundenen personalen Ideen gebildet. Das ursprüngliche Artefakt kann so zu einem Instrument der Wissensvermittlung werden.

3.3 Lernprozesse beim Einsatz von Zeichengeräten mit Hilfe des Modells der semiotischen Vermittlung erfassen

Die Vermittlungsfunktion als didaktische Idee ist wohl auch in der Formulierung, dass das Gerät vom Lehrenden als ein „tool of semiotic meditation" (Maschietto & Trouche, 2010, S. 38) eingesetzt wird, angesprochen. Bartolini Bussi und Mariotti (2008) benutzen schon diese Bezeichnung und begründen es wie folgt:

> In summary, on the one hand, personal meanings are related to the use of the artifact, in particular in relation to the aim of accomplishing the task; on the other hand, mathematical meanings may be related to the artifact and its use. This double semiotic relationship will be named *the semiotic potential of an artifact.* Because of this double relationship, the artifact may function as a semiotic mediator and not simply as a mediator, but such a function of semiotic medi[t]ation is not automatically activated.
> (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008, S. 754)

Zu Recht betonen Bartolini Bussi und Mariotti (2008) anschließend die Bedeutung der Lehrkraft und der Orchestrierung. Hierin sehen sie die entscheidenden Auslöser der nicht von selbst startenden semiotischen Vermittlungsfunktion. Ich verstehe die beiden Faktoren (Lehrer und Lernumgebung) als Ermöglichungsgründe für die Bildung eines Ideenkonglomerats der Lernenden in einem Prozess der instrumentellen Genese, bei dem das Zeichengerät eine solche Vermittlungsfunktion einnimmt. Es handelt sich dabei also auch um einen *Prozess der Entstehung und Entwicklung von Zeichen*. Doch der Begriff des Ideenkonglomerats eröffnet noch eine weitere Perspektive. Hier findet sich eine Erklärung dafür, *wie* das Gerät zu einem Vermittler werden kann. Die bei der Erforschung eines Zeichengeräts im Mathematikunterricht grundlegende Aufgabe ist gerichtet auf das selbständige Entdecken und mathematische Erklären der zugrundeliegenden Mathematik durch die Lernenden. Dabei ist das Gerät selbst (Bauweise) und das mit ihm Gezeichnete (Funktionsweise) entscheidend. Es geht hier um die mechanische und die mathematische Idee sowie ihren Zusammenhang. Das Vorhandensein der Ideen und ihre Beziehung zueinander scheinen mir der Grund für das von Bartolini Bussi und Mariotti (2008) angesprochene semiotische Potenzial des Artefakts zu sein. Der Begriff des Ideenkonglomerats stellt somit auch eine Begründung dafür bereit, warum das Potenzial eines solchen Artefakts semiotisch ist. Grundsätzlich ist hervorzuheben, dass die Menge von Ideen, die eine Person in einem Gegenstand (Artefakt) wahrnimmt und mit ihm verbindet, abhängig vom Artefakt und dem Subjekt ist.

Bartolini Bussi und Mariotti (2008, S.756f) fanden bei ihren empirischen Studien über den Geräteeinsatz *drei Zeichenkategorien*. Dabei unterschieden sie *Artefakt-*, *Schlüssel* und *Mathematikzeichen*.

Der für die hier vorgestellte Konzeption grundlegende Zeichenbegriff findet sich bei Peirce (1839-1914). Hier sei insbesondere die triadische Zeichenrelation und die Vermittlungsfunktion von Zeichen genannt.

Dabei ist ein Zeichen

> etwas, das für jemanden in einer gewissen Hinsicht [...] für etwas steht. Es richtet sich an jemanden, d.h. es erzeugt im Bewusstsein jener Person ein äquivalentes oder vielleicht ein weiter entwickeltes Zeichen. Das Zeichen, welches es erzeugt, nenne ich den Interpretanten des ersten Zeichens. Das Zeichen steht für etwas, sein Objekt. Es steht für das Objekt nicht in jeder Hinsicht, sondern in Bezug auf eine Art von Idee [...]. (Peirce zitiert nach Hoffmann, 2003, S. 50)

Diese allgemeine Zeichendefinition kann mit Blick auf historische Zeichengeräte mit Hilfe des Begriffs des Ideenkonglomerats konkretisiert und somit greifbarer werden. Die Formulierung „etwas, das für jemanden in einer gewissen Hinsicht […] für etwas steht" bedeutet dann, dass beim Subjekt Nutzungs- und Erklärungsideen entstehen. Im darauffolgenden Satz ist der Prozess der Zeichenentstehung und -entwicklung (von den Artefakt- hin zu den Mathematikzeichen) zu sehen. Der letzte Teil des Zitats unterstreicht einerseits, dass ein Ideenkonglomerat zu komplex ist, um es in jeder Hinsicht sofort zu erfassen. Es werden einzelne Ideen, die gegenständlichen Ideen, vom Subjekt zunächst gesehen. Andererseits erlaubt diese Formulierung auch die Möglichkeit, dass das Subjekt eigene personale Ideen (Nutzungs- und Erklärungsideen) formuliert, wodurch das jeweilige Ideenkonglomerat konstruiert wird.

Durch das Modell der semiotischen Vermittlung lässt sich der Prozess der instrumentellen Genese eines Ideenkonglomerats gut erfassen, da es dem Beobachter (Lehrer oder Forscher) erlaubt, den Lernprozess vom unbekannten Artefakt hin zum Instrument der Wissensvermittlung zu beschreiben. Im Nachhinein erscheinen die Nutzungs- und Erklärungsideen der Lernenden selbst als Elemente des Ideenkonglomerats (s. o. 3.2.1). Die einzelnen Ideen sind über Formulierungen, Worte oder allgemein Zeichen miteinander verbunden. Wie genau, werden die im Folgenden (besonders in Kap. 5) dargestellten Aspekte einer empirischen Untersuchung zeigen. Doch zunächst wird das Gerät, der Parabelzirkel, vorgestellt.

3.4 Der Parabelzirkel von Frans van Schooten – Gegenstand und Anlass zur Ausbildung von Ideenkonglomeraten im Mathematikunterricht

Abbildung 3 zeigt den Parabelzirkel, wie er in dem 1646 erschienen Werk *De organica conicarum sectionum in plano descriptione* von Frans van Schooten Jr. gezeichnet wurde. Zur Würdigung von Frans van Schooten siehe van Randenborgh (2012c; 2015a, S. 7 ff.).

3.4.1 Die historische Abbildung des Parabelzirkels

Auffällig ist, dass (in Abb. 3) deutlich mehr zu sehen ist, als das Gerät selbst. So fallen zunächst sicher die

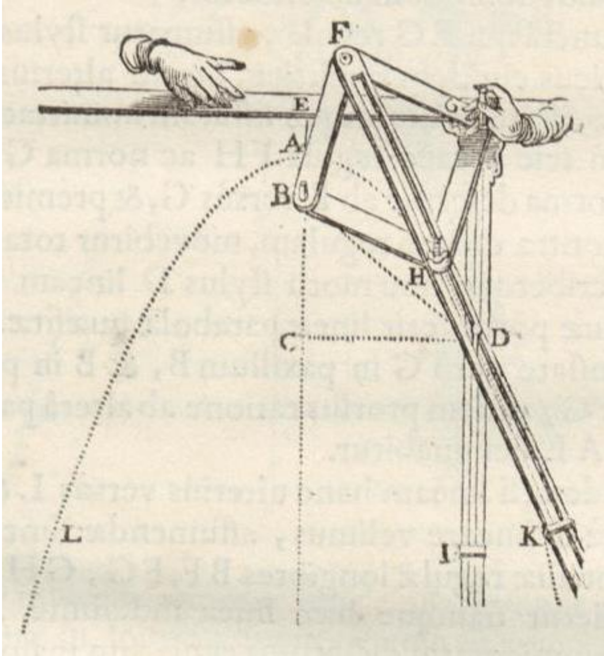

Abb. 3: Parabelzirkel von Frans van Schooten (1646, S. 74)

Hände auf, dann die Parabel und drei zusätzliche Linien. Die Hände machen eindrücklich klar, an welchen Stellen man den Parabelzirkel anfassen und bewegen sollte. Damit wird die Abbildung »dynamisiert«. Bewegt man das Gerät so, kann einen Teil des rechten Parabelastes erzeugt werden. Denn hat der Stift (D) die Rautenecke H erreicht, kann nicht weiter gezeichnet werden.
Halten wir fest, was von dem Gerät in der historischen Abbildung zu erkennen ist:

- Eine Befestigung an den Stellen B und G.
- Eine Flügelmutter bei H.
- Es gibt zwei geschlitzte Schienen (FK und GI).
- Die Schienen BH, HG, GF und FB scheinen gleichlang zu seien. Das Viereck BHGF bildet eine Raute.
- Die lange, in der Abbildung waagerecht verlaufende, Schiene scheint orthogonal zu der Schiene GI zu sein.
- Die Verbindung bzw. Befestigung dieser beiden Schienen scheint aufwendig zu sein. Vielleicht ist die Stelle deshalb so kunstvoll eingefasst, da es mechanisch nicht so leicht ist, dass die Orthogonalität auch beim Bewegen erhalten bleibt.
- Die mechanisch ebenfalls schwierige Stelle der Befestigung des Zeichenstiftes an der Stelle D scheint hingegen nicht besonders aufwendig gestaltet zu sein. Vielleicht wurde nur punktweise gezeichnet. Denn im Vergleich dazu ist die Parabel bei seiner Fadenkonstruktion (van Schooten, 1646, S. 79) durchgezeichnet.

Wie eingangs gesagt, ist außerdem noch mehr zu sehen, als das Gerät selbst:

- Es sind die Hände zu sehen, die zeigen, wie man den Parabelzirkel anfassen und bewegen sollte.
- Die Parabel ist eingezeichnet. Eigentlich könnte man nur das Stück zeichnen bis der Stift (D) die Rautenecke H erreicht hat. Für die restliche Erzeugung der eingezeichneten Parabel sind mehrere Umbauten erforderlich. Insbesondere der Scheitelpunkt lässt sich vermutlich gar nicht mit diesem Gerät zeichnen. Denn in dem Moment, wenn die Schiene GI an die Stelle B stößt, kann der Parabelzirkel nicht weiterbewegt werden und es kann daher auch nicht mehr gezeichnet werden. Die Abbildung zeigt also deutlich mehr von der Parabel als das, was in einer Bewegung des Gerätes überhaupt gezeichnet werden kann.
- Es gibt eine zusätzliche Linie, die die Punkte B und D miteinander verbindet. Man kann sie als Hilfslinie bezeichnen. Denn durch sie wird auf den Abstand des Punktes B (Fokus) mit dem Punkt D (Parabelpunkt) verwiesen.
- Eine weitere zusätzliche Linie ist die durch die Punkte B und C. Hierdurch wird die Symmetrieachse der Parabel markiert. Die Verbindung von A und B ist wegen der Raute nicht zu sehen.
- Es gibt außerdem eine durchgezogene Verlängerung der gepunkteten Symmetrieachse von A nach E. Dadurch wird auf den Abstand von A zu E hingewiesen bzw. die besondere Lage des Scheitelpunktes A hervorgehoben.

  Die letzte zusätzliche Linie ist die von C nach D. Dabei ist Punkt C bereits eine Zusatzangabe. Die Strecke $\overline{CD}$ scheint parallel zur Leitlinie (obere Schiene EG) zu sein und damit orthogonal zu EB und GD.

Gerade diese zusätzlichen Einzeichnungen ermöglichen es dem Betrachter, leichter bzw. besser die Einsatzidee, die mechanische und die mathematische Idee zu erkennen und eigene Nutzungs- oder Erklärungsideen zu finden. *Die zusätzlichen Einzeichnungen sind Hilfslinien zum Erschließen des Ideenkonglomerats des Erfinders, insbesondere der gegenständlichen Ideen.* Das soll nun an den folgenden Ideen erläutert werden.

1) Die *Einsatzidee* ist am unbewegten Gerät schwer zu erkennen. Durch die eingezeichnete Parabel ist sie aber sofort offensichtlich.
2) Die *mechanische Idee* ist die Idee, die bereits am bloßen Gerät am leichtesten zu sehen ist. Beispielsweise ist die Gelenkraute (BHGF) erkennbar. Auch die Orthogonalität von EG und GD ist gut sichtbar. Unterstützt wird diese Wahrnehmung noch durch die Hilfslinien, da der rechte Winkel bei C gut erkennbar ist und damit CDGE deutlich als Rechteck erscheint.
3) Die *mathematische Idee* erschließt sich dem Betrachter im Wesentlichen durch die Hilfslinie ($\overline{BD}$). Hier wird explizit auf den Abstand der Parabelpunkte zum Brennpunkt und damit auf die geometrische Definition der Parabel – als Menge aller Punkte, die von einem festen Punkt (B) und einer festen Geraden (GE) den gleichen Abstand haben – verwiesen. Um diesen Hinweis zu erkennen, ist es daher auch entscheidend, dass die Parabel eingezeichnet ist, also in der Abbildung mehr zu sehen ist, als das Zeichengerät alleine.
4) Die *Nutzungsidee* wird durch die eingezeichneten Hände generiert. Denn sie zeigen, wie das Gerät zu gebrauchen ist. Die *Erklärungsideen* des Betrachters werden durch die eingezeichneten Hilfslinien gezielt unterstützt. Durch sie erfährt man – ohne es ausprobieren zu können oder zu müssen – was, wie und warum das Gerät zeichnet. Durch die zusätzlichen Einzeichnungen wird besonders auch die *Verknüpfungsidee* des Erfinders zum Ausdruck gebracht.

