Lernen von Mathematik beim Problemlösen

ANNA-CHRISTIN SÖHLING, KÖLN

***Zusammenfassung**: Beim mathematischen Problemlösen gewonnene Erkenntnisse können von Schülerinnen und Schülern nicht immer zum Lösen ähnlicher oder strukturgleicher Aufgaben genutzt werden. Es stellt sich daher die Frage, wie allgemein oder bereichsspezifisch die Erkenntnisse von mathematischen Zusammenhängen sind, die beim mathematischen Problemlösen gewonnen werden können und gewonnen werden. Mittels Fallstudien wird der Begriff der Bereichsspezifität mithilfe des Begriffs der latenten Sinnstruktur nach Oevermann et al. und Krumsdorf theoretisch vertieft. Dabei zeigt sich auch, dass die Analyse von Problemlöseprozessen mithilfe der Abduktionstheorie nach Peirce und Meyer durch den Begriff der latenten Sinnstruktur sinnvoll erweitert werden kann.*

***Abstract:** Insights that students gain when solving difficult mathematical problems are not always used to solve similar or structurally equal problems. The question arises how general or domain specific these insights into mathematical relationships are or can be. In case studies, the term of domain specificity is theoretically amplified with the help of the term 'latent structure of sense' coined by Oevermann et al. and applied to the learning of mathematics by Krumsdorf. The analysis of problem solving processes by abduction theory (Peirce and Meyer) can be complemented by the term of latent structure of sense, as will be shown as well.*

1. Einleitendes Beispiel

Die Schülerin Jenny (4. Klasse, Grundschule) löst im Rahmen einer Interviewstudie die folgende Aufgabe:

> **Bücherregal**
> In Streblindes Bücherregal stehen 168 Bücher.
> Das Regal hat drei Fächer.
> In jedem Fach stehen 10 Bücher mehr, als im darunter liegenden.
> Wie viele Bücher stehen in jedem Fach? (Rasch 2001, S. 196)

Jenny malt sich das Bücherregal zunächst auf (s. Abb. 1). Die Zeilen werden von Jenny als die drei Fächer des Bücherregals interpretiert und in zwei der drei Fächer trägt Jenny jeweils die Zahl 10 ein, um die „10 Bücher mehr" zu berücksichtigen. Jenny zieht daraufhin 20 von 168 ab und teilt das Ergebnis 148 durch 3. Sie erhält 49 Rest 1. Der Rest scheint sie nicht zu irritieren, sondern wird von Jenny als ein zusätzliches Buch gedeutet, welches oben auf dem Regal liegt. Ihr Ergebnis ist 49 Bücher in einem Fach, 59 im nächsten Fach und im letzten Fach 69 Bücher.

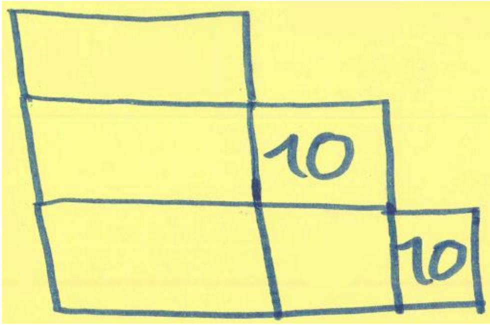

Abb. 1: Skizze der Schülerin Jenny bei der Bearbeitung der Bücherregal-Aufgabe

Zweifel an ihrem Ansatz bekommt Jenny, als sie eine Probe macht und bei der Addition von 49 + 59 + 69 nicht auf die geforderte Anzahl von 168 Büchern kommt. Zuerst überlegt sie, ob ihre Skizze falsch sei oder ob sie falsch gerechnet habe, und überprüft ihre Rechnung. Danach hat sie die Idee, in ihrer Skizze noch eine 10 in das mittlere Feld in der untersten Zeile zu schreiben, weil „dort ja auch 10 Bücher mehr" sein müssen. Nun zieht sie 30 von 168 ab (Schritt 1), teilt ihr Ergebnis durch 3 mit 46 als Ergebnis (Schritt 2) und sie gewinnt durch sukzessive Addition von 10 das Tripel 46-56-66 als Lösung der gesamten Aufgabe (Schritt 3).

(1) $168 - 30 = 138$
(2) $138 : 3 = 46$
(3) $46 + 10 = 56$
$56 + 10 = 66$, also $46 - 56 - 66$

Was kann Jenny beim Bearbeiten dieser Aufgabe mathematisch gelernt haben?

Es besteht die Hoffnung, dass Jenny ihr Lösungsverfahren auch unabhängig vom Situationskontext der Aufgabenstellung verstanden hat und dass sie bei einer ähnlichen Problemstellung wieder mit einer ähnlich strukturierten Skizze arbeiten kann. Da sie durch ihren Irrtum ihre Skizze verbessern musste, liegt die Vermutung nahe, dass sie besonders gut verstanden haben könnte, dass die Differenz von „immer 10 mehr" auch mehrmals in einer Zeile zu berücksichtigen sein kann.

Mit Blick auf die Schulmathematik lässt sich diese Aufgabe auch dem Thema „arithmetisches Mittel und gegensinniges Verändern" zuordnen. Es wird zunächst ermittelt, wie viele Bücher durchschnittlich in einem Fach stehen (Schritt 1*), bevor das Produkt als Summe dargestellt wird (Schritt 2*), bei der zwei der drei Summanden gegensinnig um 10 verändert werden können (Schritt 3*).

(1*) $168 : 3 = 56$

(2*) $3 \cdot 56 = 56 + 56 + 56 = 168$

(3*) $(56 - 10) + 56 + (56 + 10) = 46 + 56 + 66 = 168$

Jenny geht beim Lösen der Aufgabe allerdings einen etwas anderen Weg, bei dem sie durch die zu Anfang durchgeführte Subtraktion gemäß der „10 Bücher mehr“ die kleinste durchschnittliche Buchanzahl eines Fachs bestimmt, bevor sie, in Worten des Sachkontextes gesprochen, die „10 Bücher mehr“ den Regalfächern wieder hinzufügt.

Nachdem Jenny die Bücherregal-Aufgabe gelöst hat, bekommt sie die strukturgleiche Schäfchen-Aufgabe:

Schäfchen
Von Montag bis Freitag wurden auf einer Weide zusammen 60 Schäfchen geboren. Am Dienstag waren es drei mehr als am Montag, am Mittwoch wieder drei mehr als am Dienstag, am Donnerstag wieder drei mehr als am Mittwoch, am Freitag drei mehr als am Donnerstag. Kannst du herausfinden, wie viele Schäfchen an den einzelnen Wochentagen geboren wurden? (Rasch 2001, S. 194)

Im Folgenden sollen zwei Aufgaben als strukturgleich bezeichnet werden, wenn ihnen aus Expertensicht die gleiche mathematische Struktur zugrunde liegt. Die mathematische Struktur umfasst die Zusammenhänge und Abhängigkeiten zwischen den verschiedenen Größen oder Variablen in der Aufgabenstellung. Sowohl bei der Lesen-Aufgabe als auch bei der Schäfchen-Aufgabe geht es um Summen, deren Summanden um einen konstanten Wert wachsen, und in beiden Fällen ist die Größe der Gesamtsumme gegeben und sind die Größen der einzelnen Summanden unbekannt.

Wenn Jenny ihren Lösungsweg und ihre Skizze allgemein wie oben geschildert verstanden hätte, würde man erwarten, dass sie auch die strukturgleiche Schäfchen-Aufgabe auf ihrem gefundenen Lösungsweg und mit einer ähnlichen Skizze folgendermaßen lösen könnte (s. Abb. 2).

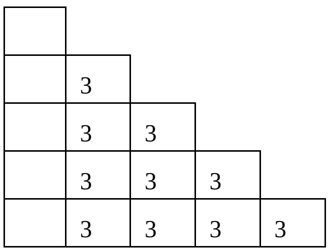

Abb. 2: Fiktive Übertragung von Jennys Skizze auf die Schäfchen-Aufgabe

Von der Gesamtanzahl der Schäfchen müsste man 10·3 Schäfchen abziehen (Schritt 1), wie man durch Zählen der Dreien in der Skizze ermitteln kann, und das Ergebnis durch 5 teilen (Schritt 2), um die Anzahl der Schäfchen zu ermitteln, die am Montag geboren wurden. (Schritt 3 erübrigt sich aufgrund der etwas anderen Fragestellung.)

Jennys tatsächliche Lösungsbemühungen sehen allerdings anders aus. Zunächst erkennt sie, wie auch andere Schüler in der Interviewstudie, die Strukturgleichheit der beiden Aufgabenstellungen nicht, was nicht zuletzt wegen der sprachlichen Formulierungen, die sich bei beiden Aufgaben sehr unterscheiden, nicht verwunderlich ist. In Jennys Fall scheint ein Lesefehler dafür verantwortlich zu sein, sie übersieht das Wort „mehr“. Denn zunächst versucht Jenny, die Aufgabe dadurch zu lösen, dass sie 3 + 3 + 3 + 3 rechnet, da 4 mal 3 Schäfchen geboren werden. Erst als sie sich fragt, wie sie das Ergebnis überprüfen kann, merkt sie, dass in der Aufgabenstellung „3 Schäfchen mehr“ steht. Sofort sagt sie, dass es dann so sei wie bei der Bücherregal-Aufgabe, und malt dazu eine ähnliche Skizze (s. Abb. 3).

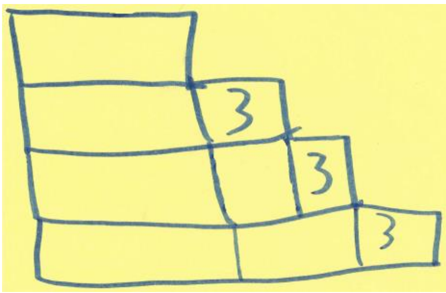

Abb. 3: Skizze der Schülerin Jenny bei der Bearbeitung der Schäfchen-Aufgabe

Sie ist sich unsicher, welche Zeile für welchen Wochentag stehen soll und entscheidet sich, mit dem Dienstag für die oberste Zeile zu beginnen. Sie versucht nun, ähnlich vorzugehen wie bei der Bücherregal-Aufgabe. Da sie meint, bereits ausgerechnet zu haben, dass in der Woche 12 Schäfchen geboren werden, rechnet sie (fehlerhaft) 60 – 12 = 58 und teilt 58 durch 4, wobei sie 14 R2 erhält. Ihr Ergebnis ist 14 – 17 – 20 – 23 für die Schäfchen, die an den Tagen von Dienstag bis Freitag geboren werden. Der Rest wird dieses Mal von ihr nicht beachtet. Ihre Probe ergibt allerdings, dass ihre vermeintliche Lösung nicht stimmen kann. An dieser Stelle vermutet sie nicht wie bei der vorherigen Aufgabe, dass sie sich entweder verrechnet haben könnte oder ihre Skizze unpassend wäre. Stattdessen versucht sie durch Probieren 4 Summanden, die sich aufsteigend jeweils um 3 unterscheiden und in der Summe 60 ergeben, zu finden, aber bleibt erfolglos. Auch die Korrektur der Differenz von 60 und 12 zu 48 statt 58 bringt keinen Erfolg, sodass Jenny letztendlich keine Lösung für die Schäfchen-Aufgabe findet.

