Regelmäßigkeiten erkennen und beschreiben: Eine zentrale mathematische Fähigkeit

JAN FRANZ WÖRLER, WÜRZBURG

***Zusammenfassung**: Konkrete Kunst ist eine Kunstgattung, deren Werke eine besondere inhaltliche Nähe zur Mathematik aufweisen: Häufig werden Zahlenreihen, Elemente der Kombinatorik oder der Geometrie als ästhetische Muster in den Kunstwerken umgesetzt. Eine mathematische Analyse derartiger Bilder kann solche Berührungspunkte schrittweise freilegen – und trägt dann Charakteristika des Problemlösens aber auch des mathematischen Modellierens. In einer explorativen Feldstudie mit Gymnasialschülerinnen und -schülern (10. und 11. Jahrgangsstufe) und Lehrenden wurde untersucht, ob sich diese aus der Theorie abgeleiteten Bezüge empirisch nachweisen lassen.*

***Abstract:** Concrete Art is a genre whose works exhibit a particular relation to mathematics with regards to content: number series, elements of combinatorial analysis or geometry are frequently implemented as aesthetic patterns in these works of art. A mathematical analysis of these images may gradually expose such points of contact—and thus bears characteristics of both problem solving as well as mathematical modelling. An explorative field study of secondary school students (10th and 11th grade) and teachers investigated whether these connections, initially derived from theory, can be verified empirically.*

1. Einleitung

Es ist eine grundlegende mathematische Tätigkeit, Regelmäßigkeiten in Strukturen zu suchen und sie mit mathematischen Mitteln zu beschreiben. Beispielsweise ermitteln wir Symmetrien in Ornamenten und bilden Klassen, untersuchen Zahlenfolgen auf wiederkehrende Teilfolgen, statistische Realdaten auf Abhängigkeiten oder wir zerlegen zusammengesetzte geometrische Körper in bekannte Grundkörper. Auch beim mathematischen Modellieren versuchen wir, aus einer realen Situation Gesetzmäßigkeiten abzuleiten und zwar so, dass die gefundenen Regeln die vorliegende Situation für die jeweilige Fragestellung geeignet beschreiben. Lernende für das Auffindenden solcher Zusammenhänge zu sensibilisieren und ihnen mathematische Hilfsmittel an die Hand zu geben, diese zu beschreiben, ist daher ein zentrales Ziel des Mathematikunterrichts.

Ein Übungsfeld für das Auffinden und Beschreiben von Regelmäßigkeiten auf geometrisch-visueller Basis ist die mathematische Analyse spezieller Kunstwerke: Konkrete Kunst ist eine Gattung bildender Kunst, die von Künstlerinnen und Künstlern nach festgelegten, logisch-mathematischen Regeln entworfen – und damit konstruiert – und auf die Leinwand gebracht wird. Betrachter, die derartige Werke gleichsam durch eine „mathematische Brille" ins Auge fassen, können die einzelnen Konstruktionsschritte aus den Bildern herauslesen, nachvollziehen und mit mathematischen Mitteln beschreiben. Die der Konkreten Kunst zu Grunde liegende Theorie stellt dabei sicher, dass derartige Analysen erfolgreich sind: Eine Künstlergruppe um den Niederländer Theo van Doesburg, Mitbegründer der Konkreten Kunst, forderte 1930 von den Werken, sie müssten universell, vorausberechnet, exakt und klar sein. Es müsse ferner „der Aufbau des Bildes sowie seiner Elemente […] einfach und visuell nachprüfbar" sein (Carlsund, O., v. Doesburg, T., Hélion, J., Tutundjian, L., & Wantz, M., 1930; dt. Übersetzung nach Le Ferrier & Pichon, 1990, S. 304). Bis heute arbeiten Künstler in der Konkreten Kunst streng nach diesen Postulaten.

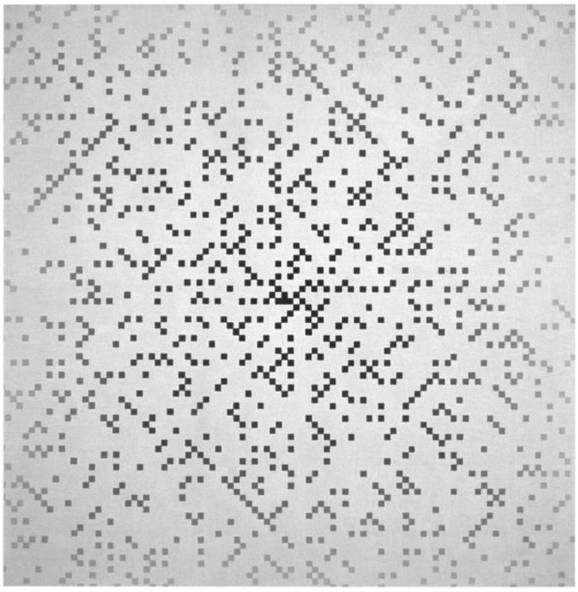


Abb. 1: Suzanne Daetwyler: „Primzahlenbild 1–9216", Format 96 x 96 cm. Sammlung Peter C. Ruppert im Kulturspeicher der Stadt Würzburg

Betrachten wir exemplarisch für die Werke der Konkreten Kunst das hier abgebildete Acrylgemälde „Primzahlenbild 1–9216" (Abb. 1) der Schweizer Künstlerin Suzanne Daetwyler: Dunkle, im Original grünliche Kästchen heben sich von einem hellgrauen Hintergrund ab. Scheinbar wahllos sind die Kästchen über die Bildfläche verteilt. Erst auf den zweiten Blick wird klar, dass hier der Zufall wohl keine Rolle spielt: Viele Kästchen berühren sich an den Ecken, ja bilden sogar längere und kürzere diagonale Linien; dagegen liegen nur in der Mitte zwei Kästchen direkt nebeneinander. Es scheint also doch Konstruktionsregeln zu geben, doch welche sind das? Der Werkstitel legt einen Bezug zu Primzahlen nahe. Doch was haben die mit dem Bild zu tun? Ein weiterer Schlüssel zum Verständnis der Konstruktionsregeln dieses Kunstwerks liegt im Format: $96 \cdot 96 = 9216$. Offenbar wurde die Bildfläche rasterartig in 9216 Kästchen von je 1 cm² Flächeninhalt unterteilt und einige dieser Kästchen – die Primzahlen? – wurden markiert. Weil Zwei und Drei die einzigen Primzahlen sind, die lückenlos benachbart sind, wenden wir uns dem Bildzentrum zu; dort stoßen mehrere Kästchen direkt aneinander. Die Künstlerin hat das Kästchen in der Mitte des Bildes mit der Zahl 1 identifiziert und markiert. Von dort aus wurden spiralförmig rechtsdrehend alle Kästchen durchnummeriert und die, die eine Primzahl als Nummer tragen, wurden farblich hervorgehoben (Abb. 2).

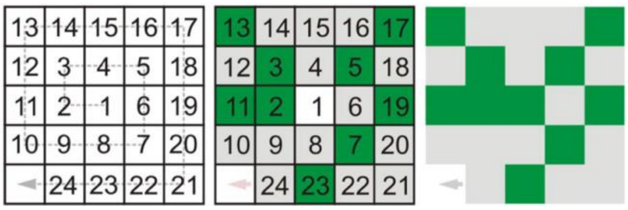


Abb. 2: Die natürlichen Zahlen werden spiralförmig angeordnet (li.), dann werden die Primzahlen markiert (mi.); die Zahl 1 wird als Bildzentrum ebenfalls markiert (re.). Setzt man das Verfahren fort, entsteht das „Primzahlenbild 1–9216"

Demzufolge lässt sich der Aufbau des Bildes aus mathematischer Sicht mittels folgender vier Konstruktionsregeln vollständig beschreiben:

- Regel R 1: Es wird ein Raster aus $96 \times 96 = 9216$ gleich großen Kästchen gezeichnet.
- Regel R 2: Die Kästchen werden von der Bildmitte beginnend spiralförmig im Uhrzeigersinn durchnummeriert, die Zahl 2 liegt dabei links von der Zahl 1.
- Regel R 3: Jedes Kästchen mit einer Primzahl als Nummer wird farbig markiert.
- Regel R 4: Das Kästchen mit der Zahl 1 wird farbig markiert.

Ob dieser Satz von Regeln das Original bzw. die Vorlage aus mathematischer Sicht in toto charakterisiert, lässt sich überprüfen, indem R 1 bis R 4 händisch mit Bleistift und Papier oder als Simulation am Rechner nachgezeichnet werden. Auf diese Weise ergibt sich ein Muster, das sich mit der Vorlage auf Entsprechungen hin vergleichen lässt. In der Gegenüberstellung zeigt sich schließlich der Erfolg oder Misserfolg der Analyse.

2. Theorie

2.1 Prozess der mathematischen Analyse

Konkrete Kunst zeichnet sich also – das obige Beispiel hat es verdeutlicht –, verglichen mit der traditionellen Bildhauerei, Malerei und Grafik, aber auch mit vielen Werken der neueren Zeit durch ein Alleinstellungsmerkmal aus: Jedem ihrer Werke liegt ein Konstruktionsplan zu Grunde, der von der jeweiligen Künstlerin oder dem Künstler in Form eines ästhetischen Regelwerks im Vorfeld festgelegt worden ist.

Die Existenz dieser klaren, nachvollziehbaren Struktur ist eine Besonderheit, die sich mit Blick auf das Lernen und Lehren von Mathematik aufgreifen lässt, indem die Suche nach ebendiesen Konstruktionsprinzipien in einzelnen Werken angestoßen wird. Geeignete Aufgabenstellungen lassen sich über die meisten Werke der Konkreten Kunst hinweg identisch formulieren: Es genügt i. d. R. ein Kunstwerk (bzw. seine Reproduktion auf einem Arbeitsblatt) vorzugeben und dazu eine kurze Aufgabenstellung, wie etwa die Folgende (Hinweise zur konkreten Unterrichtseinbettung in Kap. 6):

> Betrachte das vorliegende Werk. Was verbirgt sich an Mathematik in diesem Bild? Wie ist das Werk konstruiert worden?