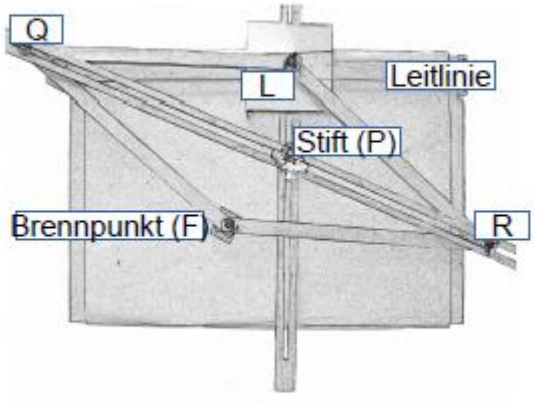

Abb. 4: Parabelzirkel aus Holz (von van Randenborgh 2010)

Bei einem realen oder digitalen Modell ist es sicher sinnvoll, diese Unterstützung wegzulassen. Denn die Geräte können bewegt und ausprobiert werden. Auch stellt das Finden derartiger Hilfslinien einen wichtigen Schritt im Lernprozess der Schülerinnen und Schüler dar.

3.4.2 Der reale und der digitale Parabelzirkel

Im von mir untersuchten Mathematikunterricht wurden reale und digitale Modelle (Abb. 4 und 5) des Parabelzirkels verwendet. In Abb. 4 ist zu erkennen, dass zwei Bestandteile des ***Holz-Parabelzirkels*** an einem Brett fixiert sind: die Schiene l (= Leitlinie) und die Schraube F (= Brennpunkt). Wird nun die

Konstruktion bewegt, z. B. an der Schraube L, verformt sich die Gelenkraute (FRLQ) und der Stift P (= Parabelpunkte) zeichnet eine Parabel.

Folgende wesentlichen Unterschiede dieses Holzmodells zum Originalinstrument von van Schooten gibt es:

- Mein Parabelzirkel ist so eingestellt, dass er innerhalb der Raute zeichnet. Dadurch erkennen die Schülerinnen und Schüler in der gezeichneten Linie vermutlich leichter eine Parabel. Hier erkennt man den Einfluss der *didaktischen Idee* auf die Einsatzidee.
- Darüber hinaus wurde die Konstruktion bei L so gebaut, dass sich die Orthogonalschiene nach oben verschieben lässt. Dadurch wird es möglich, den Scheitelpunkt und den anderen Parabelast – ohne Umbau – zu zeichnen. Dies kann als Beispiel dafür angesehen werden, wie die *didaktische Idee*, also eine personale Idee, die mechanische Idee im Entstehungsprozess des Geräts beeinflusst.

Der ***digitale Parabelzirkel*** (Abb. 5) erlaubt – v. a. bedingt durch die Konstruktion der Raute – hingegen nur eine Bewegung am Punkt L. Es ist also eine Einschränkung gegenüber dem realen Modell. Allerdings ist in der historischen Abbildung dieses auch so vorgesehen und das reale Modell lässt sich auch an dieser Stelle am besten bewegen. Es gibt aber auch einige Erweiterungen. Mit dem digitalen Gerät sind viele Dinge leicht möglich, die mit dem realen Modell nur schwer oder gar nicht realisierbar sind. Beispielsweise kann man mit dem realen Parabelzirkel – je nach Einstellung – ohne Umbau nur inner- bzw. außerhalb der Gelenkraute zeichnen und die Stelle, an der der Stift die entsprechende Ecke der Raute trifft, ist überhaupt nicht zeichenbar. Das ist beim digitalen Parabelzirkel problemlos möglich. Darüber hinaus gibt es z. B. folgende »Erweiterungen«:

- Länge der Strecken oder Winkel anzeigen; Konsequenz: man sieht gut, was gleich ist und auch beim Bewegen gleichbleibt. Das verweist auf die *mechanische und mathematische Idee*.
- eine Gerade durch RQ legen; Konsequenz: die Parabel kann viel weiter gezeichnet werden bzw. die Parabeläste können weiter eingezeichnet werden. Das hat Einfluss auf die *Einsatzidee*.
- die Spur von der Halbgeraden oder Geraden RQ anzeigen; Konsequenz: die Parabel als Einhüllende und RQ erscheint deutlicher als Tangente. Das kann Auswirkungen auf die *Nutzungs- und Erklärungsideen* haben.
- die Lage von F und oder der Leitlinie variieren; Konsequenz: Aussehen oder Lage der Parabel ändert sich. Das kann die *mathematische Idee* vertiefen.

Die *mathematische Idee* ist bei beiden Modellen die gleiche. Sie ist durch die eingezeichneten Hilfslinien (Abb. 5: $\overline{FL}$, $\overline{LP}$ und $\overline{FP}$) gut zu erkennen: Der Stift (P) befindet sich auf der Mittelsenkrechten zu $\overline{FL}$ und ist daher gleich weit von F und von L entfernt. Im Unterricht wurde der digitale Parabelzirkel allerdings ohne diese Hilfslinien eingesetzt.

Der in der Abbildung markierte rechte Winkel zeigt an, dass es nicht nur um den Abstand zu zwei Punkten (F und L) geht, sondern auch um den Abstand zur Leitlinie (Gerade l). P liegt – konstruktionsbedingt – auf der Orthogonalen zur Leitlinie durch L.
Nun ist deutlich, dass in dem Gerät die geometrische Definition der Parabel bzw. die Ortslinieneigenschaft verborgen ist. Die Parabel begegnet uns hier als die *Menge aller Punkte, die von einem festen Punkt und einer festen Geraden den gleichen Abstand haben*.

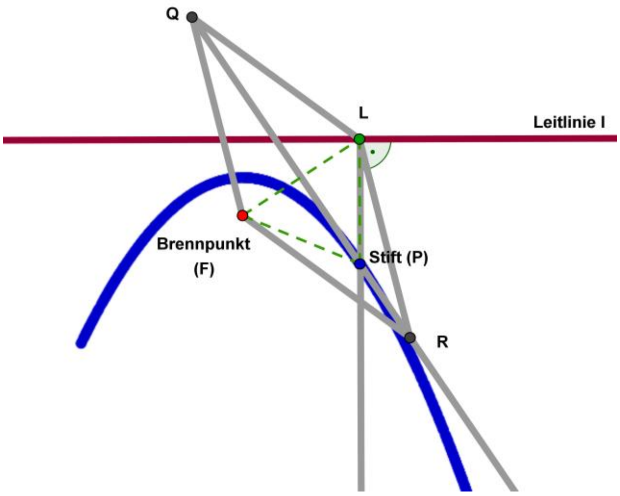

Abb. 5: Parabelzirkelsimulation mit Hilfslinien (von van Randenborgh 2010)

3.5 Ausgangspunkt und zwei zentrale Forschungsfragen

Betrachtet man die mathematik-didaktischen Veröffentlichungen, so kann man mit Blick auf Deutschland sagen, dass die Erforschung des Einsatzes von Zeichengeräten im Mathematikunterricht eher selten untersucht wurde. Außerdem gibt es kein konkretes theoretisches Modell speziell für einen solchen Einsatz. Mit Blick auf den Parabelzirkel sind hier v. a. Weigand (1997), Vollrath, Weigand und Weth (2000) und van Randenborgh (2005; 2012a) zu erwähnen.[1]

In Italien wird seit einigen Jahren der Einsatz von historischen Geräten untersucht.[2] Der dort vorherrschende Untersuchungsansatz ist durch die Semiotik geprägt. Maschietto und Trouche verbinden diesen mit dem Ansatz der instrumentellen Genese:

> With respect to students, the examples discussed in this article ... highlight the necessity to orchestrate activity with tools in such a way as to take account of both the instrumental geneses and the passage from the work with the artefacts to mathematical knowledge mediated by them.
> (Maschietto & Trouche, 2010, S. 45)

Interessant ist dabei vor allem der angesprochene Übergang (*passage*). Dieser soll mit Hilfe einer empirischen Studie genauer untersucht werden. Es stellt sich die Frage, *wie beim Erforschen von Zeichengeräten im Mathematikunterricht subjektiv neues Wissen für die Lernenden entsteht.* Gemeint ist damit nicht nur das Wissen um das neu entdeckte Zeichengerät, sondern vor allem das Wissen um die im Zeichengerät vorhandene Mathematik. Beim Parabelzirkel heißt das also konkret: die Erschließung der Bau- und Funktionsweise des Geräts sowie die geometrische Definition der Parabel. Die dabei stattfindenden Lernprozesse sollen daraufhin untersucht werden, *wie der Begriff des Ideenkonglomerats diese erklären kann* (Forschungsfrage 1) *und inwiefern sich diese im Rahmen des Modells der instrumentellen Genese beschreiben und einordnen lassen* (Forschungsfrage 2).

4 Methoden

4.1 Methodenwahl

Die Studie folgt einem qualitativen Untersuchungsansatz, der sich den fünf Grundsätzen nach Mayring (2002) verpflichtet weiß. Er fordert: 1. eine stärkerer Subjektbezogenheit, 2. eine stärkere Gewichtung (zunächst) der Deskription und dann (3.) der Interpretation. Es sollen Beobachtungen in der gewohnten Umgebung (statt Laborbeobachtungen) der Forschungssubjekte stattfinden (4.). Abschließend fordert er (5.) eine Auffassung, die deutlich macht, dass die Generalisierung einen Verallgemeinerungsprozess darstellt (Mayring, 2002, S. 19). Zur Erfüllung dieser Ansprüche scheint mir als Methode zur Datenerhebung die teilnehmende Beobachtung und das problemzentrierte Interview geeignet zu sein. Als Aufbereitungsverfahren wurden die Transkription und die Konstruktion deskriptiver Systeme gewählt. Die Auswertung nutzt die *Grounded Theory* und die *Qualitative Inhaltsanalyse*.

4.2 Erhebungsmethoden und Aufbereitungsverfahren

Da es um die Untersuchung der instrumentellen Genese von Zeichengeräten im Mathematikunterricht geht, ist eine teilnehmende Beobachtungssituation gegeben und die Daten werden vom Forscher erhoben „während er an deren natürlicher Lebenssituation partizipiert“ (Mayring, 2002, S. 80). Weitere Einblicke in den Arbeits- und Lernprozess der Schülerinnen und Schüler erlaubt das hier eingesetzte *problemzentrierte Interview* (siehe Mayring, 2002, S. 67) mit Hilfe eines Interviewleitfadens, der eine gewisse Standardisierung erleichtert.

Zur Datenerhebung wurde der Unterricht videografiert. Ferner standen Schülerdokumente zur Verfügung. In einer zweiten Phase wurden Interviews mit einzelnen Lernenden durchgeführt.

Die so gesammelten Schülergespräche und Interviews wurden wortgetreu „in normales Schriftdeutsch“ (Mayring, 2002, S. 91) übertragen. Diese *Transkription*

> kommt dann in Frage, wenn die inhaltlich-thematische Ebene im Vordergrund steht, wenn der Befragte beispielsweise als Zeuge, als Experte, als Informant auftreten soll. (Mayring, 2002, S. 91)

Die sog. *Konstruktion deskriptiver Systeme* ist der Übergang zur Auswertung. Denn mit

> der Konstruktion deskriptiver Systeme soll das Material durch zu Kategoriensystemen zusammengestellte Überbegriffe geordnet werden. Die Kategorien werden theoriegeleitet und auf das konkrete empirische Material bezogen. (Mayring, 2002, S. 100)

Das Verfahren ermöglicht es, das theoretische Wissen der instrumentellen Genese und semiotischen Vermittlung auch zur Untersuchung des Einsatzes historischer Zeichengeräte zu verwenden.

4.3 Auswertungsverfahren

Bei der hier vorgestellten Untersuchung ist die Hypothesen- und Theoriebildung ein wichtiges Anliegen. Daher erscheint eine Auswertung im Rahmen der Qualitativen Inhaltsanalyse und der Grounded Theory angemessen.

Insbesondere bei einer teilnehmenden Beobachtung und beim Ziel der Theoriebildung ist das Konzept der Grounded Theory geeignet:

> Das klassische Anwendungsgebiet der ‚grounded theory’ ist die Feldforschung, in der der Forscher, meist durch teilnehmende Beobachtung, selbst involviert ist. … Darüber hinaus empfiehlt sich die gegenstandsbezogene Theoriebildung vor allem dann, wenn der Gegenstandsbereich noch neu und unerforscht ist.
> (Mayring, 2002, S. 106 f.)