Obwohl Jenny die Ähnlichkeit zwischen beiden Aufgaben sieht, gelingt es ihr nicht, ihre Skizze erfolgreich auf die Schäfchen-Aufgabe zu übertragen. So beachtet Jenny etwa nicht, dass jede Zeile einen Tag repräsentiert, und hat dementsprechend eine Zeile zu wenig. Dass ihr eine Übertragung nicht gelingt, mag dem Umstand geschuldet sein, dass ihre Skizze bei der Bücherregal-Aufgabe die Sachsituation weniger abstrakt darstellen kann als bei der Schäfchen-Aufgabe. Jenny kann in ihrer Skizze nicht nur drei Summanden sehen, die jeweils um 10 wachsen, sondern auch ganz konkret ein Bücherregal, wie in der Aufgabenstellung beschrieben. Die beiden unteren Fächer sind deshalb breiter, weil dort jeweils 10 Bücher mehr als im Fach darüber Platz finden müssen. Dass sie ihre Skizze sehr konkret innerhalb des Kontexts der Sachsituation deutet, wird erkennbar, als sie bei ihrer irrtümlichen Lösung 49 R1 den Rest nicht nur als ein zusätzliches Buch deutet, sondern dieses Buch auch auf das „Bücherregal“ ihrer Skizze malt. Bei der Schäfchen-Aufgabe ist eine Veranschaulichung zwar möglich, indem man sich die Felder etwa als kleine Weiden mit jeweils einer bestimmten Anzahl an Schäfchen vorstellt, diese Veranschaulichung mag allerdings für Jenny nicht so naheliegend sein.

An diesem Beispiel aus einer Interviewstudie lassen sich mehrere interessante Beobachtungen machen:

- In den Aufgabenstellungen steckt mathematisches Potential vor allem zum Thema Mittelwert und gegensinniges Verändern.
- Die Aufgabe wird von der Schülerin so gelöst, dass ihr zwar die Anbindung an die Durchschnittsberechnung klarwerden könnte, allerdings die Möglichkeit des gegensinnigen Veränderns von Summanden nicht genutzt werden muss.
- Die Strukturgleichheit von verschiedenen Aufgabenstellungen wird der Schülerin erst im Laufe der Bearbeitung der zweiten Aufgabe deutlich.
- Trotz des Erkennens der Strukturgleichheit ist es für die Schülerin nicht möglich, den bei der ersten Aufgabe gefundenen Lösungsweg auf die zweite Aufgabe zu übertragen.

Motiviert durch ähnliche Beobachtungen bei anderen Schülern in der Interviewstudie stellten sich unter anderem Fragen

- nach dem mathematischen Potential von problemhaltigen Aufgaben,
- nach der tatsächlich von Schülerinnen und Schülern genutzten Mathematik,
- nach der Allgemeinheit oder Bereichsspezifität von beim Problemlösen gewonnenen Erkenntnissen und
- nach der Übertragung von Lösungswegen auf strukturgleiche Aufgaben.

Bevor diese Fragen weiter ausgeschärft werden, sollen im Folgenden einige Erkenntnisse zum Lernen von Mathematik beim Problemlösen und zur Bereichsspezifität beim Lernen von Mathematik dargestellt werden. Danach soll die erwähnte Interviewstudie kurz umrissen werden und der theoretische Bezugsrahmen vorgestellt werden, vor dessen Hintergrund die Interviewtransskripte analysiert wurden. Den Schülerinnen und Schülern wurden dabei strukturgleiche Aufgaben gestellt und es wurde beobachtet, inwiefern es den jeweiligen Schülerinnen und Schülern gelang, ihre Erkenntnisse beim Lösen der ersten Aufgabe zum Lösen der weiteren Aufgaben zu nutzen. Im Anschluss soll anhand von Fallstudien gezeigt werden, wie sich die Forschungsfragen bei konkreten Fällen unter Verwendung des theoretischen Rahmens beantworten lassen, bevor allgemeinere Erkenntnisse zusammenfassend dargestellt werden.

2. Lernen von Mathematik beim Problemlösen

Ein Ziel des Mathematikunterrichts besteht nach Winter darin, „in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten [zu vermitteln], die über die Mathematik hinaus gehen“ (Winter 1995, S. 37). Die Mathematik als „Schule des Denkens“ (ebd., S. 40) soll dabei als Übungsfeld dienen und der Mathematikunterricht soll „die Förderung von Problemlösefähigkeiten, dabei insbesondere die Eingewöhnung in die immer bewusster werdende Nutzung heuristischer Strategien […] und mentaler Techniken“ (ebd., S. 40) miteinschließen.

In den Kernlehrplänen NRW nimmt das Problemlösen als eine der zu fördernden prozessbezogenen Kompetenzen ebenfalls eine besondere Stellung ein. Auch hier gilt als Ziel, die Anwendung verschiedener heuristischer Strategien zu lehren, wie etwa das Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, das Zerlegen von Problemen in Teilprobleme, das Zurückführen auf Bekanntes, das Finden von Spezialfällen, das Überprüfen durch Probieren etc. (siehe etwa den Kernlehrplan NRW für die Realschule).

Die Vermittlung einer mathematischen und im Idealfall allgemeinen Problemlösekompetenz ist also erklärtes Ziel im Mathematikunterricht. Um dies zu erreichen werden heuristische Strategien gelehrt. Den Schülerinnen und Schülern soll ein möglichst breites Repertoire an Methoden an die Hand gegeben werden, welches im besten Falle auch außerhalb des Mathematikunterrichts angewendet werden kann, um auch mathematikferne Probleme zu lösen. Aber selbst wenn dieses Ziel sehr hochgesteckt ist, ist es für den Mathematikunterricht bereits ein Gewinn, wenn heuristische Strategien, die in einem bestimmten mathematischen Feld oder bei einem bestimmten Aufgabentyp erworben wurden, in einem anderen mathematischen Bereich oder bei anderen Sacheinkleidungen angewendet werden können.

Dies erklärt die vorherrschende Auseinandersetzung mit heuristischen Strategien in der Forschung zum Problemlösen im Mathematikunterricht (siehe etwa Bruder & Collet 2011). Der Blickwinkel dieses Artikels soll allerdings ein anderer sein. Denn der Mathematikunterricht kann nicht nur Mittel sein, Problemlösekompetenz zu schulen. Sondern ebenso kann das Problemlösen ein Mittel sein, um Mathematik zu lernen. Der Frage nach dem Lernen von Mathematik durch Problemlösen soll deshalb hier nachgegangen werden.

Bemühungen, das Lernen von Mathematik durch Problemlösen hervorzuheben, gibt es beispielsweise in den USA. Dort entwickeln Forscher und Lehrer im Namen des National Council of Teachers of Mathematics Unterrichtskonzepte zum „Learning through Problem Solving“ (siehe etwa Schoen & Charles 2003). Die Didaktiker und Lehrer nahmen aus den folgenden Gründen an, dass durch Problemlösen besonders gut Mathematik gelernt werden könne:

- Beim Lernen von Mathematik durch Problemlösen würde den Schülerinnen und Schülern auf besondere Weise deutlich, dass sich die Mathematik durch einen sense-making process entwickelt.
- Außerdem würde durch das Lernen von Mathematik durch Problemlösen ein vertieftes Verständnis von zugrundeliegenden Prozessen und Ideen gefördert.
- Zudem würde dadurch das Interesse der Schülerinnen und Schüler gefördert (vgl. Kahan & Wyberg 2003, S. 20).

Die Grundannahme, dass Problemlösen zu Verständnis führe, führt zum Beispiel Davis (1992) an. Besonders hier setzen didaktische Bemühungen an, denn dieses Verständnis ließe sich durch eine Balance zwischen den folgenden drei Elementen unterstützen (Hiebert & Wearne 2003, S. 5):

- Schüler sollen dazu angehalten werden herausfordernde Probleme zu lösen.
- Außerdem sollen sie nach immer besseren Lösungsmethoden suchen. Dies sei nach Dewey (1933) die beste Art, ein vertieftes Verständnis zu erlangen.
- Und die Lehrkraft solle die Schüler dabei zu gegebenen Zeitpunkten mit Informationen versorgen.

3. Bereichsspezifität beim Problemlösen

Der Optimismus von Schoen et al. (2003) bezüglich des allgemeineren Erkenntnisgewinns durch Problemlösen wird nicht von allen Forschern und Lehrern geteilt. Denn in der Praxis stellt sich allzu häufig das Problem der Bereichsspezifität beim Lernen von Mathematik: Erkenntnisse, die von Schülerinnen und Schülern bei der Bearbeitung einer Aufgabe erworben werden, können oftmals nur schwer auf andere Aufgaben übertragen werden, auch wenn dem Experten eine Übertragung auf die neue Aufgabenstellung sehr naheliegend erscheinen mag.

Hierzu fasst etwa Renkl (1996) verschiedene Studien aus dem Bereich der Alltagsmathematik zusammen, bei denen sich besonders deutlich zeigt, dass es zu nur wenig Wissenstransfer zwischen verschiedenen Kontexten komme. Straßenkinder beim Verkauf (Saxe et al. 1988) oder Weight-Watchers-Mitglieder beim Einkaufen und Kochen (Lave, Murtaugh und de la Rocha 1984) „bewältigen mathematische Anforderungen effektiv und korrekt“, allerdings „ohne auf mathematische Verfahren, wie sie in der Schule gelernt werden, zurückzugreifen“ (Renkl 1996, S. 79).

In der Psychologie gibt es eine Vielzahl an Theorien zum Transfer erlernten Wissens auf andere Gegenstandsbereiche oder andere Aufgabenstellungen. Seel (2000) fasst einige prominente dieser Theorien zusammen und hält fest, dass auch wenn „Unterricht das Potential hat, Lerntransfer auf vielfältige Weise zu unterstützen“ (S. 318), der „allgemeine Transfer spezifischer Prozeduren überwiegend verwendungs- und bereichsspezifisch“ erfolge (S. 318).