Wenn Lernende das Werk unter einer mathematischen Perspektive betrachten und dieser Aufgabe nachgehen, können sie einzelne Konstruktionsprinzipien im Bild (wieder-)entdecken. Das Postulat der Konkreten Kunst, die bildgebenden Zusammenhänge sollen „einfach und visuell nachprüfbar" im Werk zu finden sein, stellt nämlich sicher, dass auf die oben genannte Ausgangsfrage auch wirklich Antworten gefunden werden können. Aus diesen Antworten sollte sich daher für jedes Werk das vom Künstler oder der Künstlerin zu Grunde gelegte Regelwerk rekonstruieren lassen. Gesucht wird hierbei speziell nach den Zeichen (geometrische Formen, Figuren, …) und Relationen (Anordnung der Zeichen auf der Bildfläche), die der Künstler oder die Künstlerin bei der Planung und Ausführung des Werkes als Gestaltungsprinzipien festgelegt hat oder haben könnte.

Für gewöhnlich werden diese Regeln nicht unmittelbar und vollständig erkannt werden können. Die Lernenden werden das Bild oder gar kleinere Ausschnitte also zunächst als mathematisch-logisches

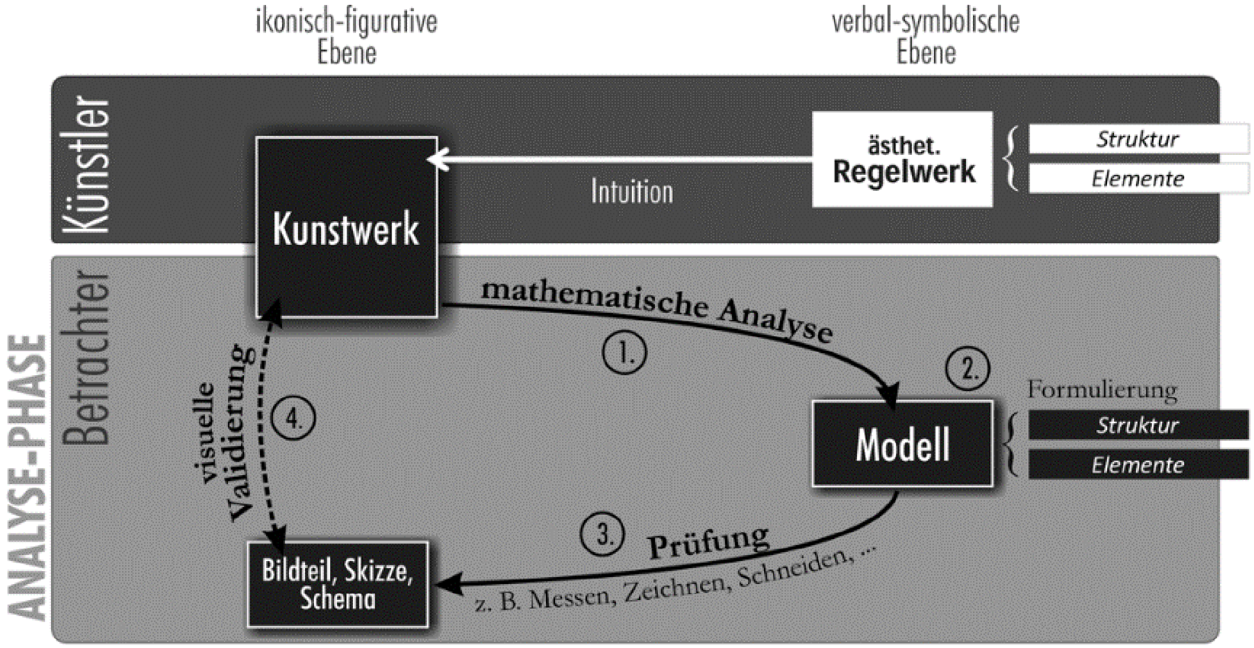


Abb. 3: Prozessschema der Suche nach Konstruktionsschemata in einem Werk der Konkreten Kunst durch die Analyse visuell-geometrischer Regelmäßigkeiten (Wörler, 2009a,b; 2015)

Muster auf Regelmäßigkeiten hin analysieren müssen (vgl. Schritt 1 in Abb. 3) und auf diese Weise Hypothesen darüber formulieren, welche Konstruktionsprinzipien dem betrachteten Bereich zu Grunde liegen könnten (= Schritt 2). Daraufhin kann direkt an der Reproduktion des Werks eine Prüfung der Hypothese vorgenommen werden, die klären soll, inwieweit dieses Prinzip tatsächlich den Aufbau des gesamten Bildes oder einzelner Bildelemente zu beschreiben vermag; das Ausmessen von Abständen, Abzählen von Bildelementen, das Einzeichnen von Hilfslinien oder -figuren in die Vorlage, schematisches Skizzieren oder die Durchführung kleinerer Berechnungen – also eine aktive Auseinandersetzung mit der Vorlage – sind hierbei häufig hilfreiche Varianten der Überprüfung einer Vermutung (= Schritt 3). Ob eine Hypothese tragfähig ist und die zugehörige Konstruktionsregel tatsächlich im Bild steckt, muss abschließend entschieden werden. Als Grundlage für dieses Urteil werden die Vorarbeiten der Prüfung aufgegriffen und im Rahmen einer (häufig visuellen) Validierung mit dem Originalwerk verglichen (= Schritt 4). Treten dabei Widersprüche auf, so müssen die Hypothese und das zugehörige Gestaltungsprinzip als nicht passend verworfen oder zumindest modifiziert werden. Haben sich aus der Prüfung keine Einwände ergeben, so wird die Hypothese akzeptiert.

Demnach besteht der Prozess der Suche nach Regelmäßigkeiten und Konstruktionsprinzipien in Werken der Konkreten Kunst im Wesentlichen aus vier Schritten (Abb. 3; vgl. auch Wörler, 2009a, b; 2015):

(1) mathematische Analyse

(2) Formulierung einer Hypothese über relevante Konstruktionsprinzipien

(3) aktive Prüfung dieser Hypothese

(4) visuelle Validierung

Es mag verwundern, dass Prüfung und Validierung hier als voneinander getrennte Bausteine aufgeführt werden, da die beiden Begriffe üblicherweise synonym verwendet werden. Der Unterschied liegt jedoch in der Vorgehensweise und damit auch in der Dauer der beiden Schritte: Während des Schrittes (3) der Prüfung werden Strukturen und Objekte im Bild gesucht, die die betrachtete Vermutung untermauern oder widerlegen; diese Suche kann mitunter langwierig sein und auch Sackgassen beinhalten. Häufig ist dabei eine aktive Auseinandersetzung mit der Vorlage notwendig, also etwa das Vergleichen von Abständen mit Hilfe eines Zirkels, Messen mit dem Geodreieck, das Einzeichnen von Hilfslinien oder -figuren, das Notieren von Zahlenfolgen oder händisches Berechnen von weiteren Folgengliedern. Die Validierung (4) dagegen hat den Charakter einer Entscheidung: Die Vorarbeiten der Prüfung werden genutzt, um sich für oder gegen die Richtigkeit einer Vermutung zu entschließen. In vielen Fällen bildet dieser Schritt den Abschluss des Arbeitens mit einer Hypothese – sie wird als falsch verworfen oder als korrekt von der Gruppe angenommen.

2.2 Regelfinden und Modellieren

Es hatte sich oben gezeigt, dass die Werke der Konkreten Kunst sich durch Mengen von Zeichen (Formen, Figuren, …) und Menge von Regeln (Relationen zwischen den Zeichen) beschreiben lassen. Es liegen daher Bezüge zum Begriff Modell auf der Hand, schreiben doch etwa Doerr und English:

> Models are systems of elements, operations, relationships, and rules that can be used to describe, explain, or predict the behavior of some other familiar system. (Doerr & English, 2003, S. 112)

Etwas offener bleiben Forrester und Zahn (1972) in ihrer sonst ähnlichen Formulierung:

> Ein Modell ist ein Substitut für ein Objekt oder ein System. […] Im weitesten Sinne sind alle Regeln und Beziehungen, die irgendetwas beschreiben, Modelle ebendieser Objekte. (Forrester & Zahn, 1972, S. 73)

Selbst die in der Mathematikdidaktik viel zitierte Modellbeschreibung von Henn (2000), nach der

> Modelle […] vereinfachende, nur gewisse, hinreichend objektivierbare Teilaspekte berücksichtigende Darstellung der Realität (Henn, 2000, S. 10)

sind, erweist sich hier als passend: In unserer exemplarischen Analyse des Primzahlbildes (s. oben) haben wir Material, Oberflächenbeschaffenheit, Farbqualität, Kontraste, die Bildwirkung, ja zum Teil gar die Farbgebung des realen Kunstwerkes außer Acht gelassen.

Insofern kann das Erkennen und Beschreiben von Regelmäßigkeiten auch als das Suchen nach und Finden von geeigneten Modellen aufgefasst werden. Der Analyseprozess eines Kunstwerkes erweist sich unter dieser Perspektive also als mathematisches Modellieren, obwohl zum klassischen Modellieren (sensu Blum & Leiß, 2005) erhebliche Unterschiede bestehen; beispielsweise fehlt die Phase des mathematischen Arbeitens beim Regelfinden vollständig. Der kreislauf- bzw. schleifenartige Prozessablauf ist jedoch auch ein Charakteristikum des Regelfindens.

2.3 Kunstanalyse als Problemlöseprozess

Die Ausgangsfragen der Kunstwerkanalyse,

> Was verbirgt sich an Mathematik in diesem Bild? Wie ist das Werk konstruiert worden?

sind offen gehalten: Es gibt keine klaren Vorgaben und auch kein klares Ziel. Da auch der Lösungsweg, also die Mittel und Methoden der mathematischen Analyse, a priori nicht eindeutig ist, handelt es sich bei dieser offenen Aufgabe für die meisten Betrachter um eine *Problemsituation* im Sinne von Greefrath (2010, S. 35). Zur Lösung bleibt nur, sich mit Hypothesen dem Werk zu schrittweise zu nähern und – etwa durch Ausmessen von Abständen, Berechnen von Längen oder Flächeninhalten, Abzählen von bestimmten geometrischen Elementen oder Nachkonstruieren von Bildausschnitten – Belege für oder wider diese Hypothesen zu suchen.