Die Qualitative Inhaltsanalyse ergänzt dieses Verfahren insofern,

> dass sie streng methodisch kontrolliert das Material schrittweise analysiert. Sie zerlegt ihr Material in Einheiten, die sie nacheinander bearbeitet. Im Zentrum steht dabei ein theoriegeleitet am Material entwickeltes Kategoriensystem; durch dieses Kategoriensystem werden diejenigen Aspekte festgelegt, die aus dem Material herausgefiltert werden sollen.
> (Mayring, 2002, S. 114)

Kelle und Kluge (2010) weisen in diesem Zusammenhang auf Folgendes hin:

> In der Regel sollte also die Analyse mit empirisch nur wenig gehaltvollen, allgemeinen und abstrakten Konzepten beginnen, die im Laufe der Auswertung gewissermaßen ‚empirisch aufgefüllt' werden. […] Wichtig bei einer solchen theoriegeleiteten Kodierung und Strukturierung des Materials ist es also, dass theoretische Konzepte nicht zu großen empirischen Gehalt besitzen, das heißt dem Material nicht ‚aufgezwungen' werden, sondern zu den Daten passen, indem sie die dort enthaltenen Informationen auf eine theoretisch-konzeptionelle Ebene heben.
> (Kelle & Kluge, 2010, S. 71)

So berücksichtigt gerade auch die Grounded Theory wichtige Aspekte der Studie. Zunächst einmal ist hervorzuheben, dass Hypothesen gebildet werden sollen. Außerdem ist die Untersuchung so angelegt, dass die Zeichengeräte in mehreren Klassen zeitlich versetzt untersucht werden. Darüber hinaus soll nach der Beobachtung des Parabelzirkeleinsatzes der Pantographeneinsatz erfolgen, um die Übertragbarkeit der gewonnenen Hypothesen zu prüfen. Damit ist klar, dass nicht alle Daten zunächst erhoben und dann erst ausgewertet werden. Daher gibt es keine zwei genau zu trennenden Phasen der Datenerhebung und -auswertung. Genau davon geht die Grounded Theory aus (vgl. Mey & Muck, 2011; Truschkat, Kaiser-Belz & Volkmann, 2011).

4.4 Datensammlung

Die Studie setzt sich aus zwei großen Teiluntersuchungen zusammen. Zunächst wurde der Einsatz eines Parabelzirkels in vier Kursen (n = 86) zu Beginn der gymnasialen Oberstufe untersucht. Anschließend fand eine Untersuchung des Pantographeneinsatzes in zwei Kursen (n = 39) des ersten Jahres der Qualifikationsphase statt. Bei zwei Kursen wurde ausschließlich der reale Parabelzirkel eingesetzt. Im dritten Kurs wurden nur digitale und im vierten reale und digitale Modelle angeboten. Beim Pantographen gab es einen Kurs, der nur reale und einen, der nur digitale Nachbauten erhielt. In diesem Artikel wird nur auf den Parabelzirkel eingegangen.

Die Erforschung der realen Geräte erfolgte im Rahmen einer Gruppenarbeit im Mathematikunterricht. Die digitalen Modelle wurden in Partnerarbeit untersucht. Alle Kurse wurden mit zwei fest im Raum platzierten Kameras videografiert. So konnten alle Gruppen erfasst und insbesondere der erste Zugriff auf das jeweilige Gerät dokumentiert werden. Darüber hinaus wurden bestimmte Arbeitsphasen und -ergebnisse der Gruppen mit Hilfe einer mobilen Videokamera aufgezeichnet. Zusätzlich wurden die im Unterricht von den Schülerinnen und Schülern angefertigten Dokumente (schriftliche Bearbeitungen von Arbeitsaufträgen) genutzt. Außerdem wurden noch Leitfaden gestützte Einzelinterviews (mindestens vier Lernende pro Klassentyp) geführt (zum Leitfaden siehe van Randenborgh, 2015a, S. 108). Die Unterrichtsstunden fanden jeweils im Beisein einer Lehrkraft statt. Sie hatte aber keine aktive Rolle. So war vorab auch mit den Lehrkräften abgesprochen worden, dass die Schülerinnen und Schüler eigenständig arbeiten und keine mathematisch-inhaltlichen Hilfestellungen erhalten sollten. Ebenso hielt sich der Forscher zurück und beobachtet die Schülertätigkeiten mit einer mobilen Kamera. So konnten die Schülergespräche genauer aufgezeichnet werden. Dabei wurden die Gruppen nacheinander immer wieder gefilmt, so dass ihr Arbeitsstand zu verschiedenen Zeitpunkten erfasst wurde. Manchmal wurde eine Gruppe gefragt, was sie bis jetzt herausgefunden habe. Die hier gemachten Unterrichtsbeobachtungen stellten die Grundlage für die Auswahl der Interviewpartner dar. Da das Forschungsinteresse auf das Analysieren der Lernprozesse bei der Bildung eines Ideenkonglomerats der Lernenden gerichtet ist und die instrumentelle Genese eines Zeichengeräts mit Hilfe des Ansatzes der semiotischen Vermittlung untersucht werden soll, wurden die Interviewpartner nicht zufällig, sondern nach den folgenden Gesichtspunkten bestimmt. Ein Auswahlaspekt war, ob im Unterricht Gespräche beobachtet werden konnten, die einen genaueren Aufschluss über den Prozess der instrumentellen Genese, das Vorgehen oder Denken der Lernenden geben könnten. Ein weiteres Kriterium war, ob es besondere Zeichen gab, die von den Schülerinnen und Schülern verwendet wurden. Schließlich wurde noch darauf geachtet, ob es intensive Diskussionen in einer Gruppe gab, bei denen interessante Gedanken auftraten, die sich dann durchsetzen konnten oder auch nicht weiterverfolgt wurden.

4.4.1 Lerngruppen und Lernumgebungen

Der Parabelzirkel stellt für die Schülerinnen und Schüler ein unbekanntes Gerät dar. Wichtige Gründe für den Einsatz zu Beginn der gymnasialen Oberstufe (11. Klasse nach G9) sind, dass die Lernenden dieser Jahrgangsstufe methodisch genug vorbereitet (Gruppenarbeit, Dokumentieren der Ergebnisse etc.) und mit dem Umgang einer dynamischen Geometriesoftware vertraut sind, was wichtig war, da später auch digitale Simulationen von Zeichengeräten verwendet wurden. Sie bringen ferner vielfältige prozessbezogene Kompetenzen (kommunizieren, argumentieren etc.) mit, so dass sie eigenständig arbeiten können. Inhaltlich sollten bzw. könnten die Schülerinnen und Schüler über genügend mathematisches Vorwissen verfügen. Denn mathematisch weiterführend ist es etwa, die Raute als solche zu erkennen und sich ihrer geometrischen Eigenschaften (gleich lange Seiten, besondere Lage der Diagonalen zueinander etc.) bewusst zu werden.

Die Schülerinnen und Schüler dieser Jahrgangsstufe kennen Parabeln als Graph quadratischer Funktionen und können daher in der Regel eine gezeichnete Parabel als solche identifizieren. Beim Einsatz des Parabelzirkels in der hier vorgestellten Lernumgebung muss aber, um einen entsprechenden Funktionsterm aufzustellen, ein Koordinatensystem eingeführt werden. Anschließend kann mit Hilfe des Satzes des Pythagoras eine Gleichung aufgestellt werden. Löst man diese entsprechend auf, erhält man den vertrauten Term einer quadratischen Funktion (van Randenborgh, 2012a). Dieser Weg von der Zeichnung einer Parabel hin zum Term ist im Mathematikunterricht eher selten. Oft wird so vorgegangen, dass von einem Term ausgehend ein Graph gezeichnet wird. Wir starten hier mit einem Zeichengerät und einer geometrischen Erzeugung der Parabel. Auf diese Weise können die Schülerinnen und Schüler die Bedeutung der Koordinatengeometrie erkennen. Ferner werden Anknüpfungsmöglichkeiten im Bereich der Analysis (Tangentenbegriff) und der Analytischen Geometrie (Beschreibung von Bewegungen mit Hilfe von Vektoren) geschaffen. Auch die Verknüpfung von Geometrie und Algebra kann den Lernenden deutlich werden. Das direkte Ziel ist, die geometrische Definition der Parabel zu entdecken, indem die gegenständlichen Ideen des Parabelzirkels wahrgenommen werden und die Lernenden diese miteinander verbinden und eigene Nutzungs- und Erklärungsideen entwickeln. Auf diese Weise bilden sie ihr Ideenkonglomerat. Bei diesem Parabelzirkeleinsatz sollen die Lernenden die für sie zunächst nicht sichtbare mathematische Idee des Gerätes finden. Im Unterricht stehen die Einsatzidee, die mechanische und mathematische Idee im Vordergrund. Indem die Schülerinnen und Schüler das Gerät handelnd erforschen, gelangen sie auf ihren eigenen Wegen zur inhärenten Mathematik. Der Unterrichtende beobachtet diesen Prozess. Diese Rolle kann er einnehmen, da er durch eine geeignete *Orchestrierung* (vgl. Trouche, 2005b; Bartolini Bussi & Mariotti, 2008) die Voraussetzungen und Rahmenbedingen dafür geschaffen hat. Beim hier vorgestellten Unterrichtseinsatz bedeutet das im Wesentlichen das Bereitstellen der Zeichengeräte und geeigneter Arbeitsaufträge, so dass ein eigenständiges Erforschen stattfinden kann. Die in den Abbildungen 6 und 7 dargestellten Arbeitsaufträge erfüllten diese Wünsche. Analog wurden auch die Forschungsaufträge für den digitalen Parabelzirkel (und Pantographen) formuliert.

Die Lerngruppen erhielten reale Parabelzirkel aus Holz oder aus Plastik. Zur Gruppenarbeit standen für jede Gruppe (4 bis 5 Gruppen pro Klasse mit je ca. 5 Personen) jeweils ein realer Parabelzirkel und zunächst eine Anweisungskarte mit entsprechenden Arbeitsaufträgen (Abb. 6) bereit.

Forschungsaufträge

1. Findet heraus, was das Gerät zeichnet.
2. Findet heraus, wie das Gerät gebaut ist (Bauweise) und wie es funktioniert (Funktionsweise).
3. Erstellt einen Bauplan mit Gebrauchs-anweisung.

Abbildung 6: Arbeitsaufträge I

Die Aufgaben sind offen formuliert und zielen auf die Beschäftigung mit der *Einsatzidee* (Auftrag 1) und der *mechanischen Idee* (Auftrag 2) des Parabelzirkels. Auch die *mathematische Idee* wird bei der Frage nach der Funktionsweise angesprochen. Den Abschluss der ersten Karte bildet der 3. Arbeitsauftrag. Die Erstellung eines Bauplanes mit Gebrauchsanweisung stellt eine Art Zusammenfassung dar. Hier wird schriftlich dokumentiert und damit genauer feststellbar, was die Lernenden entdeckt haben. Konnten sie wichtige Eigenschaften des Parabelzirkels aufdecken? Haben die Schülerinnen und Schüler bereits Erklärungsideen entwickelt? Was ist für sie wichtig und was wird wie dargestellt?

Erst nachdem dieser Erkenntnisstand formuliert wurde, erhalten sie die nächste Anweisungskarte (Abb. 7), bei der es nun ganz explizit um die *mathematische Idee* geht. Beim ersten Arbeitsauftrag können Bezüge zur mechanischen Idee hergestellt werden. Die zweite Aufgabe fordert zu einer mathematischen Begründung auf. Diese können die Lernenden auch schon früher gegeben haben. Die im Unterrichtsverlauf entdeckten Eigenschaften des Parabelzirkels werden nun mathematisch ergründet. Dieses kann dann zur geometrischen Definition der Parabel führen (3. Aufgabe). Dabei sollte der Begriff der Ortslinie bekannt sein. Dieses ließ sich am Beispiel der Mittelsenkrechten vorbereiten. Für die Bearbeitung der Arbeitsaufträge zum Parabelzirkel war insgesamt eine Doppelstunde vorgesehen.

mathematische Idee

1. Stellt Vermutungen auf, warum diese Kurve gezeichnet wird.
2. Begründet eure Vermutungen.
3. Definiert die Kurve als Ortslinie.

Abb. 7: Arbeitsaufträge II

4.5 Auswertung

Zunächst wurden die im Unterricht videografierten mündlichen Äußerungen der Lernenden transkribiert, ebenso die Interviews. Anschließend wurde die Konstruktion deskriptiver Systeme vorgenommen. Die Daten (Transkripte und Schülerdokumente) wurden dem *offenen Kodieren* unterzogen, was bedeutet, „den Indikatoren (das sind Wörter, Satzteile oder Sätze) Konstrukte (abstraktere Ideen) zuzuweisen“ (Bortz & Döring, 2006, S. 333). So wurden die von den Schülerinnen und Schülern benutzten Zeichen den drei Zeichenkategorien (Artefakt-, Schlüssel- und Mathematikzeichen) zugeordnet, wobei durch mehrfaches Durchgehen der Daten das System zunehmend verfeinert wurde. Letztlich wurde das vorliegende theoretische Konzept empirisch »angefüllt« und auf *vier Zeichenebenen* erweitert. Es kam die Ebene der Instrumentzeichen hinzu, die zwischen den Schlüssel- und Mathematikzeichen liegt (van Randenborgh, 2015a). Außerdem wurden besondere Zeichen – die *Trägerzeichen* (van Randenborgh, 2012b) –, die den Lernprozess lenken und von einer Zeichenebene zur nächsten führen, gefunden.

5. Lernprozesse mit Hilfe des Begriffs des Ideenkonglomerats als Wege der instrumentellen Genese verstehen

Bei der Erforschung des Geräts durch die Lernenden standen die Einsatzidee, die mechanische und mathematische Idee im Fokus. Bei ihren Analysen entwickeln sie *Nutzungs- und Erklärungsideen*, die für das Gelingen der Instrumentwerdung eine entscheidende Funktion haben.