Bauersfeld (1983) prägte den Begriff der Bereichsspezifität für die Mathematikdidaktik und entwickelte die Theorie der subjektiven Erfahrungsbereiche (SEB). Bauersfeld lehnt sich bei der Definition des Begriffs der Bereichsspezifität an die Definition von Seiler (1973) an, der Piagets Theorie der kognitiven Entwicklung kritisiert. Seiler kritisiert vor allem die angenommene Universalität bzw. Generalität des formalen Denkens und sagt, dass „begriffliche Strukturen und Systeme […] nie eine unbeschränkte Generalität [implizieren]“ (S. 266), da „jedes individuelle kognitive System […] seinem Wesen nach beschränkt auf die Situationen [sei], in denen es erarbeitet wurde, und auf die Elemente und ihre Beziehungen, die es strukturiert“ (S. 266).

Bauersfeld (1983) bezeichnet dies mit der Bereichsspezifität des Denkens und formuliert auf dieser Grundlage die Theorie der subjektiven Erfahrungsbereiche. Ein grundlegender Gedanke dieser Theorie ist, dass neue Erfahrungen „entsprechend der situativen Bindung in deutlich getrennten ‚subjektiven Erfahrungsbereichen`“ (Bauersfeld 1983, S. 2) gespeichert werden. Die Situation, in der Erfahrungen gemacht werden, spielt dabei wie bei Seiler eine besondere Rolle.

Auf das Problemlösen bezogen bedeutet dies, dass Erfahrungen, die beim Lösen eines bestimmten mathematischen Problems gemacht werden, zunächst innerhalb eines spezifischen SEBs verarbeitet werden. Es ist nicht selbstverständlich, dass Erfahrungen aus anderen subjektiven Erfahrungsbereichen aus dem Mathematikunterricht zum Lösen des bestimmten Problems herangezogen werden können oder dass Erfahrungen, die beim Lösen des bestimmten Problems gemacht werden, auf neue Situationen (z.B. ähnliche Probleme) übertragen werden können.

Bearbeitet ein Schüler verschiedene strukturähnliche Probleme, die für einen Schüler in unterschiedlichen Erfahrungsbereichen angesiedelt sind, kann es sein, dass der Schüler erst durch eine weitere Überlegung und nicht direkt im ersten Ansatz der Beschäftigung mit dem zweiten Problem die Ähnlichkeit erkennt und versucht, den Lösungsweg der einen Aufgaben auf die neue Aufgabe zu übertragen. Mögliche Erkenntnisse, die bei der Bearbeitung der ersten Aufgabe gemacht wurden, würden dabei ein Stück weit verallgemeinert werden. Es könnte zum Beispiel sein, dass dabei der Anwendungsbereich einer bestimmten Gesetzmäßigkeit erweitert wird.

Seiler (1973) spricht in einem solchen Fall davon, dass sich kognitive Systeme „in einem allmählichen Generalisierungsprozess […] auf ‚Nachbarsituationen‘, auf verwandte Gegenstände und Aspekte [ausdehnen]“ (S. 266), und betont dabei, dass der Generalisierungsprozess nicht passiv passiert, sondern „auf dem aktiven Bemühen des Individuums [beruht], einen Begriff, eine Regel auf eine neue Struktur zu übertragen“ (S. 267). Nach Seiler lernt ein Schüler dabei, „wann und unter welchen Bedingungen [er] sich mit Erfolg bemüht“, und bildet „auf diese Weise […] eine Strategie des Generalisierens und Problemlösens heraus“ (S. 267), was allerdings aufgrund des Prinzips der Bereichsspezifität „nicht unbegrenzt fruchtbar und erfolgreich sein wird“ (S. 267).

Der Generalisierungsprozess ist insgesamt eine Herausforderung für Schüler und „erfolgt nur schrittweise und ist mit großen Hindernissen verbunden“ (S. 281). Außerdem sind in der Forschung die „exakten Bedingungen und Gesetze des Generalisierungsprozesses […] noch vollständig unbekannt“ (S. 281).

Im obigen Beispiel scheinen die beiden Aufgaben für Jenny zunächst einmal nicht viel miteinander zu tun haben. Sie scheint also in zwei verschiedenen Erfahrungsbereichen zu handeln. Erst nachdem Jenny sieht, dass sie die Aufgabenstellung der Schäfchen-Aufgabe falsch gelesen hat, sieht sie die Gemeinsamkeiten und versucht, beide Erfahrungsbereiche aneinander anzugleichen, indem sie ihre Vorgehensweise von der ersten Aufgabe zur Lösung der zweiten Aufgabe nutzt. Allerdings bleibt ihre Skizze an die besondere Anschaulichkeit der ersten Aufgabenstellung gebunden. Vermutlich gelingt ihr deshalb eine Generalisierung nicht. Zumindest hat sie nach ihrem gescheiterten Lösungsversuch keine Idee, wie sie die Skizze an die Situation in der zweiten Aufgabenstellung anpassen kann.

Für den Forscher ist es schwierig, subjektive Erfahrungsbereiche im Detail zu beschreiben, wenn er einen Schüler nicht wie etwa Lawler (1980) seine Tochter über einen langen Zeitraum hinweg beobachtet. Deswegen wurde für die Analyse in den Fallstudien der vorliegenden Arbeit eine andere theoretische Grundlage gewählt.

Das Anliegen dieses Artikels ist, diese alternative theoretische Basis für das Lernen von Mathematik beim Problemlösen vorzustellen und auf ihrer Grundlage die Möglichkeiten und Grenzen des Erkenntnisgewinns beim Problemlösen theoretisch fassbar zu machen und erklären zu können. Dabei soll in den Fallstudien die folgende Frage beantwortet werden:

Wie allgemein oder bereichsspezifisch sind die Erkenntnisse, die beim mathematischen Problemlösen gewonnen werden können?

4. Methoden der durchgeführten Interviewstudie

Insgesamt wurden 51 Schülerinnen und Schüler in Einzelinterviews dazu aufgefordert, verschiedene Aufgaben laut denkend zu lösen. Die Interviewerin hielt sich dabei weitestgehend im Hintergrund. Sie beantwortete zu Beginn einer Aufgabenstellung ggf. Verständnisfragen oder forderte die Schülerinnen und Schüler zum lauten Denken auf oder zur Erklärung einzelner Gedankengänge, wenn die Schüler sich zwischendurch nicht laut äußerten. Bei den Aufgaben hatten die Schülerinnen und Schüler mit wenigen Ausnahmen kein Routineverfahren zur Lösung der Aufgaben zur Hand, weswegen man auch davon sprechen kann, dass die Aufgaben für die Schülerinnen und Schüler Probleme darstellten.

Ein Interview dauerte in der Regel 45 bis 60 Minuten und es wurde jeweils zwischen einer und neun Aufgaben gelöst. Die Akquise der Schülerinnen und Schüler erfolgte teilweise über persönliche Kontakte, allerdings weitaus mehr über die Fachlehrer. Gesucht wurde nach Schülerinnen und Schülern, die nicht unbedingt eine besondere mathematische Begabung aufwiesen, sondern vor allem motiviert waren mitzumachen. Zumeist wurden die Schülerinnen und Schüler in der Schule während des regulären Unterrichts in einem gesonderten Raum interviewt. Einige kamen auch in die Universität oder ließen sich zu Hause interviewen. Von allen befragten Schülerinnen und Schülern besuchten 21 die 4. Klasse einer Grundschule, 3 die 5. Klasse und 12 die 6. Klasse einer Realschule und außerdem 4 die 5. Klasse und 11 die 6. Klasse eines Gymnasiums.

Bei 30 der 51 Interviews wurden strukturgleiche Aufgaben aus je einer von verschiedenen Aufgabengruppen hintereinander gestellt, um die Lösungsverfahren bei den verschiedenen strukturgleichen Varianten miteinander vergleichen zu können und um so mögliche Rückschlüsse über die Allgemeinheit von gewonnenen Erkenntnisse ziehen zu können. Meistens war es möglich, pro Interview jeweils zwei bis drei Aufgaben von zwei verschiedenen Aufgabengruppen bearbeiten zu lassen, also insgesamt vier bis sechs Aufgaben. Die Schülerinnen und Schüler wurden im Anschluss an die Bearbeitung von Aufgaben aus einer Aufgabengruppe befragt, ob sie Ähnlichkeiten zwischen den Aufgaben feststellen konnten, ob ihnen die Ähnlichkeiten genutzt hätten, ob man eine Aufgabe so lösen könne wie eine andere. Wenn zwei Aufgaben sehr unterschiedlich gelöst worden waren und Zeit dazu blieb, wurden die Schülerinnen und Schüler dazu aufgefordert, die eine Aufgabe wie die andere zu lösen.

Die Interviews wurden mit einer Videokamera und einem Tonbandgerät aufgezeichnet und im Anschluss transkribiert und mithilfe der Methode der objektiven Hermeneutik nach Oevermann et al. (1979) interpretiert. Danach wurden sie unter dem Blickwinkel verschiedener Theorien analysiert, von denen für die Fragestellung dieses Artikels der Begriff der latenten Sinnstruktur nach Oevermann et al. (1979) relevant ist, aber auch die Abduktionstheorie nach Peirce (ca. 1900).

Letztere soll zunächst kurz erläutert werden, da sie das wichtigste Analyseinstrument für diese Arbeit ist. Mithilfe logischer Rekonstruktionen, also dem Rekonstruieren deduktiver, induktiver und vor allem abduktiver Schlüsse beim Problemlösen, wird die Rationalität der Vorgehensweisen der Schülerinnen und Schüler herausgestellt. In folgenden Darstellungen soll auf eine detaillierte rationale Analyse weitestgehend verzichtet werden, da eher die Lösungswege als Gesamtes von Interesse sind. Trotzdem soll durch die Darstellung der Abduktionstheorie zum einen Zeugnis darüber abgelegt werden, wie die dargestellten Entdeckungen der Schülerinnen und Schüler rekonstruiert wurden und zum anderen soll darüber hinaus deutlich werden, wie der Begriff der latenten Sinnstruktur das Arbeiten mit der Abduktionstheorie sinnvoll erweitert.