Auch Opwis et al. (2006) sprechen dann von einem *Problem*, wenn eine Barriere im Bearbeitungsprozess existiert, die überwunden werden muss (vgl. S. 207). Sie unterscheiden jedoch Problemaufgaben nicht nur nach ihrer äußeren Form, sondern auch inhaltlich (vgl. S. 207 f.) in

- Transformationsprobleme versus Einsichtprobleme und
- vorwissensarme Probleme versus Probleme, die nur mit bereichsspezifischem Vorwissen lösbar sind.

Transformationsprobleme sind dabei durch eine „längere Abfolge von Schritten“ (S. 207) gekennzeichnet; dagegen hängt bei Einsichtproblemen „die Problemlösung vom Gelingen einiger weniger kritischer Einzelschritte ab“ (S. 207). Diese zweite Kategorie von Problemstellungen wird auch als „Aufgaben vom Heureka-Typ“ bzw. als Probleme mit „Aha-Erlebnis“ (S. 208) geführt: Es genügt, die richtige Idee bzw. einen passenden Einfall zu haben, um die Aufgabe zu lösen – und man muss dabei häufig auch Umwege im Denken zulassen. Ist die Lösung jedoch einmal gefunden, so sollte sie für jedermann klar und einsichtig sein.

Bruder und Collet (2011) heben die affektive Komponente des „HEUREKA-Effekts“ (S. 34 ff.) beim Lösen derartiger Aufgaben hervor, denn es sei ein

> schöner Moment, wenn man sich wie Archimedes über eine Problemlösung freuen und sagen kann: Ich hab’s geschafft (Bruder & Collet, 2011, S. 34).

Auch in der Gestaltpsychologie werden Aufgaben vom Heureka-Typ eingehend untersucht. Dieses Teilgebiet der Psychologie beforscht die menschliche visuelle Wahrnehmung von visuell-geometrischen Strukturen, also von Elementen und ihren Relationen. Diese Fähigkeit spielt beim mathematischen Analysieren von Kunstwerken eine zentrale Rolle, ist doch das Hineinsehen von Zusammengehörigkeit, das geistige Gruppieren und Arrangieren von Objekten, die mentale Rotation von Bildausschnitten oder auch das Vorstellen von Hilfslinien im Bild eine wesentliche Voraussetzung dafür, Muster und damit im Wortsinn „Regel-Mäßigkeiten“ erkennen und anschließend beschreiben zu können. Als Paradigma einer Heureka-Aufgabe gilt in der Gestaltpsychologie das Neun-Punkte-Problem (vgl. Funke, 2003, S. 47 f.; vgl. Opwis et al., 2006, S. 207 f.): Neun im Quadrat angeordnete Punkte sollen mit einem durchgängigen Polygonzug aus (höchstens) vier Seiten verbunden werden (Abb. 4, li.). Das Problem ist dann lösbar, wenn über die durch das Quadrat der Punkte vorgegebenen Grenzen hinaus gedacht und die Umgebung der Figuren als zum Problem zugehörig betrachtet wird (Abb. 4, re.).

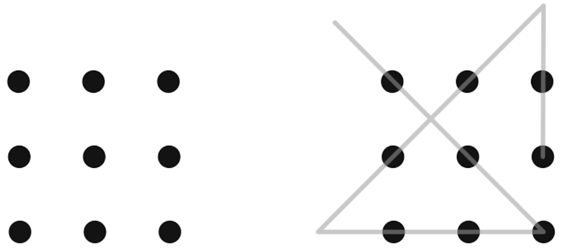


Abb. 4: Beim Neun-Punkte-Problem sollen die Punkte mit einem Polygonzug verbunden werden (li.). Die Lösung ist nur auffindbar, wenn die Umgebung der Figuren mit genutzt wird, ist als solche dann aber für jedermann klar ersichtlich (re.)

Ein Zusammenhang zwischen der Gestaltpsychologie und den bisher aufgeführten Sichtweisen von Problemsituationen (sensu Greefrath, 2010; Opwis et al., 2006) wird offenkundig, wenn ein visuell-geometrisches Problem als „›defekte Gestalt‹" (Funke, 2003, S. 46) angesehen wird, „die durch geeignete Transformation in eine gute Gestalt zu überführen ist" (S. 46). Auch in der Gestaltpsychologie zeigt sich also die Suche nach einer „geeigneten Transformation" (S. 46) zur Überwindung einer Barriere als Charakteristikum des Problems.

Kommen wir zur Kunst zurück: Die Aufgabe, Regelmäßigkeiten in einem Kunstwerk zu erkennen und sie mathematisch zu beschreiben, stellt mit der vorgenannten Aufgabenstellung eine Problemsituation dar, da insbesondere die zur Analyse nötigen Mittel unklar sind und von Werk zu Werk variieren. Häufig genügen aber „einige wenige kritische Einzelschritte" (Opwis et al., 2006, S. 207), die den Schlüssel zur Analyse der Konstruktion bilden. Demnach handelt es sich bei mathematischen Analysen von Kunstwerken speziell um Einsichtprobleme. Da bei solchen Problemen Lösungsmöglichkeiten mitunter abrupt gefunden werden, sind sie als Heureka-Aufgaben einzustufen.

2.4 Forschungsstand zum Regelfinden

Das Finden von Regelmäßigkeiten kann, wie vorher dargelegt, als Problemlösen aufgefasst werden. Daher ist auch die Forschung zum Regelfinden eng mit der wissenschaftlichen Auseinandersetzung mit dem Problemlösen verwoben.

Eine wichtige Ausgangsbasis bildet die Arbeit von Newell und Simon (1972), in der sie Problemlösen als Aufbau eines *Problemraums* (vgl. etwa Funke, 2003, S. 67; Spada, 2006, S. 208 f.) bzw. einer geeigneten Problemrepräsentation (vgl. Arbinger, 1997, S. 31) und die anschließende Lösungssuche darin beschreiben.

Zwei Jahre später überarbeitete Simon dieses Modell und entwarf zusammen mit Lea eine Zwei-Räume-Theorie (Simon & Lea, 1974; auch Funke, 2003, S. 67 f.): Der Vergleich der Problemraum-Theorie mit den Prozessen und Aktivitäten, die beim Regelfinden („rule induction", Simon & Lea, 1974, S. 113 ff.) auftreten, veranlasste die Autoren, den Problemraum in einen *Regelraum* („space of rules", S. 115) und einen *Instanzenraum* („instance space", S. 115) aufzuspalten und Problemlösen als Aufbau und Erkundung dieser beiden Räume zu verstehen. Ausgangspunkt war dabei die Überlegung, dass beim Problemlösen in gleicher Weise wie beim Regelfinden Kontrollmechanismen nach jedem Teilschritt überprüfen, ob dieser Schritt im Hinblick auf das Ziel in die richtige Richtung geführt hat – die Autoren sprechen schlicht von „test" (S. 115). Ist der Test nicht erfolgreich, wird daraufhin der letzte Problemlöseschritt modifiziert und – idealerweise unter Berücksichtigung der Ergebnisse des Tests – in eine andere Richtung erneut gegangen. Dabei kann allerdings kein Test der Regeln selbst erfolgen, sondern es kann nur ihre Anwendung auf Objekte („instances", S. 115) überprüft werden. Eine Regel wird verworfen oder überarbeitet, wenn falsche Instanzen zugeordnet werden oder wenn richtige Instanzen existieren, die von der gefundenen Regel nicht berührt werden (vgl. S. 114 f.).

Ein einfaches Beispiel: Als Objekte (im Sinne der „instances") seien die Zahlen 1, 2, 3, 5 gegeben; sie sind im Instanzenraum enthalten. Die Problemstellung bestehe aus der Frage nach einer Regel, die diese Zahlenfolge logisch beschreibt sowie fortsetzt. Die Regel R 1: ›Von Eins beginnend den natürlichen Zahlen folgen‹ (1, 2, 3, 4, 5, ...) würde zwar alle vorgegebenen Zahlen liefern, aber beispielsweise auch die Zahl 4, die nicht zu den vorgegebenen gehört (= falsche Instanz zugeordnet). Dagegen würde die Regel R 2: ›Von Eins allen ungeraden natürlichen Zahlen folgen‹ (1, 3, 5, ...) zwar keine anderen als die Vorgegebenen liefern, jedoch die Zahl 2 nicht erzeugen können (= richtige Instanz wird nicht berührt). Eine zu den Instanzen passende Regel R 3 lautet: ›Mit Eins und Zwei beginnend den Fibonacci-Zahlen folgen‹ (1, 2, 3, 5, 8, ...).

Die beiden Räume (Regelraum und Instanzenraum) stehen in Wechselbeziehung: Zusätzliche Informationen über die Objektklasse (im Instanzenraum) beeinflussen beispielsweise die Bildung oder Veränderung der Regeln (im Regelraum), da durch die Zusatzinformation ganze Regelklassen ausgeschlossen werden können (vgl. Klahr & Dunbar, 1988, S. 5).