5.1 Die Vorgehensweisen der Lernenden als Entwicklungswege eigener Ideenkonglomerate

Festzustellen war, dass die gegenständlichen Ideen die Lernprozesse und die Erforschung des Geräts grundlegend beeinflussen. Dabei verliefen die Wege der Lernenden hin zum Entdecken der zugrundeliegenden Mathematik des Parabelzirkels durchaus unterschiedlich, so dass verschiedene Vorgehensweisen der Lernenden gefunden wurden (van Randenborgh, 2015a). Allerdings konnten nicht alle Schülerinnen und Schüler die mathematische Idee vollständig offenlegen. Der entscheidende Grund dafür war, dass diese Lernenden nicht zum Begriff des Abstands gelangten. Hervorzuheben ist, dass bei der Analyse des Zeichengeräts bei den Schülerinnen und Schülern im Wesentlichen *zwei weiterführende Perspektiven* zu beobachten waren. Sie traten beim realen und auch bei digitalen Parabelzirkel auf (van Randenborgh, 2015a, S. 121 ff. bzw. S. 130 ff.). Darüber hinaus konnten sie auch bei der Untersuchung des Pantographeneinsatzes beobachtet werden (van Randenborgh 2015a, S. 167 ff.). Einigen Lernenden berücksichtigten besonders die *Grenzen und Zwänge* (Perspektive A), andere untersuchten wesentlich stärker die *(Veränderungs-)Möglichkeiten* des Geräts (Perspektive B). Dieses kann exemplarisch an den Interviewausschnitten in Abb. 8 nachvollzogen werden.

Die Worte, die die Konzentration auf die Grenzen des Geräts zeigen, sind im Interviewausschnitt A kursiv dargestellt. Es wird im Interview beschrieben, was die Lernenden im ersten Moment der Erforschung des Parabelzirkels gedacht haben und wie sie dann in ihrer Gruppe vorgegangen sind. Die hervorgehobene Formulierung bei A beschreibt, dass der Parabelzirkel so weit, wie es ging, nach links bzw. rechts gestellt wurde. In dieser Gruppe wurde er also soweit bewegt bis der Stift an die entsprechende Rautenecke stieß. Weiter kann man (ohne Umbau) mit dem realen Parabelzirkel nicht zeichnen. Der Blick wurde daher auf eine (Zeichen-)Grenze gerichtet. Ein anderer Blickwinkel wird im Interviewausschnitt B deutlich. Der kursiv gesetzte Teil der Schülerworte hebt die Formulierungen hervor, die das Nachdenken über Möglichkeiten und das tatsächliche Vornehmen von Veränderungen thematisieren. Dieses war auch im Unterricht zu beobachten, denn es prägte die Tätigkeiten der Schülerinnen und Schüler.

Interviewausschnitt A	**Interviewausschnitt B**
Das sieht ja alles erst einmal ein wenig kompliziert aus. Und wie da die Zusammenhänge sind, das muss man natürlich auch erst einmal ausprobieren. […] Wir haben *natürlich erst einmal alle Extreme ausprobiert, also wir haben es einmal komplett nach so* gestellt und einmal komplett nach so. Und dann haben wir uns angeguckt, was für eine Form das seien könnte, ob´s ´ne Kurve ist oder ob es halt ´ne Parabel seien könnte, oder auch ein Kreisausschnitt. Das haben wir uns überlegt und sind dann darauf gekommen, dass es doch sehr nach einer Parabel aussieht.	Jeder hat angefasst und jeder hat irgendwas getan. Irgendwann haben wir dann versucht herauszufinden, was es eigentlich gezeichnet hat. Dann haben wir halt gemerkt, dass es diesen Halbkreis bildet und dann haben wir halt überlegt, okay, was kann das sein? Kreis ist ein bisschen unlogisch, weil es ja auch nicht ganz herumgeht. *Und dann haben wir halt daran herumexperimentiert, Sachen abnehmen, anderswo hinstellen oder so.* … Also irgendwie war es schon klar, dass es irgendwie ´ne Parabel oder so seien sollte, aber wir wussten halt nicht so genau warum.

Abb. 8: Interviewausschnitt (realer Parabelzirkel)

In Abb. 9 werden exemplarisch die Bezüge im Interviewausschnitt B zu den einzelnen Ideen und dem Begriff des Ideenkonglomerats (IK) dargestellt. Die Lernenden entwickelten »Stück für Stück« über die einzelnen gegenständlichen Ideen ihr Ideenkonglomerat, indem sie die folgenden Fragen untersuchten: was, wie und warum zeichnet das Gerät? Eine Zusammenführung der so gefundenen Aspekte erfolgte dann, wenn entsprechende Nutzungs- und Erklärungsideen gebildet wurden.

Interviewausschnitt B	Bezüge zum Ideenkonglomerat
„Jeder hat *angefasst* und jeder hat *irgendwas getan*.“	Was wird gezeichnet?
„… versucht herauszufinden, **was** es eigentlich gezeichnet hat.“	Es geht zentral um die Einsatzidee.
„…Halbkreis... Kreis... Parabel“	Nun tritt die erste Erklärungsidee auf.
„Kreis ist ein bisschen unlogisch, weil es ja auch nicht ganz herumgeht. Und dann haben wir halt daran *herumexperimentiert, Sachen abnehmen, anderswo hinstellen oder so*.“	Wie wird gezeichnet?
„… irgendwie war es schon klar, dass es *irgendwie ´ne Parabel* oder so sein sollte.“	Es erfolgt eine Auseinandersetzung mit der mechanischen Idee.
„aber wir wussten halt nicht so genau **warum**“	Warum wird gezeichnet? Es findet eine intensivere Beschäftigung mit der mathematischen Idee statt.

Abb. 9: Beispiele für Bezüge zum Ideenkonglomerat

Dabei gab es auch wichtige Gemeinsamkeiten bei den Lernwegewegen. So war bei allen Lerngruppen zu beobachten, dass das Zeichengerät die Schülertätigkeiten auslöste und so von Beginn an eine explorierende und problemorientierte Unterrichtssituation gegeben war. Damit kam dem Gerät die Funktion eines stummen Impulses zu. Der hohe motivationale Aspekt wurde auch in Schülerrückmeldungen wie „ohne Einleitung direkt mit der Aufgabe konfrontiert → Beginn interessant“ deutlich.

Diese Beobachtung legt – zumindest mit Blick auf den hier vorgestellten Einsatz eines Zeichengeräts im Mathematikunterricht – nahe, dass die Instrumentation die *erste* Richtung der Instrumentellen Genese ist. Denn die Schülertätigkeit wird durch das Gerät initiiert und bringt somit die instrumentelle Genese in Gang. Der wesentliche Grund dafür ist, dass erst durch das Bewegen des Geräts eine (charakteristische) Zeichnung (hier: Parabel) entsteht. Das Sichtbarwerden dieses Produkts ist zum Finden der zunächst verborgenen Ideen des vom Lehrenden eingesetzten Ideenkonglomerats erforderlich. Die inhärenten Grenzen, Zwänge und Möglichkeiten lenken die Aktivitäten und Perspektiven der Schülerinnen und Schüler. Auf diese Weise wird die instrumentelle Genese ausgelöst und dann durch die Eigenschaften des Geräts weiter bestimmt. Die Eigenschaften sind ihrerseits durch die gegenständlichen Ideen des Ideenkonglomerats vorgegeben – besonders durch die mechanische und mathematische Idee. Allerdings entwickelten die Schülerinnen und Schüler in der Auseinandersetzung mit dem Zeichengerät eigene Nutzungs- und Erklärungsideen, so dass ein Ideenkonglomerat nicht nur einfach vorgegeben ist, sondern auch gebildet wird. In diesem Prozess der Bildung eines Ideenkonglomerates durch die Lernenden und somit für die Entwicklung personaler Ideen ist nicht nur das Vorwissen der Lernenden wichtig, sondern es spielen besonders die Zwänge, Grenzen und Möglichkeiten des Geräts eine bedeutende Rolle.

5.2 Die Bedeutung von Zwängen, Grenzen und Möglichkeiten für die Lernprozesse und ihre Bezüge zum Ideenkonglomerat (Forschungsfrage 1)

Es war zu beobachten, dass das Erforschen von Grenzen und Möglichkeiten bei den Lernenden oft zum Nachdenken oder auch zum tatsächlichen Durchführen von Veränderungen am Gerät führte. Das konnte ein Auslöser dafür sein, Zwänge zu entdecken und zur verborgenen Mathematik zu gelangen.

Die Tabelle in Abb. 10 stellt beispielhaft bestimmte Eigenschaften des realen Parabelzirkels (PZ) vor, die im Unterricht von den Lernenden identifiziert wurden. Diese wurden von mir nach Grenzen, Zwängen und Möglichkeiten sortiert. Denn nach der empirischen Untersuchung wurde deutlich, dass die *Abgrenzung, insbesondere von Zwängen gegenüber Grenzen, zentral* ist.

Zwänge	Grenzen	Möglichkeiten
Der PZ lässt sich auf eine bestimmte Art und Weise bewegen. Er zeichnet immer eine Parabel. Es gibt fixierte Elemente. Das Gelenkviereck ist eine Raute.	Der PZ zeichnet einen bestimmten Ausschnitt und eine festgelegte Form der Parabel. Er zeichnet nur in einem bestimmten Bereich.	Die Position von F (Brennpunkt) kann verändert werden. Die Lage von l (Leitlinie) kann verändert werden.

Abb. 10: Eigenschaften des realen PZ differenziert nach Zwängen, Grenzen und Möglichkeiten

Eine ***Grenze*** ist ein – durch die mathematische Idee bedingter – Aspekt der *mechanischen Idee*. Daher ist eine Grenze etwas, das je nach Bauart des Geräts beseitigt, erweitert oder verändert werden kann. Beispielsweise zeichnet mein Parabelzirkel (ohne Umbau) nur innerhalb der Raute einen bestimmten Parabelausschnitt. Die Form der Parabel (Ausschnitt, gestauchtes oder gestrecktes Aussehen) ist also vom Gerät (Bauweise) vorgegeben. Sie kann aber verändert werden.

Ein ***Zwang*** hingegen ist eine Notwendigkeit, die im Gerät (Funktionsweise) steckt, d.h. in der Konstruktion oder im Konstruierten. Ein Zwang kann somit nicht verändert oder gar beseitigt werden. Er steht im direkten Zusammenhang mit der zugrundeliegenden *mathematischen Idee*. Beim Parabelzirkel bedeutet das, dass dieses Zeichengerät immer eine Parabel zeichnet.

In meiner Studie gelang es den Schülerinnen und Schülern nur dann die mathematische Idee zu entdecken und die verborgene Mathematik aufzudecken, wenn die Zwänge erkannt und erklärt wurden. *Den Zwängen kommt daher die entscheidende Bedeutung für das Aufdecken der inhärenten Mathematik und damit für die Instrumentwerdung zu.* Diese wichtige Beobachtung wurde in der Theorie der instrumentellen Genese so noch nicht herausgestellt. Denn entweder wurden die Zwänge nach verschiedenen Arten differenziert (Rabardel, 1995) oder sie werden scheinbar gleichberechtigt neben den Möglichkeiten des Artefakts gesehen (Trouche, 2005a; Maschietto & Trouche, 2010).

Unter ***Möglichkeiten*** verstehe ich die Dinge, die das Zeichengerät optional bietet. Sie werden auch vom Gerät vorgegeben. Sie sind also etwas, das verändert werden kann, aber so, dass die *Einsatzidee* (z. B. Parabel zeichnen) weiterhin bestehen bleibt. Beim hier eingesetzten Parabelzirkel kann beispielsweise die befestigte Schraube (F) herausgenommen werden und an einer anderen Stelle fixiert werden. Dadurch ändert sich beim Zeichnen das Aussehen der Parabel, aber nicht die Tatsache, dass es sich um eine Parabel handelt. Damit weist der Begriff der Möglichkeit eine stärkere Verwandtschaft zum Begriff der Grenze als zum Zwang auf. Er verweist aber andererseits deutlich auf einen zugrundeliegenden Zwang, nämlich in unserem Beispiel, dass F ein fester Punkt (Fokus) ist.