5. Abduktion beim Problemlösen

Der Abduktionsbegriff, wie er hier verwendet werden soll, geht auf die Theorie der logischen Schlussformen nach Peirce (ca. 1900) zurück. Peirce verwendet das Begriffsnetz aus Deduktion, Induktion und Abduktion, um Prozesse des logischen Schließens zu beschreiben. Bei jedem dieser Schlüsse wird von einer oder zwei Prämissen auf eine Konklusion geschlossen. Die Prämissen und Konklusion lassen sich bei allen drei Schlüssen entweder als Gesetz, Fall oder Resultat bezeichnen. Ein Gesetz ist eine Wenn-Dann-Aussage, welche den Zusammenhang zwischen Fall und Resultat beschreibt[1].

Bei der Deduktion ist die Schlussrichtung vom Fall über das Gesetz zum Resultat. Aus bestimmten Voraussetzungen folgt hierbei denknotwendig das Resultat.

Anders ist dies bei der Induktion und Abduktion. Die Abduktion geht vom Resultat aus und zielt auf einen passenden Fall (und ein zwischen Fall und Resultat vermittelnden Gesetz). Peirce beschreibt das Resultat auch als ein überraschendes Phänomen, was erst noch erklärt werden muss. Es wird nach dem Fall gefragt und nach einem Gesetz, die vorliegen und gelten müssen, damit das Resultat so eintreten konnte, wie es vorgefunden wurde. Dabei können verschiedene Erklärungen zur Klärung des überraschenden Phänomens herangezogen werden.

Die Abduktion ist somit kein erkenntnissicherndér, sondern ein hypothetischer Schluss. Im Zusammenhang mit dem Lernen von Mathematik wird die Abduktion von Meyer und Voigt (2009) auch als die zentrale Schlussform der Entdeckungen bezeichnet, während die Deduktion die zentrale Schlussform beim mathematischen Begründen und Beweisen ist. Bei der Induktion wird die Gültigkeit eines vermuteten Gesetzes an neuen Fällen und Resultaten geprüft.

Da beim Problemlösen oftmals neue mathematische Zusammenhänge entdeckt werden oder Hypothesen aufgestellt werden müssen, da das zur Lösung notwendige Wissen nicht vorhanden ist, liegt es nahe dass sich abduktive Schlüsse in Problemlöseprozessen rekonstruieren lassen.

Im Folgenden seien Beispiele gegeben, um die Schlussformen der Deduktion und Abduktion näher zu beleuchten[2]. Wir gehen dabei von einem fiktiven Schüler aus, der versucht, die Tor-Aufgabe zu lösen:

> **Äpfel und Tore**
>
> Ein Mann geht Äpfel pflücken. Um in die Stadt zu kommen, muss er 7 Tore passieren. An jedem Tor steht eine Wächterin und verlangt von ihm die Hälfte seiner Äpfel und einen Apfel mehr. Am Schluss bleibt dem Mann nur ein Apfel übrig. Wie viele hatte er am Anfang? (Bruder, Büchter & Leuders 2005, S. 145)

Wir betrachten den folgenden mathematischen Zusammenhang, der in den dargestellten Schlüssen das Gesetz ist:

> Wenn der Mann x Äpfel nach Passieren von Tor n hatte, dann hatte er $(x + 1) \cdot 2$ Äpfel vor dem Passieren von Tor n.

Liegt der Aufgabentext vor, kann ein Schüler, dem der Gedanke des Rückwärtsarbeitens kommt und dem dieses Gesetz klar ist, durch Deduktion mithilfe der Apfelanzahl nach dem Passieren eines Tors auf die Apfelanzahl vor dem Passieren des Tores schließen. Schematisch dargestellt:

Deduktion: Anwendung des Gesetzes

Fall: Der Mann hatte 1 Apfel nach Passieren von Tor 7 (bei insgesamt 7 Toren).

Gesetz: Wenn der Mann x Äpfel nach Passieren von Tor n hatte, dann hatte er $(x + 1) \cdot 2$ Äpfel vor dem Passieren von Tor n.

Resultat: Der Mann hatte 4 Äpfel vor dem Passieren von Tor 7 $(((4 + 1) \cdot 2 = 10) \cdot 2)$.

Bei einer Abduktion kann es sein, dass ein anderer Schüler durch Probieren festgestellt hat, dass der Mann 4 Äpfel vor dem Passieren von Tor 7 gehabt haben muss. Dies kann er leicht mit den Angaben aus dem Aufgabentext überprüfen. Auf der Suche nach einer Erklärung, warum sein Probierversuch mit 4 Äpfeln erfolgreich ist, kann der Schüler durch Abduktion verschiedene Hypothesen aufstellen:

Abduktion A: Vermutung, dass es immer 3 Äpfel mehr seien vor dem Passieren eines Tors

Resultat A: Der Mann hatte 4 Äpfel vor dem Passieren von Tor 7.

Gesetz A: Wenn der Mann x Äpfel nach dem Passieren von Tor n hatte, dann hatte er $x + 3$ Äpfel vor dem Passieren von Tor n.

Fall A: Der Mann hatte 1 Apfel nach dem Passieren von Tor 7.

Dem Experten ist klar, dass die vermutete Gesetzmäßigkeit nicht zur Tor-Aufgabe passt. Der Schüler könnte das Gesetz am nächsten Tor wieder anwenden und durch Überprüfung feststellen, dass das Gesetz nicht für alle Tore anwendbar ist (induktiver Schluss).

Charakteristisch für einen abduktiven Schluss ist, dass auch Vermutungen oder Erklärungen generiert werden können, die nichtzutreffend sind. Das heißt allerdings nicht, dass nur eine Erklärung passend oder zutreffend ist, wie im Folgenden gezeigt werden soll:

Gesetz B: Wenn der Mann x Äpfel nach Passieren von Tor n hatte, dann hatte er $2x + 2$ Äpfel vor dem Passieren von Tor n.

Gesetz C: Wenn der Mann x Äpfel nach Passieren von Tor n hatte, dann hatte er $(x + 1) \cdot 2$ Äpfel vor dem Passieren von Tor n.

Beide Vermutungen B und C sind richtig, wobei Vermutung C direkt dem Umkehren der Operationenkette laut Aufgabentext und damit mehr der Umkehrung der Handlung im Sachkontext entspricht. Vermutung B gibt hingegen eine Erklärung in der Zahlenwelt, wie man etwa in einer Zahlenreihe von 1 auf 4 kommt.

Das Finden mathematischer Gesetzmäßigkeiten lässt sich also mithilfe des Abduktionsbegriffs genauer fassen und theoretisch beschreiben und von Prozessen der Wissensanwendung (Deduktion) und Überprüfung (Induktion) abgrenzen.

Interessant ist nun, wie allgemein oder bereichsspezifisch die entdeckten Gesetzmäßigkeiten sind. Um die verschiedenen Allgemeinheitsgrade, die eine entdeckte Gesetzmäßigkeit haben kann, zu fassen, soll im Folgenden der Begriff der latenten Sinnstruktur genutzt werden. Dazu soll dieser zunächst eingeführt und dann auf das dargestellte Beispiel bezogen werden.

6. Latente Sinnstrukturen als Analyseinstrument

Zur Beschreibung der Bereichsspezifität oder Allgemeinheit von Schüleräußerungen kann man die Methode der objektiven Hermeneutik verwenden. Im ursprünglichen Sinn der Methodologie sollen dabei alle möglichen Bedeutungen, die beispielsweise eine Äußerung haben kann, herausgearbeitet werden und so die Regeln erfasst, die einer Äußerung möglicherweise zugrunde liegen und die unterschiedlich allgemein oder bereichsspezifisch sein können.

Im Rahmen der objektiven Hermeneutik prägte Oevermann den Begriff der latenten Sinnstruktur. Damit meint er „die durch Regeln erzeugten objektiven Bedeutungen einer Sequenz von sinntragenden Elementen einer Ausdrucksgestalt“ (Oevermann 2001, S. 39). Ausdrucksgestalten waren in der vorliegenden Studie Schüleräußerungen aus den Interviewtransskripten und Notizen der Schüler. Liest oder hört ein Forscher, ein Lehrer oder der Interviewpartner eine Schüleräußerung, wird er ihr in irgendeiner Form eine Bedeutung geben. Welche Bedeutung das ist, wird von Person zu Person, von Schüler zu Schüler und Lehrer zu Lehrer, unterschiedlich sein. Mit der Methode der objektiven Hermeneutik wird nach bestimmten, strengen Regeln versucht, alle Bedeutungen herauszuarbeiten, die eine bestimmte Schüleräußerung haben kann. Es wird dann von objektiven Bedeutungen gesprochen.

Latente Sinnstrukturen bilden nach Oevermann (2001) „eine vom Wissen praktischer Subjekte logisch unabhängige Realität“ (S. 41). Der Begriff „latent“ dürfe daher nicht mit den Begriffen „unbewusst“ oder „tacit knowledge“ verwechselt werden, denn diese beiden Begriffe beziehen sich auch auf Wissen, das ein Subjekt zwar nicht bewusst abrufen kann, über das es aber dennoch verfügt. Im Gegensatz dazu sind latente Sinnstrukturen „eine logisch von der Intentionalität und den psychischen Repräsentanzen der je konkret handelnden Subjekte unabhängige und entsprechend auch nicht notwendigerweise aktual psychisch repräsentierte Realität“ (S. 41).

Bislang wurde der Begriff der latenten Sinnstruktur in der Forschung dazu verwendet, die Forschungsmethode der Objektiven Hermeneutik näher zu beschreiben. Der Begriff lässt sich allerdings auch zur Beschreibung des Forschungsgegenstands nutzen, was Krumsdorf (2015) in der Mathematikdidaktik zum ersten Mal getan hat. Dabei geht es bei der Herausarbeitung der latenten Sinnstruktur von Schüleräußerungen sowohl darum zu erfahren, nach welchen dem Schüler bewussten oder unbewussten Gesetze er gehandelt haben könnte, als auch darum, welche allgemeineren Gesetze in dem Vorgehen sichtbar werden, ohne dass der Schüler sie wissen muss. Es spielt also nicht mehr nur eine Rolle, wie man Schülerhandeln möglichst treffend interpretieren kann, sondern auch, welche allgemeineren Gesetzmäßigkeiten sich in Schüleräußerungen und Lösungswegen zeigen, wie im Folgenden näher erläutert werden soll.