Im Zusammenhang mit der mathematischen Analyse von Kunstwerken nimmt das Modell der Dualen Suche nach Klahr und Dunbar (1988), das als Fortführung der Problemraum-Theorie (Newell & Simon, 1972) und der Zwei-Räume-Theorie (Simon & Lea, 1974) gilt (vgl. Funke, 2003, S. 68; ebenso Spada, 2006, S. 262), eine zentrale Rolle ein: Die Autoren beschrieben wissenschaftliches Entdecken – wie vorher Simon und Lea das Problemlösen – ebenfalls als Suche in zwei Räumen, die hier *Hypothesenraum* („hypothesis space", Klahr & Dunbar 1988, S. 7) und *Experimenteraum* („experiment space", S. 7) genannt werden (S. 32 ff.); ihre Theorie wird daher auch als SDDS-Modell („Scientific Discovery as Dual Search", S. 1) bezeichnet. Wissenschaftliches Entdecken, das wie das Problemlösen als Spezialfall wissenschaftlichen Arbeitens angesehen wird, wird als Wechsel zwischen der Generierung von Hypothesen und dem Überprüfen der Hypothesen mittels Experimenten gesehen. Der Hypothesenraum umfasst dabei – ähnlich wie vorher der Regelraum – sämtliche Hypothesen, die im Verlauf des Arbeitens potentiell oder tatsächlich auftreten, der Experimenteraum – als Entsprechung zum Instanzenraum – alle nur möglichen Experimente, die durchgeführt werden könnten (vgl. S. 32 ff.).

Es ist im Hinblick auf die Konkrete Kunst, die kunsttheoretisch eng mit der Computerkunst, also programmierten Bildern, verwandt ist, bemerkenswert, dass Klahr und Dunbar ihre Untersuchungen zum Regelfinden an einem programmierbaren und vorprogrammierten Modellauto vornahmen. In beiden Fällen, so unterschiedlich sie auch sein mögen, geht es also darum, von einem Dritten – hier den Künstlern, dort den Wissenschaftlern – im Vorfeld festgelegte Regeln wiederzuentdecken und zu beschreiben.

In empirischen Untersuchungen zum SDDS-Modell ließen Testpersonen unterschiedliche Präferenzen für einen der beiden Räume erkennen: Es gab Theoretiker („›Theorists‹", ebd., S. 24), die eher im Hypothesenraum nach Lösungen suchten und dabei die Experimente vernachlässigen und Praktiker („›Experimenters‹", Klahr & Dunbar, 1988, S. 23; „Experimentalisten" Funke, 2003, S. 69:), die versuchten, Regelmäßigkeiten in den Ergebnissen der Experimente zu sehen und darüber zu allgemeineren Aussagen zu kommen. In einer kleinen und damit nicht verallgemeinerbaren Studie (n = 20) kamen die Praktiker mehr als doppelt so schnell zu einer Lösung wie die Theoretiker (vgl. Klahr & Dunbar, 1988, S. 10 ff.; ebenso Funke, 2003, S. 69). Diese Daten belegen, dass die beiden Räume empirisch nachgewiesen werden können und, dass die Ausgestaltung bzw. die Gewichtung des Wechselspiels zwischen den beiden Räumen individuell geprägt ist.

Im Gegensatz zu klassischen Problemlösemodellen (Poincaré, 1914; Wallas, 1926; Pólya, 1949) beschreiben die vorliegenden Zwei-Räume-Theorien Problemlöseprozesse also nicht als linear, sondern als Hin- und Herspringen zwischen Regeln und Instanzen bzw. zwischen Hypothesen und Experimenten.

Fernandez, Hadaway und Wilson (1994) verbanden die verschiedenen Ansätze in gewisser Weise, indem sie in ihrem Modell von Problemlöseaktivitäten sowohl die nicht-lineare Struktur des Prozesses, als auch die von Pólya vorgeschlagenen vier Schritte des Problemlösens aufgriffen. Sie betonten dabei im Hinblick auf Lehr-Lern-Situationen aber auch die wichtige Rolle von Steuerungs- und Analyseprozessen („managerial process", ebd., S. 195), die das Bearbeiten einer Problembearbeitung begleiten und überwachen.

Für den Mathematikunterricht wies Rott (2013) durch Beobachtung von Fünftklässlern empirisch nach, dass Problemlöseprozesse zwar häufig linear verlaufen, in einem „knappen Drittel" (S. 297) der Fälle aber auch „Rückschritte und Schleifen" (S. 297) enthalten können. Es gelang ihm ferner zu zeigen, dass die aktive (Selbst-)Regulation (vgl. „managerial process" bei Fernandez et al., 1994) ein „entscheidender Faktor beim Problemlösen" (Rott, 2013, S. 409) ist und daneben der Einsatz von Heurismen „positiv mit dem Problemlöse-Erfolg korreliert ist" (S. 409).

3. Ziele und Forschungsfragen

Wenn Konkrete Kunst als Ausgangspunkt für das Regelfinden und als Übungsfeld für mathematisches Modellieren und Problemlösen dienen soll, dann muss geklärt werden, ob Lernende, die in der Regel keinerlei Vorerfahrung mit dem Thema haben und auch die kunsttheoretischen und -historischen Hintergründe nicht kennen, die Analyse eines Werkes überhaupt leisten können. Soll das Konzept ferner im authentischen Mathematikunterricht – auch außerhalb von speziellen Schulprojekten am Jahresende – verwendet werden, muss geklärt werden, ob einerseits reguläre Unterrichtsstunden als Rahmen dienen können und andererseits, ob die Lehrkräfte derartige Aufgaben selbst ohne größere Vorbereitung bearbeiten und lösen können.

In einer explorativen Feldstudie wurde daher die Antwort auf folgende Frage gesucht:

> **Forschungsfrage I:** Können Lernende eine mathematische Beschreibung eines Kunstwerks angeben und ist dies ggf. im regulären Schulunterricht möglich?

Dabei sollten einerseits Schülerinnen und Schüler der späten Sekundarstufe I und andererseits Lehrkräfte bei der Suche nach Regelmäßigkeiten in Kunstwerken berücksichtigt werden; wegen fehlender Vorerfahrungen der Teilnehmenden auf diesem Gebiet, wurden sie alle als Novizen und damit als *Lernende* angesehen.

Ziel der Studie war es auch, das oben vorgestellte, theoriebasierte Prozessschema mit seinen vier Schritten als Feinstruktur des Analyseprozesses zu verifizieren:

> **Forschungsfrage II:** Können bei der Analyse eines Kunstwerkes die einzelnen vier Arbeitsschritte des theoriebasierten Prozessschemas beobachtet werden?

Die Theorie legt eine Verwandtschaft des hier beschriebenen Regelfindens zum Modellieren nahe (s. oben). Es sollte daher auch überprüft werden, wie sich diese Nähe in der Grobstruktur des Analyseprozesses widerspiegelt:

> **Forschungsfrage III:** Treten im Arbeitsprozess der Analyse eines Kunstwerks Rückkopplungsschleifen auf, in denen Lernende ihre Beschreibungen bzw. Modelle schrittweise verfeinern, d. h. wird das Prozessschema kreislaufartig mehrfach durchlaufen?

4. Forschungsdesign und Methoden

Den Schwerpunkt der Studie bilden 100 bayerische Schülerinnen und Schüler des Gymnasiums der Jahrgangsstufen 10 und 11. Bei der Wahl der teilnehmenden Schulen standen pragmatischen Gesichtspunkte im Vordergrund, etwa die Nähe zur Universität Würzburg und grundsätzliches Interesse der Schulleitungen und Lehrkräfte. Den Lernenden standen, in Anlehnung an die 45-Minuten-Taktung des regulären Schulunterrichts, wenigstens 3-mal 45 Minuten zur Verfügung, um verschiedene Kunstwerke auf ihren mathematischen Gehalt hin zu untersuchen. Bei dieser Arbeit wurden die Schülerinnen und Schüler in Kleingruppen zu je 5–7 Personen videographiert sowie ihre Arbeitsdokumente ausgewertet. Jahrgangsstufe und Gruppengrößen wurde so gewählt, dass ein Anknüpfen an und Vergleichen mit vorhandenen empirischen Daten (z. B. Borromeo Ferri 2011, S. 69 ff.: 10. Jgst. bei Gruppengröße 5–6) ermöglicht wurde. Eine Einführung der Schülerinnen und Schüler in Theorien und Methoden der Konkreten Kunst erfolgte im Rahmen der Untersuchung nicht, da Vorstudien gezeigt hatten, dass die Lernenden „lieber gleich Mathe machen“ statt im Mathematikunterricht etwas über Kunst zu erfahren.

Mit 15 Personen war die Gruppe der Lehrkräfte dagegen deutlich kleiner und setzte sich aus Realschul- und Berufsschul- und Gymnasiallehrkräften zusammen. Die Lehrkräfte wurden nicht ausgewählt, sondern meldeten sich freiwillig zu einer öffentlich angekündigten Fortbildungsveranstaltung an, in deren Rahmen die Daten erhoben wurden – man muss hier also ein grundsätzliches, persönliches Interesse am Thema unterstellen. Das Setting war nahezu dasselbe, wie beim Schülerteil der Studie, allerdings stand den Lehrkräften ein geringeres Aufgabenspektrum (die Lösung der eher einfachen Aufgaben des Schülerteils wurden exemplarisch im Plenum vorgestellt) und damit auch ein engerer Zeitrahmen von nur 60 Minuten zur Aufgabenlösung zur Verfügung. Um dem Fortbildungscharakter gerecht zu werden und die Lehrkräfte dazu zu befähigen, auf Nachfragen der Lernenden bei der Behandlung dieser Aufgaben im eigenen Unterricht reagieren zu können, erhielten sie ferner im Vorfeld eine kurze Einführung in Theorien und Methoden der Konkreten Kunst.

Zur Aufbereitung der Videomitschnitte wurden spezielle Hypothesendiagramme entwickelt, die den Analyseprozess jeweils einer Lernergruppe der Chronologie folgend graphisch darstellen.

4.1 Erweiterte Transkripte

Grundlage der Hypothesendiagramme ist jeweils eine Videoaufzeichnung. Die Bänder wurden transkribiert, wobei einerseits die Sprache der Lernenden, andererseits aber auch visuelle Daten, wie das Nutzen von Geodreieck und Zirkel, von Schere und Kleber oder ähnliches, berücksichtigt werden.