Der ***Begriff »Möglichkeit«*** ist also schärfer zu fassen. Es geht nur indirekt um die Möglichkeit, die das Gerät dem Nutzer bietet, um seine Fähigkeiten zu erweitern bzw. zu verbessern. Für Zeichengeräte bedeutet so ein Verständnis eine Erweiterung der Zeichenfähigkeiten. Darum geht es hier nicht. Das scheint mir ein wichtiger Unterschied zu sein, je nachdem, ob man ein Gerät bloß *als Hilfsmittel* nutzt (z. B. den Taschenrechner nur zur Rechenerleichterung oder das Lineal zur Verbesserung der Zeichenfähigkeit) oder *als Vermittler* der ihm zugrundeliegenden Mathematik. Der Begriff der Möglichkeiten eines Geräts bedeutet im zweiten Fall etwas anderes. Er meint das im Gerät steckende ***Potenzial***, also einen grundsätzlich möglichen, aber zunächst tatsächlich so nicht gegeben oder eingestellten, Gebrauch, der aber eben als Möglichkeit vorhanden ist. Um das Potential zu nutzen, müssten ggf. bestimmte Grenzen beseitigt oder erweitert werden. In dem Sinne kann man von einer *immanenten Leistungsfähigkeit* des Geräts sprechen. Dieses Verständnis ermöglicht es, hier einen deutlichen Bezug zur didaktischen Idee und den Nutzungs- und Erklärungsideen zu sehen. Zugespitzt ausgedrückt ermöglicht das Potenzial mit seinem Einfluss auf die Grenzen und Möglichkeiten des Geräts die Entwicklung personaler Ideen. Auf diese Weise trägt es zur Bildung eines Ideenkonglomerats der Lernenden im Mathematikunterricht maßgeblich bei. Für den Gegenstand Zirkel bedeutet diese Sichtweise, dass mit der Ausgangseinstellung nur ein Kreis mit dem so vorgegebenen Radius gezeichnet werden kann. Als Potenzial sind aber weitere Einstellungen – durch das Vornehmen von Veränderungen am Gerät – vorhanden, die es erlauben, Kreise mit anderen Radien zu zeichnen (1. Bedeutungseben: Möglichkeit). Wird nun ein Zirkel nicht nur als reines Hilfsmittel benutzt, sondern als Träger einer mathematischen Idee betrachtet, kann das Subjekt über die Beschäftigung mit diesem Potenzial, den zugrundeliegenden Zwang und damit die verborgene mathematischen Idee erkennen (2. Bedeutungsebene: Leistungsfähigkeit). Denn die Variation zeigt gerade auch das, was immer so bleibt. Vorgenommene Änderungen zeigen auch die Grenzen, z. B. welche Kreisgrößen (genauer: Kreise mit welchen Radien) mit einem Zirkel maximal (bzw. minimal) gezeichnet werden können. Das ist eine Zeichengrenze. Entdeckt werden kann dann, dass größere Kreise z. B. mit längeren Schenkeln gezeichnet werden könnten. An diesem Beispiel wird deutlich, dass die Beschäftigung mit dem inhärenten Potenzial eines Zeichengeräts auf Grenzen und Möglichkeiten hinweist und zur mechanischen und mathematischen Idee führt. Auch historische oder technische Weiterentwicklungen können so in den Blick kommen. In dem Beispiel könnte man zum Teleskopzirkel mit ausziehbaren Schenkeln, zum Nullenzirkel oder weiteren speziellen Zirkeln über die Beschäftigung mit dem Potential eines gewöhnlichen Zirkels kommen.[3]

5.3 Lernprozesse als Wege der instrumentellen Genese: Die instrumentelle Wissensaneignung (Forschungsfrage 2)

In Abb. 11 wird die in der Studie festgestellte besondere Bedeutung der Nutzungs- und Erklärungsideen in das Ausgangsmodell der instrumentellen Genese eines Ideenkonglomerats (Abb. 2) eingearbeitet und explizit für das Lernen im Mathematikunterricht dargestellt. Beim Mathematiklernen mit einem Zeichengerät wurde deutlich, dass die Zwänge, Grenzen und Möglichkeiten die Instrumentation vorgeben und prägen. Sie sind mit der Einsatzidee, der mechanischen und mathematischen Idee aufs Engste verbunden. Die Instrumentalisation der Mathematiklernenden wird durch sie gelenkt. Die Wechselseitigkeit der beiden Richtungen wurde beim Zeichengeräteeinsatz z. B. dadurch deutlich, dass die inhärenten Zwänge als solche vom Lernenden erkannt werden müssen. Initiiert wird der Prozess allerdings durch das Gerät selbst, das Neugier und Interesse auslöst, sich bewegen lässt, dann etwas zeichnet und so die Aufmerksamkeit und Tätigkeit der Lernenden lenkt. In der Ausgangssituation (vor dem erstmaligen Bewegen bzw. Zeichnen) sind einzelne gegenständliche Ideen des Ideenkonglomerats schon (teilweise) zu erkennen, aber manches ist auch noch verborgen. Die Zusammenhänge und die Bezüge zwischen den einzelnen Ideen sind noch unbekannt, so dass das Ideenkonglomerat den Lernenden nicht als Ideenkonglomerat erscheint. Sie haben zwar vielleicht einzelne Elemente wahrgenommen. Aber eine Verbindung dieser Ideen miteinander und die Ausbildung eines Ideenkonglomerats der Lernenden hat noch nicht stattgefunden. Insofern ist der Gegenstand zu diesem

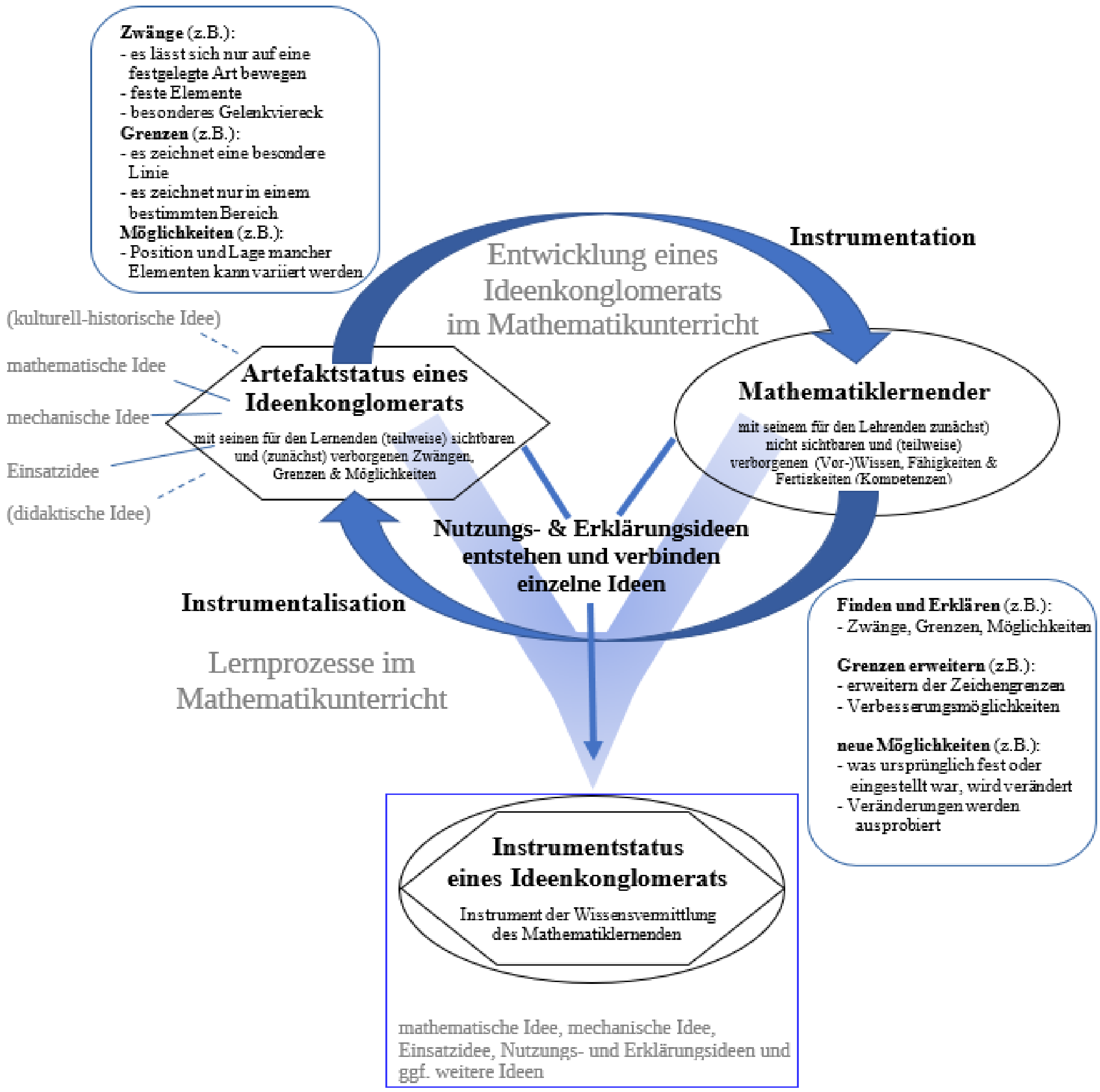

Abb. 11: Die instrumentelle Wissensaneignung im Mathematikunterricht

Zeitpunkt noch ausschließlich das verborgene Ideenkonglomerat des Lehrenden. Diesen Zustand bezeichne ich als ***Artefaktstatus** eines Ideenkonglomerats*. Die Zwänge, Grenzen und Möglichkeiten sind zunächst nur als Potenzial (im obigen Sinne) vorhanden. In der weiteren Analyse der Lernenden spielen die Zwänge, Grenzen und Möglichkeiten eine zentrale Rolle. Indem die Lernenden diese untersuchen, gelangen sie zu den Nutzungs- und Erklärungsideen. Diese verbinden die einzelnen Ideen und führen dazu, dass aus dem zunächst unbekannten Gerät ein ***Instrument der Wissensvermittlung*** wird. Dieser Prozess der Entwicklung eines Ideenkonglomerats der Lernenden ist mit dem zentralen Pfeil in Abb. 11 angedeutet. Hier findet eine Verknüpfung der gegenständlichen Ideen des Artefakts, die das Subjekt wahrnimmt, mit den personalen Ideen des Mathematiklernenden, die dieser mit dem Artefakt verbindet, statt. Auf diese Weise wird das Ideenkonglomerat des Lernenden gebildet, so dass man nun von einem **Instrumentstatus** eines Ideenkonglomerats sprechen kann. Diesen komplexen Prozess bezeichne ich als *instrumentelle Wissensaneignung*. Die Ideen bzw. ihre Wahrnehmung und Verknüpfung führen also dazu, dass in den Lernprozessen mit einem Zeichengerät im Mathematikunterricht neues Wissen der Lernenden entsteht. Dieses umfasst nicht nur das Wissen über das Zeichengerät, sondern vor allem auch die ihm zugrundeliegende Mathematik. Damit ist das Artefakt zu einem Instrument der Wissensvermittlung geworden. Entscheidend dafür war es, dass die einzelnen Ideen zu einem Ideenkonglomerat von den Lernenden verbunden wurden. Das ist in Abb. 11 durch den das Instrument umfassenden (Ideen-)Kasten dargestellt. Hier sind nun die einzelnen Ideen zu einem (neuen) Ganzen verbunden.

Wurde nun der jeweilige Lernprozess reflektiert, gelangten einzelne Schülerinnen und Schüler auch zur didaktischen Idee. Auch nach der kulturell-historischen Idee wurde im Lernprozess gefragt (van Randenborgh, 2015a, S. 196 bzw. 130 ff.). Geschieht dieses, dann sind auch diese beiden Ideen im Ideenkonglomerat der Lernenden enthalten (Abb. 11, unten: „ggf. weitere Ideen").

5.4 Was sind Lernerfolge einer instrumentellen Wissensaneignung und welche Beeinflussungsfaktoren gibt es?

Das wesentliche Ziel des beschriebenen Einsatzes eines historischen Zeichengeräts, wie des realen und digitalen Parabelzirkels, im Mathematikunterricht ist das Aufdecken der im Gerät verborgenen Mathematik. Dieses stellt das neue Wissen für die Schülerinnen und Schüler dar. Macht man sich noch einmal bewusst, dass diese inhärente Mathematik die mathematische Idee ist und sie somit für die Funktionsweise und das Zusammenspiel mit der mechanischen Idee (Bauweise) verantwortlich ist, wird deutlich, dass das Aufdecken der einzelnen Ideen als Lernerfolge aufgefasst werden kann. Hier gibt es auch unterschiedliche Abstufungen. Die folgende Tabelle in Abb. 12 zeigt wesentliche *Lernerfolgsmöglichkeiten*, wobei das Niveau aufsteigend ist. Die vorgestellten Arbeitsaufträge (Abb. 6 und 7) beinhalteten allerdings nicht die in der letzten Tabellenzeile genannten und im Unterricht beobachteten Schülertätigkeiten, die ich als Vertiefung bezeichne. In der rechten Spalte werden Beispiele dafür gegeben, was die Lernenden beim Parabelzirkeleinsatz formulierten bzw. taten, um die jeweilige Lernerfolgsmöglichkeit zu nutzen bzw. einen entsprechenden Lernerfolg zu haben.

Lernerfolgsmöglichkeit	**Beispiele für Schülerformulierungen und Schülertätigkeiten**
Erkennen der Einsatzidee	„Laufbahn soll eine **Parabel** darstellen"
Erkennen der mechanischen Idee	„**Raute** in der Mitte"
Erkennen der mathematischen Idee	„gleicher **Abstand**"
Herstellen eines Zusammenhangs zwischen den Ideen	Bedeutung der Orthogonal- und der Diagonalschiene …
Definition	Menge aller Punkte … (geometrische Definition der Parabel)
Begrünen: mathematische Idee als Erklärung der Konstruktion des Geräts	Abstand, Eigenschaften der Raute …
Vertiefung: Verknüpfen mit vorhanden mathematischem Wissen	Koordinatensystem einführen, Gleichung aufstellen …

Abb. 12: Wesentliche Lernerfolgsmöglichkeiten

Im beobachteten Unterricht stellte sich heraus, dass die Schülerinnen und Schüler unterschiedlich weit kamen. Das lag vor allen Dingen daran, ob der *Begriff des Abstands* gefunden wurde. Denn dieser ermöglichte den Zugang zum neuen Wissen und zum vollständigen Erfassen der mathematischen Idee des Parabelzirkels. Allen Lernenden gelang es, Elemente der Einsatzidee, der mechanischen und mathematischen Idee aufzudecken. Der Zusammenhang zwischen diesen Ideen wurde jedoch auf unterschiedlichem Niveau formuliert. Beispielsweise gab es technische Beschreibungen, die die Bewegungszusammenhänge des Parabelzirkels erläuterten. Bei solchen Formulierungen wurde nicht deutlich, was die entscheidende, die ganze Konstruktion bedingende Idee ist. Auffällig häufig waren solche Erklärungen beim Einsatz des digitalen Parabelzirkels. Als ein Beispiel für solche technischen und dynamischen Formulierungen mag folgende Schüleräußerung dienen: „*Durch Verschieben* des Punktes L auf seiner Geraden wird eine Parabel erstellt.“

Auch bei der Definition der Parabel als Ortslinie gab es Unterschiede. Denn bei manchen Formulierungen war nur von der Entfernung des Punktes P zu F und zu L die Rede. Ein Beispiel ist die folgende Schülerformulierung: „P ist immer gleichweit von F und L entfernt“. Wurde der Abstandsbegriff nicht gebildet, konnten die Lernenden die mathematische Idee nicht vollständig erfassen.