Latente Sinnstrukturen umfassen u.a. alle vorstellbaren Abstufungen im Allgemeinheitsgrad einer Schüleräußerung oder eines Lösungsweges. Eine Äußerung kann bedeuten, dass ein Schüler einen gefundenen mathematischen Zusammenhang oder eine Vorgehensweise nur auf Situationen anwenden kann, die sehr ähnlich zur ursprünglichen Aufgabe sind, oder dass ein Schüler erkennt, dass eine entdeckte Gesetzmäßigkeit oder Vorgehensweise auch auf andere Probleme anwendbar ist, die sich z.B. durch einen anderen Sachkontext stärker von der ursprünglichen Aufgabe unterscheiden. Es kann auch sein, dass die Allgemeinheit changiert, mit der ein Schüler eine entdeckte Regel oder einen Lösungsweg selbst sieht (siehe Krumsdorf 2015). Und gleichwohl besitzt die Äußerung eine objektive, darüberhinausgehende Bedeutung, die manifest wird, sobald eine Person (und sei es nur der Lehrer) diese Bedeutung expliziert[3].

Im Folgenden sei eine bei der Tor-Aufgabe entdeckbare Gesetzmäßigkeit in verschiedenen Allgemeinheitsgraden dargestellt. Es wird hier nur eine Auswahl möglicher Gesetze dargestellt, um die Spannweite von Allgemeinheitsgraden anzudeuten.

Gesetz i: Wenn der Mann x Äpfel nach Passieren von Tor n hatte, dann hatte er $(x+1)\cdot 2$ Äpfel vor dem Passieren von Tor n.

Gesetz ii: Wenn „erst durch 2 und dann minus 1“ gerechnet x ergibt, ist die Umkehrrechnung „erst plus 1 und dann mal 2“.

Gesetz iii: Wenn x das Ergebnis einer Rechnung mit zwei verschiedenen Operationen, ergibt sich die Umkehrrechnung, indem die Umkehroperationen gewählt und auch die Reihenfolge der Operationen umgekehrt wird.

Gesetz iv: Wenn eine Kette aus Rechenoperationen umgekehrt wird, müssen sowohl die Operationen, als auch deren Reihenfolge umgekehrt werden.

Das Gesetz i ist sehr spezifisch für die Tor-Aufgabe formuliert. Gesetz ii trägt dem Umstand Rechnung, dass diese Gesetzmäßigkeiten auch bei anderen Aufgaben angewandt werden kann, bei denen die Rechenoperationen „erst durch 2 und dann minus 1“ umgekehrt wird. Es kann aber auch sein, dass zwar Rechnungen umgekehrt werden sollen, aber dass es sich nicht zwangsläufig um eine Subtraktion verknüpft mit einer Division handeln muss (Gesetz iii). Es ist nicht trivial zu entdecken, dass bei der Umkehrung einer Operationenkette die Anzahl der umzukehrenden Operationen keine Rolle spielt, solang jede Operation und die Reihenfolge der Operationen insgesamt umkehrt wird, wie Gesetz iv beschreibt.

Darüber hinaus ist das Gesetz iv nicht auf die Arithmetik beschränkt, sondern gilt z.B. auch für die Abbildungsgeometrie. Es sind noch weitere Abstraktionsgrade denkbar, die den Horizont der Schulmathematik überschreiten. Für die hier verfolgten Zwecke soll die Schulmathematik allerdings reichen.

Im Eingangsbeispiel wurde bereits ein Teil der latenten Sinnstruktur des Lösungsweges von Jenny beschrieben. Auch wenn Jenny das noch nicht sehen mag, lassen sich ihr Lösungsweg und ihre Skizze verallgemeinern und in anderen Sachkontexten mit gleicher mathematischer Struktur anwenden. Außerdem mag ein Experte in der Aufgabenstellung bereits mathematisch sehr allgemeine Zusammenhänge erkennen, wie etwa die Durchschnittsberechnung und das gegensinnige Verändern von Summanden (siehe den alternativen Lösungsweg). Jennys Lösungsweg in allgemeiner Form lässt sich auch mit dem alternativen Verfahren in Verbindung bringen, sodass die Zusammenhänge zwischen den beiden Lösungsverfahren deutlich werden. Dies ist im Unterricht bedeutsam, wenn etwa im Rahmen von Mathekonferenzen verschiedene Lösungswege zu einer Aufgabe von den Schülern vorgetragen werden. Hier liegt es an der Lehrkraft, die Zusammenhänge zwischen verschiedenen Lösungswegen aufzuzeigen, um den Schülern zu einem vertieften Verständnis ihres eigenen Weges zu verhelfen.

In den folgenden Fallbeispielen soll daher

- das mathematische Potential der jeweiligen Aufgabengruppe kurz umrissen werden,
- das konkrete Vorgehen des jeweiligen Schülers bei der ersten Aufgabenstellung beschrieben werden,
- Vermutungen darüber aufgestellt werden, wie sich der gefundene Lösungsweg verallgemeinern lässt und wie der Schüler auf dieser Grundlage die zweite strukturgleiche Aufgabe lösen müsste
- Das tatsächliche Vorgeben des Schülers bei der zweiten/dritten Aufgabe beschrieben werden
- Schwierigkeiten und Stellen herausgestellt werden, an denen für den Schüler Unterstützung durch eine andere Person hilfreich gewesen wäre, um daraus Konsequenzen für die Unterrichtspraxis zu ziehen,
- Ein Vergleich zwischen dem erwarteten Erkenntnisgewinn und dem tatsächlichen Erkenntnisgewinn erfolgen.

7. Fallbeispiel Lennart

Lennart, ein Schüler der 5. Klasse einer Realschule, bearbeitet zuerst die Lesen-Aufgabe und danach die Schäfchen-Aufgabe.

Lesen
Quicki las in einer Woche ein Buch von 133 Seiten.
Am Montag las sie einige Seiten und von da ab jeden Tag 5 Seiten mehr als am Tag davor.
Am Sonntag wurde sie fertig.
Wie viele Seiten las sie am Montag?
(Rasch 2001, S. 182)

In Ergänzung zu Jennys Lösungsweg und dem dargestellten alternativen Lösungsweg, lassen sich die Aufgaben auch durch Probieren lösen, indem ein Wert für die Anzahl der gelesenen Seiten am Montag bzw. für die am Montag geborenen Schäfchen willkürlich festgelegt und damit alle weiteren Summanden und die Gesamtsumme ermittelt werden. Die ermittelte Gesamtsumme kann daraufhin am Aufgabentext überprüft werden.

Bei der ersten Aufgabe ermittelt Lennart die durchschnittlich gelesene Anzahl an Buchseiten durch Division (Schritt 1) und erhält als Ergebnis 13. Von dieser Anzahl geht er in Fünferschritten hoch, bis dass er insgesamt 7 Summanden erhält, die jeweils um 5 wachsen (Schritt 2a). Die Gesamtsumme ist mit 219 aber zu hoch. Daher geht er im nächsten Ansatz statt von 13 von 10 aus (Schritt 2b), danach von 6 (Schritt 2c), danach von 5 (Schritt 2d) und danach von 4 (Schritt 2e), womit er die passende Zahlenreihe gefunden hat. Bei der Summe, die 5 als ersten Summanden hat, sieht er, dass sein Ergebnis um 7 zu groß ist und dass er deshalb von jedem Summanden 1 abziehen muss, um auf das Ergebnis zu kommen (Schritt 3).

Lennarts Lösungsweg der Lesen-Aufgabe:

(1) $133:7=19$
(2a) $19+24+29+34+39+44+49=219$
(2b) $10+15+20+25+30+35+40\ =$
(2c) $6+11+16+21+26+31+36=147$
(2d) $5+10+15+20+25+30+35=140$
(2e) $4+9+14+19+24+29+34=133$
(3) $140=133+7=(4+1)+(9+1)+(14+1)+(19+1)+(24+1)+(29+1)+(34+1)$

Die Entdeckung in Schritt 3 lässt sich durch den folgenden abduktiven Schluss darstellen:

Abduktion: Lennart findet einen abkürzenden Lösungsweg

Resultat: Die ermittelte Summe von 140 ist um 7 größer als die gewünschte Summe von 133.

Gesetz: Wenn in einer Summe mit 7 Summanden jeder Summand um 1 verringert wird, dann verringert sich die Summe insgesamt um 7.

Fall: Jeder Summand muss um 1 verringert werden.

Bei der Rekonstruktion dieses abduktiven Schlusses besteht die Schwierigkeit darin, zu entscheiden, wie allgemein das Gesetz formuliert werden kann. Lennart äußert wie viele Schüler nicht explizit, welche Regelmäßigkeit er entdeckt (siehe auch Schwarzkopf (2000) oder Meyer (2007)). Es kann sein, dass Lennarts Erkenntnis von allgemeinerer Art ist als im Schema der Abduktion dargestellt. Um möglichst umfassend alle möglichen Gesetze zu rekonstruieren, die in Lennarts Vorgehen latent angelegt sind, wird in den Analysen die latente Sinnstruktur von Lennarts Äußerungen möglichst umfassend herausgearbeitet. Dabei wird die zugrundeliegende mathematische Gesetzmäßigkeit des abkürzenden Lösungswegs (als Schritt 3 dargestellt) in unterschiedlicher Allgemeinheit dargestellt. Hier soll wieder nur eine Auswahl möglicher Gesetze, also nur ein kleiner Teil der latent in Lennarts Vorgehen angelegten Gesetze, dargestellt werden:

Lösungsweg A: Wenn in einer Summe mit 7 Summanden jeder Summand um 1 verringert wird, dann verringert sich die Summe insgesamt um 7.

Lösungsweg B: Wenn in einer Summe mit 7 Summanden jeder Summand um 1 verändert wird, dann verändert sich die Summe insgesamt um 7.

Lösungsweg C: Wenn in einer Summe mit 7 Summanden jeder Summand um x verändert wird, dann verändert sich die Summe insgesamt um 7x.

Lösungsweg D: Wenn in einer Summe mit a Summanden jeder Summand um x verändert wird, dann verändert sich die Summe insgesamt um $a * x$.

Da Lennart nur einen Probierschritt von der Lösung entfernt ist, lag für ihn die Entdeckung nahe, dass man bei der Differenz von 7 zum Zielwert 133 und bei insgesamt 7 Summanden jeder Summand um 1 verringert werden muss (Lösungsweg A). Diese Erkenntnis hätte Lennart die Berechnung der Summe in Schritt 2e ersparen können. Allerdings scheint er sich ihrer Gültigkeit noch nicht sicher zu sein, da er die Summe trotzdem bestimmt.