4.2 Segmentierung der Transkripte

Die so gewonnen erweiterten Transkripte werden mit Mitteln der Sprachwissenschaft in separate Abschnitte zerlegt: Einzelne Äußerungen werden nach Henne und Rehbock (1995) als Gesprächsschritte bezeichnet; mehrere dieser Schritte können zu Gesprächssequenzen zusammengefasst werden, wodurch „Kohärenz erzeugt und mithin Verstehen ermöglicht“ (Imo, 2013, S. 57) wird. In Kleingruppen werden auf diese Weise auch mehrere unabhängige, parallel ablaufende Gesprächssequenzen identifiziert. Weil hier sowohl verbale als auch nonverbale Äußerungen als Teil des Arbeitsprozesses verstanden werden, kann alternativ von Handlungssequenzen (vgl. Gohl, 2006, S. 27) gesprochen werden. Im Transkript werden derartige Sequenzen isoliert und als Kette von Gesprächs- bzw. Handlungsschritten in den Blick genommen.

4.3 Klassifizieren der Bausteine

Anschließend wird jeder Gesprächsschritt als Analyseeinheit im Sinne der Grounded Theory (nach Strauß & Corbin, 1996) aufgefasst und hinsichtlich seines Inhaltes bzw. seiner Funktion innerhalb der zugehörigen Handlungssequenz analysiert. Eine dieser Funktionen ist etwa, eine neue Handlungssequenz zu eröffnen; häufig übernehmen Ankündigungen eines Lernenden, etwas im Folgenden untersuchen zu wollen, diese Rolle („Ich hab jetzt das Bedürfnis, mal diese Koordinaten zu berechnen"). Eine Klassifizierung der Bausteine erfolgt dann als Mischform deduktiver Suche nach den theoriebasieren Schritten des Regelfindens und induktiver Kategorienbildung: Die Hauptkategorien (vgl. 2.1: mathematische Analyse (1), Formulierung einer Hypothese über relevante Konstruktionsprinzipien (2), aktive Prüfung (3), Validierung (4)) werden auf diese Weise weiter ausdifferenziert (z. B.: Hypothese bekräftigen: „Ja, das sehe ich auch so wie Du"; Elemente im Muster angeben, die zur Hypothese passen (Beispiele); Hypothese ausschärfen/modifizieren; Idee einer aktiven Prüfung äußern, ohne diese auszuführen, Hypothese für weitere Überlegungen benutzen, …).

4.3 Hypothesenstreifen und Hypothesendiagramme

Die weitere Aufbereitung der Daten erfolgt graphisch: Eine Handlungssequenz wird, der Chronologie des Transkriptes folgend, als horizontaler Streifen in einem zweidimensionalen Koordinatensystem aufgetragen. Jede Äußerung, die im Rahmen dieses Arbeitsprozesses auftritt, wird als Kästchen im Koordinatensystem eingezeichnet. Die genaue Lage des Kästchens im Streifen hängt dabei einerseits von Zeitpunkt des Auftretens der zugehörigen Äußerung im Transkript ab (horizontale Einordnung), andererseits von ihrer funktionalen Ausgestaltung (z. B. Hypothese aufstellen, überprüfen, ablehnen, etc.) innerhalb der Handlungssequenz (vertikale Einordnung). Weil die Handlungssequenzen in aller Regel die Beschäftigung der Lernenden mit Hypothesen zum Kunstwerk umfassen, wird der Streifen als *Hypothesenstreifen* (Abb. 5) bezeichnet.

Im Arbeitsprozess der Lernenden beim Regelfinden treten schließlich mehrere verschiedene solcher Streifen auf. Sie werden parallel untereinandergelegt und als Hypothesendiagramm zusammengefasst (Abb. 5).

Abbildung 6 im Anhang zeigt exemplarisch das vollständige Hypothesendiagramm einer Lerngruppe (Jgst. 10) zum „Primzahlenbild 1–9216". Das Diagramm besteht aus fünf (farblich getrennt markierten) Hypothesenstreifen, die Gruppe hat also innerhalb der rund 10-minütigen Bearbeitungsdauer an fünf Hypothesen gearbeitet. Diese sind:

- H1: leere Diagonalen haben Bedeutung
- H2: Die Kästchenanzahl ist 9216
- H3: Die markierten Kästchen sind Primzahlen
- H4: Anordnung
- H5: 9217 ist eine Primzahl und legt die obere Grenze fest

Die Gruppe startete mit der Idee, die leeren, nicht besetzten Diagonalen im Bild könnten nach einer Regel auf die Bildfläche gesetzt sein (vgl. dazu Abb. 1). Das Diagramm zeigt für H1 in einem ersten Block durch schwarze Kästchen an, dass diese Hypothese geäußert – und mehrmals wiederholt – wurde (Anhang, Abb. 6, Zeile 1 des Streifens) und dass im Bild auch Beispiele als Beleg dieser Hypothese von der Lernergruppe angegeben wurden. Im ersten Block fand allerdings keine Validierung (der Art Hypothese ablehnen oder Hypothese als korrekt annehmen) statt, die Frage nach der Korrektheit der Vermutung blieb also zunächst offen.

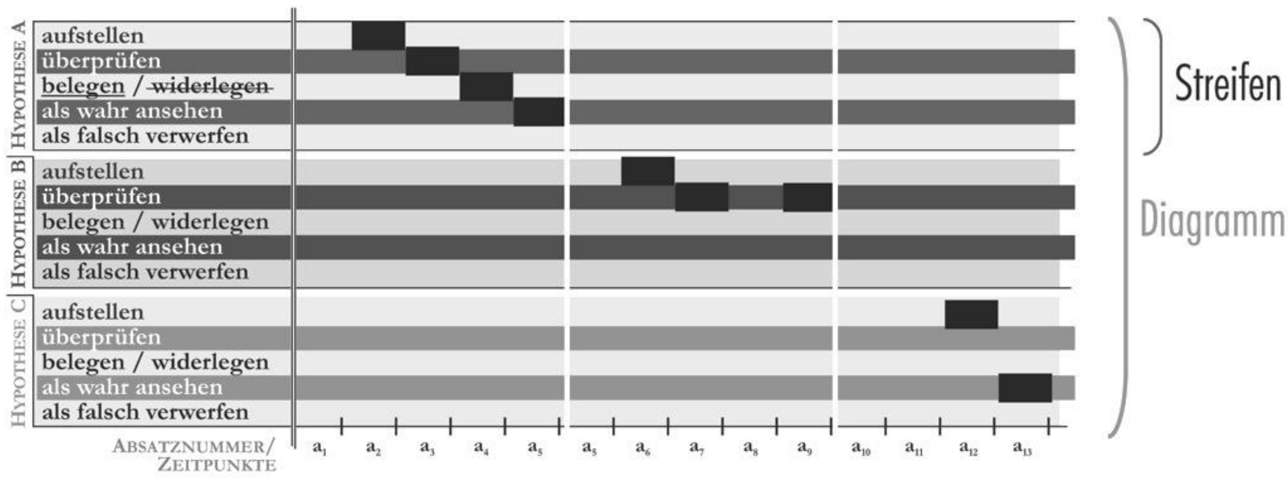


Abb. 5: Denkbares Hypothesendiagramm aus den drei Hypothesen A, B, C: Die Hypothese B wird im Laufe des Arbeitsprozesses zwar zwei Mal überprüft, aber weder angenommen noch verworfen. Hypothese C dagegen wird ohne Prüfung als wahr angesehen

Die Gruppe generierte stattdessen eine zweite Hypothese (H2: Die Anzahl der Kästchen im Bild ist 9216) und begann auch – mittels Abzählen – die Überprüfung. Allerdings blieb auch hier ein Ergebnis zunächst offen und die Gruppe begann, Hypothese H3 zu untersuchen (H3: Die markierten Kästchen sind Primzahlen).

Aus der Beschäftigung mit H3 ergibt sich zwangsläufig auch H4 nach der Anordnung der Primzahlen. Wir sehen im Diagramm, dass eine Idee geäußert (H4a: Die Anordnung erfolgt zeilenweise oben links), dann aber sofort verworfen wurde (Schüler zeigt auf Ecke oben links: „Aber guck mal her, das ist ja schon unmöglich, weil Drei eine Primzahl ist“ [Anm.: und das dritte Kästchen von oben links gezählt nicht markiert wurde]). Stattdessen wurde in der Mitte des Bildes weitergesucht (H4b) und dort durch geschicktes Abzählen auch ein System gefunden, das als korrekt von der Gruppe angenommen wurde (Anhang, Abb. 6, hinteres Drittel des Diagramms). Dies bestätigte gleichzeitig H3, also die Vermutung, es handle sich um Primzahlen. Schließlich nahm die Gruppe – ohne weitere Prüfung – auch H2 als korrekt an.

Im Gespräch wurde auch H5 aufgeworfen (H5: 9217 ist eine Primzahl), es wurden ein paar mögliche Teiler am ETR ausprobiert, und weil auf die Schnelle keine gefunden wurden, wurde H5 als korrekt angenommen (Schüler zeigt aufs Bild: „9217 ist die letzte Primzahl, die da nicht mehr drauf ist. Deswegen [der Titel]‚1 bis 9219‘, verstehst Du?“ – allerdings ist $9217 = 13 \cdot 709$).

Aus Sicht der Gruppe ergab sich also die Korrektheit der Hypothesen H2, H3, H4b und H5, das heißt diese vier Regeln beschreiben den Aufbau des Musters im Kunstwerk vollständig; die Korrektheit von H1 wurde zwar nochmals kurz untersucht, blieb aber bis zum Ende unbestätigt.

5. Ergebnisse

Die Auswertung der Lernerdokumente im Hinblick auf die **Forschungsfrage I** nach der Existenz und Qualität von Aufgabenlösungen ergibt ein gemischtes Bild: Zwar fanden (fast) alle Lernergruppen unabhängig vom Alter korrekte Lösungen (die oben beschriebene Schülergruppe hat im „Primzahlenbild 1–9216“ die Regeln R1, R2 und R3 finden und beschreiben können), doch nur wenige Gruppen gaben dabei vollständige Mengen von Konstruktionsregeln zu einem Kunstwerk an; zumeist wurden vielmehr nur ein oder zwei zentrale Konstruktionsprinzipien von den Lernenden gefunden. Im Hinblick auf den Detailreichtum der Beschreibungen bzw. die Anzahl der korrekt gefundenen Regeln erzielte die Gruppe der Lehrkräfte die besten Ergebnisse.Dieses Ergebnis zeigt aber auch, dass die mathematische Analyse von Kunstwerken der Konkreten Kunst den Lernenden die Möglichkeit gibt, Lösungen entsprechend ihren individuellen Vorerfahrungen und Kenntnissen zu entwickeln; die Aufgaben sind daher gut zur Leistungsdifferenzierung in inhomogenen Klassen geeignet.