Viele Schülerinnen und Schüler haben außerdem ein Koordinatensystem eingeführt, konnten aber oft nicht eine entsprechende Gleichung aufstellen. Beim digitalen Modell wurde lediglich das Koordinatensystem eingeblendet, wobei sich die Lernenden zusätzlich die Längen der Strecken $\overline{PF}$ und $\overline{PL}$ anzeigen ließen.

Die hier nur kurz umrissenen Stationen im Lernprozess konnten beim realen und digitalen Parabelzirkel beobachtet werden. Es gab aber auch spezifische Unterschiede (van Randenborgh, 2015a, S. 132 ff.; 211 ff.). Als besonders interessant ist hervorzuheben, dass es Lernende beim digitalen Parabelzirkel gab, die sich offensichtlich eine Vorstellung von dem Gerät in der Realität gemacht haben und das digitale Modell als *Simulation* eines realen Parabelzirkels aufgefasst haben (van Randenborgh, 2015a, S. 132 ff.). Es wurde dann von Leisten, Schienen oder dem Stift gesprochen. Auch gab es Erklärungen, die explizit auf solch eine Vorstellung hinwiesen, wenn etwa ein Schüler seine Erklärung so begann: „Also jetzt im Echten, im Mechanischen ist es […]“. Am Lernerfolg bei diesen Schülerinnen und Schülern zeigte sich, dass es für ihren Lernprozess hilfreich war, sich das Gerät real, also als (physikalischen) Gegenstand vorzustellen.

Beim realen wie auch beim digitalen Parabelzirkeleinsatz gelang es nicht allen Schülerinnen und Schülern die mathematische Idee und ihre Bedeutung für den Parabelzirkel vollständig aufzudecken. Zusammenfassend sind dieses die beiden wichtigsten und offensichtlich für einige Lernende anspruchsvollste Stellen:

- Erkennen der Diagonalschiene als Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{FP}$. Hierzu war es wichtig, besondere Eigenschaften einer Raute zu kennen.
- Das Beobachten der gleichen Entfernung der Punkte P von F und L gelang. Auch wurde erkannt, dass L immer auf l liegt. Ebenso wurde bemerkt, dass P sich immer auf der Orthogonalen zu l befindet. Erst wenn diese Beobachtungen zum Begriff des Abstandes weiterentwickelt wurden, konnten die Lernenden zur mathematischen Idee des Parabelzirkels vordringen. Exemplarisch seinen hier zwei Schüleräußerungen genannt, an denen dieses Spektrum gut zu sehen ist. Die 1. Schüleräußerung (S1) spricht nur von der Entfernung („gleich weit weg“) und die 2. (S2) formuliert die Abstandsgleichheit.

S1: „Die Gerade RQ ist Mittelsenkrechte zu $\overline{FL}$, also ist P gleich weit weg von F und L.“

S2: „Der Abstand zwischen F und P & L und P bleibt immer gleich.“

6 Fazit

6.1 Instrumentelle Wissensaneignung als Mathematisierungsprozess

6.1.1 Das Erforschen und Bilden eines Ideenkonglomerats als Prozess der Instrumentwerdung: vom Artefakt- zum Instrumentstatus

Der Prozess der Instrumentwerdung eines Zeichengeräts ließ sich gut mit dem Begriff des Ideenkonglomerats verstehen und interpretieren.

Im Unterricht war das Entschlüsseln der einzelnen gegenständlichen Ideen und ihres Zusammenhangs für die Lernenden wichtig. Dabei fanden sie beim Erforschen des Zeichengeräts Erklärungsideen, die ihr Vorgehen lenkten. In Verbindung mit der Theorie der instrumentellen Genese lässt sich nun auch der Prozess des Mathematisierens eines Zeichengeräts in den Blick nehmen. Bemerkenswert ist, dass für das Erforschen und Finden der inhärenten Mathematik das Aufdecken von Grenzen, Zwängen und Möglichkeiten wichtig war. Dieses Potenzial steckt von Beginn der Untersuchung an in den gegenständlichen Ideen eines Zeichengeräts. Doch ist vieles davon zunächst verborgen. Das Zeichengerät befindet sich im *Artefaktstatus*. Erst im Lauf eines Lernprozesses werden verborgene Ideen aufgedeckt und die inhärente Mathematik entdeckt, so dass das Gerät selbst, zum Vermittler von Mathematik wird, indem ein Ideenkonglomerat von den Lernenden gebildet wird. Ist dieses geschehen, hat das Ideenkonglomerat einen *Instrumentstatus* für die Lernenden erreicht. Es hat nun einerseits weiterhin Artefaktkomponenten (gegenständliche Ideen) und andererseits Komponenten des Subjekts (personale Ideen). Der traditionelle Begriff in der Theorie der instrumentellen Genese ist dafür der des (Gebrauchs-)Schemas (s. o. 3.2). Besonders wichtig ist, dass diese Komponenten – wie bei einem Konglomeratgestein die einzelnen Steine – zu einem Ganzen verbunden sind, bei dem man aber durchaus die einzelnen, unterschiedlichen Ideen (Steine) erkennt. Diese zusammengesetzte Seinsweise eines Instruments wird bei Rabardel (2001) so beschrieben:

> Instruments are intrinsically mixed nature: they are made up of artefacts components and utilization scheme components. (Rabardel, 2001, S. 28)

6.1.2 Der Übergang von der realen in die mathematische Welt – Das Sichtbarwerden der verborgenen Mathematik eines Ideenkonglomerats

Abbildung 13 zeigt, wie von den für die Lernenden vorerst größtenteils verborgenen Ideen und ihren Zusammenhängen immer mehr sichtbar wird. Der Prozess wird durch das Ausprobieren des Geräts initiiert. Die Lernenden konzentrieren sich zunächst auf die Frage, was gezeichnet wird, und kommen so zu ihrer ersten Erklärungsidee. Das weitere Untersuchen führt über die zentralen Fragen, wie es zeichnet und warum das Gerät so funktioniert, zu weiteren Erklärungsideen. Durch das Erklären und Begründen entsteht für die Schülerinnen und Schüler subjektiv neues Wissen und ein Ideenkonglomerat wird gebildet. Auf diese Weise wird das unbekannte Gerät zu einem ***Instrument der Wissensvermittlung***. Dementsprechend ändert sich der Status des Ideenkonglomerats. Der ursprüngliche Artefaktstatus wird zum Instrumentstatus, in dem die verborgene Mathematik des Ideenkonglomerats als subjektiv neues Wissen für den Lernenden offenbar geworden ist (vgl. Abb. 13: der Pfeil »Sichtbarwerden«). Hier sind nun die gegenständlichen und die personalen Ideen miteinander verwoben.

Geht man davon aus, dass das Zeichengerät, wenn es unberührt auf dem Tisch liegt, nur ein Gegenstand ist, kann man sagen, dass er Bestandteil der Wirklichkeit ist. Wird er bewegt, wird seine Einsatzidee deutlich und wir treten in die gegenständliche Welt eines Ideenkonglomerats ein. Die mechanische Idee steht nun im Vordergrund. Wird diese mit der mathematischen Idee verbunden, gelangen wir in die ideale oder mathematische Welt eines Ideenkonglomerats. Auf diese Weise findet ein *Übergang* von der realen Welt in die mathematische statt. Die intensive Beschäftigung mit der mathematischen Idee führt in die Welt der Mathematik, die ohne konkrete Bezüge zur gegenständlichen Wirklichkeit des Zeichengeräts auskommen kann. Dementsprechend kann man ein Ideenkonglomerat als *Zugang zur mathematischen Welt* betrachten. In den Formulierungen der Schülerinnen und Schüler wurde deutlich, dass die Worte und Bezeichnungen im Laufe des Lernprozesses mathematisch angereichert wurden. Es fand oft ein Übergang von einer beschreibenden hin zu einer mathematisch begründenden Ebene statt. Beispielsweise sprachen die Lernenden zunächst von einer „Schiene“, dann von einer „festen Schiene“. Anschließend wurde von einer „Führungsschiene“ gesprochen. Das entspricht dem mathematischen Begriff der Leitline. Eine Idealisierung fand dabei auch insofern statt, als dass die Holzschine zur Geraden wurde und in ihrer Funktion für das Gerät und für das mathematische Objekt (Parabel) erfasst wurde.

6.2 Schlussfolgerungen mit Blick auf die Lernwege

Die Ergebnisse sind fachdidaktisch wichtig, da sie zeigen, dass Mathematisieren nicht erst auf der symbolischen Ebene anfängt, sondern weit vor der Verwendung von Symbolen und Formeln. So bilden Handlungen mit einem konkreten Objekt den Ausgangspunkt der instrumentellen Wissensaneignung. Die von den Schülerinnen und Schülern dabei gemachten Erfahrungen und Beobachtungen werden exploriert und führen über das Aufdecken der Zwänge zur verborgenen Mathematik. Die konkreten Tätigkeiten wurden im Laufe der Erforschung abstrahiert und verinnerlicht. Bei allen Schülergruppen war

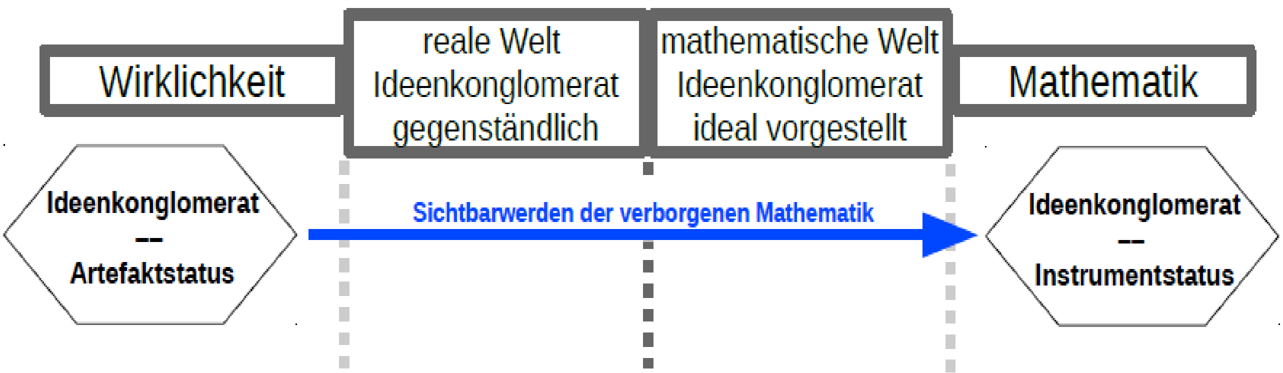

Abb. 13: Die Instrumentwerdung als Mathematisierungsprozess

zu beobachten, dass das jeweilige Zeichengerät immer weniger bewegt wurde. Die Bewegungsabläufe wurden nicht mehr praktisch handelnd durchgeführt, sondern verbalisiert und mental vorgestellt. Wenn gelegentlich noch einzelne Positionen der Zeichengeräte eingestellt wurden, dann war es ein gezieltes, durch theoretisches Nachdenken geleitetes, Vorgehen, um z.B. Erklärungsideen, Grenzen oder Zwänge zu verdeutlichen.

Diese Ergebnisse lassen sich auch im Rahmen der *Embodiement Theorie* einordnen, nach der

> all abstract ideas are built by metaphors that are based on experience made possible by our body interacting with the physical world.
> (Lakoff & Núñez, 2000, S. 496)

Sie sehen in der Metapher das grundlegende Mittel um abstraktes Denken zu ermöglichen. Wittmann, Flood und Black (2012) greifen genau diesen Ansatz auf, schließen sich ihm an und kommen mit Blick auf das algebraische Arbeiten zu folgender Zuspitzung:

> In *Where Mathematics Comes From*, Lakoff and Núñez (2000) propose that metaphor is ‚the basic means by which abstract thought is made possible' (p. 39). We adopt their perspective of embodied cognition: that all human concepts, including mathematical concepts, are based in the perceptual motor system experiences we have while interacting with the world around us. Image schemas and specific conceptual metaphors are components of the metaphorical thinking that allow us to consider complex mathematics.
> (Wittmann, Flood & Black, 2012, S. 170)

Henz, Oldenburg und Schöllhorn (2016) entwickeln in ihrer Untersuchung den Begriff der *methaphorischen Distanz*:

> In judging the strong claim that all mathematical concepts are formed by metaphors that are based on bodily experiences it might be useful to introduce the notion of 'metaphorical distance'. Concepts that are directly linked to bodily experiences have a short metaphorical distance to bodily experiences, while others may have a long distance that spans a chain of metaphors. (Henz, Oldenburg & Schöllhorn, 2016, S. 413)

Die Unterschiede der Lernwege beim Einsatz eines realen und eines digitalen Modells lassen sich unter der Perspektive der methaphorischen Distanz dahingehend interpretieren, dass diese bei nur virtuell durchgeführten Bewegungen des Parabelzirkels höher ist. Diese Distanz konnte möglicherweise verkürzt werden, wenn Schülerinnen und Schüler sich den digitalen Parabelzirkel real vorgestellt haben. Auch das Beschreiben der Funktionsweise des Geräts auf einer dynamischen Handlungsebene verkürzt auf gewisse Weise die Distanz.