Allgemeiner gefasst könnte der abkürzende Lösungsweg nicht nur zum Verringern einer Summe, sondern auch zum Erhöhen einer Summe genutzt werden (Lösungsweg B). Außerdem kann man auch größere Differenzen zum Zielwert überbrücken. So muss nur die Differenz zum Zielwert durch die Anzahl der Summanden geteilt werden, um zu ermitteln, um viel jeder Summand verändert werden muss (Lösungsweg C). Dieser abkürzende Lösungsweg ist auch bei anderen Aufgaben anwendbar, bei denen sich durch Probieren einer Summe als Zielwert genähert wird, die nicht 7, sondern beliebig viele Summanden hat (Lösungsweg D). Es sind auch noch allgemeinere Formulierungen des Lösungsweges denkbar, bei denen etwa die Summanden gewichtet sind. Für den Rahmen dieses Beitrags sollen allerdings die vier dargestellten unterschiedlich allgemeinen Lösungswege ausreichen.

Die allgemeineren Lösungswege B, C und D sind im Vorgehen von Lennart bereits latent angelegt, wobei fraglich ist, ob Lennart dies bereits realisiert. In einem Mathematikunterricht, in dem der mathematische Erkenntnisgewinn beim Problemlösen im Vordergrund steht, kann die Lehrkraft sich dafür verantwortlich sehen, den Schülern bei der Realisierung zunächst latent bleibender Zusammenhänge zu helfen oder von Mitschülern helfen zu lassen.

Es ist zu erwarten, dass Lennart bei einer ähnlichen Aufgabe wieder ähnlich vorgeht, indem er den Durchschnitt berechnet und von da aus eine Summe mit wachsenden Summanden bildet und diese schrittweise verändert, bis dass die gewünschte Gesamtsumme erreicht wird. Es kann auch sein, dass er seinen abkürzenden Lösungsweg entweder einen Schritt vom Zielwert entfernt anwendet (Lösungsweg A oder B), wenn er ihn so wie bei der Lesen-Aufgabe beibehält. Hat er diesen Lösungsweg auch in einer seiner allgemeineren Formen (etwa Lösungsweg C) verstanden, könnte er nach dem ersten Probierversuch mithilfe des abkürzenden Lösungsweges direkt die Lösung ermitteln. Bei der Schäfchen-Aufgabe wäre der Lösungsweg D folgendermaßen:

(1) $60 : 5 = 12$
(2) $12 + 15 + 18 + 21 + 24 = 90$
(3) $90 - 60 = 30$
(4) $30 : 5 = 6$
(5) $(12 - 6) + (15 - 6) + (18 - 6) + (21 - 6) + (24 - 6) = 6 + 9 + 12 + 15 + 18 = 60$

Tatsächlich überlegt Lennart bei der Schäfchen-Aufgabe (ähnlich wie bei der Lesen-Aufgabe), wie er die durchschnittliche Anzahl an pro Wochentag geborenen Schäfchen ermitteln kann. Allerdings weiß er keine passende Rechnung. Er stellt die Überlegung an, dass am letzten Tag $5*3=15$ Schäfchen mehr geboren wurden als am ersten Tag und versucht, diese Differenz durch 2 zu teilen, womit er allerdings nicht weiterkommt. Daraufhin wählt Lennart einen neuen Ansatz und probiert verschiedene Summen mit jeweils 5 Summanden aus, die schrittweise um 3 wachsen. Bei der Summe „7 + 10 + 13 + 16 + 19“ rechnet er zunächst die Einer zusammen.

L: Nee, 15 (die Einer von 16 und 19 zusammengerechnet) plus 10 (die Einer von 7 und 13 zusammengerechnet) sind 25, dann hier unten 5 hin (unter die Einer bei der schriftlichen Addition), aber es müssen 0 sein. Ich probiere es mal […] auch wenn ich weiß, dass es nicht gehen kann. 2, 3, 4, 5, 6. Dann wären es 65. 5 weniger. Ja, das müsste… Ich probiere das mal. (schreibt „6 + 9 + 12 + 15 + 18 = 60“) Okay, ich hab’s.

Lennart wendet den abkürzenden Lösungsweg also nicht in einer der sehr allgemeinen Formen (Lösungsweg C oder D) an, sondern in seiner zielnahen Form (Lösungsweg A oder B) an, die er auch schon bei der Lesen-Aufgabe genutzt hat. Tatsächlich wendet er bei beiden Aufgaben Lösungsweg A an und es bleibt offen, ob er auch die etwas allgemeinere Form B anwenden könnte, wenn er nach einem Probierschritt unter der gewünschten Summe bleibt.

Nach der erfolgreichen Bearbeitung beider Aufgaben wird Lennart gefragt, ob er eine Ähnlichkeit zwischen beiden Aufgaben bemerkt habe. Er antwortet: „Ja, hier muss man auch, es kommt immer auf die Wochentage an. Hier ist zwar bis Sonntag, nur immer werden es an jedem, es werden immer mehr.“ Lennart bezieht sich bei den wahrgenommenen Ähnlichkeiten auf das Wachsen der Summanden, auf etwas, das an jedem Tag mehr wird.

Es ist erstaunlich, dass Lennart, obwohl er die Ähnlichkeit zwischen den beiden Aufgaben sieht, an der Durchschnittsberechnung bei der Schäfchen-Aufgabe scheitert, obwohl er den Durchschnitt bei der Lesen-Aufgabe problemlos berechnet.

Es kann sein, dass ihm nicht bewusst war, dass er bei der Lesen-Aufgabe die durchschnittlich pro Wochentag gelesene Seitenanzahl berechnet hat. Vielleicht hat er zunächst lediglich versucht, die Aufgabe wie eine Routinedivisionsaufgabe zu lösen und sich dabei von Oberflächenmerkmalen leiten lassen.

Ebenso verwunderlich ist, dass er angibt, bei der Bearbeitung der Schäfchen-Aufgabe nicht an seine Bearbeitung der Lesen-Aufgabe gedacht zu haben, obwohl sich beide Wege auch nach dem Scheitern der Durchschnittsberechnung bei der Schäfchen-Aufgabe sehr ähneln. Eine Erklärung für seine Antwort kann sein, dass er sich an den Zahlen in den Aufgabenstellungen orientiert und da diese sehr verschieden sind, können ihm Rechnungen bei der einen Aufgabe nicht gut bei der anderen Aufgabe helfen. Seine Antwort mag vielleicht auch ein Indikator dafür sein, dass er die Gemeinsamkeit seiner Lösungswege noch nicht auf allgemeiner Ebene sehen oder zumindest nicht auf allgemeiner Ebene beschreiben kann.

Insgesamt zeigt sich, dass ein Rechenweg, in dem der Experte allgemein eine Durchschnittsberechnung sieht, vom Schüler nicht so allgemein gesehen werden muss und im Erfahrungsbereich der Lesen-Aufgabe angewendet werden kann (vielleicht zufällig), aber in einem anderen Erfahrungsbereich nicht, auch wenn beide Aufgaben strukturell gleich aufgebaut sind.

8. Fallbeispiel Julius

Julius (6. Klasse, Gymnasium) bearbeitet Aufgaben aus einer anderen Aufgabenreihe. In dieser Aufgabenreihe besteht die mathematische Struktur aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, die in einer der beiden Gleichungen gewichtet und in einer ungewichtet sind:

$$x + y = c \qquad dx + ey = f$$

Der wohl bekannteste Vertreter dieser Aufgabengruppe ist die Hühner-Kaninchen-Aufgabe, von der eine Variante lautet:

Hühner und Kaninchen

Ein Mann ging an einem Gehege mit Hühnern und Kaninchen vorbei und sagte: „Ich zähle 22 Köpfe und 60 Füße.“ Wie viele Hühner und Kaninchen waren im Gehege? (abgeändert nach Abels 2005, S. 16)

Hier sind c mit 22 Köpfen und d mit 60 Beinen gegeben, sowie a und b mit 2 Beinen pro Huhn und 4 Beinen pro Kaninchen. x und y als jeweilige Anzahl der Hühner und Kaninchen sind gesucht.

Als erste Aufgabe aus der Aufgabenreihe löst Julius die Schulkiosk-Aufgabe.

Schulkiosk

Im Schulkiosk können sich die Schüler entweder Orangensaft für 2,5 Euro pro Flasche kaufen oder Apfelsaft für 2 Euro pro Flasche. Der Verkäufer sagt nach der ersten großen Pause: „Ich habe an 19 Schüler Getränke verkauft und habe insgesamt 44 Euro eingenommen.“ Wie viele Flaschen Orangensaft und wie viele Flaschen Apfelsaft hat er jeweils verkauft, wenn von jedem Schüler genau eine Flasche gekauft wurde? (eigene Abwandlung der Hühner-Kaninchen-Aufgabe)

Julius braucht mehrere Ansätze, bis er einen erfolgreichen Lösungsweg findet. Der Lösungsweg, den er letztendlich findet, besteht aus den folgenden Schritten:

Lösungsweg A:

1. Gesamtpreis „Nur teure Flaschen“ berechnen
2. Gesamtpreis „Nur teure Flaschen“ – vorgegebener Gesamtpreis = „Euros zu viel“

3. „Euros zu viel“: Differenz der Flaschenpreise = Anzahl „günstigere Flaschen“
4. Anzahl aller Flaschen – Anzahl „günstigere Flaschen“ = Anzahl „teurere Flaschen“

Besonders die Entdeckung des dritten Schritts des Lösungswegs war für Julius schwierig. Er musste erkennen, dass die Differenz zwischen den verschiedenen Flaschenpreisen entscheidend für die direkte Lösung des Problems ausgehend von Schritt 2 ist: Wenn er den Gesamtpreis für „nur teure Flaschen“ mit 47,50 € berechnet, liegt dieser 3,50 € über dem in der Aufgabenstellung gewünschten Gesamtpreis von 44 €. Bei einem Tausch von Orangensaftflaschen (2,50 € pro Flasche) gegen Apfelsaftflaschen (2 € pro Flasche) verringert sich der Gesamtpreis um 50 Cent pro getauschter Flasche. Es muss also 3,50 € / 0,50 € mal getauscht werden. Dies ist die entscheidende Erkenntnis, mit deren Hilfe Julius das Problem sofort lösen kann. Im Folgenden seien wieder verschiedene Allgemeinheitsgrade dieser Erkenntnis dargestellt:

Gesetz A: Wenn die Differenz zwischen Maximalpreis für den Fall, dass nur Orangensaft verkauft wurde, und gewünschtem Verkaufspreis ermittelt wird, dann wird diese Differenz durch die Preisdifferenz der verschiedenen Flaschenpreise geteilt, um die Anzahl der verkauften günstigeren Flaschen zu erhalten.