In den Lernerdokumenten traten ferner – unabhängig vom jeweiligen Kunstwerk – zwei grundsätzlich verschiedene Bearbeitungstypen zu Tage: Obwohl es sich bei den Kunstwerken um visuell-geometrische Vorlagen handelt, stützten viele Schülerinnen und Schüler ihre Analysen auf arithmetische bzw. numerische Argumente (*arithmetischer Typ*), d. h. sie maßen und berechneten Längen oder Flächeninhalte und arbeiteten mit den numerischen Werten weiter; obwohl dieser Zugang fehleranfällig ist (Messfehler), führten Rundungen und implizite Annahmen diese Lernenden trotzdem häufig zu korrekten Ergebnissen.

Ein anderer Teil blieb auf der geometrischen Ebene (*geometrischer Typ*), verwendete also geometrische Überlegungen, wie etwa Zerlegungsgleichheit, Symmetrien oder Kongruenzen. Bei den restlichen Schülerinnen und Schüler traten diese Argumente und Überlegungen in gemischter Form auf.

Als Antwort auf die **Forschungsfrage II** ergab die Analyse der Hypothesendiagramme, dass die vier Teilschritte des oben beschriebenen Prozessschemas in der Praxis zumindest in wenigen Fällen empirisch nachweisbar sind. Vielfach bleibt allerdings der Schritt (1.) der mathematischen Analyse in den Daten verborgen (vgl. Transkriptauszug auf der nachfolgenden Seite).

Gründe für die schwierige empirische Nachweisbarkeit dieses Schrittes liegen einerseits in der Charakteristik der Aufgaben, da hier – wie beim Problembearbeitungsprozess nach Poincaré oder Wallas (Einsicht nach Inkubationsphase) – plötzliche Lösungsideen zielführend sein können (Heureka-Aufgaben). Andererseits können aber auch methodische Ursachen der Untersuchung eine Rolle spielen: Um zu einer besseren Nachweisbarkeit der Phase (1.) der mathematischen Analyse zu gelangen, müssten ggfs. die Individuen einer Lernergruppe genauer beobachtet werden (etwa mittels Eye-Tracking), was im Rahmen des regulären Unterrichtsablaufes kaum möglich ist.

Hervorzuheben ist, dass der dritte Schritt des Prozessschemas, die Prüfung, normativ als aktive Handlung festgelegt, häufig auch empirisch nachweisbar ist. Die Daten belegen ferner, dass er sich i. d. R. an den Schritt (2.) der Formulierung von (möglichen) Modellelementen und -relationen anschließt.

Infolgedessen beschreibt das vorliegende Prozessschema empirisch valide die Analyse von Kunstwerken als Wechsel von Hypothesengenerierung (Schritte (1) und (2)) und experimenteller Überprüfung (Schritte (3) und (4)).

Klahr und Dunbar (1988) hatten dieses Phänomen in ihrer Theorie der Dualen Suche (SDDS-Modell) als Modell des Problemlösens angeführt. Die Analyse Konkreter Kunst kann in diesem Sinn als spezieller Problemlöseprozess angesehen werden.

Eine Sonderrolle im vierschrittigen Prozess nimmt das Angeben von Beispielen ein: Im Zusammenhang mit den Kunstwerken sind Beispiele geometrischen Figuren, die sich auf der Bildfläche befinden und die spezielle Eigenschaften aufweisen. Beispiele werden hier häufig im Rahmen des Schrittes (3) Prüfen als (mitunter verzögerte) Reaktion auf das Aufstellen einer Hypothese angeführt. Sie werden aber gelegentlich bereits vor der Formulierung einer Hypothese angeführt und sind damit Teil des Schrittes (1), der mathematischen Analyse.

Wie auch theoretisch gefordert wird im Datenmaterial also sichtbar, dass das Identifizieren der Eigenschaften einzelner Bildelemente, etwa durch Einzeichnen von Hilfslinien oder Messen von Abständen, offenbar nicht nur dem Überprüfen, sondern auch dem Generieren von Hypothesen dienen kann.

Die Auswertung der **Forschungsfrage III** stützt diesen Standpunkt: Sie zeigt, dass der Analyseprozess iterativ verläuft, das heißt, dass die im Prozessschema beschriebene Schleife (Schrittfolge (1) › (2) › (3) › (4)) von den Lernenden im Arbeitsprozesses mehrmals parallel oder seriell (oder beides) durchschritten wurde: Aus den Hypothesendiagrammen lassen sich stets eine Vielzahl von Schleifen isolieren und damit im empirischen Datenmaterial nachweisen.

Beachtlich sind dabei vor allem die parallelen Verläufe derartiger Schleifen, weil sich hier die Kleingruppe dabei aufteilte und dann nur ein oder zwei Schüler für die Überprüfung der zugehörigen Hypothese zuständig waren: In einigen Fällen ging diese Aufteilung zu Lasten der Qualität der Aufgabenlösung, weil Fehlentscheidungen sich deutlich leichter durchsetzen und halten konnten.

Bereits Davis und Restle (1963) hatten festgestellt, dass Gruppen beim Problemlösen leistungsfähiger sind als durchschnittliche Individuen. Passende Erklärungen haben Laughlin, van der Stoep und Hollingshead (1991) zusammengetragen und empirisch überprüft: Gruppen erkennen korrekte Lösungen und nehmen diese an, wenn (!) sie von wenigstens einem Mitglied der Gruppe vorgeschlagen werden („recognition of truth“, S. 50). Sie entdecken und beanstanden Fehler eher als Individuen („rejection of error“, S. 50) und können darüber hinaus mehr Informationen verarbeiten („collective information processing“, S. 50). Jeder dieser drei Prozesse ist für den Erfolg der Gruppe wichtig (vgl. S. 60). Die Stärke der Gruppe zeigt sich besonders beim Finden von Mustern und Regeln: Hier sind Gruppen sogar leistungsfähiger als die stärksten Individuen (vgl. Laughlin, 2011, S. 91 ff.).

Offenbar wurde in den genannten Fällen der hier vorgestellten Untersuchung durch die selbstständige Aufteilung der Kleingruppe (5–7 TN) in noch kleinere Teile (1–2 TN) eine kritische Größe unterschritten, so dass die positiven Effekte des Problemlösens in Gruppen nicht mehr zum Tragen kommen konnten.

Die Zeitdauer der einzelnen Schleifendurchläufe mit der Schrittfolge (1) › (2) › (3) › (4)) fielen sehr unterschiedlich aus und reichten von wenigen Sekunden (vgl. Anhang, Abb. 6, Hypothese H4a) bis hin zur kompletten Bearbeitungszeit (z. B. Anhang, Abb. 6, Hypothese H2); einige Schleifen blieben auch offen, d. h. die Hypothesen konnten nicht abschließend für falsch oder richtig befunden werden (vgl. Anhang, Transkriptauszüge Tab. 1 und Tab. 2; Anhang, Abb. 6, Hypothese H1). In den verschiedenen Schleifen wurden stets neue Hypothesen formuliert und durch Experimente überprüft, was im SDDS-Modells als Suche im Hypothesen- bzw. im Experimenteraum interpretiert wird.

Die Iterationen verweisen abermals auch auf den Bezug zum mathematischen Modellieren, ist doch die Existenz von Rückkopplungsschleifen eines der wesentlichen Charakteristika des Modellierens. Ein weiteres Charakteristikum des Modellierens ist das Herausarbeiten von Strukturen und Einflussgrößen aus einer vorgegebenen Realsituation. Dieser Aspekt lässt sich direkt mit dem argumentativen Dialog im Rahmen der Problembearbeitung in Verbindung bringen: Diejenigen Hypothesen, welche eine Lernergruppe bis zum Ende der Aufgabenlösung als korrekt bzw. passend ansieht, bilden im Idealfall zusammengenommen die mathematische Struktur bzw. das Modell des Kunstwerks (vgl. Anhang, Abb. 6, rechte Randspalte). Die Analyse von Kunstwerken trägt demnach – neben den Aspekten des Problemlösens im Sinne der SDDS-Theorie – auch zentrale Aspekte des mathematischen Modellierens in sich.

6. Hinweise zur Unterrichtseinbettung

Aus Sicht der Mathematik handelt es sich bei den Kunstwerken der Konkreten Kunst in den meisten Fällen um die geometrische-ikonische Repräsentation eines geometrischen, arithmetischen, algebraischen oder stochastischen Zusammenhangs. Bei der mathematischen Analyse eines Bildes wird nach der zugehörigen symbolischen oder verbalen Darstellung dieser Verbindung gefragt. Dieser Wechsel von Darstellungsformen, hier ausgehend von einer geometrischen Repräsentation, wird im Mathematikcurriculum beispielsweise beim Bruchrechnen sowie beim Arbeiten mit Termen und bei deren Umformung thematisiert. Das Erkennen und Beschreiben von Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen in geometrischen Mustern dagegen ist zentraler Inhalt des Geometrieunterrichts. Und auch beim Beschreiben statistischer Daten in Diagrammen mithilfe mathematischer Zusammenhänge (etwa mittels linearer, quadratischer, exponentieller Funktionen) ist das Erkennen von Regelmäßigkeiten im Datenmaterial eine wichtige Fähigkeit.

Die Analyse Konkreter Kunst kann vor diesem Hintergrund in zweierlei Hinsicht dazu beitragen, die Inhalte des Mathematikunterrichts zu transportieren.