6.3 Ausblick: Mediale Wissensaneignung

Die enge Verknüpfung von theoretischem Arbeiten (Denken) und praktischem Tun (Experimentieren) hat deutliche Bezüge zu Schülertätigkeiten beim Modellieren (van Randenborgh, 2013). Dabei kam dem Aufdecken, Entschlüsseln und Erklären der inhärenten Zwänge, Grenzen und Möglichkeiten sowie dem Erforschen von Veränderungen eine die Schülertätigkeit leitende Funktion zu.

6.3.1 Bezüge zum Modellieren

Nun gehe ich vom Modellierungsmodell von Schupp (1988, S. 11) aus, dass in Abb. 14 für ein historisches Zeichengerät von mir spezifiziert und abgewandelt wurde. Es ist allerdings nicht als Modellierungskreislauf, sondern als ein *Modellierungsablauf* oder -durchlauf zu verstehen. Der graue Kreis und die grauen Bezeichnungen sind dem ursprünglichen Modell entnommen. Meine Überarbeitung zeigt einerseits die Zuordnung der Schülertätigkeiten zu den bekannten Modellierungsaktivitäten. Andererseits wird noch einmal deutlich hervorgehoben, welche Bedeutung die Beschäftigung der Lernenden mit den Grenzen, Zwänge und Möglichkeiten des Zeichengeräts im Prozess der instrumentellen Wissensaneignung hat. Ferner wird der Begriff des Ideenkonglomerats genutzt, um verständlich zu machen, wie ein ursprünglich ganz der realen Welt zuzuordnender Gegenstand zu einem mathematischen Gebilde wird. Genauer gesagt: wie ein solcher Gegenstand, der im Mathematikunterricht eingesetzt wird, zu einem Lerngegenstand für die Schülerinnen und Schüler wird und so den Status eines Instruments der Wissensvermittlung erreicht.

Beim Begriff des Modellierens gibt es unterschiedliche und differenzierte Sichtweisen (Kaiser, Blum, Borromeo Ferri & Greefrath, 2015). Weit verbreitet scheint die folgende Sichtweise zu sein:

> Ausgangspunkt ist ein reales Problem oder auch erklärungsbedürftiges Phänomen. Um es mit mathematischen Methoden bearbeiten zu können, muss es im ersten Schritt, der eigentlichen Modellbildung oder -entwicklung, in ein mathematisches Problem überführt werden.
> (Ortlieb, von Dresky, Gasser & Günzel, 2013, S. 4)

Der wesentliche Unterschied zu solch einem Modellieren alltäglicher Situationen ist, dass das Zeichengerät die erforderliche Mathematik als Bestandteil (mathematische Idee) selbst enthält. Das sog. mathematische Problem ist also bereits gegeben. Allerdings ist es verborgen. Daher ist die Situation nicht die, dass ein reales Phänomen „in ein mathematisches Problem überführt werden muss". Es muss vielmehr von den Lernenden im Laufe ihrer Erforschung des Geräts aufgedeckt werden, indem sie die inhärenten

Zwänge untersuchen. Außerdem sollte im Lernprozess deutlich werden, dass die Funktionsweise des Zeichengeräts nur mit Hilfe der verborgenen Mathematik zu erklären ist.

Genauer zu untersuchen wäre – auch mit Blick auf das Modellieren –, ob beim Einsatz von (allen?) mathematikhaltigen Medien, den inhärenten Zwängen eine entscheidende Bedeutung zukommt. Diese Zwänge könnten in allgemeineren Kontexten z. B. die Voraussetzungen oder der Gültigkeits- und Anwendungsbereich eines mathematischen Satzes oder einer mathematischen Methode sein. Zu fragen wäre dann, ob die dem jeweiligen Gegenstand oder Medium zugrundeliegende Mathematik in einem ähnlichen Prozess der instrumentellen bzw. *medialen Wissensaneignung* von den Lernenden erschlossen werden kann.

6.3.2 Bezüge zum Forschenden Lernen

Sicher kann man im Mathematikunterricht davon ausgehen, dass die für die Lernenden subjektiv neu zu entdeckende Mathematik zunächst immer verborgen ist. Zentrale Aufgabe des Lehrenden ist es, Lernsituationen zu schaffen, die die inhärente und verborgene Mathematik sichtbar werden lassen (didaktische Idee). Hier wird noch einmal die Nähe zu den Ansätzen des forschend-entdeckenden Lernens deutlich. So heiß es etwas bei Hattie (2013):

> Forschendes Lernen ist ein Unterrichtsansatz, in dem herausfordernde Situationen entwickelt werden, die Lernende zu Folgendem auffordern sollen: Phänomene zu beobachten und zu hinterfragen; Erklärungen dafür zu geben, was sie beobachten; […] (Hattie, 2013, S. 247)

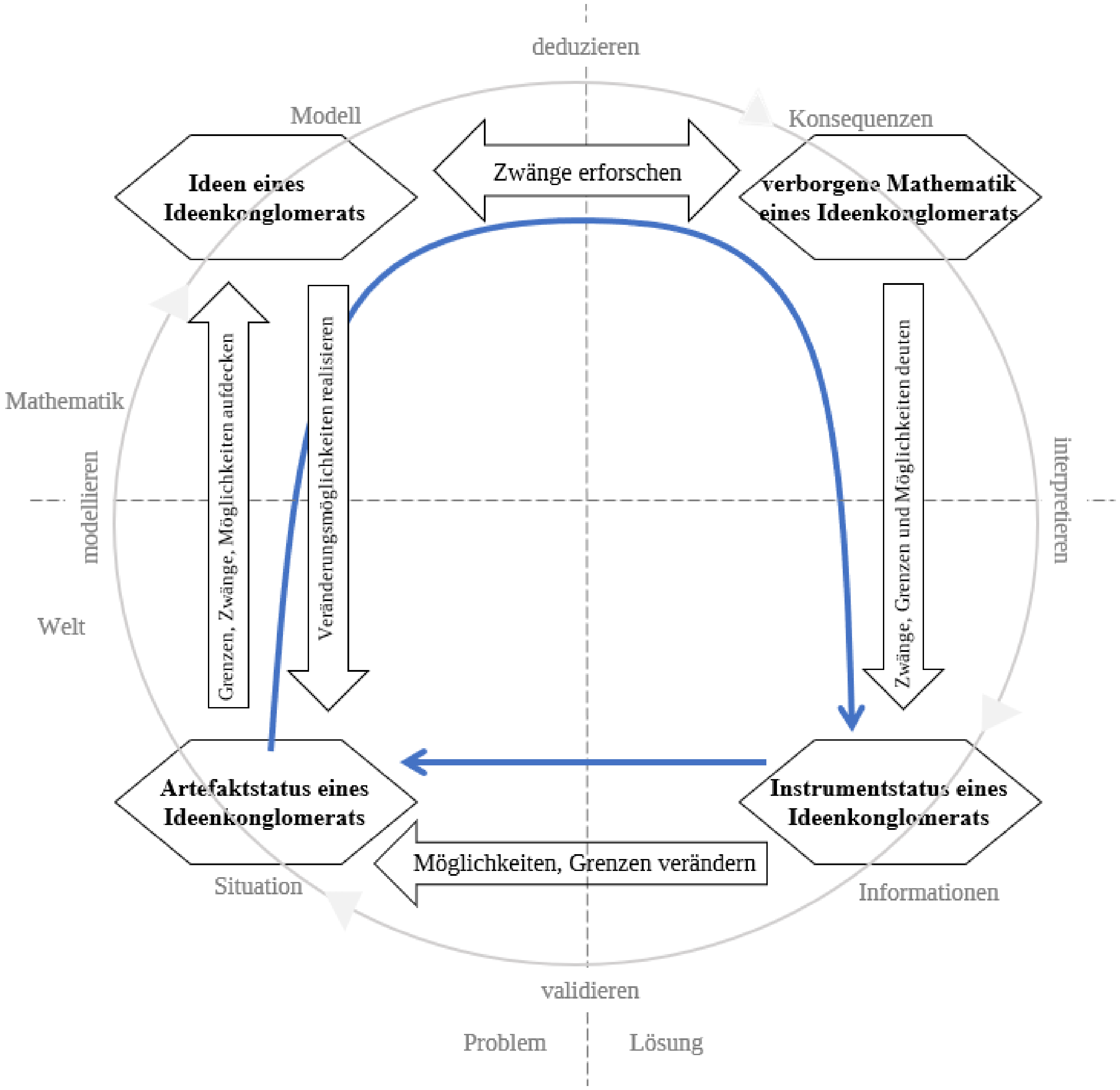

Abb. 14: Ein Modellierungsablauf beim Entstehen eines Ideenkonglomerats der Lernenden

Für den Mathematikunterricht stellen Weigand und Roth (2014) drei Phasen der Schülertätigkeit heraus, die für eine geeignete Lernumgebung und ihr Modell des forschenden Lernens konstitutiv sind.

> Forschendes Lernen ist ein Prozess, den es als Lern- und Arbeitshaltung auszubilden und zu entwickeln gilt und der in der Schule durch gezielt gestaltete Lernumgebungen angeregt wird. Dieser Prozess wird in dem Modell des forschenden Lernens durch drei untereinander vernetzte Phasen beschrieben. Wenn Schülerinnen und Schüler einem neuen mathematischen Phänomen begegnen, kann forschendes Lernen beginnen. Dazu müssen sich Lernende bzgl. der Durchdringung dieses Phänomens Ziele setzen und Fragen entwickeln oder sich zumindest auf von außen gesetzte Ziele und Fragen einlassen. Auch während des Arbeitens werden sich Schülerinnen und Schüler immer wieder kleinere Zwischenziele setzen und auf neue Fragen stoßen, die sich aus den Ergebnissen im Arbeitsprozess ergeben.
> (Weigand & Roth, 2014, S. 5)

Die erste Phase wird beim Parabelzirkeleinsatz durch das Gerät selbst in Gang gebracht. Durch das Bewegen und Zeichnen mit ihm werden Fragen generiert. Dabei werden einzelne gegenständliche Ideen wichtig. Die Beantwortung der im Lernprozess entstehenden Fragen (was, wie und warum zeichnet das Gerät) und das Finden einzelner Elemente oder Aspekte der gegenständlichen Ideen können als Zwischenziele im Sinne von Weigand und Roth (2014) aufgefasst werden. Dabei bilden sich die personalen Ideen. Diese können als Zwischenfazit, subjektiv neues Wissen oder neue Fragen auftreten und so die aufgedeckten Ideen miteinander verbinden, was zu einem Durchdringen des Phänomens Parabelzirkel führt.

Fragt man nun, was diese Herangehensweise für das Lernen von Mathematik bedeutsam macht, kann man mit Ludwig, Lutz-Westphal und Ulm (2017) sagen:

> In der Erkundungsphase steht ein aktives Manipulieren der mathematischen Objekte im Zentrum […]. Dadurch können Effekte oder Regelhaftigkeiten beobachtet und Hypothesen zu den zugrunde liegenden Strukturen aufgestellt werden. Dies ist deshalb so wesentlich und macht forschende Ansätze in der Mathematik zunächst schwieriger als etwa in den Naturwissenschaften, weil die betrachteten Objekte nicht von sich aus ein ‚beobachtbares Verhalten‘ zeigen, sondern dieses immer erst durch Denkhandlungen erzeugt werden muss.
> (Lutz-Westphal & Ulm, 2017, S. 5)

Historische Zeichengeräte sind für ein so verstandenes forschendes Lernen in der Schule besonders geeignet. Denn sie zeigen, wenn sie bewegt werden, ein ‚beobachtbares Verhalten‘, welches letztlich aber nur durch die im Gerät verborgene Mathematik zu erklären ist.

Mit Blick auf die Mathematikdidaktik wäre es lohnenswert, dass eben angesprochene »aktive Manipulieren mathematischer Objekte« im Unterricht sowie das zugrundeliegende mathematische Phänomen mit Hilfe des Begriffs des Ideenkonglomerats zu untersuchen. Denn diese Perspektive ermöglicht es dem Lehrenden, Didaktiker oder Forscher, einerseits festzuhalten, welche Ideen zu Beginn der Lernsituation bereits vorliegen (z.B. die mathematische Idee) und mit welchen personalen Ideen (z.B. Erklärungsideen) die Schülerinnen und Schüler ihr jeweiliges Ideenkonglomerat im Lernprozess bilden.