Gesetz B: Wenn sich die Menge C der Mächtigkeit c aus zwei Teilmengen X und Y mit den Mächtigkeiten x und y und die Menge F mit der Mächtigkeit f aus den Teilmengen D und E mit den Mächtigkeiten $d \cdot x$ und $e \cdot y$ zusammensetzt (mit $d < e$) und die maximale Anzahl der Elemente in F durch $e \cdot c$ bestimmbar ist, dann ergibt sich die gesuchte Mächtigkeit der Teilmenge X, indem zunächst die Differenz s zwischen $e \cdot c$ und f bestimmt wird und diese Differenz durch die Differenz von d und e geteilt wird: $x = s/(e-d)$.

Gesetz C: Wenn in einem Gleichungssystem mit den Gleichungen (I) $x + y = c$ und (II) $dx + ey = f$ mit $d < e$ die Werte von x und y unbekannt sind, lässt sich x bestimmen, indem zunächst die Differenz s von fmax = $e * c$ und f bestimmt wird und diese Differenz durch die Differenz von d und e geteilt wird: $x = s/(e-d)$.

Zu einem späteren Zeitpunkt (3 Monate später) bekommt Julius eine andere Aufgabe aus der Aufgabenreihe gestellt:

Dreiecke und Sechsecke

Ein Schüler hat auf ein Blatt Dreiecke und Sechsecke gemalt. Insgesamt sind es 31 Figuren und zusammen haben alle Figuren 135 Ecken. Wie viele Dreiecke und wie viele Sechsecke sind auf dem Blatt? (von der Autorin entworfen)

Er sagt sofort, dass er eine solche Aufgabe bereits beim ersten Interview gelöst habe. Tatsächlich ähnelt sich sein Vorgehen beim Lösen der Aufgabe: Zunächst berechnet er die Anzahl der Ecken für den Fall, dass es nur Sechsecke sind, mit 186. Dies sind, wie er sagt, 51 Ecken zu viel. Er teilt daraufhin 51 durch 3 und erhält 17 Dreiecke. Er zieht 17 von 31 ab und bestimmt so die Anzahl der Sechsecke. Beim dritten Schritt teilt Julius die Anzahl der „Figuren zu viel“ sofort durch 3, ohne dies weiter zu erläutern.

Es scheint, als hätte Julius seinen bei der Schulkiosk-Aufgabe gefundenen Lösungsweg soweit verstanden, dass er ihn auch bei anderen strukturgleichen Aufgaben aus anderen Sachkontexten anwenden kann. An dieser Stelle lässt sich noch nicht entscheiden, ob Julius seinen Lösungsweg nur bei anderen eingekleideten strukturgleichen Aufgaben (Gesetz B) einsetzen kann oder bereits einen mathematisch allgemeinen, vom Sachkontext losgelösten Lösungsweg (Gesetz C) entwickelt hat.

Lösungsweg B1:

1. Man ermittelt die maximale Anzahl (fmax) der Elemente der „größeren“ Menge f durch Multiplikation von c mit Eigenschaft e für den Fall, dass alle Elemente aus C die Eigenschaft e haben.
2. Man bestimmt die Differenz s dieser maximalen Anzahl an Elementen in F und der gewünschten Anzahl der Elemente aus F durch Subtraktion.
3. Man teilt die ermittelte Differenz durch die Differenz von e und d, um die Anzahl x‘ der Elemente in der Menge c zu erhalten, die die Eigenschaft d haben.
4. Man bestimmt die Differenz von der Anzahl der Elemente in C und x‘ durch Subtraktion, um y zu erhalten.

Lösungsweg B2:

1. $c \cdot y = f_{max}$
2. $f_{max} - f = s$
3. $s \,/\, (e - d) = x$
4. $c - x = y$

Lösungsweg C:

Summe mit ungewichteten Summanden: $x + y = g$

Summe mit gewichteten Summanden: $sx + ty = h$

Mit $s < t$ und $x < y$

1. $g \cdot t = h_{max}$
2. $h_{max} - h = d$
3. $d \,/\, (t - s) = x$
4. $g - x = y$

Der Lösungsweg B1 verknüpft die Variablen mit ihrer Bedeutung in der Sachsituation. Denkt man die Bedeutung nur implizit mit, lassen sich die durchgeführten Rechnungen wie in Lösungsweg B2 dargestellt als Gleichungen aufschreiben.

In Lösungsweg C haben die Variablen zunächst keine Bedeutung in einer Sachsituation. Dies schließt nicht aus, dass sie beispielsweise als Mengen gedeutet werden können, allerdings bewegt sich dieser Lösungsweg zunächst rein in der Zahlenwelt.

Um eine Aussage darüber treffen zu können, ob Julius seine Erkenntnis bereits vom Kontext losgelöst anwenden kann, bekam er im Anschluss an die Dreiecke-und-Sechsecke-Aufgabe die folgende rein innermathematische, strukturgleiche Aufgabenvariante (von Autorin entworfen):

Zahlenrätsel-Aufgabe

Welche Zahl muss in das Kästchen? Welche muss in das Dreieck?

$3 * \square + 7 * \triangle = 95$

$\square + \triangle = 17$

(eigene Formulierung)

Hier sagt Julius zunächst, dass diese Aufgabe deutlich schwieriger sei als die vorhergehende Aufgabe. Er löst die Aufgabe, indem er die Zahl 17 additiv in zwei Summanden zerlegt und alle Summanden systematisch überprüft.

Für Julius scheint diese Aufgabenvariante also nicht ähnlich zu den zuvor gestellten sachlich eingekleideten Varianten zu sein, obwohl der Experte darin eine strukturgleiche Variante der bisherigen gelösten Aufgaben aus der Aufgabenreihe erkennen mag. Es ist naheliegend, dass Julius noch nicht in abstrakten Gleichungen wie in Gesetz C bzw. Lösungswegs C denkt, da ihm sonst vielleicht die Strukturgleichheit zwischen den eingekleideten und der innermathematischen Aufgabenvariante aufgefallen wäre.

So wie der relativ allgemein formulierte Lösungsweg B für die eingekleideten Aufgabenvarianten aus Sachkontexten bereits in Julius‘ Vorgehen bei der Schulkiosk-Aufgabe latent angelegt war, ist auch recht allgemein formulierte Lösungsweg bereits latent im Lösungsweg zur Schulkiosk-Aufgabe und im Lösungsweg für die eingekleideten Aufgabenvarianten enthalten, auch wenn dem Schüler Julius dies nicht bewusst zu sein scheint. Hätte Julius den Lösungsweg bereits in der allgemeinen Form C realisiert, hätte eine Übertragung seines bisherigen Vorgehens auf die innermathematische Variante eher erwartet werden können. Denn dann wäre es offensichtlicher für Julius gewesen, dass sich die Angaben aus dem Aufgabentext bei den eingekleideten in zwei Gleichungen ausdrücken lassen, die den Gleichungen der innermathematischen Variante ähneln.

Im weiteren Verlauf des Interviews bekommt Julius die folgende Aufgabe aus der gegebenen Aufgabengruppe, die wieder in einem Sachkontext verortet ist:

Würfeltürme

Aus Steckwürfeln haben Schüler insgesamt 18 Türme gebaut und haben dafür 82 Würfel gebraucht. Es gibt Türme aus 3 Würfeln und Türme aus 7 Würfeln. Weißt du, wie viele 3er und wie viele 7er Türme es gibt? (von Autorin entworfen)

Bei der Bearbeitung wendet er wieder Lösungsweg B an.

Im Folgenden fragt die Interviewerin, ob Julius eine Ähnlichkeit zwischen der zuletzt gelösten Würfel-Turm-Variante und der davor gelösten innermathematischen Variante sehe. Er sagt, dass es dasselbe Prinzip sei. Es fällt ihm jedoch schwer, dies zu erklären. Daraufhin fragt die Interviewerin Julius, ob er versuchen könne, die innermathematische Aufgabenvariante so zu lösen wie die eingekleidete Variante.

Hier besteht die Schwierigkeit für Julius darin, die verschiedenen Variablen und Zahlen der innermathematischen Aufgabenvariante den verschiedenen Elementen seines Lösungsweges zuzuordnen, damit er weiß, welche Rechnungen er mit welchen Zahlen und in welcher Reihenfolge durchführen muss. Er muss seinen bisherigen Lösungsweg also mathematisch verallgemeinern.

Julius versucht also auf Nachfrage der Interviewerin hin, die innermathematische Aufgabenvariante so zu lösen wie die eingekleideten Varianten der Hühner-Kaninchen-Aufgabe. Dabei rechnet er zunächst $17 \cdot 7$ und erhält mit dem Produkt 119 insgesamt 24 mehr als 95. Daraufhin teilt er 24 durch 3 und erhält 8. Eigentlich hätte er 24 durch die Differenz von 7 und 3 teilen müssen. Es kann sein, dass er durch 3 teilt, weil er bei der Würfel-Turm-Aufgabe auch durch 3 teilen konnte in Schritt 3 seines Lösungsweges. Durch den ausbleibenden Erfolg scheint Julius verwirrt zu sein:

> „ich check es gerade nicht. 17 mal 7 sind 119, der Abstand ist dann so viel… das sind 24. Und

24 durch 3 sind 8. Und irgendwie blicke ich deswegen gerade nicht mehr durch“

Die Interviewerin fragt ihn, wie er darauf gekommen sei, 24 durch 3 zu teilen. Julius versucht daraufhin zu erklären, warum er zunächst das Produkt 17·7, bzw. die Maximalanzahl der Würfel, für den Fall, dass es nur 7er-Türme sind, berechnet.

Die Ermittlung des Maximalwerts hilft ihm also dabei, zu sehen, wie oft er „was Höheres“ hat, was er dann tauschen muss. Die eigentlich gefragte Erklärung, warum er die überschüssige Anzahl durch 3 teilt, gibt er jedoch nicht.

Auch bei seinen weiteren Erklärungs- und Lösungsversuchen scheitert Julius, bevor das Interview schließlich aus Zeitgründen beendet wird. Seine Entdeckung bei der Schulkiosk-Aufgabe, dass die Differenz der Flaschenpreise entscheidend zum Lösen der Aufgabe ist, ist oben in unterschiedlich stark verallgemeinerter Form dargestellt. Die allgemeinste dargestellte Form C dürfte Julius bisher noch nicht erkannt haben, da er sie bei der innermathematischen Aufgabenvariante noch nicht nutzbar machen kann, wenngleich er sie bei anderen eingekleideten Aufgaben wie selbstverständlich anwenden konnte. Dies spricht dafür, dass ihm wohl die Verallgemeinerung B seiner Entdeckung, die sich im Horizont der eingekleideten Aufgaben bewegt, vertraut sein dürfte.