Es gibt einerseits die Möglichkeit, konkrete Fachinhalte mithilfe der Kunstwerke in den Blick zu nehmen und daraus etwa eine Einführungs-, Übungs- oder Vertiefungssituation zu entwickeln. Je nachdem, welche Ideen in einem Kunstwerk vom Künstler verarbeitet worden sind, bieten sich Bezüge in die verschiedenen Gebiete der Schulmathematik an. Beispielsweise ordnet Guderian (1990) einen ganzen Katalog von Werken nach den Gebieten Wahrscheinlichkeit, Zufall, Kombinatorik, Zahlenfolgen, Zahlsysteme und Algorithmen. Van der Blij (1987) sammelt in einer Ausgabe der Zeitschrift *mathematik lehren* unterrichtliche Anknüpfungspunkte von Geometrischer sowie Konkreter Kunst und Themen wie Gleichungslösen, Flächeninhaltsberechnung, Raumgeometrie, Kongruenzen, Trigonometrische Funktionen und Zufall. Und auch Lauter und Weigand (2008) fassen Kunstwerke unter mathematischen Inhaltsbezügen (Symmetrie, geometrische Abbildungen, Parkettierung, Folgen, Kurven, Perspektive; Flächen und Körper im Raum, Zufall und Chaos) zusammen. Einen ausführlichen Überblick gibt Wörler (2015).

Daneben können andererseits – wie im vorliegenden Beitrag vorgestellt – auch allgemeine mathematische Kompetenzen, wie das Problemlösen und das Modellieren bei der Analyse von Konkreter Kunst gefördert und reflektiert werden. Anders als beim Modellieren von Realsituationen ist hier bereits ein mathematischer Zusammenhang vom Künstler bzw. der Künstlerin im Bild verarbeitet worden, den es (wieder-) zu entdecken gilt. Vereinfachungen der Realsituation müssen nicht vorgenommen werden oder können sich etwa auf das Vernachlässigen von Farbnuancen beschränken. Zudem müssen die Zusammenhänge vom Betrachter erkannt werden können – diese Garantie folgt aus der Theorie der Konkreten Kunst.

Die empirischen Daten haben gezeigt, dass die hier untersuchten Lehrkräfte aufgrund ihrer fachmathematischen Expertise auch ohne tiefergehende Vorbereitung rasch in der Lage waren, die einem Bild zu Grunde liegenden mathematischen Zusammenhänge zu erkennen. Sofern diese Ergebnisse übertragbar sind, können Lehrerinnen und Lehrer also für die jeweilige Unterrichtssituation sowie zum Kenntnisstand ihrer Schülerinnen und Schüler selbst passende Werke auswählen und in den Unterricht integrieren.

Unabhängig davon, ob Inhalte oder Kompetenzen durch die Arbeit an den Kunstwerken in den Blick genommen werden, ergeben sich Differenzierungsmöglichkeiten fast von selbst, da jedes der Werke eine Reihe verschiedener Konstruktionsregeln enthält. Einige Schülerinnen und Schüler finden nur eine einzelne, vielleicht die „wichtigste“ oder offensichtlichste Regel, leistungsfähigere Schülergruppen entdecken mehrere, möglicherweise sogar alle Regeln und können diese zudem mathematisch korrekt beschreiben. Je nach Intensität der Analyse und Modellierung kann so dasselbe Werk mitunter in verschiedenen Jahrgangsstufen eingesetzt werden.

Die Ausgangsfrage

> Betrachte das vorliegende Werk. Was verbirgt sich an Mathematik in diesem Bild? Wie ist das Werk konstruiert worden?

lässt sich im Bedarfsfall um folgende Aufträge erweitern:

> Finde eine wichtige Konstruktionsregel.
>
> Finde alle Konstruktionsregeln, so dass sich aus Ihnen das Kunstwerk vollständig beschreiben lässt.
>
> Formuliere die Konstruktionsregel(n) mathematisch korrekt als Satz.
>
> Gib für jede der Konstruktionsregeln eine Formel an, die die Regel beschreibt.

In der Regel lassen sich weitere Anschlussfragen formulieren, die eine weitere Differenzierung ermöglichen. Im Falle des oben vorgestellten Primzahlenbildes ist folgende Vertiefung denkbar:

> Im Bild sind an vielen Stellen längere und kürzere „Diagonalen“ zu sehen, also Ketten von markierten Kästchen, die über ihre Ecken in eine Richtung nebeneinander liegen. Diese Diagonalen lassen sich

durch quadratische Ausdrücke der Form
$a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ beschreiben.
Suche im Bild einzelne dieser Diagonalen heraus und bestimme jeweils die Parameter a, b und c. Begründe, warum die Diagonalen durch quadratische Ausdrücke beschrieben werden können.

Eine wichtige Hilfestellung bei der Analyse von Konkreter Kunst verbirgt sich in vielen Fällen im Titel des jeweiligen Werks. Da die Konstruktion der Bilder nach Forderung der zu Grunde liegenden Kunsttheorie für den Betrachter nachvollziehbar sein soll, sind die Titel von den Künstlern häufig entsprechend der Bildungsregeln gehalten. Beim „Primzahlenbild 1–9216" beispielsweise werden die zentralen Konstruktionsmerkmale (und unter Berücksichtigung des Zusammenhangs $9216 = 96 \cdot 96$ sogar das Format des Kunstwerks: 96 cm × 96 cm) bereits durch den Titel angesprochen.

7. Zusammenfassung & Ausblick

Konkrete Kunst ist geplante Kunst: Jedem Kunstwerk liegt ein a priori festgelegter Konstruktionsplan aus logisch-mathematischen Regeln zu Grunde. Bei genauer Betrachtung können diese Regeln aus den Bildern abgelesen und nachvollzogen werden; die Kunsttheorie dieser Gattung garantiert dabei den Erfolg der (Wieder-)Entdeckung von Konstruktionsprinzipien. Die Werke der Konkreten Kunst können daher als Übungsfeld für das Finden und Beschreiben von Regelmäßigkeiten dienen.

Dabei erfolgt der Prozess der Analyse von Konkreter Kunst beim Herausarbeiten einzelner Konstruktionsregeln (Mikrostruktur), idealisiert als vierschrittiger Kreislauf (vgl. Wörler, 2009a, b; 2015), der wegen des Wechsels von Hypothesengenerierung und experimenteller Überprüfung dem Problemlösemodell der Dualen Suche (SDDS) nach Klahr und Dunbar nahesteht; heuristische Strategien wie Generalisieren oder Abstrahieren können beim Regelfinden eine Rolle spielen. Der Analyseprozess als Ganzes, also das Erkennen und Beschreiben mehrerer Regeln (Grobstruktur), verläuft iterativ und setzt sich aus verschiedenen parallel oder seriell verlaufenden SDDS-Schleifen zusammen. Er zeigt damit wesentliche Charakteristika des mathematischen Modellierens.

Ist dieses Modell auch abseits der Konkreten Kunst auf das Auffinden und Beschreiben von Mustern oder regelmäßigen Strukturen anwendbar? Die vorliegenden Daten geben darauf keine direkte Antwort. Allerdings schlagen Philipp, Matt und Leuders (2009) vor, das SDDS-Modell im Hinblick auf das Experimentieren in der Mathematik durch ein Drei-Räume-Modell zu ersetzen (Hypothesenraum, Strategieraum, Beispielraum); auch sie konnten – beim mathematischen Experimentieren – ein kreislaufartiges Wechselspiel zwischen dem Generieren von Beispielen und dem Generieren von Hypothesen empirisch nachweisen. 2011 gaben Leuders, Naccarella und Phillip vier induktive Vorgehensweisen beim Finden von Regeln (hier: passende Funktionstherme) an: (1) Sammeln von weiteren Beispielen (Daten), (2) Finden von Mustern in den Daten, (3) Generieren von Hypothesen, (4) Überprüfen von gefundenen Hypothesen (vgl. Leuders & Phillip, 2014).

Es zeigt sich also, dass Kreislaufprozesse, in denen das Generieren, Formulieren, Überprüfen und Bewerten von Hypothesen unter Zuhilfenahme von Beispielen in der Mathematik auch in anderen Kontexten Relevanz hat.

Literatur

Arbinger, R. (1997). *Psychologie des Problemlösens: Eine anwendungsorientierte Einführung*. Darmstadt: Primus.

v. d. Blij, F. (1987). Ein Mathematiker betrachtet bildende Kunst. *mathematik lehren 23*, 12–21.

Blum, W., & Leiß, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der ›Tanken‹-Aufgabe. *mathematik lehren, 128*, 18–21.

Borromeo Ferri, R. (2011). *Wege zur Innenwelt des mathematischen Modellierens*. Wiesbaden: Vieweg, Teubner

Bruder, R., & Collet, C. (2011). *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht*. Berlin: Cornelsen.

Carlsund, O., v. Doesburg, T., Hélion, J., Tutundjian, L., & Wantz, M. (1930). Base de la Peinture Concrète. *Art Concret, 1*, 1.

Davis, J. H., & Restle, F. (1963). The Analyses of Problems and Prediction of Group Problem Solving. *Journal of Abnormal and Social Psychology, 66*(2), 103–116.

Doerr, H. M., & English, L. D. (2003). A Modelling Perspective on Students' Mathematical Reasoning about Data. *Journal for Research in Mathematics Education, 34*(2), S. 110–136.

Fernandez, M. L., Nelda, H., & Wilson, J. W. (1994). Problem Solving: Managing it All. *The Mathematics Teacher, 87.3*, 195–199.

Forrester, J. W., & Zahn, E. (1972). *Grundzüge einer Systemtheorie: Ein Lehrbuch*. Wiesbaden: Gabler.

Funke, J. (2003). *Problemlösendes Denken*. Stuttgart: W. Kohlhammer.

Gohl, C. (2006). *Begründen im Gespräch: Eine Untersuchung sprachlicher Praktiken zur Realisierung von Begründungen im gesprochenen Deutsch*. Tübingen: Niemeyer.

Greefrath, G. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Sekundarstufe*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Guderian, D. (1990). *Mathematik in der Kunst der letzten dreißig Jahre: Von der magischen Zahl über das endlose Band zum Computerprogramm*. Ebringen i. Br.: Bannstein-Verlag.