Anmerkungen

[1] Darüber hinaus wird der Parabelzirkel hier dargestellt: http://san-pc.hrz.uni-siegen.de/fjm/mathnat/dusthome/dateien/math9/vparabel.html (deutsch); http://www.fransvanschooten.nl/fvs_java.html (niederländisch); http://math-info.criced.tsukuba.ac.jp/museum/schooten/GCLfiles/ParaboraATCM.html (japanisch).

[2] Hier ist vor allem Bartolini Bussi (Modena) zu nennen. Siehe dazu auch die Seite des Laboratorio delle Macchine Matematiche: http://www.mmlab.unimore.it.
Weitere Forschungsaktivitäten gibt es in den USA in Cornell: http://www.math.cornell.edu.

[3] Zu den verschieden Zirkeltypen siehe Vollrath, Weigand und Weth (2000).

Danksagung

Ich danke den begutachtenden Personen für die hilfreichen und konstruktiven Anmerkungen, Kommentare und ihre wertschätzende Grundhaltung.

Literatur

Artigue, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS Environment. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, Vol. 7* (3), 245-274.

Artigue, M.; Bardini, C. (2010). New didactical phenomena prompted by TI-Nspire specificities. In V. Durand-Guerrier et al. (Hrsg.), *Proceedings of CERME 6* (S. 1171-1180). Lyon.

Bartolini Bussi, M.G. (2001). The Geometry of Drawing Instruments: Arguments for a didactical use of real and virtual copies. *Cubo Matemática Educacional Vol. 3* (2), 27-54.

Bartolini Bussi, M.G. & Mariotti, M.A. (2008). Semiotic meditation in the mathematics classroom. In L. Englisch (Hrsg.), *Handbook of international research in mathematics education* (S.746-783, 2. Auflage). New York: Taylor & Francis.

Bartolini Bussi, M.G. & Pergola, M. (1996). History in the Mathematics Classroom: Linkages and Kinematic Geometry. In H. N. Jahnke; N. Knoche & M. Otte (Hrsg.), *Geschichte der Mathematik in der Lehre* (S. 39-67). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Bobrowski, J. (1987). *Gesammelte Werke, Bd. IV* (hrsg. von E. Haufe). Berlin: Union-Verlag bzw. Stuttgart: DAV.

Bortz, J. & Döring, N. (2006). *Forschungsmethoden und Evaluation für Human- und Sozialwissenschaftler*. Heidelberg: Springer.

Bos, H.J.M. (1981). On the Representation of Curves in Descartes' Géométie. *Archive for History of Exact Sciences, Vol. 24* (4), 295-338.

Bretscher, N. (2010). Dynamic geometry software: the teacher's role in facilitating instrumental genesis. In V. Durand-Guerrier et al. (Hrsg.), *Proceedings of CERME 6* (S. 1340-1348). Lyon.

Cantor, G. (1895). Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. *Mathematische Annalen 46 (*4), 481-512.

Davis, P. & Hersh, R. (1981). *The Mathematical Experience*. Boston: Brinkhäuser.

Descartes, R. (1637). *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences. Plus La Dioptrique, Les Météores et La Géométrie*. Leiden

Drijvers, P.; Doorman, M.; Boon, P. & van Gisbergen, S. (2010). Instrumental orchestration: theory and practice. In V. Durand-Guerrier et al. (Hrsg.), *Proceedings of CERME 6* (S. 1349-1358). Lyon.

Drijvers, P.; Kieran, C.; Mariotti, M.-A. et al. (2009). Integrating Technology into Mathematics Education: Theoretical Perspectives. In C. Hoyles & J.-B. Lagrange (Hrsg.), *Mathematics Education and Technology–Rethinking the Terrain. The 17th ICMI Study* (S. 89-132). New York; Heidelberg: Springer.

Drijvers, P. & Trouche, L. (2008). From Artifacts to Instruments. A Theoretical Framework Behind the Orchestra Metaphor. In G.W. Blume & M.K. Heid (Hrsg.), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics. Vol. 2, Cases and Perspectives* (S. 363-391). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Greefrath, G. & Weigand, H.-G. (2012). Simulieren: Mit Modellen experimentieren. *Mathematik lehren 174*, 2-6.

Hausdorff, F. (1914). *Grundzüge der Mengenlehre*. Leipzig: Verlag von Veit & Comp.

Henz, D.; Oldenburg, R. & Schöllhorn, W. (2016). Does bodily movement enhance mathematical problem solving? Behavioral and neurophysiological evidence. In K. Krainer & N. Vondrovà (Hrsg.), Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, (S. 412-418), Prag. (Online unter: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01286907)-

Hattie, J. (2013). *Lernen sichtbar machen. Überarbeitete deutschsprachige Ausgabe von "Visible Learning"*. Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren.

Hoffmann, M. H. G. (Hrsg.) (2003). *Mathematik verstehen. Semiotische Perspektiven*. Hildesheim; Berlin: Franzbecker.

Kaiser, G.; Blum, W.; Borromeo Ferri, R. & Greefrath, G. (2015). Anwendungen und Modellieren. In R. Bruder; L. Hefendehl-Hebecker; B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 357-383). Berlin; Heidelberg: Springer.

Kelle, U. & Kluge, S. (2010). *Vom Einzelfall zum Typus. Fallvergleich und Fallkontrastierung in der qualitativen Sozialforschung* (2. Auflage). Wiesbaden: Springer.

Kempe, A.B. (1876). On a General Method of describing Plane Curves of the nth degree by Linkwork. *Proceedings London Mathematical Society Vol. VII* (102) (S. 213-216). London.

Ludwig, M., Lutz-Westphal, B. & Ulm, V. (2017). Forschendes Lernen im Mathematikunterricht. Mathematische Phänomene aktiv hinterfragen und erforschen. *PM – Praxis der Mathematik in der Schule, 59. Jg.* (73), 2-9.

Ludwig, M. & Schelldorfer, R. (2015). Geometrie handfest – Werkzeuge der Geometrie. *PM – Praxis der Mathematik in der Schule 57. Jg.* (61), 2-5.

Maschietto, M. & Trouche, L (2010). Mathematics learning and tools from theoretical, historical and practical points of view: the productive notion of mathematics laboratories. *ZDM Mathematics Education 42*, 33-47.

Mayring, P. (2002). *Einführung in die Qualitative Sozialforschung. Eine Anleitung zum qualitativen Denken* (5. Auflage). Weinheim; Basel: Beltz.

Mey, G. & Mruck, K. (2011). Grounded-Theory-Methodologie: Entwicklung, Stand, Perspektiven. In G. Mey & K. Mruck (Hrsg.), *Grounded Theory Reader* (S. 11-48; 2. Auflage). Wiesbaden: Springer.

Lakoff, G. & Núñez, R. (2000). *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. New York: Basic Books.

Rabardel, P. (2014). *Les hommes et les technologies; approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin, S. 239, (zuerst 1995, dann überarbeitet 2002; 2014).

Rabardel, P. (2001). Instrument Mediatd Activity in Situations. In A. Blandford; J. Vanderdonckt; P. Gray (Hrsg.), *People and Computers XV - Interactions without Frontiers* (S. 17-30). London: Springer.

Randenborgh, Chr. van (2015a). *Instrumente der Wissensvermittlung im Mathematikunterricht. Der Prozess der Instrumentellen Genese von historischen Zeichengeräten*. Wiesbaden: Springer.

Randenborgh, Chr. van (2015b). Pantographen entdecken. Verborgene Ideen im Mathematikunterricht aufdecken. *PM – Praxis der Mathematik in der Schule, 57. Jg.* (61), 19-25.

Randenborgh, Chr. van (2014a). Mathematische Instrumente erforschen – ein Ideenkonglomerat entdecken. *MU – Der Mathematikunterricht 60* (6), 56-61.

Randenborgh, Chr. van (2014b). Verborgene Ideen aufdecken – ein historisches Zeichengerät im heutigen Mathematikunterricht. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014, Bd. 2* (S. 1247-1250). Münster: WTM-Verlag.

Randenborgh, Chr. van (2013). Zeichengeräte erforschen – Modellieren erleben. In G. Greefrath; F. Käpnick & M. Stein (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013, Bd. 2* (S. 1022-1025). Münster: WTM-Verlag.

Randenborgh, Chr. van (2012a). Parabelzirkel real und digital. Wissensaneignung durch Modelle und Simulationen. *Mathematik lehren 174*, 11-14.

Randenborgh, Chr. van (2012b). Instrumentelle Wissensaneignung im Mathematikunterricht – Zur Bedeutung historischer Instrumente für die Verständnisentwicklung. In M. Ludwig & M. Kleine (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012, Bd. 2* (S. 893-896). Münster: WTM-Verlag.

Randenborgh, Chr. van (2012c). Frans van Schootens Beitrag zu Descartes Discours de la méthode. In: *Mathematische Semesterberichte Vol. 59* (2), 223-241.

Randenborgh, Chr. van (2005). Van Schootens Ortslinienzirkel. Ein entdeckender Zugang zur geometrischen Definition der Parabel. *PM – Praxis der Mathematik in der Schule 47*, 36-39.

Rezat, S. (2009). *Das Mathematikbuch als Instrument des Schülers*. Wiesbaden: Vieweg + Teubner.

Richter, K. et al. (2001). Historische Zeichengeräte. MatheWelt. *Mathematik lehren 108*, 27-50.

Roth, J. & Weigand, H.-G. (2014). Forschendes Lernen – Eine Annäherung an wissenschaftliches Arbeiten. *Mathematik lehren 184*, 2-9.

Schooten, F. van (1646). *Francisci à Schooten Leydensis, De organica conicarum sectionum in plano descriptione*. Leiden: Ex Officina Elzeviriorum.

Schmidt-Thieme, B. & Weigand, H.-G. (2015). Medien. In R. Bruder; L. Hefendehl-Hebecker; B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 461-490). Berlin; Heidelberg: Springer.

Schupp, H. (1988). Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der Sekundarstufe 1 zwischen Tradition und neuen Impulsen. *MU – Der Mathematikunterricht 34* (6), 5-16

Trouche, L. (2005a). An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculators environments. In D. Guin; K. Ruthven & L. Trouche (Hrsg.), *The didactical challenge of symbolic calculators* (S. 137-162). New York: Springer.

Trouche, L. (2005b). Instrumental genesis, individual and social aspects. In D. Guin; K. Ruthven & L. Trouche (Hrsg.), *The didactical challenge of symbolic calculators* (S. 197-230). New York: Springer.

Truschkat, I; Kaiser-Belz, M. & Volkmann, V. (2011). Theoretisches Sampling in Qualifikationsarbeien: Die Grounded-Theory-Methodologie zwischen Programmatik und Forschungspraxis. In G. Mey & K. Mruck (Hrsg.), *Grounded Theory Reader* (S. 353-379; 2. Auflage). Wiesbaden: Springer.

Ufer, S.; Heinze, A. & Lipowsky, F. (2015). Unterrichtsmethoden und Instruktionsstrategien. In R. Bruder; L. Hefendehl-Hebecker; B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 411-434). Berlin; Heidelberg: Springer.

Villarreal, M.E. & Borba, M.C. (2010). Collectives of humans-with-media in mathematics education: notebooks, blackboards, calculators, computers and notebooks throughout 100 years of ICMI. *ZDM Mathematics Education 42* (1), 49-62.

Verillon, P. & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrument activity. *European Journal of Psychology of Education Vol. X* (1), 77-101.

Vollrath, H.-J. (2013). *Verborgene Ideen*. Wiesbaden: Springer.

Vollrath, H.-J. (2003). Zur Erforschung mathematischer Instrumente im Mathematikunterricht. In L. Hefendehl-Hebecker & S. Hußmann (Hrsg.), *Mathematikdidaktik zwischen Fachorientierung und Empirie* (S. 256-265). Hildesheim: Franzbecker.

Vollrath, H.-J. (1999). Historische Winkelmessgeräte in Projekten des Mathematikunterrichts. *MU – Der Mathematikunterricht 45* (4), 42-58.

Vollrath, H.-J.; Weigand, H.-G. & Weth, T. (2000). Spezialisierung und Generalisierung in der Entwicklung der Zirkel- In M. Liedtke (Hrsg.), *Relikte – Der Mensch und seine Kultur* (S. 123-158). Graz: Otto König.

Wartha, S. & Schulz, A. (2014). *Rechenproblemen vorbeugen* (3. Auflage). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Weigand, H.-G. (2008). Teaching with a Symbolic Calculator in 10th Grade – Evaluation of a One Year Project. *International Journal for Technology in Mathematics Education, Vol.15* (1), 19-32.

Weigand, H.-G. (2006). Der Einsatz eines Taschencomputers in der 10. Jahrgangsstufe – Evaluation eines einjährigen Schulversuchs. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 89-112.

Weigand, H.-G. (1997). Mechanisches und computerunterstütztes Zeichnen von Kegelschnitten. *Mathematik lehren 82*, 14-18.

Weigand, H.-G. & Bichler, E. (2010). The long-term project “Integration of symbolic calculator in mathematics lessons”. The case of calculus. In V. Durand-Guerrier et al. (Hrsg.), *Proceedings of CERME 6* (S. 1191-1200). Lyon.

Wittmann, M. C.; Flood, V. J. & Black, K. E. (2012). Algebraic manipulation as motion within a landscape. *Educational Studies in Mathematics, 82*(2), 169-181.

Anschrift des Verfassers

Christian van Randenborgh
Zentrum für schulpraktische Lehrerausbildung,
Gymnasium/Gesamtschule
33602 Bielefeld
christian.van_randenborgh@uni-bielefeld.de