Dass es Julius schwerfällt, seinen Lösungsweg auf die innermathematische Aufgabenvariante zu übertragen, mag daran liegen, dass bei der innermathematischen Aufgabenvarianten die Zahlen nicht in einem Sachkontext gedeutet werden. Da mag es bereits zu Beginn nicht intuitiv sein, den ersten Schritt des Lösungsweges zu gehen, bei dem im Lösungsweg von Julius im Sachkontext zunächst eine hypothetische maximale Anzahl von Elementen in einer Menge berechnet wird.

9. Zusammenfassung und Folgerungen für die Unterrichtspraxis und Lehrerbildung

Beim Fallbeispiel Lennart wird besonders deutlich, wie ein allgemeiner Lösungsweg im Vorgehen von Lennart bereits latent angelegt ist. Außerdem wird hier am Beispiel sichtbar, dass es sinnvoll ist, die rationale Analyse von Problemlöseprozessen um den Begriff der latenten Sinnstrukturen zu erweitern. Aus einer Schüleräußerung allein bleibt wie bei Lennart nämlich offen, wie allgemein oder bereichsspezifisch das Gesetz einer Abduktion zu formulieren ist. Versucht man daher die latente Sinnstruktur einer Entdeckung möglichst umfassend zu beschreiben, trifft eines der Gesetze nicht nur möglichst genau, wie der jeweilige Schüler gedacht haben mag, sondern es wird auch deutlich, welches mathematische Potential sich in den Entdeckungen von Schülern verbergen kann. So wird bei der Analyse deutlich, dass Lennart eine Aufgabe mit großen mathematischen Potential bearbeitet. Dieses Potential ist im Vorgehen von Lennart bereits latent angelegt, dessen Latenz bleibt allerdings bestehen. Denn Lennart schafft es noch nicht, das Allgemeine seiner Entdeckung von allein zu erkennen.

Sollen Problemaufgaben eingesetzt werden, um mathematische Inhalte zu vermitteln, kann die Lehrkraft an solchen Stellen versuchen, im Vorhinein das mathematische Potential von möglichen Problemaufgaben zu erkennen und bei der gemeinsamen Aufgabenbesprechung Verallgemeinerbares aus den Lösungswegen der Schülerinnen und Schüler der Latenz zu entheben und für die Schüler erkennbar zu machen.

Bereits in der Lehrerbildung kann eine vertiefte Auseinandersetzung mit dem mathematischen Potential von Problemaufgaben dabei helfen, die Vielfalt an möglichen Lösungswegen zu antizipieren. Auch die fachliche Bildung kann hierbei gefördert werden, wenn Studierende mögliche Lösungswege nicht nur finden, sondern auch mathematisch verallgemeinern und mögliche abstrahierte Lösungsformeln beweisen. Die Fähigkeit latente Sinnstrukturen zu erkennen kann Lehramtsstudierenden also auch helfen, das eigene mathematische Wissen weiter auszubauen und verschiedene Bereiche zu vernetzen.

Im Fallbeispiel von Julius werden vor allem die Bemühungen deutlich, Erkenntnisse bei einer Aufgabenbearbeitung auf andere Aufgabenstellungen zu übertragen. Die Aufgliederung von Lösungswegen in verschiedene Allgemeinheitsgrade hilft zu entscheiden, wie allgemein die Erkenntnisse von Julius vermutlich sind. Außerdem wird deutlich, wie schwer es Julius fällt, die Verbindung zwischen der Zahlenwelt und der Sachwelt zu ziehen. Julius muss diese Verbindung immer wieder neu herstellen. Ähnlichkeiten zu erkennen und Lösungswege zu übertragen stellt Schülerinnen und Schüler vor große Schwierigkeiten, die sich auch vor dem Hintergrund der behandelten Theorien näher betrachten und erklären lassen.

Insgesamt wird durch das Arbeiten mit der Abduktionstheorie und dem Begriff der latenten Sinnstrukturen das inhaltliche Lernen von Mathematik beim Problemlösen in den Fokus gerückt. Im Gegensatz dazu steht das Beschreiben und die Vermittlung von heuristischen Strategien beim Problemlösen, wie dies in der Mathematikdidaktik bislang häufig thematisiert wird (siehe etwa Bruder und Collet

(2011)). Um einerseits zu legitimieren, dass das Problemlösen als prozessbezogene Kompetenz im Mathematikunterricht einen festen Platz innehält, und andererseits den Lernenden den Zusammenhang zwischen dem Problemlösen und dem Lernen von Mathematik zu verdeutlichen, sollte das inhaltliche Lernen von Mathematik beim Problemlösen stärker in den Vordergrund rücken.

Anmerkungen

[1] Wenngleich Peirce selber nicht voraussetzt, dass das Gesetz allgemeiner als Fall und Resultat sei, soll dies im Folgenden in Anlehnung an die mathematikdidaktische Forschungstradition zur Abduktion (Meyer 2007, 2015; Meyer & Voigt 2009)

[2] Die Induktion ist für den Zweck dieser Arbeit nicht entscheidend. Bei Interesse können etwa bei Meyer (2007) oder bei Meyer & Voigt (2009) detaillierte Erläuterungen gefunden werden.

[3] In der Terminologie Oevermanns bedeutet das Realisieren einer latenten Sinnstruktur, dass sich das Objekt der bisher latenten Bedeutung etwa einer Äußerung bewusst wird. Eine subjektive Realisierung einer latenten Sinnstruktur wird manifest, wenn sie für Außenstehende durch schriftliche oder mündliche Äußerung sichtbar wird.

Literatur

Abels, L. (2002). Ich hab's – Tipps, Tricks und Übungen zum Problemlösen. *Mathe-Welt-Beilage in mathematik lehren*, 115.

Bauersfeld, H. (1983). Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In H. Bauersfeld u.a. (Hrsg.), *Lernen und Lehren von Mathematik. Untersuchungen zum Mathematikunterricht, Band 6* (S. 1-56). Köln: Aulis Verlag Deubner.

Bruder, R., & Collet, C. (2011). *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht*. Berlin: Cornelsen Skriptor.

Bruder, R., Büchter, A. & Leuders, T. (2005). Die "gute" Mathematikaufgabe - ein Thema für die Aus- und Weiterbildung von Lehrerinnen und Lehrern. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2005* (S. 139-146). Hildesheim/ Berlin: Franzbecker.

Davis, R.B. (1992). Understanding „Understanding". *Journal of Mathematical Behavior,* 11, 225-241.

Dewey, J. (1933). *How We Think: A Restatement of the Relation of Reflective Thinking to the Educative Process*. Boston: D.C. Heath & Co.

Hiebert, J. & Wearne, D. (2003). Developing Understanding through Problem Solving. In H.L. Schoen & R.I. Charles (Hrsg.), *Teaching Mathematics through Problem Solving – Grades 6-12* (S. 3-14). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kahen, J.A. & Wyberg, T.R. (2003). Mathematics as Sense Making. In: H.L. Schoen & R.I. Charles (Hrsg.), *Teaching Mathematics through Problem Solving – Grades 6-12* (S. 15-26). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Krumsdorf, J. (2015). *Beispielgebundenes Beweisen. Dissertation*. http://repositorium.uni-muenster.de/document/miami/66ad0125-e2d8-4c6e-921d-72d664b8bd58/diss_krumsdorf.pdf [Zugriff 29.10.2015]

Lave, J., Murtaugh, M. & de la Rocha, O. (1984). The Dialectic of Arithmetic in Grocery Shopping. In: B. Rogoff & J. Lave (Hrsg.), *Everyday Cognition: Its Development in Social Context* (S. 67-94). Cambridge, MA: Harvard University Press.

Lawler, W. (1980).The Progressive Construction of Mind. *Cognitive Science, 5*, 1-30.

Meyer, M. (2007). *Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht. Von der Abduktion zum Argument. Dissertation*. Hildesheim: Franzbecker.

Meyer, M. (2015). *Vom Satz zum Begriff. Philosophisch-logische Perspektiven auf das Entdecken, Prüfen und Begründen im Mathematikunterricht.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Meyer, M. & Voigt, J. (2009). Entdecken, Prüfen und Begründen. Gestaltung von Aufgaben zur Erarbeitung mathematischer Sätze. *mathematica didactica, 32*, 31-66.

Ministerium für Schule, Jugend und Kinder des Landes Nordrhein-Westfalen (2004). *Kernlehrplan für die Realschule in Nordrhein-Westfalen Mathematik*. Frechen: Ritterbach.

Oevermann, U. (2001). Die Struktur sozialer Deutungsmuster – Versuch einer Aktualisierung. *sozialersinn, 2*, 35-81.

Oevermann, U., Krambeck, J. Konau, E. & Allert, T. (1979). Die Methodologie einer „objektiven Hermeneutik" und ihre allgemeine forschungslogische Bedeutung in den Sozialwissenschaften. In H. Soeffner (Hrsg.), *Interpretative Verfahren in den Sozial- und Textwissenschaften* (S. 352-434). Stuttgart: J.B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung.

Peirce, C.S. *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, (Band 1-6. C. Hartshorne & P. Weiß (Hrsg.), 1931-35; Band 7-8 A.W. Burks (Hrsg.), 1985), Cambridge: Harvard University Press.

Rasch, R. (2001). *Zur Arbeit mit problemhaltigen Textaufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule*. Hildesheim: Franzbecker.

Renkl, A. (1996). Träges Wissen: Wenn Erlerntes nicht genutzt wird. *Psychologische Rundschau, 47*, 78-92.

Saxe, G.B. (1988). Candy Selling and Math Learning. *Educational Researcher, 17*, 14-21.

Schoen, H.L. & Charles, R.I. (2003). *Teaching Mathematics through Problem Solving – Grades 6-12*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Schwarzkopf, R. (2000). *Argumentationsprozesse im Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen und Fallstudien*. Hildesheim: Franzbecker.

Seel, N. (2000). *Psychologie des Lernens*. München: UTB.

Seiler, T.B. (1973). Die Bereichsspezifität formaler Denkstrukturen – Konsequenzen für den pädagogischen Prozeß. In K. Frey & M. Lang (Hrsg.), *Kognitionspsychologie und naturwissenschaftlicher Unterricht* (S. 249-285). Bern: Huber.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung, *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 61*, 37-46.

Anschrift der Verfasserin

Anna-Christin Söhling
Universität zu Köln
Institut für Mathematikdidaktik
Gronewaldstr. 2
50931 Köln
a.soehling@uni-koeln.de