Henn, H.-W. (2000). Warum manchmal Katzen vom Himmel fallen ... oder ... von guten und von schlechten Modellen. In H. Hischer (Hrsg.), *Modellbildung, Computer und Mathematikunterricht* (S. 9–17). Hildesheim: Franzbecker.

Henne, H., & Rehbock, H. (1995). *Einführung in die Gesprächsanalyse*. Berlin: De Gruyter.

Imo, W. (2013). *Sprache in Interaktion: Analysemethoden und Untersuchungsfelder*. Berlin: De Gruyter.

Klahr, D., & Dunbar, K. (1988). Dual Space Search During Scientific Reasoning. *Cognitive Science, 12*, 1–48.

Laughlin, P. R., van der Stoep, S. W., & Hollingshead, A. B. (1991). Collective Versus Individual Induction: Recognition of Truth, Rejection of Error, and Collective Information Processing. *Journal of Personality and Social Psychology, 61*(1), 50–67.

Laughlin, P. R. (2011). *Group problem solving*. Princeton N. J.: Princeton University Press.

Lauter, M., & Weigand, H.-G. (Hrsg.) (2008). *Ausgerechnet ... Mathematik und Konkrete Kunst*. Baunach: Spurbuchverlag.

Le Ferrier, J.-L., & Pichon, Y. (Hrsg.). (1990). *DuMont's Chronik der Kunst im 20. Jahrhundert: Stile, Akteure und Meisterwerke der Moderne*. Köln: DuMont.

Leuders, T., & Philipp, K. (2014). Mit Beispielen zum Erkenntnisgewinn – Experiment und Induktion in der Mathematik. *mathematica didactica, 37*, 164–190

Newell, A., & Simon, H. A. (1972). *Human problem solving*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall.

Opwis, K, Beller, S., Spada, H., & Lüer, G. (2006). Problemlösen, Denken, Entscheiden. In H. Spada (Hrsg.), *Lehrbuch Allgemeine Psychologie* (S. 197–275). Bern: Hans Huber.

Philipp, K., Matt, D., & Leuders, T. (2009). Experimentelles Denken – Vorgehensweisen von Schülerinnen und Schülern bei innermathematischen Erkundungen. In M. Neubrand (Hrsg.*), Beiträge zum Mathematikunterricht 2009* (o. S.). Münster: WTM Verlag

Poincaré, H. (1914). *Wissenschaft und Methode. Bd. XVII. Wissenschaft und Hypothese*. Leipzig und Berlin: Teubner.

Pólya, G. (1949). *Schule des Denkens: Vom Lösen mathematischer Probleme*. Tübingen: Francke.

Rott, B. (2013). *Mathematisches Problemlösen: Ergebnisse einer empirischen Studie*. Münster: WTM-Verlag.

Simon, H. A., & Lea, G. (1974). Problem Solving and Rule Induction: A Unified View. In L. W. Gregg (Hrsg.), *Knowledge and cognition* (S. 105–127). New York u. a.: John Wiley & Sons.

Spada, H. (Hrsg.). (2006). *Lehrbuch Allgemeine Psychologie*. Bern: Hans Huber.

Strauß, A. L., & Corbin, J. M. (1996). *Grounded Theory: Grundlagen Qualitativer Sozialforschung*. Weinheim: Beltz, Psychologie Verlags Union.

Wallas, G. (1926). *The Art of Thought*. New York: Harcourt, Brace and Company.

Wörler, J. (2009a). Folgen in der Konkreten Kunst: Gesetzmäßigkeiten erkennen und fortsetzen. *mathematik lehren, 157*, 20–29.

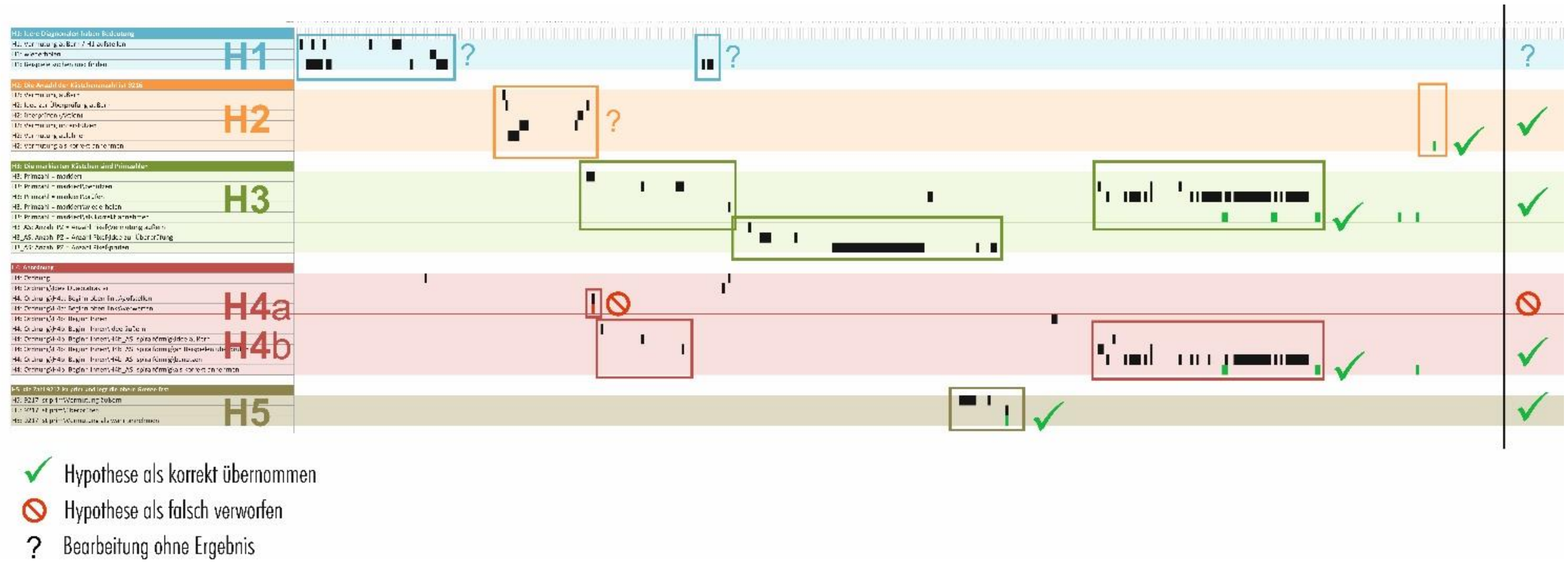
Wörler, J. (2009b). Konkrete Kunst: Mathematik in Bildern finden und dynamisch erforschen. In M. Neubrand (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2009*, 955–958. Münster: WTM.

Wörler, J. (2015). *Konkrete Kunst als Ausgangspunkt für mathematisches Modellieren und Simulieren*. Münster: WTM.

Anschrift des Verfassers

Dr. Jan Franz Wörler
Universität Würzburg, Institut für Mathematik,
Mathematik V: Didaktik der Mathematik
Emil-Fischer-Str. 30
97074 Würzburg
woerler@mathematik.uni-wuerzburg.de

Abb. 6: Vollständiges Hypothesendiagramm des Analyseprozesses einer Lernergruppe (Jgst. 10) zum „Primzahlenbild 1–9216“. Es besteht aus fünf Streifen, also hat die Gruppe mit fünf zentralen Hypothesen H1-H5 gearbeitet. Vier dieser Hypothesen (H2, H3, H4b, H5) wurden am Ende des Prozesses für von der Gruppe für korrekt befunden (grüner Haken in der rechten Spalte), die fünfte (H1) konnte nicht abschließend geprüft werden (Fragezeichen in der rechten Spalte). Weil sich Hypothese H4a schnell als falsch herausstellte, wurde sie leicht modifiziert und als H4b weiterbetrachtet.



Schritt	*Beschreibung*	*Transkriptauszug*
(1.) Mathematische Analyse	(nicht nachweisbar)	---
(2.) Hypothese zur Struktur	›Primzahlen markiert‹	S5: [. . .] dass dann alle Primzahlen also alle Punkte, die eine Primzahl sind, anmarkiert“
(3.) Prüfung (aktiv)	Kästchenzählen an der Vorlage; Einzeichnen der Spirale	S1: [zählt Kästchen] DAS hier ist die Eins [zeichnet Markierung ein]. Dann ist hier Zwei, Drei ... dann ist hier Vier .. Fünf .. Sechs .. Sieben. S5: Sieben, Acht, Neun, Zehn..
(4.) Validierungsergebnis	Hypothese wird als passend angenommen	S4: ja, dann haben wir es.

Tab. 1: Transkriptauszug einer Aufgabenbearbeitung zum „Primzahlenbild 1–9216, bei der die Phase mathematische Analyse nicht explizit nachweisbar ist

Schritt	*Beschreibung*	*Transkriptauszug*
(1.) Mathematische Analyse	Einzeichnen von Hilfslinien	S1 [zu S4]: ey, ich glaub fei nicht, dass du da draufmalen darfst. S5: der hat nicht gesagt, dass man da nicht draufmalen darf, oder?
(2.) Hypothese zur Struktur	›Anzahl markierte Kästchen in Quadraten‹	S 4: Wenn man das so nimmt, der Mittlerste ist die ›Eins‹, die erste Primzahl. Dann ist das hier ›Drei‹ in diesen Dingern. Drei ist ja auch eine Primzahl. Dann ist das Nächste vielleicht die nächste Primzahl.
(3.) Prüfung (aktiv)	Einzeichnen von Hilfslinien, Abzählen von Kästchen	S4: Eins, Zwei, Drei, Vier, Fünf, Sechs, Sieben, Acht.
(4.) Validierungsergebnis	(nicht nachweisbar)	---

Tab. 2: Transkriptauszug zur Idee, die Anzahlen der markierten Kästchen im „Primzahlenbild 1–9216“ bezogen auf konzentrische Quadrate um die Bildmitte entspräche der Folge der Primzahlen. Diese Hypothese kann von der Gruppe weder falsifiziert und verworfen noch als korrekt angenommen werden